한국소음진동공학회 2014년 춘계학술대회논문집, pp. 402~403

회전축계의 비틀림 진동연구

Torsional Vibration Analysis of a Multi-Stage Rotating Shaft Shape

송오섭† · 박상윤* · 김선홍** 좌비** 강성환** 서정석**

Ohseop Song, Sang-Yun Park, Sun-Hong Kim, Zuo-Fei, Sung-Hwan Kang and Jung-Seok Seo

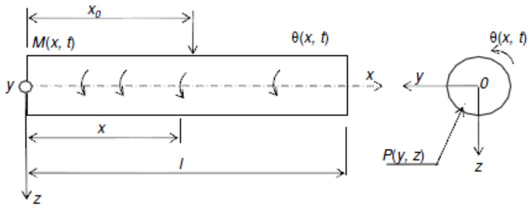
1. 서 론

비틀림 진동문제는 주로 기어 세트, 왕복동엔진 및 압축기, 전기 기계 등에서 발생한다. 전형적인 비틀림 진동 모형은 변화하는 토크가 가해질 때 비틀려 질 수 있는 축에 연결된 몇 개의 높은 관성 질량으로 이루어져 있다. 가진력이 비틀림 고유진동수와 일치될 때 급격한 축의 균열이 발생될 수 있는데, 비틀림 진동은 횡방향의 평면에 연결되지 않기 때문에 외부에 어떤 경고표시 없이 비틀림 파괴가 일어날 수 있다. 따라서, 축계의 비틀림 진동감쇠, 부하지지 능력의 향상, 내구성 등을 갖춘 회전축계 모델을 설계하는 것이 중요하다. 이를 위해 본 연구에서는 회전축에 베어링을 고려하여 비틀림 진동 특성을 고찰하였다.

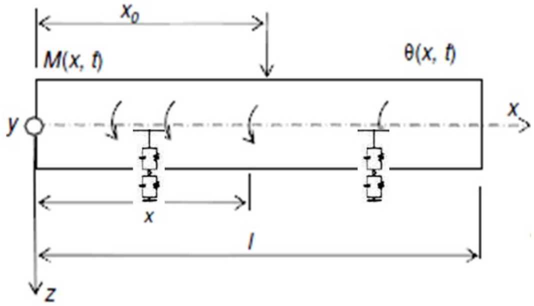
2. 운동방정식

2.1 운동학

그림1은 시간에 따라 변하는 토크를 받는 원형 단면의 회전축계와 좌표를 보여주고 있다.



(a) shaft without bearing



(b) shaft with bearing

Fig. 1 A shaft under time dependent torque with bearing

축단면의 비틀림 변위장을 표현하기 위해 그림 2 와 같이 나타낼 수 있다.

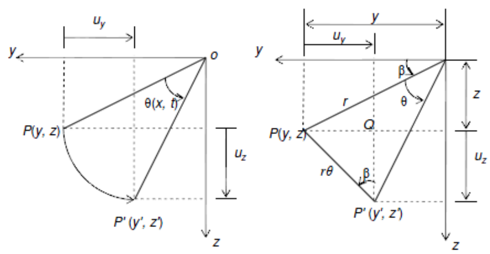


Fig. 2 A point under torsional displacement

(1) 변위장 (Displacement field)

여기서 (x, y, z)와 (r, β, z)는 각각 점P의 직교 좌표, 는 원통좌표이고, $\theta(x, t)$와 (u_x, u_y, u_z)는 각각 각변위와 병진 변위를 의미한다. 비틀림 변위의 변형률장과 응력은 아래와 같이 정리된다.

$$u_x = 0 \tag{1a}$$
$$u_y = -r\theta\sin\beta = -z\theta(x, t) \tag{1b}$$
$$u_z = r\theta\cos\beta = y\theta(x, t) \tag{1c}$$

---

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642
* 충남대학교, 대학원
** 충남대학교, 대학원

(2) 변형률장 (Hamilton's principle)

$\varepsilon_{xx} = u_{x,x}=0$ (2a)

$\varepsilon_{yy} = u_{y,y}=0$ (2b)

$\varepsilon_{zz} = u_{z,z}=0$ (2c)

$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y})=0$ (2d)

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = -\frac{1}{2}z\theta_{,x}$ (2e)

$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}(u_{z,x} + u_{x,z}) = \frac{1}{2}y\theta_{,x}$ (2f)

2.2 해밀턴 원리

비틀림 운동방정식을 구하기 위해 해밀턴 원리를 이용한다.

$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U - W - D]\, dt = 0$ (3)

여기서, $t = t_0, t = t_1: \delta\theta = 0$

T, U는 각각 운동에너지, 변형에너지를 나타내며 W는 외부에 작용하는 일(work done)를 의미한다.

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}\right] dV = \int_0^l \int_A \left[\frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}G\gamma_{zx}^2\right] = \int_0^l \int_A \left[\frac{1}{2}Gz^2\theta_{,x}^2 + \frac{1}{2}Gy^2\theta_{,x}^2\right] dAdx$$

$$T = \int_0^l \int_A \left[\frac{1}{2}\rho\{\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2\}\right] dAdx = \int_0^l \int_A \left[\frac{1}{2}\rho\{z^2\dot{\theta}^2 + y^2\dot{\theta}^2\}\right] dAdx$$

여기서 극관성 모멘트(polar moment of inertia) J는 아래와 같다.

$$J = \frac{1}{2}\int_A (z^2 + y^2)\, dA$$

U 변형에너지, T 운동에너지, W는 가상일, D는 Dissipation function 이며 아래와 같이 정리할 수 있다.

$U = \frac{1}{2}\int_0^l GJ\, \theta_{,x}^2 dx + \frac{1}{2}k_{ij}\theta^2(l_i)$ (4a)

$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho J\, \dot{\theta}^2 dx$ (4b)

$W = \frac{1}{2}\int_0^l [M + M_0\delta^*(x - x_0)]\, \theta dx$ (4c)

$D = \frac{1}{2}c_{ij}\dot{\theta}^2(l_i)$ (4d)

식(4)를 해밀턴 원리 식(3)에 대입하여 부분적분을 취하여 정리하면 축계에 베어링을 고려한 비틀림 운동방정식과 경계조건을 구할 수 있다.

$$\delta J = 0 = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\rho J\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - GJ\theta_{,x}\delta\theta_{,x} - M\delta\theta + M_0\delta^*(x - x_0)\delta\theta\right] dxdt$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \{\rho J\ddot{\theta} - GJ\theta_{,xx} + M + M_0\delta^*(x - x_0)\}\delta\theta\, dx + \{k_{ij}\theta\delta^*(x - x_0) + c_{ij}\dot{\theta}\delta^*(x - x_0)\}\delta\theta + \left[GJ\theta_{,x}\right]_0^l\right] dt = 0 \quad (5)$$

식(5)를 만족하기 위한 조건에서 비틀림 진동의 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

비틀림 진동 운동방정식(torsional vibration EOM)

$\delta\theta: \rho J\ddot{\theta} - GJ\theta_{,xx} + k_{ij}\delta^*(x - x_0)\theta + c_{ij}\delta^*(x - x_0)\dot{\theta} + M + M_0\delta^*(x - x_0)=0$ (6a)

경계조건(boundary conditon)

$\left[GJ\theta_{,x}\right]_0^l = 0$ (6b)

2.3 경계조건에 따른 변위 함수 선정과 진동해석

임의의 경계조건을 만족하는 비틀림 진동 변위를 다음과 같이 사용할 수 있다.

$\{\theta\} = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_j\theta_j(x)\}\, q(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_j z^n\}\, q(t)$ **(7)**

여기서 n은 보의 길이 방향 모드 형상의 차수를 의미한다. $\theta_j(x)$ 는 기하학적 경계조건을 만족하는 시험함수(trial function)를 의미하며, a_j 임의의 상수 계수 값(arbitrary constants)을 의미하고, $q(t) = e^{i\omega t}$의 값을 나타낸다. 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(7)을 해밀턴 원리인 식(5)에 대입하여 정리하면 임의의 경계조건을 만족하는 이산화 된 운동방정식(discrete equation of motion)을 비틀림방정식에 대하여 식(8)의 형태로 구할 수 있다.

$\{-\omega^2[M] + \omega[C] + [K]\}\{x_j\} = 0$ **(8)**

여기서 [M]은 질량행렬(mass matrix), [C]는 베어링 coefficient에 의한 감쇠행렬(damping matrix), [K]는 강성행렬(stiffness matrix)을 의미한다.

3. 결 론

본 논문에서는 회전축에 베어링을 고려하여 비틀림 진동 특성을 고찰하였다.

후 기

본 연구는 "충남대학교 지역혁신인력사업" 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사드립니다.