

초등학교 6학년 학생들이 수학적 문제해결에서 경험하는 생산적 어려움 분석

길 예 빈 (서울신현초등학교, 교사)

장 혜 원 (서울교육대학교, 교수)[†]

본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 수학 문제를 해결하며 겪은 어려움을 생산적으로 극복한 사례, 즉 수학적 문제 해결 시 초등학교 6학년 학생들이 경험한 생산적 어려움을 분석하였다. 다진략, 개방형 문제를 해결하는 과정을 분석하여 생산적 어려움을 문제해결 단계별로 유형화하였다. 또한 어려움을 생산적으로 극복할 수 있도록 지원하는 요인을 개인, 동료 학생, 교사로 구분하여 특징을 알아보았다. 생산적 어려움 유형은 문제 이해 단계에서 4가지, 해결계획 수립 및 실행 단계에서 6가지로 구분할 수 있었다. 문제 이해 단계에서는 어려움을 극복하며 문제의 요소와 조건을 이해한 유형이 가장 많았으며, 해결계획 수립 및 실행 단계에서는 끈기 있게 문제해결을 시도한 유형이 가장 많았다. 생산적 어려움의 지원 요인은 개인, 동료 학생, 교사 순으로 나타났다. 그중 문제 이해 단계에서는 교사, 해결계획 수립 및 실행 단계에서는 개인과 동료 학생 요인이 생산적 어려움 지원에 많은 영향을 주었다. 연구 결과를 바탕으로 문제해결 과정에서 생산적 어려움의 특징 및 지원 방안과 관련된 교수학적 시사점을 도출하였다.

I. 서론

문제해결은 수학교육의 핵심에 해당하며, 수학교육을 특징 짓는 중요한 활동이다. 수학에서 문제해결의 중요성은 NCTM(1980, 2000)의 권고뿐만 아니라 여러 나라의 수학 교육과정을 통해 확인된다(장혜원, 2009). 수학교육 연구자들 또한 수학 학습의 일부로서 문제해결을 중시한다. 문제해결을 주제로 한 연구가 꾸준히 진행되는 점(손태권, 황성환, 2021) 또한 수학교육에서 문제해결의 가치를 뒷받침한다.

문제의 의미와 조건을 고려할 때 어느 정도의 어려움이 내재한다는 것이 문제의 본질이다(정은실, 2015). 즉 학생이 수학 문제를 해결하며 어려움을 느끼는 것은 자연스럽다. Warshauer(2011)는 수학적 문제해결에서 어려움을 겪을 때 어려움을 극복하는 정도에 따라 어려움을 생산적 어려움(productive struggle), 낮은 수준의 생산적 어려움(productive at a lower level), 비생산적 어려움(unproductive struggle)으로 분류하였다. 이 중 생산적 어려움은 어려움을 경험하며 학생이 수학적 이해 또는 추론, 수학적 감각을 형성하는 것을 의미한다. 생산적 어려움을 경험하는 학생은 어려움을 극복하며 지식을 구성한다는 점에서 구성주의 학습 이론과도 관련이 있다(김선희, 김수민, 2018). 문제해결 과정에서 학생이 경험하는 생산적 어려움은 인지적 측면과 정의적 측면의 양 측면에서 수학 학습에 효과적이다. 인지적 측면에서 학생은 내용 요소를 개념적으로 이해할 수 있고(김소민, 2019) 문제 상황과 수학적 지식 간을 연결하는 한편, 정의적 측면에서 학생은 끈기 있게 문제해결을 지속할 수 있다.

학생 간의 수학 학력 수준의 양극화가 심해짐에 따라 수학 학습을 어려워하는 학생들이 수학적 문제해결을

* 접수일(2024년 5월 14일), 심사(수정)일(2024년 7월 20일), 게재확정일(2024년 8월 6일)

* MSC2020분류 : 97C30, 97D70

* 주제어 : 생산적 어려움, 수학적 문제해결, 문제이해 단계, 해결계획 수립 및 실행 단계, 단계별 유형, 지원 요인

[†] 교신저자 : hwchang@snu.ac.kr

* 이 논문은 길예빈(2024)의 석사학위논문을 수정·보완하여 재구성한 것임.

지속할 수 있도록 하는 교수·학습 방법이 필요하다. 문제를 해결하며 학생은 여러 수학적 지식을 복합적으로 활용하므로, 수학적 문제해결 단계에 따라 다양한 성취 수준의 학생이 수학 학습에서 겪는 어려움을 연구할 필요가 있다. 그러나 국내 선행연구는 대부분 특정한 내용 요소나 영역을 준거로 오류나 오개념을 분석하거나, 소수의 학습 부진 학생을 대상으로 한 사례를 분석하였다. 생산적 어려움은 국외에 비해 연구가 활발히 이루어지지 않았으며 국외 연구에서는 개별 지도 상황에서 생산적 어려움을 끌어내는 교수 방안 위주의 연구가 이루어졌다(김선희, 김수민, 2018). 생산적 어려움은 문제해결 절차와 수학 학습의 어려움을 관련짓고 다양한 성취 수준의 학생이 어려움을 극복하는 과정을 중점적으로 분석한다는 점에서 교실 수학 수업에서의 생산적 어려움을 연구하는 것은 유의미하다.

본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 수학 문제해결 과정에서 경험하는 생산적 어려움을 분석하여 학생들의 어려움을 생산적이 될 수 있도록 지원하기 위한 교수학적 시사점을 도출하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 문제해결 단계별 학생이 경험한 생산적 어려움을 유형화하여 특징을 비교하였다. 또한 학생이 생산적 어려움을 경험하게 되는 요인을 분석하여 특징을 비교함으로써 문제해결 과정에서 학생에게 나타나는 생산적 어려움의 특징과 생산적 어려움 지원 방안에 대한 교수학적 시사점을 도출하였다.

II. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 생산적 어려움의 의미와 특징

과거에는 수학 학습에서 학생이 경험하는 어려움을 부정적인 대상으로 규정하여 어려움을 제거하는 방법에 중점을 두었지만, 최근 수학교육에서는 학생이 경험하는 어려움을 배움의 기회로 접근하는 관점이 강조된다. CCSSI(2010)는 어려움이 있더라도 학생은 인내심을 가지고 문제를 해결해야 한다는 것을 수학적 실천으로 포함하였다.

Warshauer(2011)는 문제해결 시 학생이 겪는 어려움을 생산적 어려움, 낮은 수준의 생산적 어려움, 비생산적 어려움으로 구분하였다. 이 중, 생산적 어려움은 어려움을 겪는 과정에서 수학적 이해와 추론이 나타나며, 수학적 감각이 형성되는 것이다. 생산적 어려움, 낮은 수준의 생산적 어려움, 비생산적 어려움의 의미는 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 어려움의 종류와 의미

어려움의 종류	의미
생산적 어려움 (productive struggle)	과제를 해결하는 데 필요한 인지적 요구도가 낮아지지 않으며, 어려움을 경험하는 과정에서 학생이 수학적으로 이해하고 추론하며, 수학적 감각을 형성하며 문제해결을 지속하는 것
낮은 수준의 생산적 어려움 (productive at a lower level)	과제를 해결하는 데 필요한 인지적 요구도가 교사나 동료 학생에 의해 낮아지지만, 어려움을 경험하는 과정에서 학생이 수학적으로 이해하고 문제해결을 지속하는 것
비생산적 어려움 (unproductive struggle)	어려움을 경험하는 과정에서 학생이 수학적 감각을 형성하지 못하고 해결 과정을 설명하지 못하며, 스스로 문제해결의 다음 단계로 나아가지 못하는 것

NCTM(2014)은 수학 문제의 구조와 수학적 아이디어 간의 관계를 깊게 이해하는 어려움을 생산적 어려움으

로 정의하였다. 국내에서는 ‘productive struggle’을 생산적인 고투(김선희, 김수민, 2017), 생산적 애씀(김응환, 2017), 생산적인 어려움(김상미, 2018), 생산적인 애씀(김소민, 2019)으로 번역하였으며, 본 연구에서는 김상미(2018)의 연구를 참고하여 생산적 어려움으로 지칭하고자 한다. 문제를 해결하기 위한 긍정적인 인내심과 궁리(김응환, 2017), 문제해결을 위해 끈질기게 궁리하고 스스로 해결책을 찾기 위해 노력하는 것(김소민, 2019) 등 생산적 어려움에 대한 정의가 조금씩 차이가 있지만, 공통적으로 깊이 있는 이해, 끈기, 극복 등의 요소를 포함하는 것으로 나타난다. 즉, 생산적 어려움은 수학적 아이디어를 얻거나 수학 학습 내용을 깊이 있게 이해하고, 끈기 있게 문제해결을 지속하며 어려움을 극복하는 것이다. 본 연구에서는 문제를 해결하며 학생이 경험하는 어려움을 생산적 어려움과 비생산적 어려움으로 구분하였다. 그중 생산적 어려움을 어려움의 경험 결과 새로운 수학적 아이디어를 얻거나 새로운 문제해결 전략을 발견하여 다음 단계로 문제해결을 지속하는 상황으로, 비생산적 어려움을 생산적 어려움과 반대의 특징을 지니는 어려움으로 정의하였다.

인지 갈등을 학습에 활용한다는 점에서 생산적 어려움은 생산적 실패(productive failure)와 유사한 측면이 있다. 생산적 실패와 생산적 어려움은 모두 스스로 해결책을 형성하는 경험에서 발생한다는 공통점이 있지만, 생산적 실패와 달리 생산적 어려움은 이미 배운 지식을 활용하여 문제를 성공적으로 해결할 가능성이 크다. 생산적 어려움은 문제해결 과정에서 문제 상황과 해결에 필요한 수학적 아이디어를 연결하며 발생하기 때문이다.

생산적 어려움은 문제해결에 필요한 의사결정 및 이를 실행하는 전반적인 과정에서 나타난다. 문제 상황과 수학적 지식을 연결하고 활용할 개념과 절차를 결정하는 상황에서 학생은 의사결정과 관련된 생산적 어려움을 경험한다(Warshauer, 2011; Granberg, 2016). 고착된 수학적 아이디어로 문제를 해결하려 시도하고 새로운 수학적 지식을 이해하기 어려운 상황에서 학생은 의사결정 실행과 관련된 생산적 어려움을 경험한다(김응환, 2017; 김소민, 2019). 나아가 문제의 해를 구한 다음 자신의 해결 방법을 설명하는 상황에서도 해결 과정의 정당화와 관련된 생산적 어려움을 경험한다(Warshauer, 2011).

문제해결 과정에서 학생은 다양한 방식으로 어려움을 표현하며, 그중 생산적인 방향으로 어려움을 극복하는 학생은 <표 II-2>와 같은 특징을 지닌다(Căprioară, 2015; Botelho et al., 2019; O'Dell & Frauenholtz, 2020).

<표 II-2> 생산적 어려움의 특징

문제해결 시 어려움 인지			
인지적 측면		정의·행동적 측면	
문제 이해	- 문제의 진술 이해 - 문제의 의미와 목표 이해 - 다양한 방향에서 문제 접근	문제해결 의지	- 끈기를 지니고 문제해결 지속 - 문제해결에 대한 의지
문제 해결 전략	- 전략의 개발 또는 수정 - 문제해결 전략 구조화 - 다양한 해결책 평가	적극적 참여	- 문제해결에 활발히 참여 - 문제해결에 대한 열정
수학적 추론	- 문제에 대한 반복적 추론과 결정 - 본인의 답을 정당화		
수학적 연결	- 수학적 사실, 수학적 과정, 수학적 아이디어 간 연결 - 문제 상황에 필요한 사전 지식 활성화, 상황의 개념화 - 절차적 지식과 개념적 지식 연결	문제해결 시 감정	- 좌절감과 기쁨의 반복적 경험 - 지나친 좌절감을 경험하지 않음 - 자신감을 지님
기타	- 오개념 또는 오류의 수정 - 해결책을 다른 사람에게 설명	기타	- 문제해결 과정에서 자기 조절

↓

수학적 아이디어 형성 및 강화, 수학 지식의 개념적 이해, 문제해결 지속

나. 생산적 어려움의 지원 요인

본 연구에서는 학생이 경험하는 어려움이 생산적인 방향성을 지니도록 하는 요인을 개인, 동료 학생, 교사로 구분한다. 개인 요인은 문제해결자로서의 학생 개개인이 자신이 경험하는 어려움에 대한 인지적, 정의적 태도에 해당하므로 <표 II-2>에서 보여주는 생산적 어려움의 특징과 일치한다.

동료 학생 요인과 관련하여, 동료 학생이 형성하는 협력적 학습 분위기와 더불어 어려움에 대한 수용적인 수학 교실 문화는 생산적 어려움을 지원한다. 학생 간 의사소통 시 협력적 분위기 형성은 다양한 해결 방법을 학습하고 개인의 문제해결 과정을 수정하는 데 도움을 준다. 어려움에 수용적인 수학 교실 문화는 학생 간 의견 경청과 관련이 있으며, 이는 정오답 여부에 상관없이 문제해결 아이디어를 자유롭게 표현하는 데 도움을 준다 (Aljarrah & Towers, 2021).

마지막으로 교사 요인은 문제해결 과정에서 교사의 적절한 개입과 피드백이 생산적 어려움에 영향을 준다 (Jonsson et al., 2014; Cirillo & Langer-Osuna, 2018)는 점에서 매우 중요하다. Valerio(2021)는 생산적 어려움의 활성화를 위한 교사의 역할을 학생의 사고 지지, 학생 간 협력 기회 제공, 학생의 해결 과정 점검으로 제시하였다. DiNapoli(2018)는 교사의 피드백 중 탐구 유도 질문과 격려가 생산적 어려움 경험에 긍정적 영향을 준다고 하였다. 즉, 학생의 생산적 어려움 경험을 위해 교사는 학생의 사고를 유도하고 문제해결 과정에 학생이 지속적으로 참여할 수 있도록 격려하는 역할을 수행해야 한다.

학생이 경험하는 어려움을 생산적으로 극복하도록 하는 다양한 요인을 종합하여, NCTM(2014)은 생산적 어려움을 지원하기 위한 교사와 학생의 행동을 <표 II-3>과 같이 정리하였다.

<표 II-3> 생산적 어려움을 지원하기 위한 교사와 학생의 행동

교사	학생
<ul style="list-style-type: none"> - 학생이 어떠한 어려움을 겪을지 분석하고, 학생이 어려움을 겪는 동안 생산적 어려움이 될 수 있도록 어떻게 도움을 줄지 준비 - 학생이 어려움을 겪을 수 있는 시간을 주고, 학생의 사고에 비계가 될 수 있도록 질문 - 실수, 오개념, 어려움에 대한 논의를 활발히 진행하며, 학생들이 겪는 어려움이 학습을 위한 자연스러운 과정이라는 것을 인식 - 문제에 대해 인내심을 가지고 추론하고, 그 결과 수학적 아이디어를 이해할 때 학생의 노력을 칭찬 	<ul style="list-style-type: none"> - 문제를 해결하며 어려움을 겪지만, 어려움의 과정에서 해결책이 나온다는 것을 알 - 어려움의 원인과 관련된 질문을 하는 것은 문제를 해결하는 과정에 도움이 된다는 점을 알 - 인내심을 가지고 문제를 해결하고, “어떻게 해야 할지 모르겠어요.”를 말하는 것은 괜찮지만 포기하는 것은 괜찮지 않다는 것을 인식 - 서로를 도와주되, 문제의 답 또는 직접적인 해결 방법을 친구에게 말하지 않음

2. 연구방법 및 절차

가. 연구 참여자

본 연구의 참여자는 서울특별시 중랑구 소재 S초등학교 6학년 학생 21명(남: 12명, 여: 9명)이다. 생산적 어려움에는 수학적 지식과 문제 상황을 관련짓는 사고가 영향을 주므로(Granberg, 2016), 타 학년보다 수학적 지식과 문제해결 경험이 풍부할 것으로 기대되는 6학년 학생을 대상으로 연구를 진행하였다. S초등학교는 사회·경제적 지위 및 교육에 대한 가정의 관심이 중간 수준이다. 학생 절반은 수학 사교육을 받고 있으며 대학 부설 영재 교육원에서 수학 관련 프로그램을 수강하는 학생은 1명, 수학 기초학력 부진으로 기초학력 보장 프로그램에 참

여하는 학생은 3명이다. 연구에 참여한 학생들은 문제를 새로운 방식으로 해결하기 어려워하나, 협동하여 주어진 문제를 끝까지 해결하려는 특징을 지닌다. 경계선 지능에 해당하는 학생 1명의 활동 과정과 산출물은 분석에서 제외하여, 분석 대상 학생을 S1~S20으로 지칭하였다.

나. 문제 재구성 및 적용

연구를 위해 5~6학년군 수학 교과용 도서와 선행연구를 참고하여 다전략 문제 3문항과 개방형 문제 1문항을 선정하였다. 다전략 문제가 여러 해결 전략을 활용하여 해결할 수 있고, 개방형 문제는 접근 방식과 답이 한 가지로 정해지지 않기에(김은혜, 2010; 김서령, 2020) 다양한 접근 방식, 해결 방식, 답을 지닌 문제를 제공해 생산적 어려움을 경험할 가능성이 높도록 하였다(Kapur, 2014; Zeybek, 2016). 내용 영역의 다양성을 위해 연구 참여자에게 적용 중인 2015 개정 교육과정에 따라 수와 연산, 도형, 측정, 규칙성, 자료와 가능성 영역의 내용 요소가 적어도 하나씩 포함되도록 하였다.

다음으로 난이도와 인지적 요구도를 기준으로 문항을 검토하여 수정하였다. 난이도 검토를 위하여 본 연구에 참여하지 않는 초등학교 6학년 학생 22명을 대상으로 예비검사를 실시하였다. 그 결과를 바탕으로 문항 수를 4개에서 3개로 축소하였는데, 예비검사에 참여한 학생의 의견 중 풀이 시간이 부족하다는 의견이 다수 존재하였기 때문이다. 또한 원의 넓이와 원그래프 내용 요소를 결합한 문항을 삭제하였는데, 예비검사 풀이 과정을 분석한 결과 문항의 난도가 지나치게 높아 학생 대부분이 어려움을 극복하지 못하고 문제해결을 중도에 포기하였기 때문이다. 본 연구는 학생이 어려움을 생산적으로 극복하는 사례에 초점을 두기 때문에 지나치게 난도가 높은 문항을 삭제하였다.

인지적 요구도 검토를 위하여 6학년 지도 경력이 있는 교사를 포함한 수학교육 전문가 집단 2인의 교차 검토를 시행하였으며, 세 문제가 Smith & Stein(1998)의 인지적 요구도 중 난도가 높은 것에 해당하는 연계 있는 절차형과 수학 행하기 과제이도록 수정하였다([그림 II-1] 참고). 생산적 어려움은 인지적 요구도가 연계 있는 절차형과 수학 행하기를 해결하며 자주 나타나기 때문이다(Zeybek, 2016). 본 활동에서 적용한 문제의 유형, 단위, 인지적 요구도는 <표 II-4>와 같다.

<표 II-4> 문제의 유형, 영역과 관련 단위, 인지적 요구도

문제	유형	문항 출처	영역	관련 단위	인지적 요구도
문제 1	다전략 문제	우선미(2016)의 6학년 수학 문제 표현유형 선호도 검사 문항	도형	5-2-5 직육면체	연계 있는 절차형
			측정	6-1-6 직육면체의 부피와 겹넓이	
			수와 연산	5-1-5 분수의 덧셈과 뺄셈	
5-2-2 분수의 곱셈					
문제 2	다전략 문제	신향균 외(2023)의 6-1 수학 교과서 문항 (pp. 112~113)	자료와 가능성	6-1-5 여러 가지 그래프	연계 있는 절차형
			규칙성	6-1-4 비와 비율	
문제 3	개방형 문제	고창수(2015)의 수학적 모델링 문항	수와 연산	5-2-4 소수의 곱셈	수학 행하기
			수와 연산	6-2-2 소수의 나눗셈	

생산적 어려움 분석을 위한 수업은 6학년 과정의 수학 학습이 마무리된 2023년 12월에 80분(2차시)간, 담임교사인 연구자 중 1명이 진행하였다. 수업은 수학 학업 성취도를 기준으로 한 이질집단으로 4명씩 모둠을 구성하여 진행하였다. 다만 경계선 지능으로 인한 분석 제외 대상이 포함된 모둠은 5명을 한 모둠으로 구성하였다.

문제를 제공하기 전 다음과 같은 유의점을 안내하였다. 첫째, ‘스스로 문제 해결하기’ 활동 시에는 타 학생과

의 대화를 자제한다. 둘째, 수정해야 할 사항은 지움표를 사용하며 지우개를 사용하지 않는다. 셋째, ‘친구와 나누기’ 활동 시 문제의 답이나 직접적인 해결 과정을 설명하지 않는다. 그 대신 자신의 문제해결 아이디어를 공유할 수 있도록 한다.

문제해결 활동은 ‘스스로 문제 해결하기’와 ‘친구와 나누기’를 번갈아 실시하였다. ‘스스로 문제 해결하기’에서 학생들은 제공된 문제를 개별적으로 해결하였다. 교사는 순회지도 중 어려움을 경험하는 학생에게 피드백을 제공함으로써 학생이 문제해결을 지속할 수 있도록 하였다. ‘스스로 문제 해결하기’ 활동은 10분씩 2회와 15분씩 2회로 실시하였고, 활동 사이에 ‘친구와 나누기’를 삽입하여 10분씩 3회 진행하였다. ‘친구와 나누기’에서 학생들은 문제해결에 관한 아이디어를 자유롭게 공유하였다. 활동 시작 전 교사는 친구의 아이디어 중 필기할 내용은 볼펜으로 작성하도록 안내하였는데, 이는 분석 시 생산적 어려움의 요인 분석에 참고하기 위함이다. 활동을 마무리한 후 학생들은 문제를 해결하며 어려웠던 점, 어려움을 극복한 방법에 대한 설문지를 작성하였다.

[문제 1] 승관은 <보기>와 같은 전개도로 직육면체 모양의 그릇을 만들었습니다.

<보기>

그릇을 만든 승관은 그릇에 물을 $7\frac{1}{5}$ cm 높이만큼 부었습니다. 물을 부은 그릇에 쇠구슬을 넣었더니, 물의 높이가 $9\frac{9}{20}$ cm가 되었습니다. 쇠구슬의 부피는 몇 cm^3 일까요?

[문제 2] 해린이네 학교 학생들은 여름방학에 가고 싶은 장소를 조사하여 길이가 24cm인 띠그래프로 나타내었습니다. <보기>를 참고하여, 캠핑장에 가고 싶은 학생의 비율은 띠그래프를 그릴 때 몇 cm만큼 나타내야 하는지 구해보세요.

<보기>

1. 학생들이 가고 싶어 하는 장소는 계곡, 바다, 캠핑장, 산 중 하나입니다.
2. 계곡에 가고 싶은 학생의 비율을 띠그래프에 나타내면 6cm입니다.
3. 캠핑장에 가고 싶은 학생에 대한 바다에 가고 싶은 학생의 비는 5:7입니다.
4. 산을 가고 싶어 하는 학생 비율은 계곡에 가고 싶은 학생 비율의 $\frac{3}{5}$ 배입니다.

[문제 3] 유진이네 가족은 중앙구청에서 열린 지역 축제에서 초코칩 쿠키를 만들기로 했습니다. 구청에서는 쿠키 만들기에 필요한 밀가루 6kg과 초코칩 0.6kg을 지원해 주었습니다. 밀가루와 초코칩을 남김없이 사용하여 쿠키를 만들려면, 쿠키를 종류별로 몇 박스씩 만들어야 할까요?(단, 다른 재료들은 무제한으로 사용할 수 있습니다.)

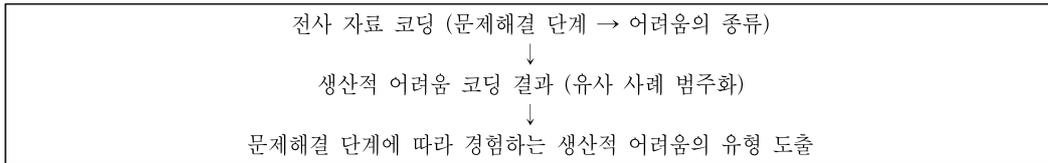
기본 초코칩쿠키	다크 초코칩 쿠키
준비물(1박스 기준, 1박스는 쿠키 10개)	준비물(1박스 기준, 1박스는 쿠키 10개)
밀가루: 0.3kg	밀가루: 0.2kg
초코칩: 0.03kg	초코칩: 0.06kg
버터: 0.07kg	버터: 0.11kg
설탕: 0.08kg	설탕: 0.07kg

[그림 II-1] 문제

다. 자료 수집 및 분석

본 연구는 질적 연구 방법을 택하였고, 이를 위해 수집한 자료는 활동 과정 녹화 자료, 활동지, 설문지이다. 활동 과정 녹화 자료는 전사하여 학생의 언어적·비언어적 반응을 기록하였다. 활동지는 한 장에 한 문항으로 구성

하여 제공하였으며, 문제를 해결하기 위한 모든 과정을 활동지에만 기록하도록 하였다. 설문지는 활동 이후 자신의 문제해결 과정을 반성하여 문제를 해결하며 경험한 어려움을 체크리스트와 서술형으로 작성하도록 하였다. 초등학교 6학년 학생이 경험하는 생산적 어려움의 유형을 분석한 방법은 [그림 II-2]와 같이 정리할 수 있다.



[그림 II-2] 생산적 어려움의 유형 분석 방법

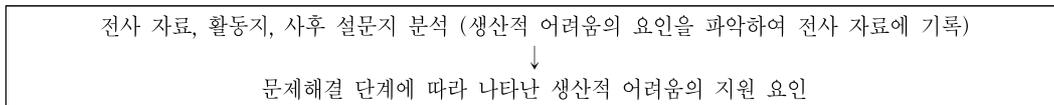
수집한 자료를 바탕으로 학생이 경험하는 어려움을 문제해결 단계별, 어려움의 종류별로 코딩하였다. 문제해결 단계는 ‘문제 이해(U)’ 단계, ‘해결계획 수립 및 실행(M)’으로 구분하였다. 생산적 어려움을 경험하는 학생은 해결계획을 세우고 계획을 실행하는 과정을 일회적으로 거치는 것이 아니라 양 단계를 여러 번 반복한다는 점에서 해결계획 수립 및 실행 단계를 통합하였다. 또한 해결계획 수립 및 실행 단계에서 새로운 해결계획을 수립하는 것은 기존 해결 과정에 대한 반성을 포함한다는 점에서, Polya의 문제해결 단계 중 반성은 별도 단계로 구분하지 않았다. 어려움의 종류는 생산적 어려움(p)과 비생산적 어려움(u)으로 구분하였다. 어려움을 겪는 학생에게 나타나는 특징을 연구한 결과를 종합하여 분석 기준인 <표 II-5>를 작성하였다(김소민, 2019; Warshauer, 2011; Baker, Jessup, Jacobs, Empson, & Case, 2020).

<표 II-5> 문제해결 단계에 따른 학생들의 어려움 분석 기준

문제해결 단계	어려움 종류	요소
문제 이해 (U)	생산적 어려움 (p)	<ul style="list-style-type: none"> - 주어진 문제의 해결 가능성에 불확실성 또는 어려움을 표현하나, 이후에도 문제해결 지속 - 문제에 제시된 요소를 시각적 또는 기호적 방식으로 표현 - 2가지 이상의 방향에서 문제 이해 시도 - 문제의 해결 목표 이해 - 문제에 제시된 요소를 이해하고, 이를 문제 상황과 관련지음
	비생산적 어려움 (u)	<ul style="list-style-type: none"> - 문제해결을 시작하지 않음(문제해결 포기) - 주어진 문제의 해결 가능성에 불확실성 또는 어려움을 표현하나, 문제해결을 지속하지 않는 언어적·비언어적 모습을 보임 - 문제에 제시된 요소를 이해하지 못하거나 관련짓지 못함 - 2가지 이상의 방향에서 문제해결을 시도하지 않고 포기함 - 문제의 해결 목표를 이해하지 못함 - 수학적으로 무의미한 기록 또는 무의미한 의사소통이 존재함 - 문제를 해결하지 않고 다른 문제로 넘어감
해결계획 수립 및 실행(M)	생산적 어려움 (p)	<ul style="list-style-type: none"> - 문제 이해 완료 이후에 어려움을 표현하지만, 끈기를 지니고 문제해결이 진전됨 - 문제해결에 필요한 수학적 지식이 변경되고, 변경된 수학적 지식을 활용하여 문제해결이 진전됨 - 문제해결 전략의 수정이 나타나며, 전략을 적용하여 문제해결이 진전됨 - 해결계획 수립 및 실행 단계에서 나타나는 실수 또는 오류 교정 - 설명을 통해 자신의 해결 과정을 정당화 - 자신이나 다른 학생의 해결책을 반성하거나 평가 - 새로운 수학적 아이디어 또는 문제해결 전략을 발견
	비생산적 어려움 (u)	<ul style="list-style-type: none"> - 문제 이해 완료 이후에 어려움을 표현하지만, 문제해결이 진전되지 못함 - 문제해결에 필요한 수학적 지식을 파악하지 못함 - 문제해결 전략의 수정이 필요하지만, 수정이 일어나지 않거나 올바른 해결 전략을 찾지 못함 - 해결계획 수립 및 실행 단계에서 나타나는 실수 또는 오류 교정이 일어나지 않음 - 수학적으로 무의미한 기록 또는 무의미한 의사소통이 존재함 - 문제를 해결하지 않고 다음 문제로 넘어감

코딩 결과 중 본 연구의 관심은 생산적 어려움에 해당하는 반응(U_p, M_p)이다. 각 문제해결 단계에서 경험한 생산적 어려움은 유사한 특징을 지닌 장면끼리 범주화하였다. 한 장면이 두 종류 이상의 특징을 지니는 경우 전후 장면과 활동지, 설문지를 바탕으로 생산적 어려움 경험에 더 근본적인 영향을 준 특징을 파악하였다. 범주화한 결과는 초등수학교육 전문가 2인이 교차 검토하여 일치도를 확인하였다. 분류 결과는 생산적 어려움의 유형에 해당하며 유형별 빈도 및 비율, 대표적인 사례를 비교하여 초등학교 6학년 학생이 문제해결 단계별로 경험하는 생산적 어려움의 유형과 각 유형의 특징을 파악하였다.

다음으로, 초등학교 6학년의 생산적 어려움을 지원하는 요인을 분석한 방법은 [그림 II-3]으로 정리할 수 있다. 이때 분석 대상은 앞선 분석 결과 중 생산적 어려움으로 분류된 장면(U_p, M_p)이다.



[그림 II-3] 생산적 어려움의 지원 요인 분석 방법

생산적 어려움의 지원 요인은 학생이 어려움을 생산적으로 극복할 수 있도록 도움을 주는 요인이다. 본 연구에서는 생산적 어려움의 지원 요인을 문제해결자 개인(P), 동료 학생(O), 교사(T)로 구분하였다. 문제해결자 개인은 인지 갈등을 해결하며, 동료 학생은 아이디어를 공유하며, 교사는 문제해결을 촉진하는 피드백을 통해 생산적 어려움 경험을 지원할 수 있다(Cathey & Patterson, 2020). 다음으로 활동 특징을 기준으로 각 요인을 3가지로 구분하였다. P1, O1, T1은 각 요인이 문제해결 지속에 영향을 준 경우이다. P2, O2, T2는 각 요인이 문제해결 과정 변화에 영향을 준 경우이다. P3, O3, T3은 각 요인이 복수의 문제해결 과정 탐색에 영향을 준 경우이다. Jonsson et al.(2014), Zeybek(2016), VanLehn et al.(2021), Aljarrah & Towers(2021)의 연구 결과를 종합하여 분석틀을 <표 II-6>과 같이 구성하였다.

<표 II-6> 생산적 어려움 요인 분석틀

요인	특징	코드
개인	활동 중 스스로의 해결 과정 또는 답을 검토하여 문제해결을 지속함	P1
	문제해결 과정의 변화 원인이 동료 학생과의 의사소통 내용 또는 교사의 안내와 관련이 없음	P2
	학생 간 의사소통 또는 교사의 안내 내용과 관련이 없는 2가지 이상의 문제해결 과정을 기록함	P3
동료 학생	학생 간 의사소통 이후 문제해결을 지속함	O1
	문제해결 과정의 변화 원인이 학생 간 의사소통 내용에 의함	O2
	2가지 이상의 문제해결 과정 중, 학생 간 의사소통 내용과 관련이 있는 과정이 1가지 이상임	O3
교사	활동 중 교사의 안내 이후 문제해결을 지속함	T1
	문제해결 과정의 변화 원인이 교사의 안내 내용에 의함	T2
	2가지 이상의 문제해결 과정 중, 교사의 안내와 관련이 있는 과정이 1가지 이상임	T3

생산적 어려움으로 분류된 활동(U_p, M_p)을 <표 II-6>에 근거하여 코딩하여 생산적 어려움의 지원 요인을 파악하였다. 같은 장면이 2개 이상 요인의 영향을 받은 경우, 전후 문제해결 과정을 참고하여 이후 해결 과정에 더욱 근본적인 영향을 준 요인을 택일하여 판단하였다. 코딩 결과는 초등수학교육 전문가 2인이 교차 검토하여 타당성을 검증하였으며, 문제해결 단계별로 분류하여 빈도와 비율을 비교하였다. 이를 통해 초등학교 6학년 학생의 생산적 어려움을 지원하는 요인과 각 요인이 생산적 어려움 경험에 어떠한 영향을 주는지 파악하였다.

III. 연구 결과 및 논의

1. 초등학교 6학년이 경험하는 생산적 어려움의 유형

본 연구는 문제해결 단계를 문제 이해와 해결계획 수립 및 실행으로, 어려움의 종류를 생산적 어려움과 비생산적 어려움으로 구분하였다. 문제해결 단계별로 나타난 어려움의 종류를 분석한 결과는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 문제해결 단계별 어려움 분석 결과

코드	코드 설명	빈도 (비율)	
Up	문제 이해 단계에서의 생산적 어려움	94 (14.55%)	169 (26.16%)
Uu	문제 이해 단계에서의 비생산적 어려움	75 (11.61%)	
Mp	해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움	253 (39.16%)	477 (73.84%)
Mu	해결계획 수립 및 실행 단계에서의 비생산적 어려움	224 (34.68%)	
합계		646 (100%)	646 (100%)

초등학교 6학년 학생들은 문제해결 단계 중 해결계획 수립 및 실행 단계에서 어려움을 308회만큼 더 경험하고, 어려움의 종류 중 생산적 어려움을 48회만큼 더 경험한 것으로 나타난다. 문제를 이해하지 못하면 다음 단계로 넘어갈 수 없으므로 문제 이해가 쉽지 않은 학생에게 끈기를 가지고 문제를 이해하려 하는 의지, 즉 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 경험은 필수라고 할 수 있다. 그럼에도 불구하고 학생들은 해결계획을 세우고 적용하며, 목표에 도달하지 못했을 때 계획을 수정하여 다시 시도하는 활동을 반복적으로 거쳤기 때문에 해결계획 수립 및 실행 단계의 어려움이 훨씬 많은 것으로 확인되었다.

문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 유형은 4가지로 나타났다. 각 유형과 유형별 빈도는 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 유형

코드	생산적 어려움 유형	빈도 (비율)
Up-1	문제에서 구해야 할 목표를 파악하는 어려움	19 (20.21%)
Up-2	문제에 제시된 요소 및 조건을 이해하는 어려움	47 (50.00%)
Up-3	문제에 제시된 내용을 시각적으로 표현하는 어려움	6 (6.38%)
Up-4	문제 이해에 어려움을 겪음에도 불구하고, 어려움을 극복하고 끈기 있게 문제 이해를 지속하는 의지	22 (23.40%)
합계		94 (100%)

초등학교 6학년 학생들이 문제 이해 단계에서 경험한 생산적 어려움은 제시된 요소 및 조건을 이해하는 과정에서 가장 높은 빈도로, 문제에 제시된 요소를 시각적으로 표현하는 과정에서 가장 낮은 빈도로 나타났다.

Up-1은 어려움을 극복하며 문제에서 구해야 할 목표를 파악한 유형이다. Up-1은 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 중 약 20%에 해당한다. 학생들은 활동 중 무엇을 구해야 하는지 정확히 파악하지 못하였다. 한 사례로, S19는 문제해결의 목표로 부피와 겉넓이 중 어떤 것을 설정해야 할지 어려워하였다.

- S19 선생님 이거 부피 구하는 거예요 겉넓이 구하는 거예요?
 교사 읽어보세요, 뭘 구하는 건지.
 S19 (머리를 쥐어뜯으며 문제 풀이를 한다.)

이와 같이 S19는 문제 이해 시 겹넓이와 부피의 두 속성을 혼동하며 해결 목표 파악에 어려움을 겪었다. 이와 같은 어려움에 대해 [그림 III-1]의 식 $10 \times \frac{17}{2} \times \frac{17}{2}$ 은 문제의 해결 목표를 부피로 파악한 것을 보여준다. 스스로 고민한 결과 S19는 구해야 할 것이 부피임을 파악하였고, 이후 문제에 제시된 요소를 바탕으로 해결계획을 수립하였다. 즉, S19는 문제의 목표를 이해하고 이를 바탕으로 문제해결의 다음 단계를 이행하였다는 점에서 생산적 어려움을 경험하였다.

$$10 \times \frac{17}{2} \times \frac{17}{2} =$$

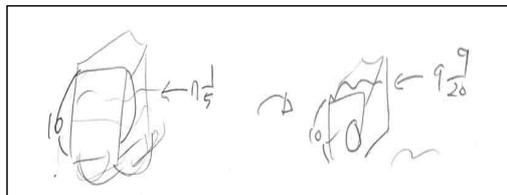
$$\frac{189}{20} - \frac{36}{5} = \frac{189}{20} - \frac{144}{20} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} \text{ m}^3$$

[그림 III-1] Up-1 사례

Up-2는 어려움을 극복하며 문제에 제시된 요소 및 조건을 이해한 유형이다. Up-2는 문제 이해 단계의 생산적 어려움 중 절반을 차지하였으며, 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 중 가장 빈번하게 나타났다. Up-2는 문제에 제시된 요소 파악과 관련된 사례와 문제를 읽는 과정에서 문제의 조건 해석과 관련된 사례로 구분할 수 있었다. 문제의 요소 파악과 관련한 S10의 사례는 다음과 같다.

- S10 (학습지에 그리며) 이 전개도를 이렇게 직육면체로 만들었는데요.
 교사 응, 잘했어요. 근데 직육면체는 네가 밑면을 뒤로 잡느냐에 따라 높이가 달라지지. 밑면이 하나로 정해질 수 있어, 없어?
 S10 없어요.
 교사 없지. 그러면 높이가 $8\frac{1}{2}$ 이 될 것이냐 10이 될 것이냐는 네가 문제를 풀면서 결정을 해야 해요.(문제의 조건 중 물 높이 변화를 짚는다.)
 S10 헉!
 교사 그렇지! 읽으면 됐지?

S10은 직육면체의 성질과 전개도는 알고 있었지만, 높이가 10으로 정해질 수밖에 없는 상황을 직육면체의 성질과 관련짓지 못하였다. S10은 교사의 피드백을 바탕으로 [그림 III-2]와 같이 풀이 과정을 작성하였다. 수학적 사실과 수학적 과정을 연결하며 수학적 아이디어를 형성하며 어려움을 생산적으로 극복한 것이다.



[그림 III-2] Up-2 사례

문제의 조건을 이해하며 생산적 어려움을 경험한 사례는 S5의 경우다.

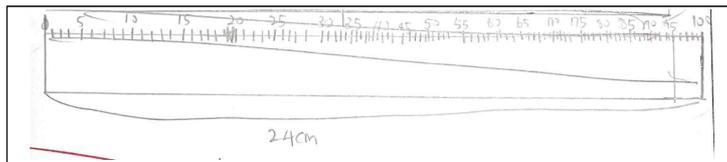
- S5 그러면 쿠키를 300개 만들어야 하는데.
- S6 이거 한 박스 기준으로 준비물이 이만큼 필요한 거잖아요.
- S5 (문제를 다시 읽는다.)
- S5 아,
- S5 한 박스 기준이구나.
- S6 남 30개 썼죠?

S5는 문제에 제시된 단위를 잘못 읽으며 문제의 조건 이해에 어려움을 겪었으며, S6과의 의사소통을 통해 어려움의 원인을 발견하였다. 이후 S5는 문제를 다시 읽어 문제의 조건을 바르게 파악하였고, 올바르게 파악한 조건을 바탕으로 문제해결을 지속하며 어려움을 생산적으로 극복하였다.

Up-3은 어려움을 극복하며 문제에 제시된 내용을 시각적으로 표현한 유형이다. Up-3은 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 중 약 6%에 해당하였다. Up-3은 문제 이해 단계의 생산적 어려움 유형 중 가장 낮은 빈도로 나타났지만, 시각적 표현 빈도와 문제해결력 간 상관관계가 있다는 점(van Garderen, 2007; 우선미, 2016)을 고려할 때 유형의 특징을 분석할 필요가 있다. 본 연구에서 Up-3은 도형 영역 및 자료와 가능성 영역 관련 요소를 표현하는 상황에서 발생하는 비중이 높았다. 한 학생 사례로, S19는 띠그래프의 비율과 길이를 혼동하였다.

- 교사 띠그래프 전체가 몇 퍼센트야?
- S19 100퍼센트.
- S19 이게 24cm인데...
- 교사 센티미터는 24센티미터. 비율은 몇 퍼센트야, 띠그래프면?
- S19 100퍼센트. (띠그래프를 그리기 시작한다.)

S19는 비율그래프로써 띠그래프의 특징을 알고 있지만, 이를 띠그래프의 길이를 관련짓기를 어려워했다. S19는 교사의 도움을 받아 시각적 표현을 사용하였다([그림 III-3] 참고). 띠그래프의 상단에는 비율을, 하단에는 띠그래프의 전체 길이인 24cm를 표시하며 문제에 제시된 요소 간의 관계를 파악하였다. 이는 시각적 표현을 통해 문제의 구조를 이해했다는 점에서 생산적 어려움에 해당한다.



[그림 III-3] Up-3 사례

Up-4는 어려움을 겪음에도 불구하고 끈기 있게 문제 이해를 지속하는 유형이다. Up-4는 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 중 약 23%에 해당하였다. Up-4는 <표 II-2>의 생산적 어려움 특징 중 정의적/행동적 측면에 해당한다. 학생들은 문제를 이해하는 과정에서 언어적, 비언어적으로 어려움을 표현하였지만, 문제를 이해하려 끊임없이 시도하였다. Up-4의 사례 중 S18과 S11의 반응은 다음과 같다.

- S18 그래서 높이를 무엇으로 두어야 해요?
- S5 일단 높이는 10이 될 수밖에 없어요.
- S18 아~ 진짜 어렵다. (문제 풀이에 집중한다.)
- S11 (3번 문제 활동지를 보더니) 3번... 3번 문제 왜 이... (문제 풀이에 집중한다.)

S18은 문제의 조건을 파악하는 과정에서, S11은 문제 상황을 파악하는 과정에서 어려움을 말로 표현하였다. S18은 S5와의 의사소통 내용을 기반으로 문제에 제시된 조건을 다시 읽으며, S11은 스스로 문제 상황을 진술한 내용을 다시 읽으며 문제를 이해하고자 하는 의지를 보였다. 문제 이해에 어려움을 겪음에도 불구하고, S18과 S11은 유의미한 풀이 과정을 기록하고 수학적으로 유의미하게 의사소통하며 문제해결을 지속하였다. 즉, 문제 이해 단계에서 끈기 있게 문제 이해를 시도하며 어려움을 생산적으로 극복하였다.

해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 유형은 6가지로 나타났다. 각 유형과 유형별 빈도는 <표 III-3>과 같다.

<표 III-3> 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 유형

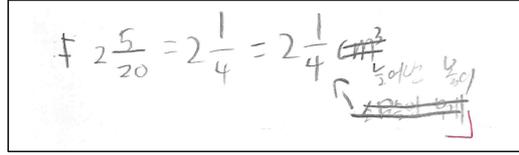
코드	생산적 어려움의 유형	빈도 (비율)
Mp-1	기존의 문제해결 아이디어를 변경하여 활용하는 어려움	19 (7.51%)
Mp-2	문제해결에 필요한 수학적 지식을 찾아서 활용하는 어려움	18 (7.12%)
Mp-3	불확실성을 표현하나, 문제해결에 필요한 수학적 아이디어를 올바르게 추론하는 어려움	66 (26.09%)
Mp-4	해결계획 수립 및 실행 단계에서 발견한 실수나 오개념을 수정	16 (6.32%)
Mp-5	두 가지 이상의 올바른 문제해결 아이디어를 활용하는 어려움	29 (11.46%)
Mp-6	문제를 이해한 후 어려움을 겪음에도 불구하고, 어려움을 극복하고 끈기 있게 문제해결을 지속하는 의지	105 (41.50%)
합계		253 (100%)

초등학교 6학년 학생들은 해결계획 수립 및 실행 단계 중 어려움을 극복하고 끈기 있게 문제를 해결하는 유형의 생산적 어려움을 가장 높은 빈도로 경험하였다. 어려움을 극복하며 실수나 오류를 수정하는 유형에 해당하는 생산적 어려움의 빈도는 가장 낮았다.

Mp-1은 어려움을 극복하며 기존의 잘못된 문제해결 아이디어를 변경하여 활용한 유형이다. Mp-1은 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 중 약 8%에 해당한다. 문제해결 아이디어 변경과 관련한 S16의 사례는 다음과 같다.

- S16 쇠구슬에도 분명히 밑면이 있을 거야.
 S15 (S1을 바라보며) 부피 구하는 게 밑면 곱하기 높이라고 하셨잖아요. 근데 쇠구슬에는 밑면이 없잖아요.
 S1 쇠구슬의 밑면을 왜 구해요. 마편 물의 부피를 구하는 건데!
 (중략)
- S1 저희는 쇠구슬의 높이 따위는 구할 필요 없어요.
 S15 그러면 이진 없는 거예요?
 S1 쇠구슬을 넣은 물의 부피 빼기 쇠구슬을 넣기 전 물의 부피를 하면 쇠구슬의 부피가 나오겠죠.
 S15 아하.
 S2 늘어난 물의 부피를 구하면 되는 거죠?
 S1 큰 거 부피 빼기 작은 거 부피를 하면은 쇠구슬의 부피가 돼요.
 S16 그렇지, 구의 부피를 구할 수는 없네.

S16은 쇠구슬의 밑면과 높이를 구하고자 시도하며 직육면체의 부피 공식을 구의 부피에 적용하고자 하였다. 하지만 S16은 학생 간 의사소통을 통해 물의 변화한 부피가 쇠구슬의 부피라는 점을 인식하였다. 의사소통 활동 후 S16은 [그림 III-4]의 풀이 과정을 작성하여 물의 늘어난 높이를 구하였고, 늘어난 높이를 직육면체의 부피 공식에 적용하여 물의 변화한 부피를 구하였다.



[그림 III-4] Mp-1 사례

부피를 구하기 위해서는 가로, 세로, 높이의 길이를 알아야 한다는 고착된 지식을 변경하며 S16은 새로운 수학적 아이디어를 발견하였다. 변경한 수학적 아이디어를 바탕으로 문제의 목표에 알맞은 답을 구하려 시도함으로써 S16은 생산적 어려움을 경험하였다.

Mp-2는 어려움을 극복하며 문제해결에 필요한 수학적 개념이나 공식을 상기한 유형이다. Mp-2는 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 중 약 7%에 해당한다. 활동 중 학생들은 어떠한 수학적 지식을 활용해야 하는지 올바르게 파악했지만, 해당 수학적 지식을 기억하는 데 어려움을 겪었다. 수학적 지식 상기와 관련한 S20의 사례는 [그림 III-5]와 같다.

부피 구하기	<input type="checkbox"/> 스스로 생각하며 <input checked="" type="checkbox"/> 친구와 이야기하며 <input checked="" type="checkbox"/> 선생님의 말을 듣고 <input type="checkbox"/> 해결하지 못했어요.	선생님께 말을 듣고 친구들과 이야기해서
--------	---	-----------------------

[그림 III-5] Mp-2 사례

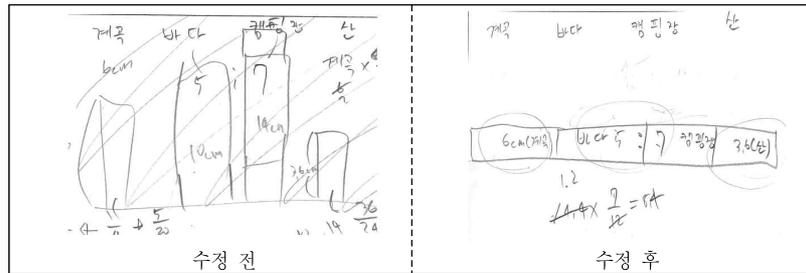
S20은 학생 간 의사소통과 교사의 피드백을 통해 이전에 기억하지 못했던 직육면체의 부피 공식을 떠올렸다. S20은 문제 상황에 필요한 사전 지식을 활성화하며 생산적 어려움을 극복하였다. 이외에도 Mp-2는 대안적 접근 방법 탐색이 아닌, 해당 수학적 지식을 명확히 않으므로 어려움을 극복한 사례가 많았다.

Mp-3은 문제해결에 필요한 수학적 아이디어를 올바르게 추론하였으나, 본인의 아이디어에 불확실성을 표현한 유형이다. Mp-3은 해결계획 수립 및 실행 단계의 생산적 어려움 중 약 26%에 해당한다. 수학적 아이디어를 올바르게 탐색하거나 활용하고 있음에도 불구하고, 학생들은 본인의 수학적 아이디어가 문제해결에 적합한지 의심하며 다음 해결 과정으로 넘어가기를 망설였다. 학생 사례로, S4는 문제의 해결 목표와 조건에 알맞은 답을 구했고 S13은 문제해결을 위한 알맞은 계획을 탐색하여 수립했음에도 불구하고 다음과 같은 반응을 보이며 확신을 갖지 못하였다.

- | | |
|--|--|
| <p>S4 기본(초코칩 쿠키)이...
 내가 구한 게 맞나?
 하나만 다 해도 되잖아요.
 버터랑 설탕 양은 상관없다고 했으니까.</p> | <p>S13 조금 그러면 기본 초코칩 박스를 줄여보면 될 것 같은데.
 더 들어갈 것 같은데... 오아아</p> |
|--|--|

이후 S4와 S13은 학생 간 의사소통을 통해 자신의 해결 계획과 답을 정당화하였다. S4는 정당화한 답을 바탕으로 문제의 조건에 맞는 다양한 답을 구하려 시도하였고, S13은 정당화한 해결계획을 바탕으로 계획을 실행하여 알맞은 답을 도출하였다. S4와 S13은 자신의 문제해결 아이디어에 관하여 확신을 지니며 문제해결을 지속하였고, 생산적으로 어려움을 극복하였다.

Mp-4는 해결계획을 수립하고 실행하는 과정에서 발견한 실수나 오개념을 수정한 유형이다. Mp-4는 해결계획 수립 및 실행 단계의 생산적 어려움 중 약 6%에 해당한다. 복잡한 계산 과정을 수행하는 도중 발생한 실수, 또는 두 가지 이상의 개념을 혼동한 장면에서 학생들은 어려움을 겪었다. 한 학생의 사례로, S8은 띠그래프와 막대그래프를 혼동해 [그림 III-6]과 같이 잘못된 그래프를 작성하였다.



[그림 III-6] Mp-4 사례

문제 상황에 알맞은 그래프는 띠그래프이기에 S8은 띠그래프 형태로 그래프를 수정하여 작성하였다. 그래프의 종류별 형태 관련 오개념을 수정하는 과정에서 S8은 수학 지식을 개념적으로 이해하였으며, 어려움을 생산적으로 극복하였다.

Mp-5는 두 가지 이상의 올바른 문제해결 아이디어를 구상하고 활용한 유형이다. Mp-5는 해결계획 수립 및 실행 단계의 생산적 어려움 중 약 11%에 해당한다. 연구에서 학생들에게 제공된 문제는 다전략 문제와 개방형 문제였으며, 다양한 표현 방법과 해결 방법, 답이 도출될 가능성이 있었다. 이에 학생들은 같은 문제에 대해 복수의 해법을 보였다. 두 가지 이상의 올바른 문제해결 구상과 관련된 S1과 S2의 사례는 다음과 같다.

- S1 근데 왜 퍼센트를 구해요. cm를 구해야지.
 S2 (책상을 치며) 24(cm)를 100(%)으로 놓고 나중에 cm를 구해도 되잖아요.
 S1 아니 지금 cm를 구하라니까.
 S2 퍼센트를 구하고 (그다음에) cm를 구해도 된다고요.
 S1 아니 cm를 구하라고 하잖아요. cm가 쉽다고!

문제를 이해할 때 S1은 “2번 문제 뭐지 하나도 모르겠어.”의 말을 통해 어려움을 나타냈고, S2는 백분율과 띠그래프 길이 요소를 관련지어 해결계획을 수립하기를 어려워했다. 하지만 제시한 사례에서 S1과 S2 모두 백분율과 띠그래프의 항목별 길이를 관련짓는 두 가지 방법을 구상하였으며 해결 방법을 다른 사람에게 설명하였다. 이후 두 학생은 해결책을 스스로 평가하여 두 가지의 해결책 중 문제해결에 더 적합하다고 생각하는 것을 선택하여 기존에 지니던 수학적 아이디어를 강화하였다.

Mp-6은 어려움을 겪음에도 불구하고 끈기 있게 해결계획을 수립하고 이를 실행하는 유형이다. Mp-6은 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 중 약 42%에 해당하였으며, 해당 문제해결 단계에서 가장 빈번하게 나타난 생산적 어려움이었다. Mp-6은 <표 II-2>의 생산적 어려움 특징 중 정의적/행동적 측면에 해당한다. 문제의 목표 달성을 위해 계획을 수립하고 실행하는 과정에서 어려움을 겪음에도 불구하고 학생들은 문제를 해결하고자 하는 의지를 보였다. 한 학생 사례로, S15는 1번 문제의 해결계획을 실행하며 ‘어차피 답이 없다’라는 반응을 통해 문제해결을 포기하려 하였다.

- S15 1번은 어차피 답이 없어요. 노답이라는 뜻이에요.
 S15 (2번 활동지로 넘긴다.) 저 궁금한 게 있어요.
 S1 2번이요?
 S15 아 1번부터. 다들 1번 활동지 펴 보세요. 1번.

하지만 S15는 학생 간 의사소통 활동에서 1번 문제와 관련된 질문을 하고, 타 학생의 답을 바탕으로 1번 문제를 해결하고자 하는 의지를 보였다. 의사소통 활동 이후 S15는 끈기 있게 시도하여 1번 문제에 관한 올바른 답을 도출하였다. 생산적 어려움을 경험하는 학생은 좌절감과 즐거움이 반복적으로 나타나며, 조절된 좌절감(controlled frustration)을 경험한다는 연구 결과(O'Dell, 2018; Young, Bevan, & Sanders, 2024)를 고려하였을 때, S15는 조절된 좌절감을 경험하며 생산적으로 어려움을 극복한 것으로 확인된다.

2. 초등학교 6학년의 생산적 어려움의 지원 요인

본 연구는 생산적 어려움을 지원하는 요인을 개인, 동료 학생, 교사로 구분하였다. 본 연구에서 학생들의 생산적 어려움을 지원한 요인을 분석한 결과는 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4> 생산적 어려움 지원 요인 분석 결과

요인의 유형	코드	빈도 (비율)	
개인	P1	98 (28.24%)	143 (41.21%)
	P2	19 (5.48%)	
	P3	26 (7.49%)	
동료 학생	O1	78 (22.48%)	134 (38.62%)
	O2	45 (12.97%)	
	O3	11 (3.17%)	
교사	T1	54 (15.56%)	70 (20.17%)
	T2	11 (3.17%)	
	T3	5 (1.44%)	
합계		347 (100%)	347 (100%)

학생들이 어려움을 생산적으로 극복할 수 있도록 하는 요인은 개인, 동료 학생, 교사 순으로 나타났다. 초등학교 6학년 학생들은 인지 갈등을 스스로 해결하며 생산적 어려움을 경험하는 비중이 가장 높았다. 반면, 교사의 피드백에 영향을 받아 생산적 어려움을 경험하는 비중은 가장 낮았다.

문제해결 단계별로 생산적 어려움의 지원 요인을 분석한 결과는 <표 III-5>와 같다.

<표 III-5> 문제해결 단계별 생산적 어려움 지원 요인

문제해결 단계	요인의 유형	빈도 (비율)	
문제 이해	개인	33 (35.11%)	94 (100%)
	동료 학생	25 (26.60%)	
	교사	36 (38.30%)	
해결계획 수립 및 실행	개인	110 (43.48%)	253 (100%)
	동료 학생	109 (43.08%)	
	교사	34 (13.44%)	
합계		347 (100%)	347 (100%)

문제 이해 단계에서 생산적 어려움을 지원하는 요인은 교사, 개인, 동료 학생 순으로 나타났다. 반면, 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움을 지원하는 요인은 개인과 동료 학생이 비슷하게 나타났으며, 다음으로 교사 순으로 나타났다. 학생이 문제를 이해하는 단계에서는 교사의 피드백이, 해결계획을 수립하고 실행하는 단계에서는 개인의 인지 갈등 해결과 학생 간 의사소통 활동이 어려움을 생산적으로 극복하는 데 도움이 될 것을 알 수 있다.

문제 이해 단계의 생산적 어려움 지원 요인을 코드별로 분석한 결과는 <표 III-6>과 같다. 문제 이해 단계에서 요인별로 가장 빈도가 높은 코드는 개인 P1, 동료 학생 O1, 교사 T1이었다. 개인, 동료 학생, 교사 요인은 모두 문제해결 지속에 가장 많은 영향을 주었다. 개인과 동료 학생 요인은 기존의 문제 이해 과정을 변화하는 데 각각 약 30%(P2), 48%(O2)의 영향을 주었다. 개인 요인은 문제의 요소와 조건을 파악하는 생산적 어려움과 관련하여(U_p-2, 70%), 동료 학생 요인은 문제의 해결 목표를 이해하는 생산적 어려움과 관련하여(U_p-1, 67%) 많은 영향을 주었다. 세 요인 모두 복수의 문제해결 과정을 탐색하는 생산적 어려움에는 적은 영향을 주었다(P3, O3, T3). 이는 문제 이해 단계의 주요 활동이 문제의 해결 목표를 파악하고 자료와 조건을 이해하는 것이기 때문이다. 다양한 해결 방법을 구상하고 실행하는 해결계획 수립 및 실행 단계와 비교하였을 때, 학생들은 두 가지 이상의 방향에서 문제를 이해하려 시도한 비율이 낮았다.

<표 III-6> 문제 이해 단계에서의 생산적 어려움 지원 요인

요인의 유형	코드	빈도 (비율)	
개인	P1	20 (60.61%)	33 (100%)
	P2	10 (30.30%)	
	P3	3 (9.09%)	
동료 학생	O1	13 (52.00%)	25 (100%)
	O2	12 (48.00%)	
	O3	0 (0.00%)	
교사	T1	31 (85.71%)	36 (100%)
	T2	5 (14.29%)	
	T3	0 (0.00%)	
합계		94 (100%)	94 (100%)

<표 III-7> 해결계획 수립 및 실행 단계에서의 생산적 어려움 지원 요인

요인의 유형	코드	빈도 (비율)	
개인	P1	78 (70.91%)	110 (100%)
	P2	9 (8.18%)	
	P3	23 (20.91%)	
동료 학생	O1	65 (59.63%)	109 (100%)
	O2	33 (30.28%)	
	O3	11 (10.09%)	
교사	T1	24 (70.59%)	34 (100%)
	T2	5 (14.71%)	
	T3	5 (14.71%)	
합계		253 (100%)	253 (100%)

해결계획 수립 및 실행 단계의 생산적 어려움 지원 요인을 코드별로 분석한 결과는 <표 III-7>과 같다. 해결계획 수립 및 실행 단계에서 요인별로 가장 빈도가 높은 코드는 개인 P1, 동료 학생 O1, 교사 T1이었다. 개인,

동료 학생, 교사 요인은 모두 문제해결 지속에 가장 많은 영향을 주었다. 교사 요인이 문제해결 과정을 변화하는 데 영향을 준 비율(T2)과 복수의 문제해결 과정을 탐색하는 데 영향을 준 비율은 각각 14.71%로 같았다. 그러나 개인 요인은 복수의 문제해결 과정을 탐색하는 데 더 많은 영향을 주었으며(P3, 20.91%), 동료 학생 요인은 기존의 문제해결 과정을 변화하는 데 더 많은 영향을 주었다(O2, 30.28%). 해결계획을 수립하고 실행하는 과정에서 어려움을 경험할 때, 학생은 스스로 인지 갈등을 해결하며 두 가지 이상의 해결 방안을 탐색하고 다른 학생과 의사소통하며 기존의 해결 과정을 변경하는 경향을 보였다.

IV. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 6학년 학생이 수학 문제해결 과정에서 겪는 생산적 어려움의 유형과 생산적 어려움을 지원하기 위한 요인을 분석하여 교수학적 시사점을 얻는 것을 목적으로 하였다. 연구 결과에서 도출한 결론과 시사점은 다음과 같다.

첫째, 문제 이해 단계에서는 인지적 측면, 해결계획 수립 및 실행 단계에서는 정의적 차원에 해당하는 생산적 어려움의 사례가 가장 많았다. 이는 생산적 어려움이 인지적 측면과 정의적 측면을 모두 지니고 있다는 특징을 뒷받침한다. 문제 이해 단계에서는 Up-1, Up-2, Up-3이 인지적 측면 Up-4가 정의적 측면과 관련되었다. 이중 어려움을 극복하며 문제의 요소와 조건을 이해하는 사례가 가장 많았다. 평소 수학적 지식이 풍부한 학생이든 문제 상황에 내재된 요소와 조건을 고려하지 못했을 때 학생들은 어려움을 겪었다. 요소와 조건을 이해하여 알고 있던 수학적 지식과 연결하는 활동을 통해 학생들은 수학적 아이디어를 구성할 수 있었다. 해결계획 수립 및 실행 단계에서는 Mp-1, Mp-2, Mp-3, Mp-4, Mp-5가 인지적 측면, Mp-6이 정의적 측면과 관련되었다. 이중 어려움을 극복하고 끈기 있게 문제를 해결하려 시도하는 사례가 가장 많았다. 문제의 난이도와 인지적 요구도가 높았기에 학생들은 목표에 알맞은 답을 도출하기 위해 해결계획을 수립하고 실행하며, 실행 결과를 바탕으로 해결계획을 수정하여야 했다. 이 과정에서 학생들은 좌절감을 경험하기도 하였다. 하지만, 문제를 해결할 수 있다는 자신감을 바탕으로 다양한 방향에서 시도하면서 끈기 있게 문제를 해결할 수 있었다.

둘째, 학생들이 인지적인 측면에서 생산적으로 어려움을 극복하도록 하기 위해서는 학생 간 아이디어를 공유하는 활동을 진행하고 어려움 극복을 지원하는 교사의 피드백을 제공해야 한다. 연구 결과, 전체 생산적 어려움 중 인지적 측면에서 생산적 어려움을 경험한 비율은 63%였다. 또한 인지적 측면에서 생산적 어려움을 겪은 사례 중 수학적 지식을 이미 알고 있지만 생산적 어려움을 경험한 비율은 약 85%였다. 이는 수학적 문제해결 시 문제 상황과 수학적 지식을 연결짓는 과정을 학생들이 어려워했다는 점을 의미한다. 잘못된 문제해결 과정을 올바르게 변화하는 데는 동료 학생 간의 의사소통이 영향을 주었으며(O2), 확실하지 않은 해결 과정을 정당화하는 데는 교사의 긍정적 피드백이 영향을 주었다(T1). 생산적으로 어려움을 극복하며 학생이 수학적 지식에 대한 깊이 있는 이해를 할 수 있도록, 수학적 의사소통을 활발하게 하고 학생이 어려움을 극복할 수 있도록 하는 교사의 피드백이 필요하다.

셋째, 학생들이 정의적인 측면에서 생산적으로 어려움을 극복하도록 하기 위해서는 스스로 문제에 대해 고민할 시간과 문제해결 과정과 관련된 수학적 의사소통의 기회가 도움이 된다. 연구 결과 전체 생산적 어려움 중 정의적 측면에서 생산적 어려움을 경험한 비율은 37%였으며, 해결계획 수립 및 실행 단계에서는 가장 빈도가 높은 유형에 해당했다. 이는 문제를 해결하는 과정에서 자신감, 끈기 등의 정의적 측면을 고려하여 생산적 어려움을 지원해야 한다는 점을 시사한다. 또한 학생이 문제해결을 지속하는 데 영향을 준 요인(P1, O1, T1)은 개인(43%)과 동료 학생(34%) 비율이 높았다. 이를 통해 정의적 측면에서 생산적 어려움을 겪은 학생은 다른 학생과 소통하며 어려움을 겪더라도 문제를 해결할 수 있다는 의지를 지니고, 스스로 고민한 결과를 시도하며 문제해결

을 지속하였다는 점을 알 수 있다. 끈기 있는 도전과 그에 따른 성취감은 문제해결 역량을 함양하는 데 유용하기에(교육부, 2022), 수학적 문제해결 시 정의적 측면에서 어려움을 경험하는 학생들이 생산적으로 어려움을 극복할 수 있도록 지원하는 구체적인 활동 방안이나 피드백 방식을 탐색해야 한다.

넷째, 생산적 어려움은 학생이 문제의 요소와 조건을 이해하고 올바르게 수학적 아이디어를 추론하여, 문제를 끈기 있게 해결하는 데 도움을 준다. 문제 이해 단계에서 학생들은 어려움을 생산적으로 극복하며 문제의 요소와 조건을 이해하였다. 사전에 알고 있는 수학적 지식을 문제 상황과 관련지어 해결계획을 추론하고, 확실하지 않은 자신의 추론 과정을 학생 간 의사소통 또는 교사의 긍정적 피드백으로 정당화하였다. 정당화한 계획을 끈기 있게 실행하고, 잘못된 점이 있을 때 학생은 스스로 해결계획을 수정하여 다시 문제해결을 시도하였다. 즉, 생산적 어려움을 통해 학생은 문제해결 과정과 단계를 스스로 파악할 뿐만 아니라 알고 있는 수학적 지식을 재구성하여 관계적 이해를 할 수 있었다.

요컨대 생산적 어려움은 학생이 겪는 어려움을 수학 학습의 바탕으로 활용하고 문제해결 의지와 끈기를 기르도록 학생에게 도움을 줄 수 있다는 점에서 유의미하다. 따라서 교사는 학생이 수학 문제를 해결하기 어려워할 때 어려움을 직접 제거하지 않고, 활동이나 피드백을 통해 학생이 어려움을 극복할 수 있도록 지원하여야 한다. 이때 학생마다 수학 성취 수준이나 수학적 태도에는 차이가 있으므로, 학생의 개별 특징을 고려하여 구체적인 피드백이나 활동 방안을 개발한다면 생산적 어려움 경험에 더 효과적인 것이다. 인지적, 정의적 측면에서 수학 학습 격차가 커지는 수업 상황에서, 학생이 생산적 어려움을 경험할 수 있도록 지원하는 방안을 모색하여 수학 교수학습에서 활용한다면 학생들의 수학 문제해결에 긍정적인 역할을 할 수 있을 것이라 기대한다.

참 고 문 헌

- 고창수. (2015). **수학적 모델링 활동이 초등학교 5학년 학생들의 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향** [석사학위논문, 서울교육대학교 교육전문대학원].
- Ko, C. (2015). *The effects of mathematical modeling activities on mathematical problem solving abilities and mathematical dispositions for the fifth graders* [Master's thesis, Seoul National University of Education].
- 교육부. (2022). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2022-33[Annex8]. Author.
- 길예빈. (2024). **초등학교 6학년 학생이 수학적 문제해결에서 경험하는 생산적 어려움 분석** [석사학위논문, 서울교육대학교 교육전문대학원].
- Kil, Y. (2024). *Analysis of the productive struggle by the 6th grade students in mathematical problem solving* [Master's thesis, Seoul National University of Education].
- 김상미. (2018). 소수 나눗셈 수업의 계획, 실행, 비평 과정에서 초등교사의 성찰과 실천에 관한 사례 연구. **초등수학교육**, 21(3), 309-327. <http://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.3.309>
- Kim, S. (2018). A case study on reflection and practice of an elementary school teacher in the process of planning, executing and criticizing a lesson on division with decimals. *Education of Primary School Mathematics*, 21(3), 309-327. <http://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.3.309>
- 김서령. (2020). **다전략 수학 문제해결 학습이 초등학생의 수학적 창의성 및 수학적 태도에 미치는 영향** [석사학위논문, 서울교육대학교 교육전문대학원].
- Kim, S. (2020). *The effects of mathematical problem solving with multiple strategies on the mathematical creativity and*

- attitudes of students* [Master's thesis, Seoul National University of Education].
- 김선희, 김수민. (2018). 언어 네트워크 분석법을 이용한 최근 수학교육 연구 동향 탐색: 2017년 수학교육 학술대회 발표 논문을 중심으로. **학교수학**, 20(4), 591-608. <http://doi.org/10.29275/sm.2018.12.20.4.591>
- Kim, S., & Kim, S. (2018). The international research trends of mathematical education by language network analysis method - Based on the titles of 2017 international conference -. *School Mathematics*, 20(4), 591-608. <http://doi.org/10.29275/sm.2018.12.20.4.591>
- 김소민. (2019). 수학적 문제해결에서 Productive Struggle(생산적인 애씀)에 관한 연구. **한국학교수학회논문집**, 22(3), 329-350. <http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.3.008>
- Kim, S. (2019). A study on productive struggle in mathematics problem solving. *Journal of the Korean School Mathematics*, 22(3), 329-350. <http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.3.008>
- 김승환. (2017). 얼굴그림(Face Plot)을 활용한 수학영재교육의 사례연구. **한국학교수학회논문집**, 20(4), 369-385. <http://doi.org/10.30807/ksms.2017.20.4.002>
- Kim, Y. (2017). The study of the gifted students education about doing mathematical task with the face plot. *Journal of the Korean School Mathematics*, 20(4), 369-385. <http://doi.org/10.30807/ksms.2017.20.4.002>
- 김은혜. (2010). **개방형 수학문제 해결과정에서 나타나는 수학 영재교육 대상학생과 일반 학생의 반응 및 행동 특성 분석** [석사학위논문, 서울교육대학교 교육대학원].
- Kim, E. (2010). *An analysis on the responses and the behavioral characteristics between mathematically promising students and normal students in solving open-ended mathematical problems* [Master's thesis, Seoul National University of Education].
- 신항균 · 김태환 · 김리나 · 정나영 · 최혜령 · 황혜진 외 11인. (2023). **수학 6-1**. 비상교육.
- Shin, H., Kim, T., Kim, L., Jeong, N., Choi, H., ... Hwang, H. (2023). *Mathematics 6-1*. Visang.
- 손태권, 황성환 (2021). 토픽 모델링을 활용한 초등수학교육 연구 동향 분석. **한국초등수학교육학회지**, 25(1), 61-80.
- Son, T., & Hwang, S. (2021). Analysis of the research trends of domestic elementary mathematics education using topic modeling. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 25(1), 61-80.
- 우선미 (2016). **초등수학 문제해결과정에서 사용하는 표현유형 선호도 비교분석** [석사학위논문, 서울교육대학교 교육전문대학원].
- Woo, S. (2016). *A comparative analysis on preference of representation types used in elementary mathematics problem solving process* [Master's thesis, Seoul National University of Education].
- 장혜원. (2009). 중형비교분석을 통한 초등학교 수학의 문제해결에 대한 검토. **수학교육학연구**, 19(2), 207-231.
- Chang, H. (2009). Study on problem solving in elementary school mathematics through comparative analysis. *The Journal of Education Research in Mathematics*, 19(2), 207-231.
- 정은실. (2015). 초등학교 수학과 문제해결 교육 재고. **한국초등수학교육학회지**, 19(2), 123-141.
- Jeong, E. (2015). Reconsideration of teaching mathematics problem solving in elementary school. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 19(2), 123-141.
- Aljarrah, A., & Towers, J. (2021). Productive struggle leading to collective mathematical creativity. In D. Olanoff, K. Johnson, & S.M. Spitzer (Eds.), *Proceedings of the forty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1172-1181). Philadelphia, PA.
- Baker, K., Jessup, N. A., Jacobs, V. R., Empson, S. B., & Case, J. (2020). Productive struggle in action. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 113(5), 361-367. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0060>

- Botelho, A. F., Varatharaj, A., Inwegen, E. G. V., & Heffernan, N. T. (2019). Refusing to try: Characterizing early stopout on student assignments. In *Proceedings of the 9th International Learning Analytics & Knowledge (LAK19)* (pp. 391-400). Association for Computing Machinery, Inc.
- Căprioară, D. (2015). Problem solving-purpose and means of learning mathematics in school. *The Proceedings of 6th World Conference on educational Sciences, 191*, 1859-1864. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.332>
- Cirillo, M., & Jennifer, M. (2018). Using classroom discourse as a tool for formative assessment. In A. Edward & L. Valerie (Eds.), *A fresh look at formative assessment* (pp. 21-40). NCTM.
- Common Core State Standards Initiative[CCSSI] (2010). *Common core state standards for mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Retrieved on May 11, 2024 from https://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf
- DiNapoli, J. (2018). *Supporting secondary students' perseverance for solving challenging mathematics tasks* [Doctoral dissertation, University of Delaware].
- Granberg, C. (2016). Discovering and addressing errors during mathematics problem-solving: A productive struggle?. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 33-48. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.02.002>
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003>
- Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science, 38*(5), 1008-1022. <https://doi.org/10.1111/cogs.12107>
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Author.
- O'Dell, J. R. (2018). The interplay of frustration and joy: Elementary students' productive struggle when engaged in unsolved problems. In T. E. Hodges, & G. J., Roy, & A. M., Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 938-945). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.
- O'Dell, J., & Frauenholtz, T. (2020). Elementary students and their self-identified emotions as they engaged in mathematical problem solving. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1360-1368). Cinvestav, Mexico.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.
- Valerio, J. (2021). Tracing take-up across practice-based professional development and collaborative lesson design. In D. Olanoff, K. Johnson, & S. M. Spitzer (Eds.), *Proceedings of the forty-third Annual*

- Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 633-641). Philadelphia, PA.
- Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.
- VanLehn, K., Burkhardt, H., Cheema, S., Kang, S., Pead, D., Schoenfeld, A., & Wetzel, J. (2021). Can an orchestration system increase collaborative, productive struggle in teaching-by-eliciting classrooms?. *Interactive Learning Environments, 29*(6), 987-1005. <https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1616567>
- Warshauer, H. K. (2011). *The role of productive struggle in teaching and learning middle school mathematics* [Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin].
- Young, J. R., Bevan, D., & Sanders, M. (2024). How productive is the productive struggle? Lessons learned from a scoping review. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 12*(2), 470-495. <https://doi.org/10.46328/ijemst.3364>
- Zeybek, Z. (2016). Productive struggle in a geometry class. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(2), 396-415.

Analysis of the productive struggles experienced by sixth-grade students in mathematical problem-solving

Kil, Yeabin

Seoul Shinhyun Elementary School

E-mail : carpediemsom@sen.go.kr

Chang, Hyewon[†]

Seoul National University of Education

E-mail : hwchang@snu.ac.kr

This study analyzed the productive struggles experienced by the sixth-grade elementary school students when productively overcoming the struggles they encountered during mathematical problem-solving. By analyzing their processes of solving multi-strategic and open-ended problems, productive struggles were categorized according to two steps of problem-solving. Additionally, we examined the factors that support students in overcoming these struggles, distinguishing between individual, peer, and teacher influences. The study identifies four types of productive struggles during the problem-understanding step and six during the plan devising and carrying-out step. In the problem-understanding step, the most prevalent type involved overcoming difficulties to grasp the elements and conditions of the problem, while in the plan devising and carrying-out step, persistence in problem-solving was the most common. The factors supporting productive struggles were ranked in order of influence: individual, peer, and teacher support. Teacher support played a significant role during the problem-understanding step, whereas individual and peer supports were more influential during the plan devising and carrying-out step. Based on these findings, the study offers some didactical implications for understanding the characteristics of productive struggles and strategies for effectively supporting students through the problem-solving process.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97C30, 97D70

* Key words : productive struggles, mathematical problem solving, the problem-understanding step, the plan devising and carrying-out step, supporting productive struggles

[†] corresponding author