

History of Studies on the Envelope Curves and Various Definitions of the Envelope

포락선 연구의 역사와 포락선의 여러 가지 정의

CHANG Jeongwook 장정욱

Research on the caustic, the envelope of light rays, began with the geometric optics studies of Huygens and others in the 17th century. One of the most important problems in optics in the 17th century was focusing the sun's rays. This was a problem that had to be solved in order to manufacture various practical optical instruments at the time. Beginning with research on the caustic during this period, the concept of envelope became generalized and expanded to various fields until the 19th century. This paper examines the mathematical history involved in the study of envelope curves. We compare several methods of defining the envelope and provide an example of calculating the envelope accordingly.

Keywords: envelope curves, envelope surfaces, caustic, the Envelope Theorem, evolute, involute; 포락선(包絡線), 포락면(包絡面), 초면(焦面), 포락선 정리, 축폐선(縮閉線), 신개선(伸開線).

MSC: 01A99, 35A15, 51-03, 53C99

1 서론

평면이나 공간에서 주어진 어떤 곡선들의 모임에 대한 포락선(envelope curve, 包絡線)이란 그 모임에 속하는 모든 곡선 각각과 한 점에서 접하는 곡선을 뜻한다. 그리고 공간에서 주어진 곡면들의 모임에 대해서는 그 모임에 속하는 모든 곡면 각각과 한 점에서 접하는 곡면을 포락면(envelope surface, 包絡面)이라고 한다. 포락선이라는 용어는 대상을 둘러싸서 포장한다는 의미로 이해할 수 있다. 예를 들어, 그림 1과 같이 평면에서 중심이 한 직선 위에 있고 반지름이 같은 원들의 포락선은 평행한 두 개의 직선이고, 공간에서 포물면의 모임 $x^2 + y^2 = 4t(z - t)$ ($t \in \mathbb{R}$)에 대한 포락면은 원뿔 $x^2 - y^2 = z^2$ 이다.

수학과 경제학에서 포락선 정리(Envelope Theorem)는 여러 형태가 있다. 수학에서 포락선 정리는 변분법(calculus of variations)에서 축폐선(evolutives)과 관련한 새로운 이론

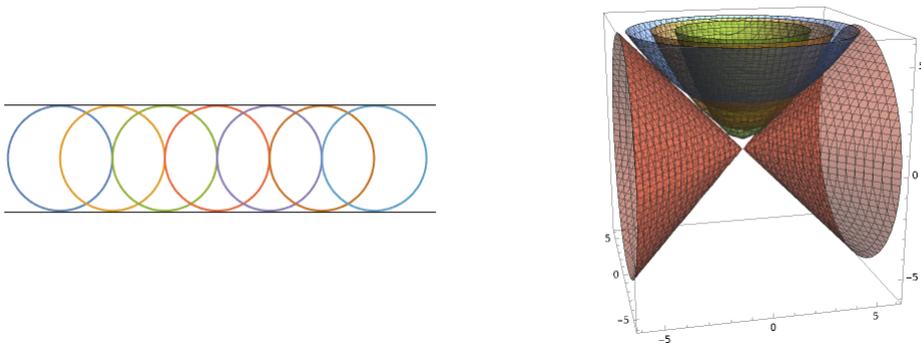


Figure 1. Simple examples of envelope curves and envelope surfaces; 포락선과 포락면의 간단한 예

으로 1894년 제르멜로(Ernst Zermelo, 1871–1953) [30]와 다르부(Jean Darboux, 1842–1917) [10], 1898년 네사(Adolf Kneser, 1862–1930) [15]에 의하여 소개되었다. 경제학에서의 포락선 정리는 단기비용 곡선과 장기비용 곡선에 대한 1931년 바이너(Jacob Viner, 1892–1970)의 고전적인 논문 [28]에서 시작되었다. 경제학에서 포락선을 이용하는 한 예로 그림 2에서와 같이 장기평균비용 곡선(LRAC, long-run average cost)이 단기평균비용 곡선(SRAC, short-run average cost)들의 포락선으로 나타나는 것을 볼 수 있다 [9, 19].

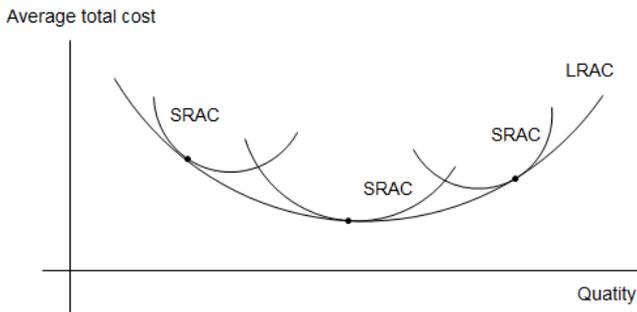


Figure 2. Example of an envelope diagram in economics; 경제학에서의 포락선 관계 도식의 예

물리와 공학의 파동 이론에서는 그림 3에서와 같이 진동하는 신호 파동의 극점들을 연결하는 부드러운 곡선을 포락선이라고 한다. 이는 접하는 곡선이라는 수학에서의 포락선과는 다른 개념이다.

포락선은 수학의 여러 분야의 연구에도 이용된다. 클레로(Clairaut)의 방정식 같은 예에서 상미분방정식의 일반해를 곡선의 모임이라고 할 때 그 포락선이 주어진 상미분방정식의 특수해가 된다. 1계 편미분방정식에서는 단순한 해들로부터 더 복잡한 해를 만들어내는 방법으로 포락선을 이용하기도 한다. 1계 편미분방정식에 대한 몽주 원뿔(Monge cone)

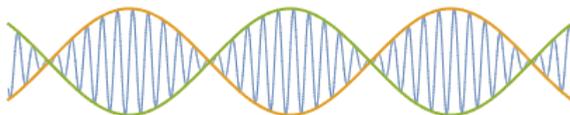


Figure 3. Envelopes for waves in physics and engineering; 물리와 공학에서의 파동에 대한 포락선

은 포락선과 연관된 개념이다. 리만기하에서 어떤 리만다양체의 한 점 P 를 지나는 측지선 (geodesic)들의 모임이 포락선을 가지면 점 P 가 각 측지선이 포락선과 교차하는 점에서 켈레점(conjugate point)를 가진다는 사실이 알려져 있다. 이 사실은 더 일반적으로 변분법(calculus of variation)에서 함수들에 대하여 적용된다. 이외에도 행렬이론(matrix theory), 쌍곡기하(hyperbolic geometry) 등의 수학 분야에서도 포락선이 이용된다.

포락선 연구는 미분기하의 초기 시대라고 할 수 있는 17세기에 광학 도구 개발의 필요에 의하여 연구된 초면(caustic, 焦面), 즉 광선의 포락선에 대한 연구에서 시작되었고, 이후 초면은 광선뿐만 아니라 파동을 다루는 여러 분야에서 다루게 되었다. 초면이 중요한 역할을 하는 기술 분야로 수중음향학(hydroacoustics)과 항공음향학(aeroacoustics)을 들 수 있다. 이러한 분야에서 초면과 관련된 효과를 비균질 또는 비선형 매질에서 소리의 전파와 연결하여 분석한다 [6, 21]. 또한 레이저 초점 품질을 평가를 위한 레이저 기술 [18], 원통형 거울을 이루는 광섬유들을 통한 빛의 전달을 연구하는 광섬유 통신 [5]에서도 실질적으로 사용된다. 그리고 우주의 아주 먼 영역을 탐색하는 천문학에서 멀리 있는 별에서 방출된 빛을 관측할 때 별과 관측자 사이에 있는 거대한 물체의 중력장에 의한 빛의 편향(deflection)에 의하여 초면이 만들어지는데, 여기에서 중력장은 렌즈 역할을 하며 지구에 도달하는 별의 이미지는 사실 ‘중력 렌즈 현상’의 결과로 형성된 초면의 단면이고, 이를 분석하여 중요한 정보를 얻는다 [20].

이 논문에서는 포락선 곡선 연구에 관련된 수학적 역사를 살펴보고 포락선을 정의하는 몇 가지 방법을 비교하여 그에 따라 포락선을 구하는 예를 제시한다.

2 포락선 연구의 역사

포락선 연구는 미분기하의 초기 시대라고 할 수 있는 17세기에 광선의 포락선인 초면(caustic, 焦面)에 대한 연구에서 시작되었고, 이후 19세기까지 ‘envelope’이라는 용어가 자연스럽게 널리 사용된 것으로 보인다. 영어 단어 caustic의 어원은 태운다는 의미의 그리스어 $\kappa α υ σ τ ὶ ς$ 이다. 17세기에 광학에서 가장 중요한 문제의 하나가 태양 광선을 초점에 모으는 것이었고, 이는 당시의 여러 실용적인 광학기구 제작을 위하여 해결해야 하는 문제였다. 여기에서 초면 곡선은 반들거리는 곡면에 반사된 광선의 포락선(catacaustic) 또

는 주어진 면에 의하여 굴절된 광선의 포락선(diacoustic)으로 나타났다. 광선의 포락선인 초면에 대한 이론은 17세기에 호이겐스 [14](Christiaan Huygens, 1629–1695), 배로우(Isaac Barrow, 1630–1677), 뉴턴(Isaac Newton, 1643–1727) 등의 많은 뛰어난 수학자들에 의하여 기하적 광학과 연관하여 연구되었다. 이러한 초면 곡선들이 수학의 역사에서 포락선의 많은 예를 제시했고, 원에 반사된 광선들의 초면 곡선의 길이를 구하는 라이프니츠(Leiniz, 1646–1716) 등의 연구로 이어졌다.

라이프니츠 시대 이전에는 본격적으로 미분기하학(differential geometry)이라고 할 수 있는 연구는 없었다. 이전에도 기하학에 무한소를 적용한 사례는 많았지만 곡선, 곡면, 입체에 대한 길이, 넓이, 부피를 구하는 문제와 특별한 곡선에 대한 연구 등이었으며 미분기하학에서는 연구 주제가 아니라 간단한 예시 정도로만 언급되는 내용이다. 케플러(Kepler), 데카르트(Descartes), 페르마(Fermat), 카발리에리(Cavalieri) 등의 곡선과 무한소에 대한 많은 새로운 연구들은 대부분 매우 특수하거나 매우 일반적인 성격의 것이었다.

미적분학이 기하학에 최초로 활용된 것은 초면 곡선의 길이나 둘러싼 넓이를 구하는 문제였다. 그리고 역문제로 광선의 출발점과 초면 곡선을 먼저 정하고, 이를 만드는 거울면의 모양을 찾는 문제(anticaustic)도 연구되었다. 미분기하학의 초기 역사에서 중요한 위치를 차지하는 1673년 발간된 호이겐스의 진자 시계에 관한 저서 *Horologium oscillatorium*에서 정확한 방법으로 시간을 측정하는 문제에 대한 새로운 수학적 이론을 제시했다. 이 책의 장 중 하나는 평면에서 축폐선(evolute, 縮閉線)과 신개선(involute, 伸開線)에 대한 완전한 이론을 제시하고 있다. 축폐선에 대해 본래의 곡선을 신개선이라고 한다. 축폐선은 본래의 곡선(신개선)의 법선군(法線群)의 포락선이다. 축폐선을 본래 곡선으로 생각하면 신개선은 본래의 곡선(축폐선)에 접하는 한 직선을 곡선을 따라 움직일 때 직선 위의 한 정점이 그리는 곡선이 된다. 호이겐스는 진자의 진동주기가 위도에 따라 달라지지 않는 사이클로이드 진자 문제를 축폐선과 신개선 이론으로 설명했다 [26].

빛의 실체가 무엇인가 하는 문제는 17세기 후반 이후 몇 백년 동안 과학자들이 논쟁을 벌여온 문제였다. 호이겐스는 저서 《빛에 대한 논고》(*Traité de la Lumière*, 1690)에서 빛의 파동성에 근거하여 빛이 어떻게 전파하여 나가는 지에 대한 원리를 기술했다. 호이겐스 원리(Huygens' principle)로 불리는 이 원리는 파면(wave front)의 각 점들이 새로운 구면파를 발생시키는 점광원이 되고, 무수히 많이 생기는 이 구면파의 바깥쪽 포락선이 그 다음 파면을 형성한다는 것이다.

호이겐스는 이 이론에 기초하여 빛의 반사와 굴절의 법칙을 기하학적으로 설명할 수 있었다. 우리가 스넬의 법칙(Snell's law)이라고 부르는 일반 굴절(ordinary refraction)의 원리를 호이겐스가 다음과 같은 도식 [Figure 4]으로 이해하였다.

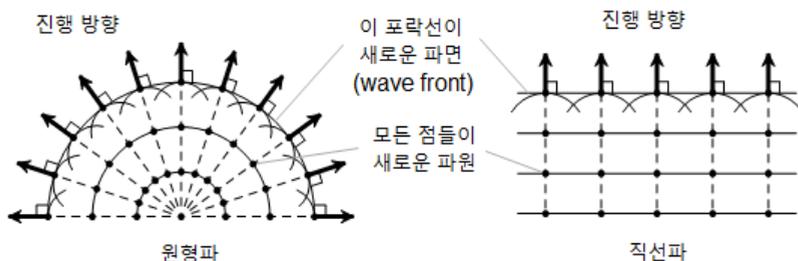


Figure 4. Huygens' principle for the propagation of light in a plane; 평면에서의 빛의 전파에 대한 호이겐스의 원리

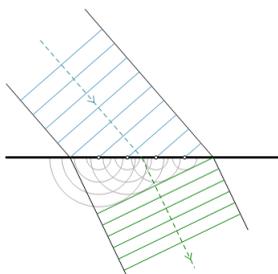


Figure 5. Refraction of light by Huygens' principle; 호이겐스의 원리에 의한 빛의 굴절

여기에서 빛 파동이 진행 속도가 더 높은 매질에서 진행 속도가 더 낮은 매질로 일정한 방향으로 진행할 때, 선분으로 나타낸 연이은 파면(wave front)이 매질의 경계면을 일정한 각을 이루면서 통과한다. 이때 경계면에 도달한 순서에 따라 각 점광원에서 발생하는 구면파의 포락선이 빛의 원래 진행 방향에서 꺾여 진행되는 굴절 현상이 나타나는 것을 볼 수 있다.

한편 뉴턴은 저서 《광학》(Opticks, 1704)에서 빛은 작은 입자의 흐름이라고 주장했다. 이 당시의 실험 기술로는 파장이 매우 짧은 빛의 파동적 성질을 확인할 수 없었고, 또 뉴턴의 권위로 인해 입자 이론이 우세하였다. 이후 1821년 프레넬(Augustin-Jean Fresnel, 1788-1827)이 호이겐스의 파동 이론을 받아들여 빛의 직선 전파(rectilinear propagation)와 회절 현상(diffraction effects)을 완벽하게 설명하여 오늘날 호이겐스 원리를 호이겐스-프레넬 원리(Huygens-Fresnel principle)라고도 부른다. 결과적으로 빛이 때로는 파동으로 때로는 입자로 작용하는 이중성을 설명하고자 했던 아인슈타인(Albert Einstein, 1879-1955), 플랑크(Max Planck, 1858-1947), 드 브로이(Louis de Broglie, 1892-1987), 보어(Niels Bohr, 1885-1962), 슈뢰딩거(Erwin Schrödinger, 1887-1961)를 비롯한 여러 과학자의 연구에서 양자역학이 탄생했다.

빛의 포락선, 즉 초면에 관한 연구들이 17세기 후반까지 활발하게 이루어지면서 초면의 실험적, 기하적, 대수적인 모든 면이 흥미로운 연구 대상이 되었다. 이후 제이콥 베르

누이(Jakob Bernoulli, 1654–1705)와 존 베르누이(Johann Bernoulli, 1667–1748)가 초면 곡선에 대한 연구를 발전시켰다. 최초의 미분학(Differential Calculus) 교재인 1696년 로피탈(L'Hôpital, 1661–1704)의 저서 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*의 목차를 보면 17세기에 이미 초면 곡선은 주요 주제였음을 알 수 있다 [11]. 이러한 초기 기하적 광학 연구는 17세기 끝 무렵 미분기하학의 기본적 원리가 되었고, 수리물리학이라는 새로운 분야의 토대가 되었다 [24]. 19세기에 이르러 광학 현상은 3차원에서의 광선 시스템, 직선의 합동에 대한 연구로 이어졌다. 1808년 말루스(Etienne Malus, 1775–1812)가 어떤 곡면에 수직인 곡선들의 모임을 나타내는 수직 합동(normal congruence)이라는 개념을 도입했다. Malus-Dupin의 정리는 한 곡면에 대한 수직 합동 직선들은 몇 번의 반사와 굴절을 거쳐도 역시 수직 합동임을 보였다 [11].

기하적 광학에 대한 책들 [12], [13]에서 초면에 대한 연구를 찾을 수 있고, 곡선에 대한 책들 [16], [17]에서도 언급되었다. 케일리(Arthur Cayley, 1821–1895)가 1857년에 쓴 논문 [8]에서 반사뿐만 아니라 굴절에 대해서도 연구하였으며, 원의 경우에 자세한 계산을 하였다. 3차원 공간에서 포물면의 초면 등의 특정 초면에 대한 연구는 세이델(P. L. von Seidel, 1821–1896)에 의하여 정립되었다 [25].

종이를 접어 포락선을 나타내는 다양한 방법에 대한 관심도 나타났으며, 특히 종이를 접어 포물선이 나타나도록 하는 방법은 잘 알려져 있다. Row가 1917년에 출간한 짧은 책 [23]은 이 방법을 비롯하여 기하적 종이접기에 관한 많은 흥미로운 내용을 포함하고 있다. Yates의 1952년 책 [29]에서 이 방법을 소개하고 있으며, 이외에도 많은 곡선에 대하여 풍부한 정보를 담고 있다. Pohl이 1986년 출간한 스트링 디자인에 관한 책 [22]에는 이 방법에 대한 또 다른 접근법이 소개되어 있다.

포락선에 관한 수학적 이론의 고전적인 결과를 Arnold [1]의 9장과 [27]에서 찾아볼 수 있다. 특히 Arnold 등의 책([2], [3], [4])에서 파면(wave fronts)과 초면의 특이점을 연구하여 Lagrangian mapping과 Legendrian mapping에 관한 이론을 발전시켰다.

3 현대 미분기하학에서 포락선을 정의하는 여러 가지 방법

초기 연구부터 현대에 이르기까지 포락선의 직관적인 정의는 주어진 여러 곡선과 각각 한 점에서 접하는 곡선이 될 것이다. 그러나 이러한 정의를 통하여는 직접적인 계산을 하기 어렵다는 단점이 있다. 따라서 포락선의 효율적인 응용을 위하여 동치가 아니더라도 여러 가지의 정의를 생각하려는 노력이 있어 왔다. 예를 들어 계산의 편리를 위하여 다변수함수와 그 편미분을 포함하는 연립방정식을 만족하는 점들의 집합으로 정의하는 방식이 널리 사용된다. 그런데 이 정의를 따르면 직관적인 정의에 따르는 포락선 이외의 다른 곡선이

나타나는 경우가 생기기도 한다. 이 절에서는 포락선의 몇 가지 정의와 그에 따른 포락선의 예를 통하여 각 정의들의 차이를 간단히 살펴보고자 한다.

다음 그림에서 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 에 각 원 $(x - t)^2 + y^2 = 1$ 이 한 점에서 접하며, 그 접점에 가까운 근방에 그 원과 가까이 있는 원의 교점이 놓인다. 이러한 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 을 주어진 원들의 모임 $F(t, x, y) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ 에 대한 포락선으로 정의하는 것이 일반적인 개념이다.

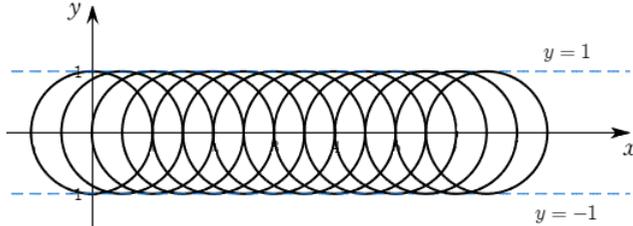


Figure 6. The concept of envelope; 포락선의 개념

열린구간에서 변하는 t 에 대하여 부드러운 함수(smooth function)인 다변수함수 $F(t, x, y)$ 를 생각하고, 곡선들의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 에 속하는 각 곡선을 집합 $\Gamma(t)$ 로 나타내자. 즉,

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \mid F(t, x, y) = 0\}.$$

이제 $F(t, x, y) = 0$ 으로 주어진 곡선들의 모임에 대한 포락선의 정의 세 가지를 살펴보도록 한다.

정의 1: 다음과 같이 정의되는 점들의 집합 E_1 을 곡선의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 의 포락선이라 한다.

$$E_1 = \left\{ (x, y) \mid \text{어떤 } t \text{에 대하여 } F(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 0 \right\}.$$

예 1. 실수 t 마다 주어진 곡선의 모임 $F(t, x, y) = (x - t)^2 + y^2 - 1 = 0$ 에 대하여

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 2(t - x) = 0$$

과 연립하여 풀면 $x = t, y^2 = 1$ 을 얻는다. 따라서 **정의 1**에 따라 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 이 포락선이다. ◆

정의 2: 곡선의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 에 속하는 각 곡선을 $\Gamma(t)$ 라 할 때, 같은 극한으로 수렴하는 어떤 두 수열 $t_n \neq t'_n$ 에 대하여 두 곡선의 교점 $(x_n, y_n) \in \Gamma(t_n) \cap \Gamma(t'_n)$ 이 수렴하는 점 (x, y) 의 집합 E_2 를 곡선의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 의 포락선이라 한다.

예 2. 그림 6에서 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 위에 있는 점 (x, y) 는 원 두 개를 점점 가까이 잡으면서 교점 (x_n, y_n) 을 찍을 때 (x_n, y_n) 의 극한점으로 볼 수 있다. 따라서 정의 2에 따라 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 이 포락선이다. ◆

정의 3: 곡선의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 에 속하는 각 곡선을 $\Gamma(t)$ 라 할 때, 어떤 부드러운 곡선 E_3 이 존재하여 각 t 에 대하여 곡선 $\Gamma(t)$ 위의 어떤 점 $(X(t), Y(t))$ 에서 두 곡선 E_3 와 $\Gamma(t)$ 가 같은 접선을 가지면, 곡선 E_3 를 곡선의 모임 $F(t, x, y) = 0$ 의 포락선이라 한다.

예 3. Figure 6에서 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 은 각 원 $\Gamma(t)$ 과 점 $(X(t), Y(t)) = (t, 1)$ 또는 $(X(t), Y(t)) = (t, -1)$ 에서 접한다. 따라서 정의 3에 따라 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 이 포락선이다. ◆

이러한 세 가지 정의의 포락선이 항상 일치하는 것이 아니다. 이 중 정의 3이 직관적인 기하적 접근 방식이라고 할 수 있다. 일반적으로 $E_2 \subset E_1$, $E_3 \subset E_1$ 인 관계가 성립하며, $E_2 = E_1$, $E_3 \subset E_1$, $E_3 \subset E_2$ 가 각각 성립하는 특정한 조건이 알려져 있다 [7]. 특히 $E_2 = E_1$ 이 성립하는 조건을 다음 정리에서 확인할 수 있다.

정리 1: 모든 $(x, y) \in E_1 \cap \Gamma(t)$ 에 대하여 $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x, y) \neq 0$ 이 성립하고, $F(t, x, y) = 0$ 을 만족하는 모든 (t, x, y) 에 대하여 $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ 또는 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 중 하나가 성립하면 $E_2 = E_1$ 이다.

위의 정리 1의 조건을 만족하지 않으면 E_1 이 E_2 와 일치하지 않는 경우가 있음을 다음과 같은 간단한 예에서 볼 수 있다.

예 1-1. Figure 7에서 원 $(x - t^3)^2 + y^2 = 1$ 들의 포락선은 직선 $y = 1$ 과 $y = -1$ 이다. 이는 Figure 6에서와 같이 마찬가지이다.

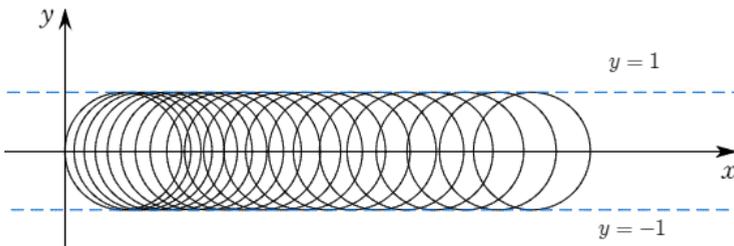


Figure 7. The envelope of the family of circles $(x - t^3)^2 + y^2 = 1$; $(x - t^3)^2 + y^2 = 1$ 의 포락선

그런데 여기에서 **정의 1**을 적용하여 $F(t, x, y) = (x - t^3)^2 + y^2 - 1 = 0$ 과

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = -6t^2(x - t^3) = 0$$

을 동시에 만족하는 점 (x, y) 를 모두 찾아 포락선 E_1 을 구하면 $y = 1$ 과 $y = -1$ 뿐만 아니라, $t = 0$ 일 때의 원 $\Gamma(0) : x^2 + y^2 = 1$ 도 포함된다. 그러나 원 $x^2 + y^2 = 1$ 은 **정의 2**나 **정의 3**에 의한 포락선이 될 수 없다. 여기에서

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x, y) = -12t(x - t^3) + 18t^4$$

은 $t = 0$ 일 때, 즉 $(x, y) \in E_1 \cap \Gamma(0)$ 에서 $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x, y) = 0$ 이 되어 **정리 1**의 조건을 만족하지 않는다. ◆

한편 $F(t, x, y) = 0$ 꼴로 주어지지 않고 x, y 가 각각 어떤 매개변수 s 의 식으로 주어진 곡선들, 즉 두 개의 매개변수 t 와 s 의 식으로 주어진 곡선들의 모임에 대해서는 포락선의 정의를 다음과 같이 세울 수 있다.

정의 4: 각 t 마다 곡선 $\Gamma(t)$ 가 x, y 가 매개변수 s 로 표현되는 곡선으로 주어지는 경우, 즉

$$\Gamma(t) : x = x(t, s), y = y(t, s)$$

인 경우를 생각하자. 이때 $\Gamma(t)$ 의 식과 함께 식

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = 0$$

을 만족하는 점들의 집합 E_4 을 곡선의 모임 $\Gamma(t) : x = x(t, s), y = y(t, s)$ 의 포락선이라 한다.

예 4. Figure 6의 원들이 실수 t 마다 $\Gamma(t) : x(t, s) = t + \cos s, y = \sin s$ ($0 \leq s \leq 2\pi$)으로 주어졌을 때, 식

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin s \\ 0 & \cos s \end{vmatrix} = \cos s = 0$$

과 연립하면 $x = t, y = \pm 1$ 을 얻는다. 따라서 **정의 4**에 의하여 두 직선 $y = \pm 1$ 이 포락선이다. ◆

마지막으로 **정의 1**과 **정의 4**를 사용하여 포락선의 식을 찾는 예 세 개를 더 살펴보도록 한다.

예 5. 매개곡선 $x(\theta) = \cos \theta + \theta \sin \theta$, $y(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \infty$)의 축폐선 (evolute)을 포락선의 정의 1을 이용하여 찾아보자. 곡선 위의 점 $(x(\theta), y(\theta))$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta - \cos \theta + \theta \sin \theta}{-\sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta} = \frac{\theta \sin \theta}{\theta \cos \theta} = \tan \theta$$

이므로 점 $(x(\theta), y(\theta))$ 에서의 법선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{\tan \theta} (x - (\cos \theta + \theta \sin \theta)) + \sin \theta - \theta \cos \theta$$

이다. 이 식을 정리하면 $y \sin \theta - \sin^2 \theta + \theta \sin \theta \cos \theta = -x \cos \theta + \cos^2 \theta + \theta \sin \theta \cos \theta$, 즉,

$$y \sin \theta + x \cos \theta = 1$$

을 얻는다. 이 곡선의 모임 $F(\theta, x, y) = y \sin \theta + x \cos \theta = 1$ 에 대하여

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, x, y) = y \cos \theta - x \sin \theta = 0$$

과 연립하면 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ 이다. 따라서 정의 1에 의하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 포락선이다.

Figure 8에서 주어진 나선의 법선들에 대한 포락선, 즉 주어진 나선의 축폐선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 임을 볼 수 있다. 참고로 이 그림에서 주어진 나선의 모양이 아르키메데스 나선 (Archimedean Spiral)과 비슷해보이지만, 정확히 같은 것은 아니다.

한편, 이 문제의 역으로 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대하여 정의에 따라 신개선을 구해보면 매개곡선 $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$, $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \infty$)으로 얻어지는 것을 확인할 수 있다. ◆

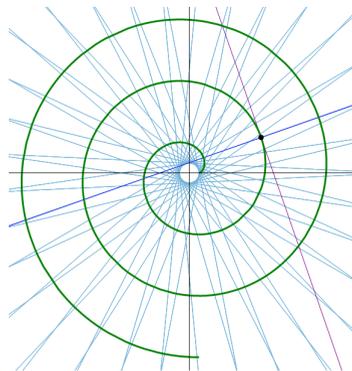


Figure 8. The evolute of the parametric curve $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$, $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \infty$); 매개곡선 $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$, $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \infty$)의 축폐선

예 6. 타원들의 모임 $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1$ ($0 < t < 1$)에 대한 포락선을 정의 4를 이용하여 찾아보자.

각 타원을 곡선 $\Gamma(t) : x(t, \theta) = t \cos \theta, y = (1 - t) \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)로 나타내고, 식

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -t \sin \theta \\ -\sin \theta & (1 - t) \cos \theta \end{vmatrix} = (1 - t) \cos^2 \theta - t \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - t = 0$$

과 연립하면 $x = \cos^3 \theta, y = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta = \sin^3 \theta$ 을 얻는다. 따라서 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 이 포락선의 식이다.

Figure 9에서 주어진 타원들의 모임에 대하여 마름모별 모양(astroid)의 포락선을 볼 수 있다. ◆

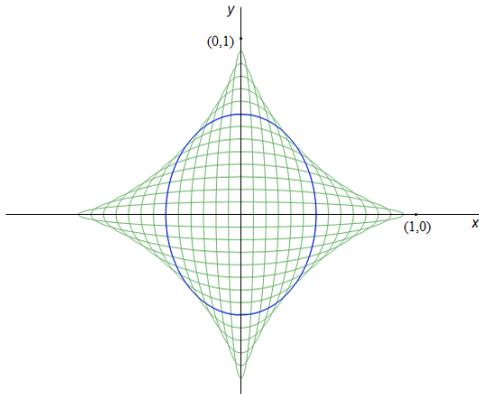


Figure 9. The envelope of the family of ellipses $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1$ ($0 < t < 1$); 타원들의 모임 $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{(1-t)^2} = 1$ ($0 < t < 1$)의 포락선

예 7. 타원들의 모임 $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{1-t^2} = 1$ ($0 < t < 1$)에 대한 포락선을 정의 4를 이용하여 찾아보자.

각 타원을 곡선 $\Gamma(t) : x(t, \theta) = t \cos \theta, y = \sqrt{1-t^2} \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)로 나타내고, 식

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos \theta}{t} & -\sin \theta \\ -\frac{t \sin \theta}{\sqrt{1-t^2}} & \sqrt{1-t^2} \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 \theta - t^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

즉, 식 $|t| = |\cos \theta|$ 과 연립하면 $|x| = \cos^2 \theta, |y| = \sin^2 \theta$ 을 얻는다. 따라서 $|x| + |y| = 1$ 이 포락선의 식이다.

그림 10에서 주어진 타원들의 모임에 대하여 정사각형 마름모 모양의 포락선을 볼 수 있다. ◆

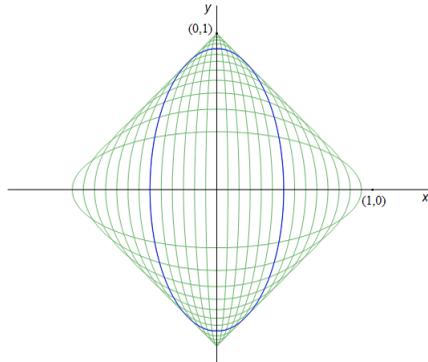


Figure 10. The envelope of the family of ellipses $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{1-t^2} = 1$ ($0 < t < 1$); 타원들의 포락선
 모임 $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{1-t^2} = 1$ ($0 < t < 1$)의 포락선

References

1. V. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, second edition, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, New York, 1980. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1>
2. V. ARNOLD, *Singularities of caustics and wave fronts, Mathematics and its Applications (Soviet Series)* 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
3. V. ARNOLD, et al., *Singularity Theory. II, Dynamical Systems VIII, Encyclopaedia Math. Sci.*, Vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
4. V. ARNOLD, S. GUSEIN-ZADE, A. VARCHENKO, *Singularities of differentiable maps. Vol. I*, translated from Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds, Monographs in Mathematics 82, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5154-5>
5. T. BARANIECKI, et al., *System for laser microcladding of metal powders*, *Przegląd Spawalnictwa* 9, 2011.
6. F. BERON-VERA, et al., Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment, *J. Acoust. Soc. Am.* 114(2003), 1226–1242.
7. J. BRUCE, P. GIBLIN, What Is an Envelope?, *The Mathematical Gazette* 65(433)(1981), 186–192.
8. A. CAYLEY, A memoir upon caustics, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 147(1857), 273–312; *Collected Works* 2. 336–380. <https://doi.org/10.1098/rstl.1857.0014>
9. A. CLAUSEN, C. STRUB, *A general and intuitive envelope theorem*, Edinburgh School of Economics Discussion Paper Series, ESE Discussion Papers, No. 274, 2016.
10. J. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, Band 2, Buch 5, 1894.
11. M. FRIEDMAN, K. KRAUTHAUSEN, (edited) *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*, 2022, 180–181. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-97833-4>
12. R. HEATH, *Geometrical Optics*, Cambridge University Press, 1887.

13. R. HERMAN, *A Treatise on Geometrical Optics*, Cambridge University Press, 1900.
14. C. HUYGENS, *Abhandlung über das licht* (written 1678, published 1690), German transl., Leipzig, 1913.
15. A. KNESER, Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximum oder Minimum einfacher Integrale aus der Theorie der Zweiten Variation, *Math. Annalen*, Band 51, 1898.
16. J. LAWRENCE, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover, New York, 1972.
17. E. LOCKWOOD, *A Book of Curves*, Cambridge University Press, 1961.
18. B. McDONALD, W. KUPERMAN, Time domain formulation for pulse propagation including nonlinear behavior at a caustic, *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(1987), 1406–1417.
19. P. MILGROM, I. SEGAL, Envelope theorems for arbitrary choice sets, *Econometrica*, 70(2)(2002), 583–601. <https://doi.org/10.1111/1468-0262.00296>
20. S. PATELA, *Principle of operation, properties and parameters of optical fibers*, 2013. <http://www-old.wemif.pwr.wroc.pl/spatela/pdfy/0020.pdf>
21. B. PERCEL, *The effect of caustics in acoustics. inverse scattering experiments*, PhD dissertation, Houston, Texas: Rice University; 1989. <http://www.caam.rice.edu/caam/trs/89/TR89-03.pdf>
22. V. POHL, *How to Enrich Geometry Using String Designs*, National Council of Teachers of Mathematics, 1986.
23. T. ROW, *Geometric Exercises in Paper Folding*, W. W. Beman and E. E. Smith, eds, Open Court, 1917.
24. G. SCARPELLO, A. SCIMONE, The Work of Tschirnhaus, La Hire and Leibniz on Catacaustics and the Birth of Envelopes of Lines in the 17th Century, *Arch. Hist. Exact Sci.* 59(2005), 223–250.
25. P. von SEIDEL, Über die Brennfläche eines Strahlenbündels, welches durch ein System von centrirten sphärischen Gläsern hindurch gegangen ist, *Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, (1862) 695–705.
26. D. STRUIK, Outline of a History of Differential Geometry: I, *Isis, Apr.*, 1933, 19(1)(1933), 92–120.
27. R. THOM, Sur la théorie des enveloppes, *J. Math. Pures Appl.* 41(9)(1962), 177–192.
28. J. VINER, Cost Curves and Supply Curves, *Zeitschrift für Nationalökonomie* 3(1)(1931), 23–46.
29. R. YATES, *Curves and Their Properties*, National Council of Teachers of Mathematics, 1952 (reprinted 1974).
30. E. ZERMELO, *Untersuchungen zur Variations-Rechnung*, Berlin(dissertation), 1894.