

해양 및 대기 순환 수치모델에 사용하는 연직 좌표계에 대한 고찰

A Review on the Vertical Coordinate Systems used in Oceanic and Atmospheric Circulation Numerical Model

최혁진* · 정신태** · 조홍연*** · 고동희****

HyukJin Choi*, Shin Taek Jeong**, Hong-Yeon Cho*** and Dong-Hui Ko****

요지 : 순환 모델 연구를 위한 수치 방법에서는, 증가하는 온실가스 배출에 대한 해양과 대기의 물리적 반응을 모의하기 위해 다양한 연직 좌표계를 사용한다. 본 연구에서는 해양 및 대기 순환 수치모델에 자주 사용하는 4종류의 연직좌표계, 즉 고도, 일반, 압력, 그리고 무차원 연직좌표계에 대하여 소개한다. 최종적으로, 연직좌표계로 표현된 정수압 방정식, 연직속도, 수평방향 운동방정식, 그리고 연속방정식을 도입하고, 연직좌표계에 대한 장단점을 정리하여, 수치모형 개발 정확성을 도모하였다.

핵심용어 : 순환 모델, 연직 좌표계, 정수압 방정식, 연직속도, 수평방향 운동방정식, 연속방정식

Abstract : In a numerical method for the study of the circulation model, various vertical coordinate systems are used to simulate the physical response of the ocean and atmosphere to the increasing greenhouse gas emission. In this study, four types of vertical coordinate systems frequently used in oceanic and atmospheric circulation numerical models, i.e., height, general, pressure, and normalized vertical coordinate systems, respectively are introduced. Finally, the hydrostatic pressure equation, vertical velocity, equation of horizontal motion, and continuity equation expressed in a vertical coordinate system were introduced, and the pros and cons of the vertical coordinate system were summarized to promote the accuracy of numerical model development.

Keywords : the circulation model, vertical coordinate systems, hydrostatic pressure equation, vertical velocity, equation of horizontal motion, continuity equation

1. 서 론

최근 기후변화로 인하여 세계 해수면 상승은 급격히 가속화되고 있으며, 이러한 해수면 상승은 직접적으로 국토유실과 연안지역의 침수와 범람 위험을 증가시키는 요인이 된다. 이에 따라 IPCC 제6차 보고서의 SSP(Shared Socioeconomic Pathways)를 적용한 우리나라 주변 해역의 해수면 상승에 대한 관심이 고조되고 있다.

해양 및 대기의 운동은 유체역학, 열역학방정식 등으로 설명되는 물리 법칙의 적용을 받는다. 이러한 기본방정식들은 잘 알려져 있으나 비선형 편미분방정식 형태가 대부분이기 때문에 수치해석을 이용하여 구한 수치해를 이용하여 자연 현상을 규명하고 있다. 산이나 연안 등의 지형을 대상으로,

유한차분 수치해석을 적용하는 경우, 절단오차를 제거하는 것이 불가능하다. 따라서 지형과 연직좌표계 선택을 통합하여 신중하게 검토한다.

대기 및 해양모델링에 있어서 다양한 연직좌표계를 사용하고 있다. 수치모델링시 연직 좌표계로서는 직교좌표계에서 연직상향 방향을 기준으로 하는 z 좌표계를 많이 사용하였다. 그러나, 연직좌표계로서 압력 연직 좌표계를 사용하면 정수압 근사 등의 관계식이 매우 간단하게 표현되는 등의 장점이 있기 때문에, 다양한 연직좌표계에 대한 이론적 연구를 수행한다.

Sutcliffe(1947)은 고도를 연직축으로 사용하는 z 좌표계를 대신하여 압력 p 를 연직축으로 사용하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 저면 경계조건을 항상 격자와 일치시켜

* (주)해양해양기술 대표(Chief Executive Officer, Coast and Ocean Technology Research Institute)

** (주)해양해양기술 고문(Corresponding author: Shin Taek Jeong, Advisor, Coast and Ocean Technology Research Institute, A-2511 Hyundai Knowledge Industrial Center, 70 Dusan-ro Geumcheon-gu, Seoul 08584, Korea, Tel: +82-2-2104-6632, Fax: +82-2-2104-6601, stjeong@wku.ac.kr)

*** 한국해양과학기술원 해양빅데이터·AI센터 책임연구원(Principal Research Scientist and Professor, Marine Bigdata and AI Center, Korea Institute of Ocean Science and Technology, Univ. of Science and Technology)

**** 한국해양과학기술원 해양공간개발·에너지연구부 책임연구원(Principal Research Scientist, Ocean Space Development and Energy Research Department, Korea Institute of Ocean Science and Technology)

오차를 축소하는 방법으로 이후 다양한 방법이 제시되었다. Phillips(1957)는 압력을 무차원화한 변수 σ 를 도입하였고, 이후 고도를 무차원화한 변수, 등온위를 무차원화한 변수 등 다양한 방법으로 변형된 연직 좌표계를 제시하였다 (Kasahara, 1974; Sundqvist, 1979). Arakawa and Lamb(1977), Simmons and Burridge(1981), Arakawa and Konor(1996) 등은 혼합 좌표계를 사용한 수치모형을 제시하였다. 한편, 다양한 연직좌표계를 해양모델링에 적용한 예는 Kowalik and Murty (1993), Haidvogel and Beckmann(1999), Mellor et al.(2002), Chandrasekar(2022) 등이 있다. 본 연구에서는 주로 대기 및 해양모델링에서 사용하는 다양한 연직좌표계에 대하여 검토하였다.

유체역학에 사용하는 기본방정식과 다양한 연직좌표계를 검토하고, 부록 A-D에서는 주요 관계식 유도 과정을, 부록 E에서는 사용한 기호를 정리하였다.

2. 고도 연직좌표계를 이용하여 표현한 기본 방정식

동쪽, 북쪽, 그리고 상향 방향을 양으로 하는 직교좌표계 x, y, z 와 시간 t 를 사용하여 수평방향 운동방정식을 기술하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} + f\mathbf{k} \times V = -\frac{1}{\rho}\nabla p + F \quad (1a)$$

단,

$$\begin{aligned} V &= ui + vj, \nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla + w\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (1b)$$

여기서, i, j, k 는 각각 x, y, z 축 방향의 단위벡터; ∇ 는 수평방향 델 연산자, V 는 수평방향 속도, u 와 v 는 V 의 x, y 방향 속도 성분, w 는 연직 속도, d/dt 는 전미분, f 는 코리올리 매개변수($\equiv 2\Omega\sin\zeta$), Ω 는 지구 자전 각속도, ζ 는 고도, ρ 는 밀도, p 는 압력 그리고 F 는 단위 질량당 마찰력이다.

정수압 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

여기서, g 는 중력가속도이고, 식(2)는 연직방향 운동의 좋은 근사식이 된다. 정수압 방정식(2)는 높이와 압력을 연결하는 관계를 제공하여 다양한 연직좌표계에서 많이 사용하고 있다.

한편, 연속방정식은 다음과 같다(부록 A 참조).

$$\frac{d}{dt} \ln \rho + \nabla \cdot V + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3a)$$

또는,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3b)$$

고도 연직좌표계(Height vertical coordinate system, or Geometric vertical coordinate system)로 표현된 기본방정식들은 간단하고 잘 알려져 있지만, 수치모델링을 하는 경우, 격자 선정에 따른 지형 및 경계조건 처리시 문제가 발생하기 때문에 주의가 필요하다(Kasahara, 1974).

3. 일반 연직좌표계를 이용하여 표현한 기본 방정식

변환된 좌표계를 이용하여 표현한 물리적인 값들은 원래 좌표계를 사용하여 표현한 경우와 동일하여야 한다. 정수압 방정식(2)를 보면 고도에 따른 압력변화가 단조 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 원좌표계인 고도를 대신하여 압력(pressure, p)을 변환 좌표계로 활용할 수 있고, 이는 다양한 종류의 지배방정식을 단순화할 수 있는 장점을 갖는다. 압력과 같이 새로운 좌표계로 변환하는 경우, 임의의 새로운 변수 s 를 고려할 수 있다.

z -system은 독립변수 x, y, z, t 로 구성된 고도 좌표계로 가정하고, 반면에 s -system은 독립변수 x, y, s, t 로 구성된 일반 연직좌표계(generalized vertical coordinate system)로 가정하면 다음 식(4), (5)와 같이 표현된다.

$$s = s(x, y, z, t) \quad (4)$$

$$z = z(x, y, s, t) \quad (5)$$

이 경우, 임의의 종속변수 A (예를 들면, u, v, w, ρ, p 등)는 식 (6), (7)과 같이 표현된다.

$$A(x, y, s, t) = A[x, y, z(x, y, s, t), t] \quad (6)$$

$$A(x, y, z, t) = A[x, y, s(x, y, z, t), t] \quad (7)$$

새로운 좌표계 s 를 이용하여 편도함수를 표현하면 식(8), (9)와 같다.

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} \quad (9)$$

종속변수 A 의 c (여기서 c 는 x, y , 혹은 t)에 대한 편도함수는 chain rule을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_s \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s + \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_z \quad (11)$$

위 식들의 아래 첨자 s, z 는 편미분시 이들 첨자 변수를 상수로 간주한다는 것을 의미하며, 식(10), (11)은 식(8), (9)를 사용하면 식(12), (13)으로 표현된다(부록 B 참조).

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z + \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_s \frac{\partial A}{\partial s} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s + \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_z \frac{\partial A}{\partial z} \quad (13)$$

한편, 편미분 관계식(10), (11)을 이용하면 종속변수 A 의 수평방향 기울기(∇A)는 다음 식과 같이 된다.

$$\nabla_s A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial z} \nabla_s z \quad (14a)$$

$$\nabla_z A = \nabla_s A - \frac{\partial A}{\partial z} \nabla_s z \quad (14b)$$

$$\nabla_z A = \nabla_s A + \frac{\partial A}{\partial s} \nabla_z s \quad (15a)$$

$$\nabla_s A = \nabla_z A - \frac{\partial A}{\partial s} \nabla_z s \quad (15b)$$

편미분 관계식(12)를 이용하면 변수 A 의 수평방향 기울기는 다음 식과 같이 된다.

$$\nabla_s A = \nabla_z A + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial s} \nabla_s z \quad (16a)$$

$$\nabla_z A = \nabla_s A - \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial s} \nabla_s z \quad (16b)$$

식(10), (11)에서 변수 c 를 t 로 바꾸면, 다음과 같은 시간 미분 관계식을 구할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_s + \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_z \quad (18)$$

식(9), (15a), (18)을 식(1b)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 새로운 좌표계 s 에 대한 전미분 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z A + w \frac{\partial A}{\partial z} \\ &= \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_s + \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_z\right] + \mathbf{V} \cdot \left[\nabla_s A + \frac{\partial A}{\partial s} \nabla_z s\right] + w \left(\frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_s + \mathbf{V} \cdot \nabla_s A + \left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z s + w \frac{\partial s}{\partial z}\right] \frac{\partial A}{\partial s} \end{aligned} \quad (19)$$

일반 연직좌표계에서의 전미분은 정의로부터 다음 식(20)과 같이 표현된다.

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_s + \mathbf{V} \cdot \nabla_s A + \dot{s} \frac{\partial A}{\partial s} \quad (20)$$

여기서, $\dot{s} (= ds/dt)$ 는 일반 연직좌표계에서의 연직유속이다.

\dot{s} 와 z 축 좌표계에서의 연직유속 $w (= dz/dt)$ 와의 관계식은 식(19)와 식(20)을 비교하여 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z s + w \frac{\partial s}{\partial z}\right] \quad (21a)$$

이 식은 z 축 좌표계에서의 연직유속 w 를 대신하는 일반 연직좌표계에서의 연직유속 \dot{s} 이다. 한편, 식(14b), (17)을 식(21a)에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 표현된다(Kasahara, 1974).

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z s + w \frac{\partial s}{\partial z} \\ &= \left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_s - \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s\right] + \mathbf{V} \cdot \left[\nabla_s s - \frac{\partial s}{\partial z} \nabla_s z\right] + w \frac{\partial s}{\partial z} \\ &= w \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \mathbf{V} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \nabla_s z + \left[\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_s + \mathbf{V} \cdot \nabla_s s\right] \\ \dot{s} &= \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial z} \left[w - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \mathbf{V} \cdot \nabla_s z\right] \end{aligned} \quad (21b)$$

기본방정식들을 새로운 s 좌표계를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

1) 정수압 방정식(식(2)와 식 (8) 사용)

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial s} \quad (22)$$

2) 수평방향 운동방정식(식(1a)와 식 (16b) 사용)

$$\frac{dV}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla_s p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) \nabla_s z \frac{\partial p}{\partial s} + \mathbf{F} \quad (23)$$

또한, 정수압 방정식(22)를 식(23)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 정수압 평형상태의 수평방향 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{dV}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla_s p - g \nabla_s z + \mathbf{F} \quad (24)$$

3) 연속방정식(식 (3a), (12) 사용, 부록 C 참조)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s}\right)\right]_s + \nabla_s \cdot \left(\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \dot{s} \frac{\partial z}{\partial s}\right) = 0 \quad (25)$$

또한, 정수압 평형상태의 연속방정식은 식(22)를 식 (25)에 대입하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s}\right)\right]_s + \nabla_s \cdot \left(\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \dot{s} \frac{\partial z}{\partial s}\right) = 0 \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s}\right)\right]_s + \nabla_s \cdot \left(-\mathbf{V} \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{1}{g} \dot{s} \frac{\partial p}{\partial s}\right) = 0 \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)\right]_s + \nabla_s \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\dot{s} \frac{\partial p}{\partial s}\right) = 0 \\ &\left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]_s + \nabla_s \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\dot{s} \frac{\partial p}{\partial s}\right) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

4. 압력 연직좌표계를 이용하여 표현한 기본 방정식

압력은 고도를 대신하여 사용하기 편리한 수직 좌표계이다. 정수압 근사법을 사용하는 경우 압력과 고도 사이의 관계는 정수압 방정식(2)로 표현된다. 고도 연직좌표계에서 연직 속도, w 는 dz/dt 로 정의하였으나, 압력 연직좌표계(Pressure vertical coordinate system), p 에서 연직속도는 $\omega \equiv dp/dt$ 로 정의하며, 단위는 Pa/s이다. w 와 ω 의 관계 식은 다음과 같다.

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \quad (27)$$

정수압 상태를 가정하면 위의 식은

$$\omega \simeq -\rho g w \quad (28)$$

가 된다. 압력 연직좌표계 p 에서 전미분은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + \mathbf{V} \cdot \nabla_p + \left(\omega \frac{\partial}{\partial p}\right)_p \quad (29)$$

기본방정식들을 새로운 p 연직좌표계를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

1) 정수압 방정식

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (30)$$

여기서, ϕ 는 geopotential($\phi = gz$), α 는 비체적($\alpha = 1/\rho$)이다.

2) 수평방향 운동방정식(식(23)에 $s = p$ 대입)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{f}\mathbf{k} \times \mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho} \nabla_p p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \nabla_{p,z} \frac{\partial p}{\partial p} + \mathbf{F} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{f}\mathbf{k} \times \mathbf{V} &= -g \nabla_{p,z} + \mathbf{F} \end{aligned} \quad (31)$$

3) 연속방정식(식(25)에 $s = p$ 대입, 혹은 식(26)에 $s = p$ 대입)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \frac{\partial z}{\partial p})\right]_p + \nabla_p \cdot (\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p} (\rho \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \nabla_p \cdot (\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p} (\rho \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p}) &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_p \cdot (\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p} (\rho \dot{p} \frac{\partial z}{\partial p}) &= 0 \\ \left(-\frac{1}{\rho g}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{g} \nabla_p \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial p} \dot{p} &= 0 \\ \nabla_p \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

식(31), (32)는 정수압 평형상태와 동일한 관계식이다. 부록 D에 식 (32)를 유도하는 다른 방법을 정리하였다.

5. 무차원 압력좌표계를 이용하여 표현한 기본 방정식

압력 연직좌표계는 지형적인 변화가 큰 지역(산 혹은 연안 등)을 수치모의하는 경우, 하단 경계조건을 복잡성 때문에 문제가 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 무차원 압력(Normalized pressure coordinate system), 즉 ‘시그마(σ)’를 도입하여(Phillips, 1957), 지구의 표면과 격자면이 일치하도록 모형을 구성한다. 여기서, $\sigma = p/p_s$ 이고, $p_s(x, y, t)$ 는 지표면 압력이다. 지표면에서는 $\sigma = 1$ 이고, 상단에서는 $p = 0$, $\sigma = 0$ 이므로, 상단 및 하단 경계조건은 $\dot{\sigma} = 0$ 이다. 보다 일반적으로는 상단면 압력 p_r 가 일정하다고 가정하는 경우,

$$\sigma = \frac{p - p_r}{p_s - p_r} = \frac{p - p_r}{\pi} \quad (33)$$

로 표현된다(Kasahara, 1974; Kalnay, 2002). $p_r = 0$ 까지 상단 경계를 확장하는 경우, 식(33)은 Phillips(1957)가 제안한 식과 동일하다. 연직방향 속도 $\dot{\sigma}$ 는 식(33)을 시간에 대하여 미분하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{p - p_r}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2} \left[\pi \left(\frac{dp}{dt} - \frac{dp_r}{dt}\right) - (p - p_r) \frac{d\pi}{dt}\right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\pi \frac{dp}{dt} - (p - p_r) \frac{d\pi}{dt}\right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{dp}{dt} - \frac{(p - p_r)}{\pi} \frac{d\pi}{dt}\right] \\ \dot{\sigma} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{dp}{dt} - \sigma \frac{d\pi}{dt}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

식(33)으로부터 $\partial p / \partial \sigma = \pi$ 이므로, 이 관계식을 이용하여 기본방정식들을 새로운 σ 좌표계를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

1) 정수압 방정식

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\alpha \pi \quad (35)$$

2) 수평방향 운동방정식(식(23)에 $s = \sigma$ 대입)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{f}\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla_\sigma p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right) \nabla_{\sigma,z} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \mathbf{F} \quad (36)$$

또한, 정수압 평형상태의 수평방향 운동방정식은(24)에 $s = \sigma$ 를 대입하여 구할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{f}\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{\sigma \nabla \pi}{\rho} - g \nabla_{\sigma,z} + \mathbf{F} \quad (37)$$

3) 연속방정식(식(25)에 $s = \sigma$ 대입)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \frac{\partial z}{\partial \sigma})\right]_\sigma + \nabla_\sigma \cdot (\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial \sigma}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\rho \dot{\sigma} \frac{\partial z}{\partial \sigma}) = 0 \quad (38)$$

또한, σ 연직좌표계에서의 정수압 평형상태 연속방정식은 식(26)에 $s = \sigma$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \right]_{\sigma} + \nabla_{\sigma} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \right]_{\sigma} + \nabla_{\sigma} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla_{\sigma} \cdot (\pi \mathbf{V}) + \pi \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

6. 결론 및 토의

해양 및 대기 수치모델링에서 다양한 연직좌표계를 사용하고 있다. 본 연구에서는 자주 사용되는 4종류의 연직좌표계에 대하여 정수압 방정식, 연직속도, 수평방향 운동방정식, 연속방정식 등을 소개하였다. 전술한 연직좌표계에 대한 검

토 결과를 Table 1에, 또한 Table 2에는 각각의 장단점을 정리하였다(Kasahara, 1974; Song and Haidvogel, 1994; Kalnay, 2002; Chandrasekar, 2022).

고도 연직좌표계를 사용하는 경우에 비하여 다른 종류의 연직좌표계를 사용하는 경우, 수평방향 운동방정식, 연속방정식, 그리고 연직방향 유속방정식 등이 더 복잡한 형태로 표현된다. 특히 수평방향 운동방정식중 압력경도에 의한 힘 항에는 좌표변환으로 고도 또는 해저면 기울기 항이 추가되어(식(23), (36), (37) 참조), 유한차분을 이용한 수치모형을 사용하는 경우, 절단오차가 더 커지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Mesinger는 ‘에타’라 지칭하는 계단형-산악 좌표계를 도입하였다(Kalnay, 2002). 무차원 압력좌표계는 압력을 무차원하여 사용하지만, 압력대신 고도를 무차원화하여 사용하기도 한다(Mellor et al., 2002; Shchepetkin and

Table 1. Summary of properties of some vertical coordinate systems.

Chapter	Vertical coordinate system		Hydrostatic equation	Vertical velocity	Continuity equation
	Name	Symbol			
2	Geometric height coordinate	z	$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$	$w = \frac{dz}{dt}$	Eq. (3a), (3b)
3	General(ized) vertical coordinate system	s	$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial s}$	$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z s + w \frac{\partial s}{\partial z}$	Eq. (26)
4	Pressure coordinate system	p	$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha$	$\omega = dp/dt$ $\approx \rho g w$	Eq. (32)
5	Normalized (or Transformed) pressure coordinate system	σ	$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = -\pi \alpha$	$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ $= \frac{1}{\pi} \left(\frac{dp}{dt} - \sigma \frac{d\pi}{dt} \right)$	Eq. (38)

Table 2. Summary of properties of some vertical coordinate systems.

Vertical coordinate system	Advantages	Disadvantages
Geometric height coordinate	<ul style="list-style-type: none"> The simplest and has been in use in various models for decades Excellent in areas that are well-mixed The equation of state for ocean water can be cleanly and accurately represented 	<ul style="list-style-type: none"> In regions of sloping topography, the levels intersect the bathymetry and unrealistic vertical velocities near the bottom can result Increasing the number of vertical levels will improve the representation of the near-bottom flow, but at a high computational cost Representation of bottom topography is difficult
General(ized) vertical coordinate system	<ul style="list-style-type: none"> Is considered the transformation of a vertical coordinate into a more convenient form Can use any arbitrary variable as the vertical coordinate as long as it is a monotonic function of height, pressure, normalized pressure et al. 	<ul style="list-style-type: none"> Additional terms added into the governing equations
Pressure coordinate system	<ul style="list-style-type: none"> The bottom topography is represented in a piecewise linear fashion, hence avoiding the need to distinguish bottom from side 	<ul style="list-style-type: none"> Representing the effects of a realistic (non-linear) equation of state is cumbersome An inappropriate framework for representing the surface mixed layer or bottom boundary layer.
Normalized (or Transformed) pressure coordinate system	<ul style="list-style-type: none"> Provide a smooth representation of the ocean bottom topography 	<ul style="list-style-type: none"> The surface mixed layer can be less well represented Have difficulty accurately representing the horizontal pressure gradient

McWilliams, 2003; Shchepetkin and McWilliams, 2009).

한편, Haidvogel et al.(2008)은 연직확산계수(Vertical Stretching Factor)를 도입하여 기존의 무차원 압력좌표계를 수정하였고, Klemp(2011)는 고도 또는 해저면 경사가 급한 경우 발생하는 수치해석상의 문제점을 극복하기 위하여 고도 연직좌표계를 기본으로 하는 혼합 연직좌표계를 제안하였다.

이러한 연직좌표계를 사용하는 수치예측기법은 차후 위성 및 레이더와 같은 원격 센서 등에서 가능한 많은 정보를 추출할 수 있는 정교한 관측시스템을 활용한 자료동화 방법과 더불어 더욱 활성화될 수 있다. 이를 위해서는 다양한 연직 좌표계의 도입, 수치모형 기법시 필요한 일관성(consistency), 정확도(accuracy), 안정성(stability) 확보, 급격한 지형 변화 적용 등에 적합한 수치모형 개발 등이 필요하다. 최종적으로는, 대기-해양-육지 결합 상세 수치모형을 개발하여 연안재해, 유류오염, 해난사고, 해양오염, 기후변화에 따른 해수면 상승 등의 현안 문제를 해결할 수 있다.

References

- Arakawa, A. and Konor, C.S. (1996). Vertical differencing of the primitive equations based on the charney-phillips grid in hybrid σ - p vertical coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 124(3), 511-528.
- Arakawa, A. and Lamb, V.R. (1977). Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, 17, 173-265.
- Chandrasekar, A. (2022). *Numerical Methods for Atmospheric and Oceanic Sciences*. Cambridge University Press.
- Haidvogel, D.B. and Beckmann, A. (1999). *Numerical Ocean Modeling*. London, UK, Imperial College Press.
- Haidvogel, D.B., Arango, H., Budgell, W.P., Cornuelle, B.D., Curchitser, E., Di Lorenzo, E., Fennel, K., Geyer, W.R., Hermann, A.J., Lanerolle, L., Levin, J., McWilliams, J.C., Miller, A.J., Moore, A.M., Powell, T.M., Shchepetkin, A.F., Sherwood, C.R., Signell, R.P., Warner, J.C. and Wilkin, J. (2008). Ocean forecasting in terrain-following coordinates: Formulation and skill assessment of the regional ocean modeling system. *J. Comp. Phys.*, 227(7), 3595-3624.
- Kalnay, E. (2002) *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge University Press.
- Kasahara, A. (1974). Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, 102(7), 509-522.
- Klemp, J.B. (2011). A terrain-following coordinate with smoothed coordinate surfaces. *Mon. Wea. Rev.*, 139(7), 2163-2169.
- Kowalik, Z. and Murty, T.S. (1993), *Numerical Modeling of Ocean Dynamics*. World Scientific.
- Mellor, G., Häkkinen, S., Ezer, T. and Pachen, R. (2002). A generalization of a sigma coordinate ocean model and an intercomparison of model vertical grids. *Ocean Forecasting: Conceptual Basis and Applications*, 55-72.
- Phillips, N.A. (1957). A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Met. Soc.*, 14, 184-185.
- Shchepetkin, A.F. and McWilliams, J.C. (2003). A method for computing horizontal pressure-gradient force in an oceanic model with a nonaligned vertical coordinate. *J. Geophys. Res.*, 108(C3), 3090.
- Shchepetkin, A.F. and McWilliams, J.C. (2009). Correction and commentary for “Ocean forecasting in terrain-following coordinates: Formulation and skill assessment of the regional ocean modeling system” by Haidvogel et al., *J. Comp. Phys.* 227, pp. 3595-3624, *J. Comp. Phys.*, 228, 8985-9000.
- Simmons, A.J. and Burridge, D.M. (1981). An energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 109(4), 758-766.
- Song, Y.T. and Haidvogel, D. (1994). A semi-implicit ocean circulation model using a generalized topography following coordinate system. *J. Comput. Phys.*, 115, 228-244.
- Sundqvist, H. (1979). Vertical coordinates and related discretization. *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, 2, 3-50.
- Sutcliffe, R.C. (1947) A contribution to the problem of development. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 73, 370-383.

Received 29 July, 2024

1st Revised 12 August, 2024

2nd Revised 23 August, 2024

Accepted 23 August, 2024

부록 A. 연속방정식 (3a), (3b) 유도

3차원 직교좌표계에서 질량보전식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{system} = \frac{d}{dt}(\rho\delta x\delta y\delta z) = 0$$

상기 식을 전개하면

$$\frac{d}{dt}(\rho\delta x\delta y\delta z) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt}\delta x\delta y\delta z + \frac{d(\delta x)}{dt}\rho\delta y\delta z + \frac{d(\delta y)}{dt}\rho\delta x\delta z + \frac{d(\delta z)}{dt}\rho\delta x\delta y = 0$$

$$\frac{1}{\delta x\delta y\delta z}\left[\frac{d\rho}{dt}\delta x\delta y\delta z + \frac{d(\delta x)}{dt}\rho\delta y\delta z + \frac{d(\delta y)}{dt}\rho\delta x\delta z + \frac{d(\delta z)}{dt}\rho\delta x\delta y\right] = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \left[\rho\frac{d(\delta x)}{dt}\frac{1}{\delta x} + \rho\frac{d(\delta y)}{dt}\frac{1}{\delta y} + \rho\frac{d(\delta z)}{dt}\frac{1}{\delta z}\right] = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho\frac{\delta u}{\delta x} + \rho\frac{\delta v}{\delta y} + \rho\frac{\delta w}{\delta z}\right) = 0$$

위의 식에서 미소량들에 대한 극한을 구하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

따라서,

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{V} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\ln\rho + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3a}$$

혹은,

$$\frac{d\rho}{dt} + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(v\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{3b}$$

부록 B. 식(9), (10), (12) 유도

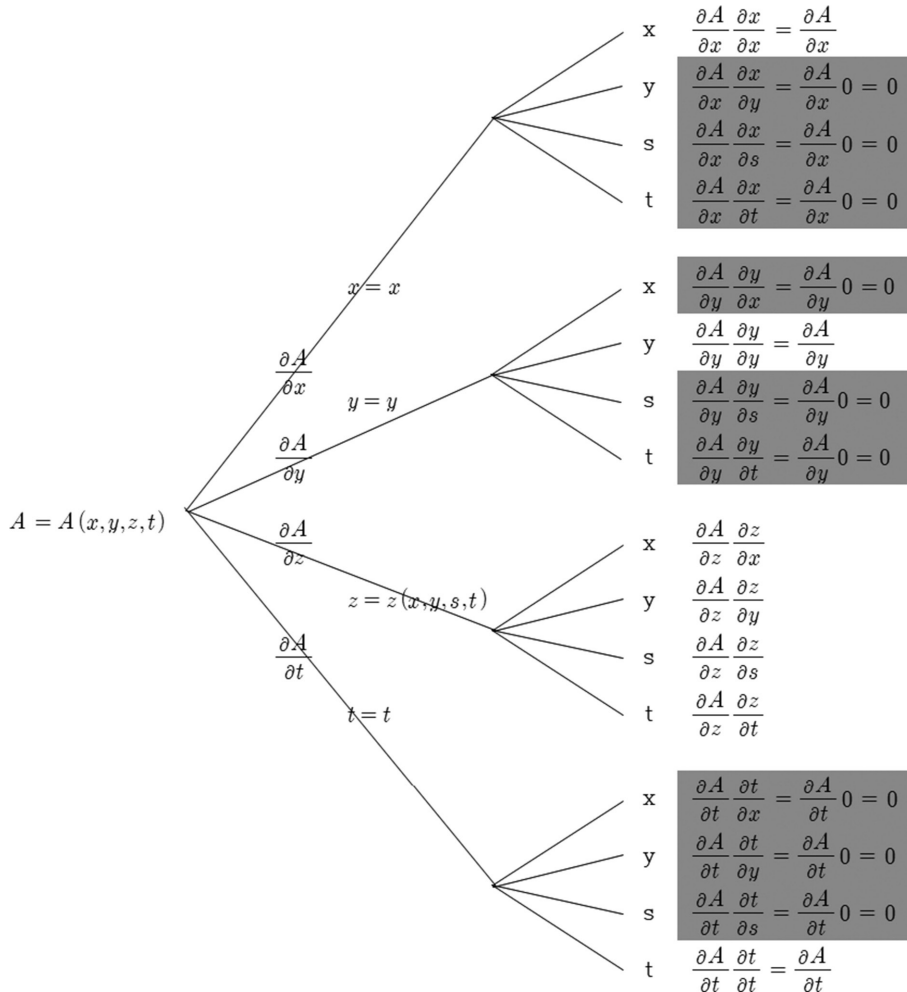


Fig. B1. Tree diagram for a function of four variables.

Table B1. The formulas for the four partial derivatives of $A = A(x, y, z, t)$.

$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$ $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$	$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{s = \infty nst} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{z = \infty nst} + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{s = \infty nst}$
$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}$ $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$	$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{s = \infty nst} = \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{z = \infty nst} + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{s = \infty nst}$
$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s}$ $\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}$	$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)$
$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}$ $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$	$\Rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{s = \infty nst} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{z = \infty nst} + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{s = \infty nst}$
$\left(\frac{\partial A}{\partial c} \right)_{s = \infty nst} = \left(\frac{\partial A}{\partial c} \right)_{z = \infty nst} + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial c} \right)_{s = \infty nst} \quad (10)$	
<p>, where c can be x, y, or t.</p>	
$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (9)$	
$\left(\frac{\partial A}{\partial c} \right)_{s = \infty nst} = \left(\frac{\partial A}{\partial c} \right)_{z = \infty nst} + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial c} \right)_{s = \infty nst} \quad (12)$	

부록 C. 식(25) 유도

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla_s \cdot \mathbf{V} - \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right) (\nabla_{s,z}) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial z} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} \cdot \nabla_{s,z} \right] + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial s}{\partial z} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \rho + \ln \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] + \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right] + \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{1}{\left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right]_s + \nabla_s \cdot \left(\rho \mathbf{V} \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \dot{s} \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0 \quad (25)$$

부록 D. 식(32) 유도

압력좌표계에서 질량보전식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_{system} = \frac{d}{dt} (\rho \delta x \delta y \delta z) = 0 \quad (D1)$$

정수압 평형상태의 경우, $\delta p = \rho g \delta z$ 이므로, 위의 식은 다음

과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} [\rho \delta x \delta y (-\frac{\delta p}{\rho g})] = \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta p) = 0 \quad (D2)$$

상기 식을 전개하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta p) &= 0 \\ \frac{d(\delta x)}{dt} \delta y \delta p + \frac{d(\delta y)}{dt} \delta x \delta p + \frac{d(\delta p)}{dt} \delta x \delta y &= 0 \\ \frac{d(\delta x)}{dt} \frac{1}{\delta x} + \frac{d(\delta y)}{dt} \frac{1}{\delta y} + \frac{d(\delta p)}{dt} \frac{1}{\delta p} &= 0 \\ \frac{\delta(dx)}{dt} \frac{1}{\delta x} + \frac{\delta(dy)}{dt} \frac{1}{\delta y} + \frac{\delta(dp)}{dt} \frac{1}{\delta p} &= 0 \\ \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p} &= 0 \end{aligned} \quad (D3)$$

여기서, $\omega \equiv dp/dt$ 는 압력 연직좌표계에서 연직속도이다. 위의 식에서 미소량들에 대한 극한을 구하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \\ \nabla_p \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

식(32)는 압력좌표계의 연속방정식으로 유체의 압축성에 대한 가정이 필요하지 않고, 식 자체가 매우 간단하게 표현된다.

부록 E. List of notation**List of Symbols**

A	any scalar function
c	variable representing x , y , or t for partial differentiation
F	friction force per unit mass
f	Coriolis parameter
g	earth's gravity
i, j, k	unit vectors in x -, y -, and z - coordinates
p	pressure, pressure coordinate system
s	general(ized) vertical coordinate
t	time
u, v	x - and y - components of V
V	horizontal velocity
w	$= dz/dt$, vertical velocity in z coordinate
x, y, z	Cartesian coordinates directed eastward, northward and upward

Greek symbols

α	$= 1/\rho$, specific volume
δ	increment

ζ	geographical latitude
π	$= p_x - p_T$
ρ	density
σ	$= \frac{p - p_T}{p_s - p_T} = \frac{p - p_T}{\pi}$, normalized pressure coordinate system
ϕ	$= gz$, geopotential
ω	$= dp/dt$, vertical velocity in p coordinate

Other symbols

∇	horizontal del operator
d/dt	total derivative
$(\dot{\quad})$	$= d()/dt$

Subscripts

s	evaluated at the earth's surface
T	evaluated at the model top