

투과형 CT에서 통계적 재구성 알고리즘의 수렴률 향상 방안

송민구*

예원예술대학교 교양학부 교수

Methods to Improve Convergence Rate of Statistical Reconstruction Algorithm in Transmission CT

Min-Gu Song*

Professor, Faculty of Liberal Arts, Yewon Arts University

요약 토머그래피 영상재구성에서 초점은 높은 이미지 품질을 유지하면서 환자의 방사선 노출을 줄일 수 있는 CT 영상재구성 방법을 개발하는 것이다. 일반적으로 통계적 영상재구성 방법은 고품질 및 정확한 이미지를 생성할 수 있는 능력을 개선하면서 환자의 방사선 노출을 크게 줄일 수 있다. 그런데 CT 영상재구성과 같은 다차원의 모수 추정인 경우에는 그것의 페널티 함수의 헤이저안 행렬의 역행렬 차수가 매우 크기 때문에 구할 수가 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 저자는 PEMG-1 알고리즘을 제안하였다. 그러나 PEMG-1 알고리즘은 일반 통계적 영상재구성 방법처럼 페널티 로그우도를 증가시키는 수렴속도에 문제점이 있다. 이에 본 연구에서는 수렴속도가 빠르고 우도의 단조 증가성을 보장하는 재구성 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘의 기본 구조는 반복마다 모수들을 동시에 갱신하지 않고 몇 개의 픽셀로 이루어진 그룹들을 순차적으로 갱신하는 방법이다.

주제어 : 투과형 토머그래피, EM 알고리즘, EMG 알고리즘, PEMG-1 알고리즘, PPS-PEMG 알고리즘

Abstract In tomographic image reconstruction, the focus is on developing CT image reconstruction methods that can maintain high image quality while reducing patient radiation exposure. Typically, statistical image reconstruction methods have the ability to generate high-quality and accurate images while significantly reducing patient radiation exposure. However, in cases like CT image reconstruction, which involve multi-dimensional parameter estimation, the degree of the Hessian matrix of the penalty function is very large, making it impossible to calculate. To solve this problem, the author proposed the PEMG-1 algorithm. However, the PEMG-1 algorithm has issues with the convergence speed, which is typical of statistical image reconstruction methods, and increasing the penalty log-likelihood. In this study, we propose a reconstruction algorithm that ensures fast convergence speed and monotonic increase in likelihood. The basic structure of this algorithm involves sequentially updating groups of pixels instead of updating all parameters simultaneously with each iteration.

Key Words : Transmission Tomography, EM Algorithm, EMG Algorithm, PEMG-1 Algorithm PPS-PEMG Algorithm

*교신저자 : 송민구(minsong3@naver.com)

접수일 2024년 04월 27일 수정일 2024년 05월 18일 심사완료일 2024년 06월 07일

1. 서론

X-레이 컴퓨터 단층촬영(CT)은 인간 질병의 진단 및 관리를 위해 해부학적 구조의 고해상도 이미지를 제공한다. 예를 들어, CT는 암 진단 및 치료에 엄청난 영향을 미치고 있다. CT로부터의 방사선 용량을 현저하게 낮추는 것이 일반 사람뿐만이 아니라 전문가들에게도 점점 더 중요한 관심사가 되고 있다. 여전히 적합한 이미지 품질을 제공하는 초저선량 CT 스캔은 방사선에 의해 야기될 수 있는 잠재적 손상을 크게 완화하고 CT 스캔을 사용한 새로운 임상 응용을 가능하게 할 수 있다. 연구자들은 높은 이미지 품질을 유지하면서 환자의 방사선 노출을 줄일 수 있는 CT 영상재구성(Reconstruction) 방법을 개발하는 것이 중요한 연구 분야로 대두되고 있다[1]. 통계적 영상 재구성(Statistical Image Reconstruction) 방법은 고품질 및 정확한 이미지를 생성할 수 있는 능력을 개선하면서 환자의 방사선 노출을 크게 줄인다[2,3].

전통적인 투과형 토머그래피에 대한 영상재구성은 CBP(Convolution Back Projection) 알고리즘을 이용한 방법을 사용하고 있다. Radon 변환과 푸리에 및 컨볼루션 기법을 기초로 하는 이 방법은 처리속도가 매우 빨라서 실용적 가치가 높다[4]. 그러나 광자의 강도가 약한 저준위 조사량에 대한 영상재구성에서는 양질의 재구성 영상을 제공하지 못할 뿐만 아니라 검출기에 도달한 광자(Photon)의 수는 확률변수이므로 통계적 접근의 필요성이 제기된다[2].

통계적 정보를 이용한 토마그래피 영상 재구성에는 방법에 EM 알고리즘이 있다[5]. 이 알고리즘은 저준위 조사량에 대한 영상재구성시 기존의 방법보다 개선된 영상을 제공하고, 알고리즘의 반복하는 항상 로그우도를 단조 증가시키는 성질을 가지므로 반복이 거듭될수록 영상의 화질이 좋아진다[6]. 그러나 이 방법은 투과형 토머그래피(Transmission Tomography) 영상재구성을 할 때 평가함수(Evaluation Function)를 직접 구하지 못하고 근사치를 사용함으로써 정확한 추정값을 구할 수 없으며, 또한 수렴속도가 매우 느리다는 단점을 가지고 있다[2].

전술한 단점을 극복하기 위한 방안으로 사전정보(Prior Information)를 사용하는 베이저안 추정법이 있다. 이것은 베이저안 기법을 사용한 EM 알고리즘을 변형한 것으로 사전정보를 사용할 수 있어 재구성 영상의 화질뿐 아니라 수렴속도도 향상시킬 수 있다. 또한, 사전정보의 사용은 모수 추정치가 이웃하는 픽셀보다 차이가 많은 경우 제약화(Penalized) 함으로써 근방(Neighborhoods)

의 효과를 나타낸다. 이러한 맥락에서 EM 알고리즘의 M-단계에서 근사해를 제공하는 OSL(One Step Late) 알고리즘이 제시되었다[6]. 그러나 OSL 알고리즘은 전개의 어려움이 $Q(\theta|\theta)$ 함수뿐만 아니라 페널티 함수가 에 대한 평활도(Smoothness) 또는 불균일도(Roughness)를 나타내는 함수로 주어질 때 이 알고리즘의 적용은 사실상 불가능해지는 경우가 많다. 즉 OSL 알고리즘의 수렴은 평활상수 값에 의존성이 있기 때문이다[9].

이 문제를 해결하기 위해 복잡한 M-단계 대신 계산하기 편한 CM-단계를 대치하여 문제를 해결하였다[2]. 그리고 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여 각 M-단계에서 뉴턴알고리즘의 1단계 추정치를 사용하는 EM Gradient 알고리즘이 제안되었다[2]. 이것은 M-단계를 전개하기가 편리하고, 평가함수가 헤이지안 행렬이어서 역행렬이 필요 없는 대각행렬이라 계산이 편리하다. 그러나 수렴률이 느린 단점을 여전히 가지고 있다[2].

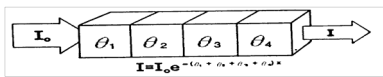
한편, 앞서 지적한 알고리즘의 문제점을 해결하기 위한 방안으로 EMG 알고리즘에 사전정보로 깃스 사전분포를 결합한 PEMG(Penalized EMG) 알고리즘을 들 수 있다. 그러나 PEMG 알고리즘은, 모수 μ 가 불균일도를 나타내는 함수로 주어질 때 페널티 함수의 헤이지안 행렬이 대각행렬이 아니므로 이 알고리즘은 역행렬을 구해야 하는 문제점이 발생한다. 그런데, 토머그래피 영상재구성에서는 이 역행렬의 차수가 매우 크므로 실용성에서 문제점이 제기된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 저자는 PEMG 알고리즘을 변형한 PEMG-1 알고리즘을 제안하였다[8,9]. 제안된 알고리즘은 헤이지안 행렬이 대각행렬이므로 역행렬 계산의 어려움을 해소하였으나 재구성 알고리즘이 수렴률의 한계를 극복하지는 못하였다. 한편 Fessler의 GCA(Grouped-Coordinate Ascent) 기법은 EM 알고리즘의 체계를 벗어나 De Pierro의 볼록성질 기법(Convexity Technique)을 사용함으로써 계산의 단순성과 반복을 감소시켜 수렴속도를 개선하고자 하였다[11]. 그러나 GCA 알고리즘은 반복에 따른 로그우도의 단조증가성을 충족하지 못하는 결정적 단점을 가지고 있다. 그리고 페널티 가중 최소 제곱(PWLS) 방법도 있다[12]. 이것은 통계적으로 가중된 이차 데이터 총실도 항을 사용하여 수렴율을 높이고자 하였다. 그러나 반복을 최소화하기 위해서는 계산 집약적인 방법으로, 변수 분할을 사용해야 하는 문제점이 있다[12]. 그리고 반복시 투영 데이터의 일부만 사용하는 OS(Ordered Subset) EM 알고리즘도 있다. 이것은 기존의 EM 방법

보다는 수렴속도를 향상시킬 수 있었다. 그러나 반드시 정상점으로 수렴하지 않는 문제점이 있다[3]. 이것을 보완하기 위해서 연속시간 동적 최적화 접근법에 기반한 파워 기반 가속 OS-EM 방법도 있다[12].

본 연구에서는 앞에서 논의된 문제점을 해결하기 위해서 매 반복마다 모수를 동시에 갱신하지 않고 화상을 부분적으로 분할하여 분할된 영상의 각 화소를 순차적으로 갱신하는 방법을 제안한다. 이 알고리즘을 PPS-PEMG (Partitioned Paraboloidal Surrogate PEMG) 알고리즘 하겠다. 이것은 알고리즘의 수렴률을 향상시켜 재구성 화상의 실효성을 증대시킬 수 있다. 본 논문의 구성은 1장은 서론이며 2장은 투과형 토머그래피 영상재구성의 기본개념을 3장은 영상재구성 알고리즘의 종류를 설명하였고, 4장은 PEMG-1 알고리즘에 대하여 살펴봄. 5장은 제안된 PPS-PEMG 알고리즘의 이론적인 도출과 수렴성질 및 제안한 알고리즘을 투과형 모형에 적용하여서 감쇠계수 θ 를 유효하게 추정하는 이론을 전개하였다. 6장은 제안된 PPS-PEMG 알고리즘의 효율성을 토머그래피 영상재구성의 모의실험을 통하여 확인한다. 7장은 결론을 도출한다.

2. 투과형토머그래피 영상재구성의 개념

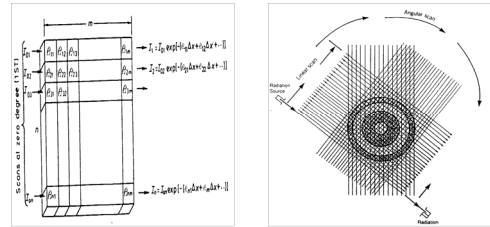
투과형 토머그래피 영상재구성은 N 번의 투사를 통해 얻어진 $y_i = \sum_{j \in I_i} x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, N$ 를 사용하여 크기가 p 인 횡단면 영상의 감쇠계수 벡터 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$ 를 추정하는 것이다. 여기서 x_{ij} 는 i 번째 투사에서 j 번째 화소를 통과한 광자의 수를 나타내며 관측 불능의 완전자료로 취급한다. 그런데, 우리는 i 번째 투사에 속한 화소의 집합 I_i 의 선형합(line Sum) y_i 만을 불완전자료로서 간접 관측할 수 있다. 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[Fig. 1] A simplified x-ray photon is converted to I attenuated photon through the I_0 pixel.

투과형 CT의 광자발생원은 피사체의 외부에 있으며, 픽셀 j 의 감쇠계수 θ_j 가 추정해야 할 모수가 된다. 또한 각 프로젝션 i 에 대응한 평균발생 강도를 α_i 로 표시하자. α_i 는 광자발생원과 광자검출기의 기전에 의존하게

되는데, 단순히 피사체를 제거한 상태에서 경험적으로 쉽게 추정되므로 이 값은 기지로 간주하여도 무방하다.



[Fig. 2] Two-dimensional matrix of linear attenuation coefficients of an image, A method of scanning photons by giving them a linear and angular shape.

각 투사 i 에 대해, w_i 를 광자 발생기를 출발하여 검출기로 향하는 광자의 총수라 하자. 만약 감쇠가 없다면, 모든 w_i 개의 광자가 검출기에 포착될 것이다. 그리고 w_i 들은 서로 독립이다. 또한, y_i 를 실제 검출된 광자수라 하면, 이것은 관측자료를 구성한다. 한편, 무한히 얇은 광선을 가정한다면, 이때 발생원을 떠난 w_i 개의 광자 각각은 같은 확률로 검출기에 도달하게,

$$\exp\left(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j\right) \quad (2.1)$$

된다. 이는 곧 y_i 가

$$E(y_i) = w_i \text{의 평균} \times \text{각 광자가 검출될 확률인}$$

$$= d_i (= \Delta t_i \alpha_i) \times \exp\left(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j\right)$$

포아송 분포를 따른다는 것을 의미한다. w_i 들은 서로 독립이므로, y_i 들 역시 독립이다. 결국, 모든 투사에 대한 대수우도는,

$$\ln g(y, \theta) = \sum_i \{-d_i \exp(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j) - y_i \sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j + y_i \ln d_i - \ln y_i!\} \quad (2.2)$$

과 같이 결정된다. 여기서, y 와 θ 는 각각 y_i 들과 θ_j 들을 원소로 하는 벡터이다.

한편, $\ln g(y, \theta)$ 에 대한 완전한 오목성을 확인 하기 위해 2차 편도함수를 구하면

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \ln g(y, \theta) = -\sum_i a_{ik} d_i \exp\left(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j\right) a_{il} \quad (2.3)$$

이다. 단, $a_{ik} = l_{ik}$, $k \in I_i$; $a_{ik} = 0$, $k \notin I_i$ 을 나타낸다. 그리고 행렬 $A = (a_{ik})$ 가 최소한 행의 수가 열의 수보다 작지 않은, 완전계수이면, 이에 대응하는 2차형식은 아래와 같이 완전한 오목 성질을 만족한다. $\sum_{k,l} v_k \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} \ln g(y, \theta) \right\} v_l < 0$ 그리고 발생원에 가장 근접한 픽셀을 첫 번째로 하고 검

출기에 가장 근접한 픽셀을 $m-1$ 번째 픽셀로 정하면, 이 투사선에 걸쳐있지 않은 픽셀들에 대해서는 고려할 필요가 없다. 한편, 투사선을 따라 각 픽셀에 입사되는 광자수를 완전자료로 취급할 수 있다. 즉, $\mathbf{x}_j, 1 \leq j \leq m-1$, 를 픽셀 j 에 입사되는 광자수라 하자. 이때, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{w}$ 는 평균 $d = \Delta t \alpha$ 로 발생원에서 방출된 광자수이다. 그리고 $x_m = y$ 는 검출기에서 관측한 광자수가 된다. 픽셀 j 를 통과한 광자수 x_{j+1} 는 오직 입사광자수 x_j 와 투사의 경로 길이 및 감쇠계수의 곱인 $l_j \theta_j$ 에만 의존한다. 그렇기 때문에 통과된 광자수는 x_j 번의 독립시행 중 성공확률 $e^{-l_j \theta_j}$ 인 이항분포를 따른다. 발생원에서 검출기까지 픽셀들을 더해 가는 논리를 적용하면 완전자료의 대수우도는 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln f(\mathbf{x}, \theta) &= \ln \left[f(x_1, \theta) f(x_2|x_1, \theta) f(x_3|x_1, x_2, \theta) \right. \\ &\quad \left. \cdots f(x_m|x_{m-1}, \dots, x_1, \theta) \right] \\ &= \ln f(x_1, \theta) + \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{j+1}|x_j, \theta) \\ &= -d + x_1 \ln d - \ln x_1! \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \ln \binom{x_j}{x_{j+1}} + x_{j+1} \ln(e^{-l_j \theta_j}) + (x_j - x_{j+1}) \ln(1 - e^{-l_j \theta_j}) \right\} \end{aligned}$$

3. 통계적 영상재구성 알고리즘

3.1. EM 알고리즘

EM 알고리즘은 불완전 자료(Incomplete Data)에 대하여 최우추정치를 구하는 일반적인 반복기법이다. 먼저, 자료공간 y 는 관측된 불완전 자료이고, y_{mis} 는 결측자료 그리고 \mathbf{x} 는 완전자료로 설정한다. 일반적으로 완전자료와 관측된 불완전 자료와의 관계를 $y = y(\mathbf{x})$ 와 같은 함수관계로 나타낼 수 있는데 이들의 관계를 밀도함수를 사용하여 구체적으로 나타내면 식(3.1)과 같다. 여기서 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 는 완전자료의 확률밀도함수이다.

$$g(y|\theta) = \int_{\{\mathbf{x} : y(\mathbf{x}) = y\}} f(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

한편 완전자료의 대수우도 $L(\theta) = \ln f(\mathbf{x}|\theta)$ 라 하면, 완전자료 \mathbf{x} 는 관측할 수 없는 자료이므로 $L(\theta)$ 를 직접 결정하지 못한다. 단지 불완전 자료 \mathbf{y} 가 주어졌을 때, 기대값으로 간접평가 할 수 있다. 그래서 다음과 같은 완전자료 대수우도에 대한 조건부 기대값을 평가함수라 한다[2].

$$Q(\theta|\theta^n) = E[\ln f(\mathbf{x}|\theta)|y, \theta^n] \quad (3.2)$$

여기서, θ^n 는 n 시점에서의 추정값이다. 그리고, $\ln f(\mathbf{x}|\theta) = l(\theta|\mathbf{x})$ 는 완전자료의 대수우도이다.

3.2 OSL 알고리즘

다음은 모수 θ 에 대한 사전정보를 가지고 있는 경우에 대하여 살펴보자. 이는 아마도 사전확률분포나 θ 에 대한 평활도로 주어질 것이다. 이때, 우리의 목적은 각각 MAP(Maximum a Posterior)추정량 또는, MPL(Maximum Penalized Likelihood)추정량을 구하는 것이 될 것이다. 그런데 본 논문에서는 두 추정량을 같은 것으로 간주 하겠다. 우리가 구하려는 MAP 혹은 MPL 추정량은 $\hat{\theta}$ 는 식(3.3)의 최대화로 얻게 된다.

$$L(\theta) - \lambda J(\theta) \quad (3.3)$$

여기서, $\exp\{-\lambda J(\theta)\}$ 는 θ 의 사전분포에 비례 한다고 가정하며, λ 는 평활상수이고, $J(\theta)$ 는 함수의 불균일도(Roughness)이다. $\hat{\theta}$ 에 대한 EM 알고리즘은,

$$Q(\theta^n|\theta) - \lambda J(\theta^n) \quad (3.4)$$

를 최대화하는 시 추정치(Trial Estimates) θ^n 반복적으로 교체함으로써 얻게 된다[3].

3.3 EMG 알고리즘

최우추정 문제에서 EM 알고리즘을 적용할 때, M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전개가 극히 어려운 경우를 자주 접하게 된다. 이러한 경우에는 사실상 EM 알고리즘의 적용이 불가능하다, 이 문제를 해결하기 위한 해법으로 그래디언트 방법을 사용하는 것이다. EM과 PEM 알고리즘의 수렴 과정의 주목할 만한 특징은 다음과 같다. 즉, 단계가 진행됨에 따라 두 알고리즘은 각각 대수우도와 제약화 대수우도를 증가시킨다. 이는 결국, 두 알고리즘이 각각 최우추정치 $\hat{\theta}$ 에 도달하게 됨을 의미한다. 이와 같은 EM 알고리즘의 특성은 다양한 응용문제에서 최우추정의 적용을 가능하게 한다. 특히, PEM 알고리즘은 공간 종속적 자료 분석에 효율적으로 적용되고 있다. 그러나 방정식 $D^{10} Q(\theta|\theta^n) - \lambda DJ(\theta) = 0$ 에서 θ 에 대한 전개가 불가능한 경우 EM 알고리즘의 사용은 극히 어렵게 된다. 그래서 복잡한 M-단계 대신 계산하기 편리한 CM-단계를 대치하여 이 문제를 극복하려 하였다. 그러나 이보다 훨씬 설득력이 있는 방법으로 그래디언트 방법이 있다[2]. 이것은 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여, 각 M-단계에서 뉴튼랩슨 알고리즘의 1-단계 추정치를 사용하는, 식(3.5)와 같은 알고리즘을 제안하였다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n)\}^{-1} D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) \quad (3.5)$$

이 EMG 알고리즘의 장점은 첫째, M-단계에서 $n+1$ 을 구하기 위해 복잡한 $D^{10}Q(\theta|\theta^n) = 0$ 을 전개할 필요가 없다는 것이고, 둘째는 대부분의 경우에는서 $D^{20}Q(\theta^n|\theta^n)$ 은 역행렬의 계산이 필요 없는 대각행렬이라는 것이다[2].

4. PEMG-1 알고리즘

PEMG(Peneralized EM Gradient) 알고리즘을 정의하기 전에 몇 가지 개념을 살펴본다. y 에 대한 x 의 조건부 확률밀도를 $k(x|y, \theta)$ 라 할 때, $y=y(x)$ 이면, MAP 추정량은 식(4.1)을 최대로 한다.

$$f(x|y) p(\theta) = g(y) k(x|y, \theta) p(\theta) \quad (4.1)$$

식(4.1)의 양변에 로그를 취한 후 기대값을 취하면 식(4.2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta) = \{L(\theta) - \lambda J(\theta)\} + H(\theta|\theta^n) \quad (4.2)$$

단, $H(\theta|\theta^n) = E[\ln\{k(x|y, \theta)\}|y, \theta^n]$ 이다. 이때, 잘 알려진 관계식 $H(\theta|\theta^n) \leq H(\theta^n|\theta^n)$ 을 이용하면 $Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)$ 을 최대로 하는 $\theta = \theta^{n+1}$ 는 제약화 로 그우도를 증가시키게 됨을 알 수 있다. 여기서, 식(3.5)에 대한 그래디언트 알고리즘을 다음 식과 같이 구성할 수 있을 것이다. 우리는 이 알고리즘을 PEMG

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J(\theta^n)\}^{-1} \cdot \{D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \quad (4.3)$$

알고리즘이라 부르겠다. PEMG 알고리즘을 사용하면 함수 Q 와 J 에서 동시에 영향을 주는 θ 에 대한 전개상의 어려움을 피할 수 있다. 그러나 페널티 함수 $J(\theta)$ 가 의 공간정보를 설명하는 불균일도 제약으로 주어지는 경우는 대각행렬이 아니므로, 식(4.3)에서 항행렬 $D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J(\theta^n)$ 의 역행렬을 구하여야 하는 문제점을 가지고 있다. 토머그래피의 영상재구성에서 항행렬의 차수가 매우 커서 역행렬의 계산은 거의 불가능하다. 이 문제를 해결하기 위해 식(4.3)에서 $D^2J(\theta^n)$ 을 다음과 같이 $D^2J(\theta^n) = D^2J_D(\theta^n) + D^2J_0(\theta^n)$ 로 나타낼 수 있다. 여기서, $D^2J_D(\theta^n)$ 은 $D^2J(\theta^n)$ 의 대각성분을 원소로 하는 대각행렬이라 놓는다. 따라서, $D^2J_0(\theta^n) = D^2J(\theta^n) - D^2J_D(\theta^n)$ 이다. 또한, $D^2J_D(\theta^n)$ 가 양정치(Positive Definite Matrices)행렬이므로,

$$x^T D^2J_D(\theta^n) x > x^T D^2J_0(\theta^n) x, \forall x \neq 0 \quad (4.4)$$

임을 발견할 수 있다. 이점에 착안하여 식(4.3)의 변형 알

고리즘을 다음과 같이 제안하였다[8]. 이 알고리즘

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J_D(\theta^n)\}^{-1} \cdot \{D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \quad (4.5)$$

은 결국, 항행렬이 대각행렬이 되어 M-단계에서 발생하는 계산상의 어려움을 쉽게 해결해 준다(8,9).

5. 제안한 PPS-PEMG 알고리즘

투과형 토머그래피 영상재구성을 위한 대부분의 통계적인 방법들(SIR)은 식(3.3)를 직접 최적화하는 대신 아래의 식(5.1)을 만족하는 대리함수(Surrogate Function) $Q_\lambda = Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)$ 을 최대화하는

$$L_\lambda(\theta) - L_\lambda(\theta^n) \geq Q_\lambda(\theta|\theta^n) - Q_\lambda(\theta^n) \quad (5.1)$$

간접적인 반복기법을 사용하고 있기 때문에 수렴률이 낮아 현실적인 적용에 많은 문제점을 내포하고 있다. 본 논문에서는 각각의 반복마다 모수들을 동시에 갱신하지 않고 몇 개의 픽셀로 이루어진 그룹들을 순차적으로 갱신하는 방법과 그룹내의 픽셀들을 공간적으로 충분히 분리되도록 선택함으로써 처리속도와 수렴속도를 증가시키도록 한다. 먼저, S 를 픽셀 집합 $\{1, 2, \dots, P\}$ 의 부분집합이라 하고 S^c 를 S 의 여집합 그리고 $|S|$ 를 S 의 원소수라 하자. 이 알고리즘에서는 n 번째 반복에서 $\theta_{S^c}^n$ 이 고정되어 있는 동안 θ_S 를 갱신한다. 즉 식(5.1) 대신에 식(5.2)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L_\lambda(\theta_D|\theta_{D^c}^n) - L_\lambda(\theta^n) \geq Q_\lambda(\theta_D|\theta_{D^c}^n) - Q_\lambda(\theta^n) \quad (5.2)$$

또한, 식(5.2)의 조건에서 다음식을 만족하는 추정치

$$\theta_S^{n+1} = \underset{\theta_S \in R_S(\theta^n)}{\operatorname{argmax}} \{Q_\lambda(\theta_S|\theta_{S^c}^n)\} \quad (5.3)$$

를 구할 수 있다. 여기서, $R_S(\theta^n) \subseteq R^{l^S}$ 이고 $Q(\theta_S|\theta_{S^c}^n) = \sum_{j \in S} \phi_j(\theta_S|\theta_{S^c}^n)$ 이다[10].

5.1 대리함수의 선택

본 연구에서는 2차 함수 형태를 대리함수를 사용하였다[10,11].

$$k_i(\theta|\theta^n) = h_i(m_i^n) + h_i'(m_i^n)(m_i - m_i^n) + (1/2)d_i(m_i^n)(m_i - m_i^n)^2 \quad (5.4)$$

여기서, $m_i = \langle l_i, \theta \rangle$, $m_i^n = \langle l_i, \theta^n \rangle$ 을 나타내며,

$$d_i(m_i^n) = -2[(h_i(0) - h_i(m_i^n)h_i'(m_i^n))/(m_i^n)^2]_+, m_i^n > 0; = [h_i''(0)]_+, m_i^n = 0 \quad (5.5)$$

이다. 여기서, $|d_i(m_i^n)|$ 은 $h_i(m_i^n) = Q_i(m_i^n)$ 과

$h_i(m_i) \geq Q_i(m_i|m_i^n)$ 을 만족하는 2차 함수의 최소곡률을 나타낸다. 최소곡률은 이차함수를 대리함수로 하는 반복 알고리즘의 수렴속도를 최대로 하기 위해 설정한 것이다. 본 연구에서는 식 (5.4)를 이용하여 식 (5.6)과 같이 1차 대리함수를 정의한다.

$$Q_\lambda^1(\theta_S|\theta^n) = Q^1(\theta_S|\theta^n) - \lambda J(\theta_S|\theta^n) \quad (5.6)$$

그리고

$$Q_\lambda^1(\theta_S^{n+1}|\theta^n) = \sum_i^N k_i(\theta_S|\theta^n) \quad (5.7)$$

이다. 여기서, $Q^2(\theta_S|\theta_S^n) = \sum_{j \in S} \phi_j(\theta_S|\theta^n)$ 나타낼 수 있다. 한편, 2차 대리함수 $\phi(\cdot|\theta^n)$ 는 아래와 같이 가법적으로 미분되는 함수를 사용한다. 그리고 ϕ_j 들의 선택은 EM 접근 방법 대신 De Pierro의 오목성 기법의

$$\phi(\cdot|\theta^n) = \sum_{j \in S} \phi_j(\theta_j|\theta^n) \quad (5.8)$$

변형을 사용하는데, 이 방법의 핵심은 알고리즘의 수렴률을 향상시킬 수 있게 (5.9)를 구성하는 것이다.

$$\langle a_i, [\theta_S, \theta_S^n] \rangle = \sum_{j \in S} \alpha_{ij} \left[\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right] \quad (5.9)$$

여기서, $\alpha_{ij} > 0$ 은 아래의 식이 만족 되도록 결정

$$\sum_{j \in S} \alpha_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (5.10)$$

한다. 만약 R 의 모든 영역에 걸쳐 h_i 가 오목(Concave)이면, 식 (5.5)와 볼록성질(Convexity Inequality)로부터 식 (5.11)이 성립한다.

$$\begin{aligned} h_i(\langle a_i, [\theta_S, \theta_S^n] \rangle) \\ \geq \sum_{j \in S} \alpha_{ij} h_i \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

그리고 $\theta_S \in R_S(\theta^n)$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$L(\theta_S, \theta_S^n) = \sum_{i=1}^N h_i(\langle a_i, [\theta_S, \theta_S^n] \rangle) \geq \sum_{j \in S} Q_j(\theta_j|\theta^n) \quad (5.12)$$

여기서,

$$Q_j(\theta_j|\theta^n) = \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} h_i \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right) \quad (5.13)$$

이다. 한편, 두 개의 이웃하는 화소들이 서로 같은 그룹 내에 속하지 않도록 그룹을 정리하면, 식(5.14)은 단조증가의 성질을 만족하게 될 것이다[10.11].

$$\phi_j(\theta_j|\theta^n) = Q_j(\theta_j|\theta^n) - \lambda \sum_k w_{ik} \psi(\theta_j - \theta_k^n) \quad (5.14)$$

5.2 PPS-PEMG를 이용한 영상재구성 방법

영상 관측시스템을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$y = f(w) + P = f(U^* \theta) + P \quad (5.15)$$

이 관계식으로부터 우리는 비선형 필터에 잡음이 가법적으로 포함된 영상을 관측하게 됨을 알 수 있다. 선형 필터에 대한 비선형함수 f 는 로그 함수를 사용한다. 이것은 미분가능 하며 단조증가 함수이다. 식 (5.15)를 각 화소에 대한 관계식으로 나타내면,

$$\begin{aligned} y_i &= f \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right) + a_i \\ &= f \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) + a_i, \quad i=1, \dots, N; \quad j=1, \dots, P \end{aligned} \quad (5.16)$$

과 같다. 여기서, u_i 는 관측치 y_i 에 영향을 미치는 화소의 개수를 나타낸다. 한편, $a_i \sim N(0, \sigma^2)$ 을 따른다면, 다음의 관계가 성립한다.

$$y_i \sim N \left(f \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right), \sigma^2 \right) \quad i=1, \dots, N \quad (5.17)$$

따라서 관측치 (y_1, \dots, y_N) 이 주어졌을 때, θ 에 대한 우도는 식(5.18)과 같이 주어진다.

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N h_i \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right) \quad (5.18)$$

그리고

$$h_i(d) = -\frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 (y_i - f(d))^2 \quad (5.19)$$

을 나타낸다. 또한, 함수 $h_i(d)$ 은 d 에 대하여 오목함수이다. 이 오목성질을 이용하여 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j = \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} \left\{ \frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right\}. \quad (5.20)$$

단, $\sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} = 1$ 이고 $a_{ij} > 0$ 이며, $d_i^n = \sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j^n$ 를 나타낸다. 이때 볼록성질에 의하여 식(5.21)이 성립한다. 이것을 식(5.18)에 대입하면

$$h_i \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) = h_i \left(\sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} \left\{ \frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right\} \right) \quad (5.21)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right)$$

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^N a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \right] = \sum_{j=1}^{v_i} w_j(\theta|\theta^n)$$

와 같이 전개된다. 여기서,

$$W(\theta|\theta^n) = \sum_{j=1}^{v_i} w_j(\theta|\theta^n) = \sum_{j=1}^{v_i} \sum_{i=1}^N a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i \right) \quad (5.22)$$

을 나타낸다. 우리는 식(5.22)을 대수우도 $L(\theta)$ 에 대한 2차 대리함수(Surrogate Function)라 부른다. 그런데 $L(\theta^n) = W(\theta^n|\theta^n) = W(\theta^n)$ 의 관계가 성립하기 때문에 식 (5.23) 임을 보일 수 있다.

$$L(\theta^{n+1}) - L(\theta^n) \geq W(\theta^{n+1}|\theta^n) - W(\theta^n) > 0 \quad (5.23)$$

식 (5.23)에서 θ^n 을 반복적으로 구하면 $L(\theta)$ 를 최대화하는 해에 도달함을 알 수 있다. 그런데 투과형 토머그래피 영상재구성과 같은 영상재구성 대부분은 추정하고자 하는 모수의 수와 관측치의 수가 거의 일치하기 때문에 조그마한 잡음이 포함된 경우에도 왜곡된 영상을 나타낸다. 이것을 해결하기 위하여 페널티 함수가 포함된 식(3.3)을 최적화하는 근을 구하는 것이 목적이므로 대리함수 (5.22)를 식 (5.24)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$W_\lambda(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta) \quad (5.24)$$

한편, 볼록형태의 알고리즘 n+1단계에서 식(5.24)의 해 θ_j^{n+1} 를 구하기 위해서 초기치 $\theta_j^{n:0} = \theta_j^n$ 에 대하여 전개하면 다음과 같다.

$$\theta_j^{n:k+1} = \theta_j^{n:k} - \{w_j''(\theta_j^{n:k}|\theta^n) - \lambda J_j'(\theta_j^{n:k}|\theta^n)\}^{-1} \cdot \{w_j'(\theta_j^{n:k}|\theta^n) - \lambda J_j(\theta_j^{n:k}|\theta^n)\} \quad j = 1, \dots, P \quad (5.25)$$

여기서, w_j' 와 w_j'' 는 w_j 를 θ_j 에 관한 1, 2차 편도함수를 나타낸다. 그런데 식(5.25)은 계산의 복잡성으로 인한 실효성에 문제가 있으므로 (5.25) 알고리즘을 보다 단순화시킨 식 (5.26)의 알고리즘을 1차 볼록(Convex)

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n - \{w_j''(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J_j'(\theta_j^n|\theta^n)\}^{-1} \cdot \{w_j'(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J_j(\theta_j^n|\theta^n)\} \quad j = 1, \dots, P \quad (5.26)$$

알고리즘이라 하겠다. 그런데 이 알고리즘은 페널티 함수가 초월함수로 주어진 경우에는 계산의 복잡성으로 인하여 알고리즘의 수렴속도가 느린 문제점을 내포하고 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 식 (5.26)를 다음과 같이 변형시켜 사용한다. 단, 여기서

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n - \{(w_j''(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J_{D_j}'(\theta_j^n|\theta^n))\}^{-1} \cdot \{w_j'(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J_j(\theta_j^n|\theta^n)\} \quad j = 1, \dots, P \quad (5.27)$$

$J_{D_j}'(\theta_j^n|\theta^n)$ 는 페널티 함수의 대각행렬을 나타낸다. 이 알고리즘을 PPS-PEMG 알고리즘이라 하겠다. 그리고 식(5.27)의 1,2차 편도함수는 식 (5.28), (5.29)와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, $\phi = \log$ 함수이다[11].

$$w_j'(\theta_j^n|\theta^n) = \frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N [y_i - \phi(d_i^n)] u_{ij} = \frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N [y_i - \log(d_i^n)] u_{ij}, \quad (5.28)$$

$$w_j''(\theta_j^n|\theta^n) = -\frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N \{1 + y_i - \log(d_i^n)\} \frac{u_{ij}^2}{\alpha_{ij}} (d_i^n)^2 = -\frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N \{\phi'(d_i^n)^2 - \phi''(d_i^n) [y_i - \phi(d_i^n)]\} \cdot \frac{u_{ij}^2}{\alpha_{ij}} \quad (5.29)$$

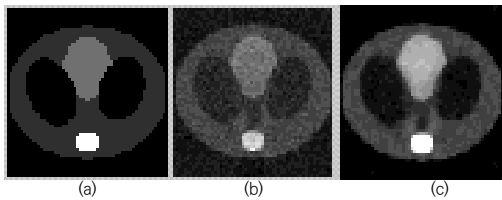
6. 디지털 영상재구성 시뮬레이션

본 논문에서는 크기 80×80 인 몸체, 식도, 척추, 심장, 허파가 포함된 인체의 단층 영상을 형상화한 팬텀(Phantom)을 사용하여 PEMG-1 및 PPS-PEMG 알고리즘을 사용한 투과형 토머그래피 재구성 영상을 비교하고자 한다. 이 팬텀을 중심으로 0도에서 179도까지 1도씩 회전하고, 또 주어진 프로젝션 각도에서 10 mm 씩 수평 이동한 위치에서 모의투사하여 y_i 를 관측하였다. 3가지 종류의 투과형 토모그래피에 대해 모의실험을 하였는데, 실험 (가)는 평균 입사 광자수가 600인 경우, 실험 (나)는 350인 경우, 실험 (다)는 150인 경우이다. 실험 (다)는 투사 에너지가 비교적 저준위 조사량인 경우이고, 실험 (가)는 강한 투사 에너지를 나타내는 투과형 기기를 모델링 한 것이다.

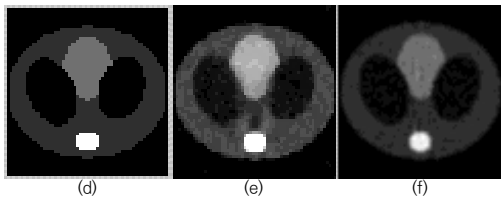
본 실험에서 페널티 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$J(\theta|\theta^n) = \sum J_j(\theta_j|\theta^n) = \sum \frac{1}{2} \sum_{k \in \partial_j} c_{jk} d(\theta_j - \theta_k^n) \quad (6.1)$$

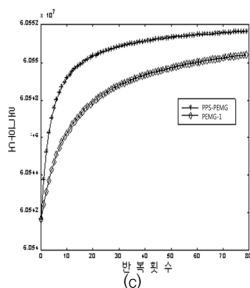
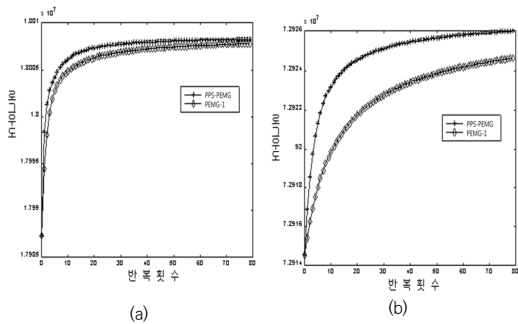
여기서 ∂_j 는 j 번째 픽셀의 근린(Neighborhoods)을 포함하는 집합인데, j 번째 픽셀의 상하좌우 그리고, 대각 픽셀을 원소로 하는 집합으로 정의하겠다. 그리고 c_{jk} 는 상하좌우 픽셀에 대해서는 1, 대각 픽셀에 대해서는 $\sqrt{2}$ 를 나타내는 값이다. 함수 $d(\cdot)$ 의 선택은 첫째 완전 오목함수라야 하며, 둘째로 $|d(\cdot)| < \infty$ 를 만족해야 한다. 그리고 알고리즘이 정상점으로 수렴과 동시에 윤곽선이 보존되는 평활을 해야 한다. 전술한 성질을 만족하는 함수들은 많이 있으나 여기서는 제시한 조건을 만족하는 $\log \cosh(\cdot)$ 함수를 사용하였다. 한편, PEMG-1 및 PPS-PEMG 알고리즘의 초기치 θ^n 은 CBP 재구성 이미지의 음수 값들을 0으로 대체하여 사용하였다.



[Fig. 3] For experiment (다), the simulated image reconstruction using the PEMG-1 and PPS-PEMG algorithms (from left to right: original image(a), reconstructed image with PEMG-1(b), PPS-PEMG(c))



[Fig. 4] For experiment (가), the simulated image reconstruction using the PEMG-1 and PPS-PEMG algorithms (from left to right: the original image(d), reconstructed image with PEMG-1(e), reconstructed image with PPS-PEMG(f))



[Fig. 5] Graph (a) corresponds to experiment (다) (average incident photon intensity of 150), (b) to experiment (나) (average incident photon count of 350), and (c) to experiment (가) (average incident photon count of 600), showing the convergence rate of the penalized log-likelihood using the PEMG-1 and PPS-PEMG algorithms

그림 [Fig. 3] 평균입사 광자 에너지의 세기가 저준위 인 경우인데 재구성된 영상을 보면 PPS-PEMG 알고리즘이 PEMG-1 보다 재구성 영상의 화질이 좋은 결과를 보여주고 있다. 그리고 그림 [Fig. 4]는 평균입사 광자 에너지의 세기가 고준위이다. 여기서 재구성 영상의 화질을 비교하면 역시 PPS-PEMG 알고리즘이 PEMG-1보다 양질의 이미지를 나타내고 있다.

그림 [Fig. 5]의 (a), (b), (c)를 살펴보면 평균입사 광자수의 세기에 관계 없이 PPS-PEMG 알고리즘이 PEMG-1 보다 모든 경우에서 페널티 로그우도를 증가시키는 수렴률이 빠르다는 것을 나타내고 있다.

<Table 1> Comparison of damping coefficient estimates (Mean and SDT damping coefficient estimates by region

Division	Name t		Spine	Lungs	Heart	Body
	Real damping coefficient		0.1700	0.0080	0.0700	0.0500
Experiment (가)	PEMG-1	Mean	0.1756	0.0084	0.0643	0.0578
		STD	0.1845	0.1390	0.3721	0.0699
	PPS-PEMG	Mean	0.1712	0.0081	0.0695	0.0490
		STD	0.1823	0.1314	0.3624	0.0645
Experiment (나)	PEMG-1	Mean	0.1743	0.0086	0.0710	0.0578
		STD	0.1849	0.1398	0.3781	0.0693
	PPS-PEMG	Mean	0.1714	0.0083	0.0694	0.0510
		STD	0.1831	0.1375	0.3691	0.0653
Experiment (다)	PEMG-1	Mean	0.1727	0.0089	0.0784	0.0418
		STD	0.1835	0.1380	0.3793	0.6989
	PPS-PEMG	Mean	0.1711	0.0085	0.0712	0.0512
		STD	0.1832	0.1369	0.3697	0.6594

7. 결론

통계적 영상 재구성(SIR) 방법은 고품질 및 정확한 이미지를 생성할 수 있는 능력을 개선하면서 환자의 방사선 노출을 크게 줄일 수 있다. 그런데 투과형도머그래피 영상재구성의 경우에는 페널티 함수인 헤이지안 행렬의 역행렬 차수가 매우 크기 때문에 구할 수가 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 저자는 PEMG-1 알고리즘을 제안하였다. 그러나 PEMG-1 알고리즘은 일반 통계적 영상재구성 방법처럼 페널티 로그우도를 증가시키는 수렴속도가 문제점이 있다. 이에 본 연구에서는 수렴속도가 빠르고 우도의 단조 증가성을 보장하는 재구성 알고리즘인 PPS-PEMG를 제안하였다. 시뮬레이션 결과 제

안한 알고리즘이 평균입사 광자수에 관계없이 비교적 양질의 영상을 보임을 확인할 수 있었다(Fig. 3) 및 [Fig. 4] 참조). 그리고 수렴률도 제안한 알고리즘이 3가지 경우의 모의실험에서 모두 빠름을 알 수 있다[Fig. 5 참조]. 수렴속도의 향상은 CT 영상재구성의 효율성 증가와 계산비용 감소 등 실효성을 높인다는 취지에서 의미 있게 평가할 수 있다.

한편, 신체 부위별 감쇄계수의 평균 및 표준편차의 추정치에서도 제안한 알고리즘의 정확도가 높음을 알 수 있다[Table 1 참조]. 결론적으로 제안한 알고리즘이 향상된 재구성 이미지 품질과 반복 기법을 촉진하는 등 여러 면에서 효율성을 입증하였다.

REFERENCES

- [1] Qiaoqiao Ding, Yong Long, and Jeffrey A. Fessler "Statistical Image Reconstruction Using Mixed Poisson Gaussian Noise Model for X-Ray CT" IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 10, No. 3, pp.1-11, 2018.
- [2] K. S. Lange. "A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm", Journal of Royal Statistical Society B, Vol.57, pp.425-437, 1995.
- [3] Tateishi, K, Yamaguchi, Y., Abou Al-Ola, O.M. and Yoshinaga, T. "Continuous Analog of Accelerated OS-EM Algorithm for Computed Tomography". Math. Probl. Eng. pp.34-42, 2017.
- [4] Cho Z. W, John J. P. and Singh M., "Foundation of Medical Imaging", John Wiley and Sons, 1993.
- [5] A. P. Dempster. and N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete Data from via the EM algorithm." Journal of Royal Statistical Society B, Vol.39, No.2. pp.1-38, 1977.
- [6] P. J. Green., "On use of the EM Algorithm for Penalized Likelihood Estimation", Journal of Royal Statistical SocietyB, Vol.52, pp.443-452, 1990.
- [7] Ing-Tsung Hsiao and Anand Rangarajan, "An Overview of Fast Convergent Ordered-Subsets Reconstruction Methods for Emission Tomography Based on the Incremental EM Algorithm" Nucl Instrum Methods Phys Res A. Vol.569, No.2, pp.429-422, 2006.
- [8] M. K. Song. "A Study of Digital Image Restoration for Modified PEM Gradient Algorithm", The Transactions of the Korea Information Processing Society, Vol.7, No.1, pp.153-158, 2000.
- [9] M. K. Song., "A Study of Penalty EM Gradient Algorithm in Digital Image Restoration," Doctoral Thesis., pp.1-81, 1998.
- [10] J. A. Fessler. and H. Erdogan. "A Paraboloidal Surrogates Algorithm for Convergent Penalized -likelihood Emission Image Reconstruction", IEEE, pp.1132-1135, 1999.
- [11] J. A. Fessler. and E. P. Ficaró. & N. H. Clinthorne. & K. S. Lange, "Grouped-Coordinate Ascent Algorithms for Penalized-Likelihood Transmission Image Reconstruction", IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol.16, No.2, pp.166-175, 1997.
- [12] Omar M. Abou Al-Ola, Ryosuke and Kasai, Yusaku Yamaguchi, "Image Reconstruction Algorithm Using Weighted Mean of Ordered -Subsets EM and MART for Computed Tomography", Mathematics, Vol.10, No.22, pp.1-17, 2022.
- [13] Sathish Ramani and Jeffrey A. Fessler, "A Splitting-Based Iterative Algorithm for Accelerated Statistical X-Ray CT Reconstruction", IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol..31, No.3, pp. 677-688. ,2012.
- [14] Sathish Ramani and Jeffrey A. Fessler, "A Hybrid Regularizer Combining Orthonormal Wavelets and Finite Differences for Statistical Reconstruction in 3-D CT, The second international conference on image formation in X-ray computed tomography, 2017.
- [15] Sathish Ramani and Jeffrey A. Fessler, "Statistical X-Ray CT Reconstruction Using A Splitting-Based Iterative Algorithm with Orthonormal Wavelets, IEEE, pp.1008-1011, 2012.

송민구(Min-Gu Song)

[정회원]



- 1988년 2월 : 동국대학교 통계학과 졸업(이학학사)
- 1991년 8월 : 동국대학교 통계학과 응용통계학 전공(이학석사)
- 1997년 8월 : 동국대학교 통계학과 전산통계학 전공(이학박사)

- 1994년 9월 ~ 2007년 2월 : 동국대학교 대우 및 겸임교수
- 2002년 10월 ~ 2015년 8월 : 현대정보기술 BI 센터장 (상무)
- 2016년 3월 ~ 현재 : 예원예술대학교 교양학부 교수
- E-Mail : minsong3@naver.com, P3172@office.yewon.ac.kr

<관심분야>

디지털 영상재구성, 사물인터넷, 등