韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.3.321
2024. 7. 제 27권, 제 3호, 321-331

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
July. 2024, Vol. 27, No. 3, 321-331

은유의 관점에서 본 분수 개념화의 어려움

황현미(서울창도초등학교, 교사) · 홍진곤(건국대학교, 교수)†

본 연구는 분수 개념화 과정에서 나타나는 어려움을 은유의 관점에서 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 수학교육에서의 은유를 은유에 의한 자연스러운 개념화와 교육적 은유로의 확장으로 나누어 고찰한 후, 은유적 개념화의 과정에서 발생할 수 있는 분수 학습의 어려움을 하나 이상의 은유의 통합, 기존에 형성된 기초 은유의 방해, 은유의 패러독스의 세 측면에서 분석하였다. 이를 통해 분수 교수 · 학습 시 은유가 어떤 방식으로 작용하는지에 보다 세심한 주의가 필요함을 밝히고 분수 학습 지도 방안을 고안하는 데 시사점을 제공하였다.

I. 서론

새로운 개념을 접할 때 은유 없이 이해한다는 것은 거의 불가능하다. 개념 그 자체만으로 직접적으로 이해할 수 있는 방법은 없으며, 이미 알고 있는 것들을 동원하여 새로운 개념을 알아가게 된다. 예를 들어, '시간'이라는 개념을 그 자체로 설명하고 이해하기는 어렵다. 따라서 특정 문화에서는 '시간은 돈'이라던가 '시간은 한정된 자원'이라는 은유를 바탕으로 시간을 소비할 수 있고 시간을 현명하게 투자한다던가 허비할 수 있는 것으로 이해한다. Lakoff와 Johnson(2003)은 이와 같이 한 종류의 사물을 다른 종류의 사물의 관점에서 이해하고 경험하는 것이 은유의 본질이라고 하였으며 인간의 개념 체계는 은유적으로 구성되고 규정된다고 보았다.

그렇다면 가장 추상적인 개념 중 하나라고 할 수 있는 수학적 개념은 어떻게 형성되고 이해되는가? 앞서 언급한 Lakoff와 Johnson(2003)의 주장대로라면 수학적 개념 또한 은유적으로 구성되고 이해되는 것이라 할 수 있다. Brownell은 수학을 개념, 원리, 과정이 밀접하게 짜인 하나의 체계로 생각하였으며 개념들 간의 연결이 형성되어야 한다고 하였다(Reys et al., 2015). 또한 Skemp는 수학 학습의 주요 목적을 스키마, 곧 개념적 구조를 형성하는 것이라고 하여 기존 지식과 새로운 지식 사이의 연결을 강조하고 있다(황혜정 외, 2023). 이와 같은 맥락에서 수학적 개념을 학습한다는 것은 개념 그 자체를 직접적으로 이해한다기보다는 기존의 경험과 지식을 바탕으로 새로운 개념을 재구성해 가는 것이라고 할 수 있다. 따라서 인간의 개념 체계가 본질적으로 은유적이라는 관점은 수학 학습 과정에서도 중요하게 작용한다고 볼 수 있다.

이에 우리나라에서도 수학 학습과 은유를 연결 짓는 다양한 연구들이 진행되어 왔다. 예를 들면, 학생들의 수학 개념 형성에서 나타나는 은유를 분석한 연구(예, 김상미, 2023), 수학 수업 상황에서 나타나는 은유를 분석한 연구(예, 김상미, 신인선, 2007; 이종희, 최성이, 2012), 수학 학습 지도에서 은유의 활용에 대한 연구(예, 김지연, 2011; 이경화, 2010; 이승우, 우정호, 2002) 등을 찾아볼 수 있다. 특히 김지연(2011)은 은유가 설명적 기능, 정교화 기능, 표상적 기능을 가지고 있음을 밝히고 수학 학습 지도 방안으로서 수학적 개념을 설명하고 수학적 연결성을 강화하고 수학적 표상 활동을 지도하는 데 은유가 효과적으로 활용될 수 있음을 제시하고 있다.

이러한 맥락에서 초등학생들이 가장 어려워하는 수학 주제 중의 하나인 분수에 대해 생각해 보면, 분수 교수 · 학습에 대한 연구에서 자주 등장하는 것이 수학적 모델의 활용이다(예, 강윤지, 2023; 김정원, 2022a; 방정숙 외, 2023; 양현수 외, 2023; 이광호, 박중규, 2024). 수학적 모델을 활용한다는 것은 추상적인 분수의 개념을 그 자체로 지도하기가 거의 불가능하니 학생들에게 친숙한 구체적 이미지 및 활동을 통해 이해시키고자 하는 의도가 담겨 있다. 따라서 이 과정에서

* 접수일(2024년 5월 9일), 심사(수정)일(2024년 6월 20일), 게재확정일(2024년 7월 29일)
* MSC2020분류 : 97C30
* 주제어 : 은유, 개념적 은유, 교육적 은유, 분수
† 교신저자 : dion@konkuk.ac.kr

은유의 작용은 필수적이다.

최근까지도 다양한 분수 모델을 활용한 학생들의 이해 및 지도 방안에 대한 연구가 지속되고 있으며 이중척도모델과 같이 새로운 모델이 도입되고 활용된다는 것은 매우 바람직한 현상일 것이다. 그러나 한편으로는 그럼에도 불구하고 여전히 학생들에게 분수는 매우 어려운 주제라는 점은 주목해야 할 부분이다. 따라서 분수 학습에 효과적으로 활용될 수 있다고 고안된 다양한 모델들을 비롯해 분수의 교수 · 학습 과정 자체에서 그 어려움의 원인을 찾아볼 필요가 있다. 은유가 수학 학습 지도 방안으로써 효과적으로 작용한다는 측면만 강조하다 보면 결국 은유 그 자체가 가지고 있는 모호성이나 부분성 등과 같은 특성들을 간과할 수 있는 것이다.

이와 같은 배경을 바탕으로, 본 연구는 분수 개념화 과정에서 나타나는 어려움을 은유의 관점에서 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 수학교육에서의 은유를 은유에 의한 자연스러운 개념화와 교육적 은유로의 확장으로 나누어 고찰한 후, 은유적 개념화의 과정에서 발생할 수 있는 분수 학습의 어려움을 분석하였다. 이를 통해 분수의 교수 · 학습 시 은유가 어떻게 작용하는지에 더욱 세심한 주의가 필요함을 밝히고 분수 학습 지도 방안을 고안하는 데 시사점을 제공하였다.

II. 수학교육에서 은유에 대한 고찰

은유는 수학의 구조 및 수학적 추론의 핵심이다 (English, 1997). 본 장에서는 기본 은유에 의한 수학적 아이디어의 자연스러운 개념화와 기본 은유의 한계로 인한 교육적 은유로의 확장에 대해 논의하고자 한다.

1. 은유에 의한 자연스러운 개념화

은유는 그 암묵적인 특성으로 인해 우리가 의식하든 의식하지 않든 새로운 개념을 자연스럽게 받아들일 수 있도록 해 준다. Lakoff와 Johnson(2003)은 은유란 단순히 말의 특성이라기보다 우리의 일상적 삶에 널리 퍼져 있으며 일상적 개념 체계 대부분이 그 본성에 있어서 은유적이라고 제안한다. 즉, 인간의 사고 과정의 대부분이 은유적이라는 것이다. 예를 들면, ‘삶’을 개념화하는 데 ‘삶은 그릇’이라는 은유에서와 같은 일상적 경험을 사용하기 때문에 이러한 개념들은 은유적이다. 이러한 은유는 문화나 관습에 의한 사고방식이기 때문에 은유인지조차 의식하는 것이 어려울 정도로 자연스럽게 받아들여진다.

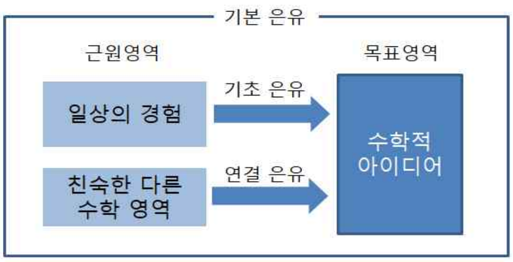
이는 우리가 수학 학습을 시작할 때도 마찬가지로 작용한다. 은유는 영역을 넘나드는 개념적 사상으로 근원 영역(source domain)의 구조를 목표 영역(target domain)으로 투사하게 되는데, 이를 수학 학습에 적용하여 생각해 보면 일상의 경험 또는 이미 알고 있는 지식을 근원 영역으로 하여 목표로 하는 수학적 아이디어에 투사한다고 볼 수 있다. Lakoff와 Núñez(1997)는 이와 같이 수학적 아이디어를 형성하는 데 이용되는 기본적인 은유로 다음과 같이 기초 은유(grounding metaphor)와 연결 은유(linking metaphor)를 제시하고 있다.

먼저 기초 은유는 수학적 아이디어의 기반을 일상 경험에 두는 것이다. 예를 들면 수학을 처음 학습할 때 다루게 되는 산술의 개념화에서 찾아볼 수 있다. ‘산술은 대상의 모음이다’, ‘산술은 대상의 구성이다’, ‘산술은 이동이다’의 은유는 산술연산을 개념화하기 위해, 이를 모음을 형성하는 것, 대상을 구성하는 것, 공간을 이동하는 것과 관련시킨다. 기초 은유는 우리가 친숙하게 알고 이해하는 일상 영역으로부터의 이미지 스키마 구조를 수학 영역으로 투사하도록 함으로써 우리가 암묵적으로 이해하고 있는 일상 세계에서의 추론을 수학 영역으로 투사하게 한다. 이러한 기초 은유는 자연수와 그 기본 연산에 대한 개념화를 거부감 없이 자연스럽게 이끌 수 있다.

한편, 연결 은유는 수학의 한 분야를 다른 분야와 연결하도록 하는 것이다. 예를 들어, ‘산술은 기하이다’의 은유는 수를 직선 상의 점으로 은유적으로 이해할 때 산술과 기하를 연결한 것으로 생각할 수 있다. 이러한 산술과 기하의 연결은 산술에 대한 이해의 범위를 확장하는 데 도움을 준다.

이와 같이 기초 은유와 연결 은유를 포함하는 기본 은유는 우리의 일상 경험에 의해 동기화되어 개념을 구조화하고 인간의 사고 과정에 무의식적으로 개재되어 수학의 이해와 추론에 영향을 미치는 자연발생적인 것이라고 할 수 있다(이승우, 우정호, 2002). 따라서 기본 은유를 이용한 수학적 아이디어의 개념화는 학생들

이 의식하지 못할 만큼 자연스럽게 받아들여지거나 또는 어려움 없이 은유적 추론이 가능하여 그만큼 수학 학습에 효과적으로 작용한다고 할 수 있다([그림 1] 참조).



[그림 1] 기본 은유

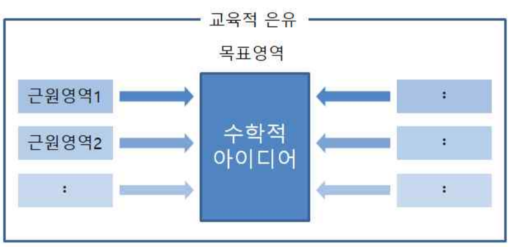
2. 교육적 은유로의 확장

앞에서 언급한 산술의 가장 기초적인 은유인 모음 은유와 구성 은유는 산술연산을 대상의 집합을 구성하는 행위로 간주하기 때문에 자연수에 대해서만 작용한다. 즉, 수학을 학습하면서 수 체계가 정수, 유리수, 실수로 확장되면 이러한 은유를 사용할 수 없다. 예를 들면, '음수는 반대되는 성질을 가진 대상'이라는 은유로 모음 은유를 확장하여 2+(-2)=0과 같은 음수의 덧셈에 의미를 부여할 수 있지만 이를 음수의 곱셈으로 확장할 수는 없다(우정호, 2021). 결국 기초 은유는 그 사용에 있어 제한적이라 이러한 은유에 의해 특성화된 산술은 연결 은유와 환유를 통해 수세기에 걸쳐 매우 확장되어 왔다(Lakoff & Núñez, 1997). 그러나 사실 이러한 확장을 모두 포괄하는 일관되고 자연스러운 방식은 없다. 산술에 대한 기초 은유 중 음수로 가장 쉽고 자연스럽게 확장되는 것이 이동 은유이다. 그러나 이 또한 결국 기초 은유의 확장을 만들어 낸 것이며 여전히 인위적이다(Lakoff & Núñez, 1997). 이는 자연스러운 기초 은유의 확장을 보완하는 교수 영역에 속하며, 이를 교육적 은유라 한다.

교육적 은유는 수학 개념에 대한 학생들의 자연스러운 이해와 수학적 사고의 발달을 가능하게 하기 위해 인간의 사고 과정에 개재하는 개념적 은유를 교육적 은유로 확장하거나 복합적으로 활용하는 것을 말한다(이승우, 우정호, 2002). 즉, 경험에 기반한 기초 은유는 산술의 모음 은유와 구성 은유에서와 같이 수학의 개념을 부분적으로만 이해하게 하므로, 기초 은유를 혼합하거나 새롭게 확장하여 인공적인 은유를 만들어 특정한 교수 목적에 사용하려는 것이다.

이러한 교육적 은유는 그 목적에도 불구하고 한 가지 이상의 은유를 복합적으로 사용하거나 새롭게 확장하여 만든 인공적인 것이기 때문에 오히려 학생들의 학습을 어렵게 할 수 있다. 은유의 힘은 '어떤 하나의 정신적 영역을 다른 정신적 영역에 의하여 개념화하는 그 방식'에 있고 따라서 은유적으로 추론하는 것은 영역을 가로지르는 사상(cross-domain mapping)이라고 규정할 수 있다(Lakoff, 1994). 영역을 가로지르는 사상은 고도로 구조화되는데(Lakoff, 1994) 은유가 효과적이기 위해서는 학습자가 적절한 관계적 사상을 만들어야 한다(English, 1997).

그런데 [그림 2]에서와 같이 수학적 아이디어를 개념화하는 데 한 가지 이상의 복합적인 은유가 동시에 작용한다면 학생들은 해당 수학적 아이디어를 이해하기 위해 각각의 은유에서 부각하고 있는 부분을 인식하여 복합적으로 추론하는 과정을 거쳐야 한다. 또한 수학적 아이디어를 개념화하는 데 제시된 상황에 따라 다른 은유를 사용해야 한다면 학생들은 상황에 따라 어떤 은유가 사용되는지를 인식해야 하고 그에 맞는 관계적 사상을 만들어 내야 한다. 자연스러운 은유가 아닌 인공적인 은유의 사용에 있어 이 또한 자연스럽게 이루어지기는 어려울 것이다. 게다가 은유의 암묵적인 특성은 학생들이 스스로 은유가 부각하려는 것과 은폐하려는 것을 구분하고 복합적인 은유를 인식하고 은유를 통해 적절한 관계적 사상을 만들어 내야 하는 무거운 부담을 안겨줄 수 있다.



[그림 2] 교육적 은유

또한 학교 수학에 교육적 은유를 도입할 때는 목표 영역과 근원 영역의 구조적 동형성, 근원 영역 구조의 단순 명료성, 학생들에게 친숙한 일상의 경험구조나 이미 학습된 지식 구조의 반영 정도 등을 고려해야 하는데(이승우, 우정호, 2002), 어느 정도 그 한계점을 인정하더라도 적절하지 못한 은유의 도입은 오히려 학생들에게 혼란과 어려움을 야기할 수 있다. 즉, 수학 학습에 은유를 확장하여 교육적 은유를 새롭게 도입했을 때 은유 자체가 목표 영역인 수학적 아이디어에 적절하지 못한 경우도 있고, 근원 영역과 목표 영역 사이의 구조를 모두 알아야만 관계적 사상이 가능한 경우도 있으며, 근원 영역 자체가 복잡하고 학생들에게 친숙하지 않은 경우도 있을 수 있다는 것이다. 따라서 교육적 은유의 선택과 사용에 있어 교사의 세심한 주의가 요구되나 은유의 암묵적 특성은 이러한 판단을 어렵게 하기도 한다.

물론 이와 같은 교육적 은유 사용의 어려운 측면에도 불구하고 추상적인 수학 개념을 이해하는데 은유가 필요함은 재고의 여지가 없다. 이에 많은 교과서와 교수-학습 자료에서는 보다 효과적인 은유의 도입과 사용을 위해 상당한 노력을 기울이고 있다. 그러나 본 장에서 논의한 바와 같이 효과적이라고 기대되는 은유를 제시한다고 하여 자동적으로 수학적 아이디어에 대한 개념화가 이루어지는 것은 아니다. 먼저 학교 수학에 교육적 은유의 도입은 자연스러운 은유가 아닌 인공적인 은유이기 때문에 보다 신중하게 이루어져야 하며, 은유를 사용하여 개념화하는 과정에서 그 암묵적인 특성으로 인해 학생들이 암묵적으로 받아들이길 기대하기보다는 교사의 철저한 지도 계획이 필요함을 주목해야 한다.

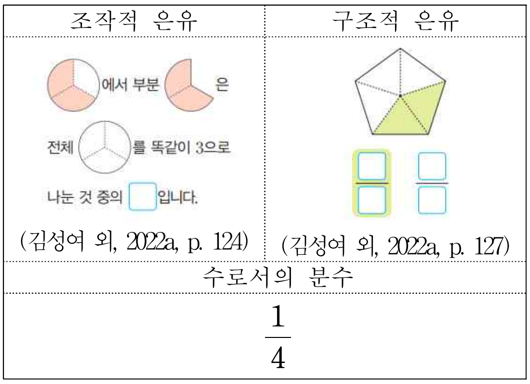
Ⅲ. 은유적 개념화의 과정에서 발생할 수 있는 분수 학습의 어려움

본 장에서는 앞서 논의한 교육적 은유로의 확장 과정에서 발생할 수 있는 어려움의 측면에서 분수의 개념화 과정을 분석하였다. 일반적인 분수의 교수·학습 과정을 살펴보기 위해 현재 많이 사용되고 있는 3개 출판사의 수학 교과서 4종을 분석 대상으로 하였다. 분석 방법은 교육적 은유로의 확장 과정에서 나타날 수 있는 하나 이상의 은유의 통합, 기존에 형성된 기초 은유의 방해, 은유의 패러독스를 분석 기준으로 설정하고 이 세 관점에서 분수의 교수·학습 과정을 살펴보았다. 다만, 본 연구의 목적이 수학 교과서 4종을 비교 분석하는 데 있는 것이 아니므로 각 관점에 따른 대표적인 수학 교과서 사례만 제시하였다.

1. 하나 이상의 은유의 통합

분수의 개념을 도입하는 과정을 살펴보면 하나 이상의 은유의 도움을 받는다. 이 때 학생들이 상호추론적인 동형을 파악하거나 대응하는 은유를 통합하는 데 어려움을 겪을 수 있다.

4종의 수학 교과서에서 분수의 도입 과정은 공통적으로 다음과 같이 진행된다(김성여 외, 2022a; 박만구 외, 2022; 신항균 외, 2022a; 한대희 외, 2022a). [그림 3]은 대표적으로 한 수학 교과서의 사례를 제시한 것이다. 먼저 전체를 똑같이 3으로 나눈 후 2개를 선택하는, 분배하고 모으는 '조작적' 은유로 시작한다. 이어서 전체에 대한 색칠된 부분을 파악하는 '구조적' 은유가 제시되고, 그 이후에 $\frac{1}{4}$과 같이 분수를 수로 다루게 된다.



[그림 3] 분수의 도입 과정에서 나타나는 은유들

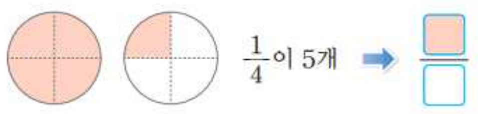
분수를 잘 이해한다는 것은 이와 같은 서로 다른 영역을 오갈 수 있는 능력이 있어야 한다. 측정 과정 영역(분배하기와 모으기), 나눌 수 있지만 연속적인 영

역, 그리고 수의 영역을 중재하고 통합하는 것은 상징 기호 $\frac{b}{a}$이다(Sfard, 1997). 그러나 수가 어느 하나의 은유적 표현과 완전하게 동일하게 받아들여진다면 오히려 이후의 분수 학습에 어려움을 초래할 수 있다.

예를 들어, 이산량의 분수만큼을 알기 위해서는 [그림 4]와 같이 똑같이 2묶음으로 나누고 1묶음을 택하는 '조작적' 은유가 작동한다. 또한 진분수와 가분수를 알기 위해서는 [그림 5]와 같이 전체와 부분의 관계를 파악하는 '구조적' 은유가 작동한다. 만약 가분수 $\frac{7}{5}$을 설명하기 위해 학생이 조작적 은유를 적용한다면 전체를 똑같이 5로 나누고 7을 선택할 수 없어(5밖에 없으므로) 난관에 부딪히게 될 것이다. 이와 같이 분수 학습 상황에 따라 가장 효과적이라 여겨지는 은유가 우선적으로 작동하기 때문에 여러 은유의 조절과 통합을 통해 분수의 개념을 이해하는 것이 중요하다.

(한대희 외, 2022b, p. 84)

[그림 4] 조작적 은유 적용 예



(김성여 외, 2022b, p. 96)

[그림 5] 구조적 은유 적용 예

그러나 이 과정은 교사 또는 수학 교과서에 의해 제시된 바에 따라 자동적으로 이루어지는 것이 아니라 몇 개의 맥락과 담화가 복잡한 방식으로 상호작용하면서 이루어지는 것이다. 따라서 분수에 대해 피자 또는 쿠키 조각만을 떠올리는 학생들은 분배하고 모으는 조작이나 수로서의 분수를 다루지 못함으로 인해 분수 학습에 어려움이 발생할 수 있다.

2. 기존에 형성된 기초 은유의 방해

학생들은 분수의 개념 이전에 자연수의 개념을 학습한다. 자연수는 일상의 경험을 기반으로 하여 물리적 대상의 모음, 물리적 대상, 경로 상의 위치와 같은 은유를 통해 개념화된다. 이와 같은 수에 대한 기초 은유는 학생들의 일상 경험을 기반으로 하여 자연스럽게 받아들여지나 자연수와 기본 연산에만 부분적이고 제한되어 있다.

오랜 시간 동안 익숙해진 일상의 경험과 이를 바탕으로 한 기초 은유를 통해 수를 개념화한 학생들은 새로운 수, 즉 분수의 학습에도 이와 같은 은유가 작동하길 기대한다. 따라서 분수의 학습 과정에서 이와 맞지 않는 상황에 부딪히게 될 것이고 이때 기초 은유의 새로운 확장이 제대로 이루어지지 않는다면 분수 학습은 어려워질 수밖에 없다.

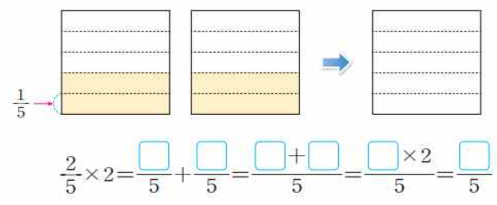
예를 들면, [그림 6]과 같이 색칠한 부분을 분수로 나타내기 위해서는 분배하기와 모으기의 조작적 은유가 적용된다. 이 과정에서 수를 물리적 대상의 모음이나 물리적 대상으로 보는 은유는 4를 $\frac{2}{3}$로 나타내야 하는 상황을 만들게 되고 학생들은 이 상황을 받아들이기 어렵게 된다. 또는 물리적 대상 하나하나를 인식하여 $\frac{4}{6}$로 나타내기도 한다.

(신항균 외, 2022b, p. 79)

[그림 6] 조작적 은유 적용 예

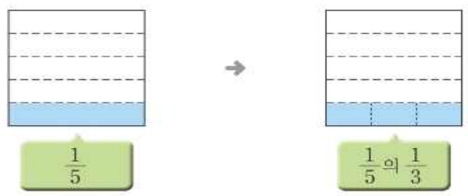
이러한 경향은 분수의 곱셈에서 두드러지게 나타난다. 산술의 기초 은유 중 대상 모음 은유에 따르면 곱셈은 동일 크기의 모음을 주어진 횟수만큼 반복하여 더하는 것으로 항상 양이 증가한다. 그러나 새로운 분

수의 곱셈은 이러한 성질이 없다. 물론 (분수)×(자연수)에서와 같이 동일 크기의 모음을 주어진 횟수만큼 반복하여 더하는 기초 은유가 그대로 적용되어 양이 증가하는 경우도 있다([그림 7] 참조). 그렇지만 (분수)×(분수)에서는 분배하고 모으는 작용으로 결과가 감소하기도 한다([그림 8] 참조).



(김성여 외, 2023a, p. 36)

[그림 7] 대상 모음 은유 적용 예



(박만구 외, 2023a, p. 42)

[그림 8] 조작적 은유 적용 예

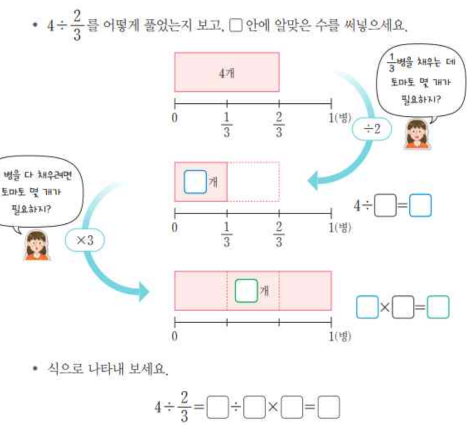
이때 학생들은 새로운 상황에 따라 기존에 형성된 곱셈 개념을 적절히 조절할 수 있어야 한다. 이는 나눗셈의 경우도 마찬가지이다. 자연수에서 은유적으로 이식된 아이디어가 분수라는 새로운 맥락의 기초가 되기 위해서는 변화를 겪어야 한다. 어떤 특징을 버리지 못한다면 새로운 맥락이나 개념을 구성하는 데 기여하는 다른 은유들과 논리적으로 불일치하게 될 위험이 있다. 따라서 기존에 형성된 자연수에 대한 기초 은유가 분수 학습을 방해하는 결과를 초래할 수 있다.

3. 은유의 패러독스

Sfard(1997)에 따르면 이미 알고 있는 지식에서 새로운 지식을 창조한다는 아이디어는 본질적으로 역설적이다. 새로운 어떤 것이 생겨나기 전에 이미 알고 있는 지식과 유사하다고 말할 수 없기 때문이다. 따라서 은유적 개념화가 작동하려면 학생들은 목표의 구조, 즉 수학적 개념 자체의 구조를 미리 알고 있어야만 한다는 것이 된다. 이러한 혼란을 피하기 위해서 Sfard(1997)는 은유적 투사를 변증법적으로, 즉 기존의 것과 새로운 것 사이의 끊임없는 상호작용의 과정으로 보아야 한다고 말한다.

분수의 학습에 사용되는 은유도 역설적일 수 있다. 은유의 사용은 추상적인 수학적 아이디어(목표 영역)가 구체적이고 친숙한 영역(근원 영역)에 의해 이해되는 '영역을 가로지르는 사상'을 수반한다(English, 1997). 그런데 이 과정에서 오히려 목표 영역에 대한 구조를 알아야 근원 영역과의 관계적 구조가 공유되는 현상이 발생하기도 한다.

예를 들면, (자연수)÷(분수)의 계산 원리를 알기 위해 [그림 9]와 같은 교수 전략이 사용되기도 한다. 먼저 문제상황을 보고 $4 \div \frac{2}{3}$의 식을 세운 뒤, 문제 상황을 그림으로 나타내어 4를 2로 나누고 여기에 3을 곱하는 과정을 보여준다. 이를 통해 $4 \div \frac{2}{3}$는 $4 \div 2 \times 3$과 같음을 제시하고 있다. 이는 등분제(측정량과 측정값이 주어졌을 때 단위량을 구하는 것)가 분수의 나눗셈 지도의 각 단계, 특히 분수 나눗셈의 개념 지도 단계와

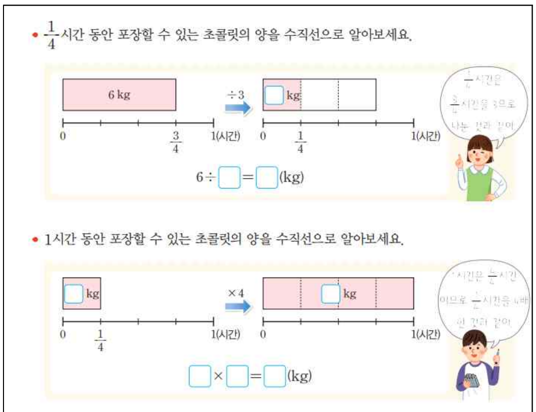


(박만구 외, 2023b, p. 19)

[그림 9] $4 \div \frac{2}{3}$ 지도 예

분수 나눗셈 알고리즘 증명 단계에서 효과적으로 사용될 수 있다는 연구(강홍규, 2014)와 단위 비율 결정 맥락이 분수의 나눗셈 계산 원리를 탐색하기에 용이하다고 제안한 연구(방정숙, 이지영, 2009)에서 보다시피 분수의 나눗셈 개념을 이해하고 그 계산 과정을 의미있게 지도하는 데 효과적일 수 있다.

그러나 강홍규(2014)에서 지적하였듯이 이와 같은 분수의 나눗셈 상황을 나눗셈식으로 변환시키는 것은 매우 어렵게 느껴지는 것이 사실이다. 하물며 제시된 나눗셈 상황을 분수의 나눗셈식으로 나타내는 것과 제시된 나눗셈 상황을 그림으로 해결하는 것 사이에 관계적 구조가 공유되지 않는다면 $4 \div \frac{2}{3}$와 제시된 그림의 구조는 별개의 영역으로 인식될 수 있다. 따라서 이 경우 $4 \div \frac{2}{3}$의 맥락(예, 토마토 4개로 토마토소스 $\frac{2}{3}$병을 만들 때, 토마토소스 1병을 만드는 데 필요한 토마토의 개수)과 6÷3×4의 과정 사이에 반복되는 상호작용을 통한 적응의 과정이 세심하게 주어질 필요가 있다.

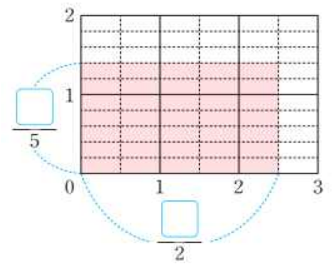


(김성여 외, 2023b, p. 19)

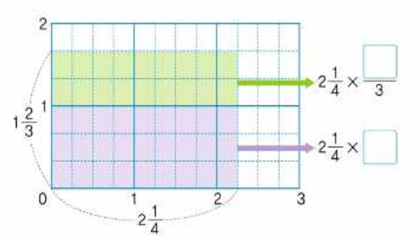
[그림 10] $6 \div \frac{3}{4}$ 지도 예

또한 분수 학습에서 사용하는 은유가 너무 복잡하여 의도된 수학적 관계들을 깨닫기 어려운 경우가 있다. 이 경우 은유는 학습에서 근원 영역이나 보조관념이 아니라 '목표 영역'이 될 수 있다. 즉, 학생들이 추상적인 수학적 개념을 이해하는 과정에서 은유의 사용을 시작하기도 전에 은유 자체를 해석해야 하는 문제에 직면하게 되는 것이다. 예를 들면, [그림 10]에서 학생들은 $\frac{3}{4}$을 나타낸 수직선과 6을 나타내는 막대를 결합한 그림을 이해해야 한다. 이와 같은 그림을 이전에 본 적이 없다면 6과 $\frac{3}{4}$이 왜 같은 양만큼 그려져 있는지를 해석해야 할 것이다.

또 다른 예로, [그림 11]과 같이 (대분수)×(대분수)의 계산 원리를 직사각형의 넓이를 이용해 학습하는 과정에서 학생들은 직사각형의 넓이 자체를 이해하는 데에 상당한 어려움을 겪을 수 있다. 위의 그림에서 학생들은 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 $2\frac{1}{2}$과 $1\frac{2}{5}$임을 확인해야 하고, 작은 한 칸의 넓이가 $\frac{1}{10}$이 된다는 것과 이를 이용해 색칠한 부분의 넓이를 구할 수 있다는 것을 먼저 해석해야 한다. 더구나 [그림 11]의 아래 그림과 같은 경우 색칠한 부분을 둘로 나누었기 때문에 나누어진 두 부분에 대한 이해 또한 이루어져야 한다.



(김성여 외, 2023a, p. 48)



(한대희 외, 2023, p.46)

[그림 11] (대분수)×(대분수)의 지도 예

이와 같이 은유 자체를 해석해야 하는 문제에 직면했을 때 학생들은 근원 영역과 목표 영역을 분리된 실체로 다루면서 둘 사이의 대응되는 관계를 보는 데 오히려 어려움을 겪을 수 있다(English, 1997).

Ⅳ. 결론

본 연구는 인간의 개념 체계가 은유적으로 구성되고 규정된다는 관점에서 분수 개념화 과정에서 나타나는 어려움을 분석하였다. 수학교육에서의 은유는 학생들이 가지고 있는 일상의 경험과 지식을 근원 영역으로 하여 수학적 아이디어라는 목표 영역으로의 투사를 통한 자연스러운 개념화의 역할을 하고 있다. 그러나 기초 은유와 연결 은유를 포함하는 기본 은유가 이후에 학습하는 모든 수학적 아이디어에 그대로 작용하지 못하기 때문에 교육적 은유로의 확장이 이루어질 수 밖에 없다. 이러한 과정에서 은유 자체가 가지고 있는 한계점, 교육적 은유로의 확장에서 발생하는 인위성 등으로 인해 오히려 학습의 어려움이 발생할 수 있음에 주목하였다. 이러한 분수 개념화의 어려움을 하나 이상의 은유의 통합, 기존에 형성된 기초 은유의 방해, 은유의 패러독스의 세 측면에서 분석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 분수 학습 시 여러 은유의 조절과 통합을 통해 분수의 개념을 이해하는 것이 중요하다. 분수의 개념을 도입할 때 조작적 은유에서 시작하여 구조적 은유, 수로서의 은유로 나아가며 하나 이상의 은유의 도움을 받게 된다. 이와 같은 서로 다른 영역을 통합하고 조절하며 분수의 개념을 학습해야 상황에 따라 우선적으로 작동하는 은유를 떠올릴 수 있게 된다. 은유는 개념적 사고가 가능하도록 하는 인지적 장치인 동시에 상상력을 제한한다(Sfard, 1997)는 지적이 있는 것처럼 한 가지 은유에 고정되어 있다면 개념을 발달해 나가는 데 방해가 될 수 있다. 앞에서 언급했듯이, 분수를 피자 조각으로 떠올리는 학생들은 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈으로 개념을 확장해 나갈 때 오히려 곤란한 상황에 부딪히게 된다. 이에 분수의 개념화 과정에서 하나 이상의 은유가 통합적으로 작용하는 것은 당연한 결과일 수 있다.

둘째, 분수 학습이 이루어지면서 기존의 은유를 포기하는 것도 필요하다. 본 연구에서는 분수 학습에서 기존에 형성된 기초 은유가 오히려 방해가 되는 사례들을 살펴보았다. 분수 이전에 자연수를 학습하면서 갖게 된 은유, 즉 수를 물리적 대상의 모임이나 물리적 대상으로 보는 은유는 분수의 학습에서는 작용을 안 할 때가 많다. 따라서 자연수가 분수로 확장됨에 따라 기존의 은유를 빠르게 포기하는 것도 필요한 것이다. 이경화(2010)는 다양한 은유 사이의 관련성을 파악하거나 새로운 은유로 이행하는 것뿐만 아니라 기존의 은유를 포기함으로써 수학적 지식 구성의 새로운 단계로 나아갈 수 있다고 하였다. 분수 학습 과정에서도 다양한 은유가 통합적으로 작동하나 상황에 따라서는 어떤 은유는 포기하고 어떤 은유는 선택해야 하는 상황이 발행하게 된다.

셋째, 분수 학습을 위해 새로운 은유를 도입할 때에는 신중을 기해야 한다. 분수의 연산이 학생들에게 어려운 이유 중 하나로 분수의 계산 과정을 구체화할 수 있는 구체적인 모델이 부족하기 때문이라고 지적되어 온 바(임재훈, 2007), 새로운 분수 학습이 이루어질 때마다 여러 가지 교육적 은유를 의도적으로 만들어 내기도 한다. 그러나 적절하지 못한 은유의 도입은 학생들에게 혼란과 어려움을 야기할 수 있다(이승우, 우정호, 2002)는 점을 항상 염두에 두어야 한다. 본 연구에서는 은유의 역설과 복잡한 은유의 측면에서 분수의 교수 · 학습과 관련한 은유의 패러독스를 분석하였다. 은유란 친숙한 영역을 새로운 영역과 관련지어 개념화하는 것인데 새로운 영역의 구조를 알아야 친숙한 영역과 관련지을 수 있다는 역설이 분수의 학습에도 작용할 수 있다는 것이다. 또한 분수 학습에 도입된 은유 자체가 너무 복잡하여 은유 자체가 목표 영역이 되어 버리는 상황 또한 발생할 수 있음에 주목해야 한다. 김정원(2022b)의 연구에서 수직선이 학생들의 분수 개념 발달을 도울 수 있다는 여러 연구에도 불구하고 학생들은 수직선에 분수를 나타내고 크기를 비교하거나 연산을 수행하는 데 어려움을 겪고 있다고 언급한 점도 이와 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있을 것이다. 따라서 새로운 교육적 은유를 만들어 낼 때는 근원 영역과 목표 영역의 구조적 관련성뿐만 아니라 그 작용 과정을 주의 깊게 살피고 세심한 지도 방안까지 고민해야 할 것이다.

분수는 초등학교 수학에서 가장 어려운 학습 주제

중의 하나로 인식되어 왔다. 이에 분수의 교수･학습에 도움을 줄 수 있는 다양한 교수 전략이 지속적으로 연구･개발되고 있다. 그러나 이러한 다양한 교수 전략이 자동적으로 효과적인 분수 학습으로 이어질 것으로 기대하는 것은 위험하다. 여러 가지 교수 전략들에 내포되어 있는 은유가 오히려 학생들의 학습에 어려움을 줄 수 있다는 것을 아는 것은 중요하다. 이와 같은 연구 결과를 바탕으로 본 연구는 분수 학습을 위한 다양한 교수 전략들을 실행할 때 은유의 관점에서 보다 세심한 접근이 필요함을 제안한다.

참 고 문 헌

강윤지(2023). 초등 수학 교과서의 동분모 분수 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름 및 시각적 표현 다양성에 대한 연구. 초등수학교육, 26(3), 125-140.

강흥규(2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 319-339.

김상미(2023). 초등학생의 각 개념 형성에 나타난 수학적 은유. 수학교육, 62(1), 79-93.

김상미, 신인선(2007). 초등 4학년 도형 영역의 수학수업에 나타난 은유 사례 연구. 초등수학교육, 10(1), 20-30.

김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김영준 외(2022a). 수학 3-1. 아이스크림미디어.

김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김영준 외(2022b). 수학 3-2. 아이스크림미디어.

김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김아롱 외(2023a). 수학 5-2. 아이스크림미디어.

김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김아롱 외(2023b). 수학 6-2. 아이스크림미디어.

김정원(2022a). 초등학교 4학년 학생들의 수직선 이해 분석: 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로. 초등수학교육, 25(3), 213-232.

김정원(2022b). 학생의 수직선을 이용한 분수 문제 해결 전략에 대한 예비 초등교사들의 이해 분석. 수학교육, 61(3), 375-396.

김지연(2011). 은유를 활용한 수학 학습 지도 방안 연구. 학교수학, 13(4), 563-580.

박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김은혜 외(2022). 수학 3-1. 천재교과서.

박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김원석 외(2023a). 수학 5-2. 천재교과서.

박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김원석 외(2023b). 수학 6-2. 천재교과서.

방정숙, 곽기우, 김소현(2023). 이중 척도 모델에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 분석: 분수의 나눗셈을 중심으로. 수학교육논문집, 37(2), 135-157.

방정숙, 이지영(2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. 학교수학, 11(4), 723-743.

신항균, 김태환, 정나영, 황혜진, 최혜령, 김리나 외(2022a). 수학 3-1. 비상교육.

신항균, 김태환, 정나영, 황혜진, 최혜령, 김리나 외(2022b). 수학 3-2. 비상교육.

양현수, 김민경, 김예주, 최현경(2023). 다양한 분수 모델에 대한 초등학생의 수감각 및 연산능력에 관한 연구: 영역 모델 및 수직선 모델을 중심으로. 수학교육학연구, 33(1), 173-194.

우정호(2021). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판문화원.

이경화(2010). 교수학적 변환 과정에서의 은유와 유추의 활용. 수학교육학연구, 20(1), 57-71.

이광호, 박중규(2024). 카테시안 곱의 역 맥락에서 살펴본 분수 나눗셈 알고리즘의 시각적 통합모델에 대한 연구. 초등수학교육, 27(1), 91-110.

이승우, 우정호(2002). 학교수학에서의 유추와 은유. 수학교육학연구, 12(4), 523-542.

이종희, 최성이(2012). 초등 수학 수업 상황에서 나타나는 언어적 은유와 제스처 분석. 한국초등수학교육학회지, 16(1), 145-166.

임재훈(2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. 학교수학, 9(1), 13-28.

한대희, 고은성, 이수진, 조형미, 한상희, 신희영 외(2022a). 수학 3-1. 천재교과서.

한대희, 고은성, 이수진, 조형미, 한상희, 신희영 외(2022b). 수학 3-2. 천재교과서.

한대희, 고은성, 조형미, 한상희, 이희석, 신희영 외(2023). 수학 5-2. 천재교과서.

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2023).

수학교육학신론1. 문음사.

English, L. D. (1997). Analogies, metaphors, and Images: Vehicles for mathematical reasoning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 3-18). Lawrence Erlbaum Associates. 권석일, 김성준, 나귀수, 남진영, 박문환, 박영희, 변희현, 서동엽, 이경화, 장혜원, 최병철, 한대희, 홍진곤 역(2009). 수학적 추론과 유추, 은유, 이미지. 경문사.

Lakoff, G. (1994). What is metaphor? In J. A. Barnden & K. J. Holyoak (Eds.), *Advances in connectionist and neural computation theory* (Vol. 3, pp. 203-258). Ablex.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The metaphorical structure of mathemaics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 21-89). Lawrence Erlbaum Associates. 권석일, 김성준, 나귀수, 남진영, 박문환, 박영희, 변희현, 서동엽, 이경화, 장혜원, 최병철, 한대희, 홍진곤 역(2009). 수학적 추론과 유추, 은유, 이미지. 경문사.

Lakoff, G. & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by with a new afterword.* University of Chicago Press. 노양진, 나익주 역(2006). 삶으로서의 은유 수정판. 박이정.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping children learn mathematics(11th Ed.).* Wiley. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역(2017). 초등교사를 위한 수학과 교수법. 경문사.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-371). Lawrence Erlbaum Associates. 권석일, 김성준, 나귀수, 남진영, 박문환, 박영희, 변희현, 서동엽, 이경화, 장혜원, 최병철, 한대희, 홍진곤 역(2009). 수학적 추론과 유추, 은유, 이미지. 경문사.

A study on difficulties in conceptualizing fractions from the perspective of metaphor

Hwang, Hyun Mi
Seoul Changdo Elementary School
E-mail : hhyunm@sen.go.kr

Hong, Jin-Kon†
Konkuk University
E-mail : dion@konkuk.ac.kr

This study aims to analyze the difficulties encountered in the process of conceptualizing fractions from the perspective of metaphor. To achieve this, metaphors in mathematics education were examined by dividing them into natural conceptualizations through metaphor and their extension to educational metaphors. Subsequently, the difficulties in learning fractions through metaphorical conceptualization were analyzed from three aspects: the integration of multiple metaphors, interference from previously formed grounding metaphors, and the paradoxes of metaphor. Through this analysis, the study highlights the need for careful attention to how metaphors function during fraction learning and aims to provide insights for devising instructional strategies for teaching fractions.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : metaphor, conceptual metaphor, educational metaphor, fractions
† Corresponding Author