

무료 이단계 보증에 대한 최적의 보증 정책

정기문[†]

경성대학교 빅데이터응용통계학과

Optimal Warranty Policy for Free Two-phase Warranty

Ki Mun Jung^{1†}

[†] Department of Big Data and Applied Statistics, Kyungsoo University, Busan

Abstract

Jung et al.(2015) suggest the two-phase warranty model, which is a general type of warranty model. Under the two-phase warranty, the warranty period is divided into two intervals, one of which is for renewing replacement warranty, and the other is for minimal repair warranty. And warranty policies play a very important role in product marketing. In this paper, we suggest the optimal warranty policy for free extended two-phase warranty. To determine the optimal warranty period, we adopt the expected profit per unit product. So, the expressions for the total expected cost, the sale price and the expected profit per unit product from the manufacturer's point of view are derived. Also, we discuss the optimal warranty period and the numerical examples are provided to illustrate the proposed the warranty policy.

Keywords: Expected profit per unit product, Minimal repair warranty, Optimal warranty period, Replacement warranty, Two-phase warranty

(Received May 29, 2024; Revised June 3, 2024; Accepted June 4, 2024)

1. 서론

수리가 가능한 제품에 대한 보증(warranty)은 생산자(또는 판매자)와 사용자(또는 구매자) 사이의 계약으로써 마케팅에 있어서 매우 중요한 역할을 한다고 할 수 있다. 이러한 보증은 일반적으로 시스

템을 구입하는 시점에서 사용자에게 제공되며, 가장 기본적인 형태는 최소수리보증(minimal repair warranty)과 교체보증(replacement warranty)이다. 최소수리보증은 주어진 보증기간 동안 시스템에 고장이 발생되면 최소수리(minimal repair)를 수행해 주는 보증이고 교체보증은 수리보증과 다르게 새로운 시스템으로 교체(replacement)를 해주는 보증이다. 이러한 수리 및 교체 보증과 관련된 연구로는 Sahin and Polatoglu, Jung and Park, Yeh

[†] Corresponding author: kmjung@ks.ac.kr

et al., Chien, Chien, Jung et al. 등이 있다 [1]-[6].

한편, 이단계 보증(two-phase warranty)은 교체보증 기간과 최소수리보증 기간이 동시에 존재하는 보증으로써 Jung et al.이 제안하였다^[8]. 이단계 보증은 보증기간의 첫 번째 단계에서 시스템에 고장이 발생되면 교체보증이 이루어지고, 두 번째 단계에서 시스템에 고장이 발생되면 최소수리가 제공되는 보증으로써 교체보증과 수리보증을 포함하는 일반적인 형태의 보증이라고 할 수 있다. 이러한 이단계 보증에 대한 보증비용 분석과 이단계 보증 하에서의 다양한 보전정책에 대한 연구들이 수행되었다(Jung et al., Jung, Jung, Jung)^{[7]-[10]}. 그러나 이러한 이단계 보증과 관련된 기존의 연구에서는 보증기간이 고정되어 있다고 가정하였다. 한편, 생산자 측면에서의 관심 사항 중의 하나는 수익을 고려하여 보증기간을 결정하는 문제라고 할 수 있다. 즉 생산자 측면에서 수익을 극대화 해주는 보증기간을 결정하여 이를 사용자에게 제공하는 것이라고 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 생산자 측면에서의 기대수익(expected profit)을 최대화하는 보증기간을 결정하는 최적의 이단계 보증정책을 제시하고자 한다. 이를 위해서 이단계 보증기간 동안에 발생하는 기대보증비용(expected warranty cost)과 제품의 판매가격(sale price)이 결정되는 판매가격함수(sale price function)를 고려하여 생산자 측면에서의 기대수익 함수(expected profit function)를 유도하고자 한다. 더불어 유도된 생산자 측면에서의 기대수익을 최대로 해주는 최적의 보증정책(optimal warranty policy)에 대해서 살펴보고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2절에서는 본 논문에서 고려하고자 하는 이단계 보증모형을 자세히 소개하고자 한다. 3절에서는 2절에서 고려된 이단계 보증모형이 주어지는 경우에 생산자 측면에서의 기대보증비용, 판매가격 그리고 기대수익을 이론적으로 유도한다. 더불어 기대수익을 기준으로 최적의 이단계 보증정책을 제시하고자 한다. 그리고 4절에서는 수치적 예를 통해서 3절에서 설명된 최적의 보증정책에 대한 특성을 구체적으로 살펴보고자 한다.

2. 이단계 보증 모형

2.1. 용어와 기호

용어

무료보증(FW) : Free Warranty

재생보증(RW) : Renewing Warranty

재생교체보증(RRW) : Renewing Replacement Warranty

최소수리보증(MRW) : Minimal Repair Warranty

이단계 보증(TPW) : Two-phase Warranty

기호

T : 시스템의 고장시간(failure time)

$f(t)$: T 의 확률밀도함수(probability density function)

$F(t)$: T 의 수명분포함수(life distribution function)

$h(t)$: T 의 고장률 함수(failure rate function)

w : 기본 보증기간(original warranty period)

α : 전체 보증기간에서 RRW 기간의 비율,
 $0 < \alpha < 1$

c_r : 시스템의 단위 교체비용(unit cost of replacement)

c_m : 시스템의 단위 최소수리비용(unit cost of minimal repair)

c_v : 보증비용을 제외한 모든 비용을 포함하는 고정비용(fixed cost)

$EWC(w)$: 기대보증비용(expected warranty cost)

k_0 : 판매가격에 영향을 주는 진폭인자(amplitude factor)

P_0 : 보증이 없는 새 제품의 판매가격

k_w : 무보증인 경우에 판매가격이 0이 되지 않도록 해주는 비음수인 조절상수

γ : 판매가격에서 비음수인 보증 탄력성(warranty elasticity)

$P(w)$: 제품의 판매가격(sale price)

$J(w)$: 제품당 기대수익(expected profit)



Fig. 1. Two-phase warranty model

2.2. 무료 이단계 보증 모형

Jung et al^[7].은 교체보증과 수리보증이 함께 제공되는 이단계 보증모형을 제안하였다. 이단계 보증은 보증기간의 첫 번째 구간에서 발생하는 시스템의 고장에 대해서는 교체보증이 이루어지고, 두 번째 구간에서 발생하는 고장에 대해서는 최소수리가 제공되는 보증이다. Fig. 1.에서 볼 수 있는 것처럼 이단계 보증은 기본 보증기간 w 가 주어지고 처음 αw 까지 즉 $(0, \alpha w]$ 는 재생교체보증이 이루어지며, 나머지 $(\alpha w, w]$ 동안에는 최소수리보증이 주어진다. 이때, α 는 전체 보증기간에서 재생교체보증이 차지하는 기간을 결정하는 값으로 $0 \leq \alpha \leq 1$ 이다. 이단계 보증에서 $\alpha = 0$ 이면 최소수리보증이 되고 $\alpha = 1$ 이면 교체보증이 된다. 또한, 본 논문에서 고려되는 이단계 보증은 보증기간 동안에 발생하는 보증비용에 대해서 사용자가 전혀 책임지지 않는 무료보증이라고 가정한다.

3. 최적의 무료 이단계 보증 정책

3.1. 보증비용

본 절에서는 2절에서 설명한 무료 이단계 보증 모형이 주어지는 경우 판매자 측면에서 보증기간 동안에 발생하게 되는 제품당 기대보증비용 $EWC(w)$ 을 구하고자 한다. 기대보증비용 $EWC(w)$ 은 재생교체보증(RRW) 기간에서 발생하는 기대비용 $E(C_{RRW})$ 와 최소수리보증(MRW) 기간에서 발생하는 기대비용 $E(C_{MRW})$ 의 합으로 구할 수 있다. 즉 무료 이단계 보증기간 동안에 발생하게 되는 기대보증비용 $EWC(w)$

는 다음과 같이 구해진다.

$$EWC(w) = E(C_{RRW}) + E(C_{MRW}). \quad (3.1)$$

우선, Jung et al^[8].의 결과로부터 재생교체보증(RRW) 기간에서 발생하는 기대비용 $E(C_{RRW})$ 는 다음과 같다.

$$E(C_{RRW}) = c_r \frac{F(\alpha w)}{F(\alpha w)} \quad (3.2)$$

위에서 c_r 은 시스템의 교체비용이고 $F(t)$ 는 시스템의 고장시간 T 의 수명분포함수이고 w 는 전체 보증기간, α 는 전체 보증기간에서 RRW 기간의 비율이다, 그리고 최소수리보증(MRW) 기간에서 발생하는 기대비용 $E(C_{MRW})$ 은 다음과 같다.

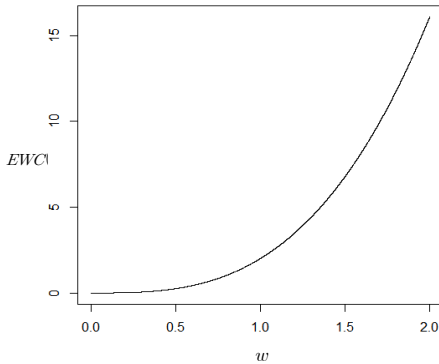
$$E(C_{MRW}) = c_m \int_{\alpha w}^w h(t) dt \quad (3.3)$$

위에서 c_m 는 시스템의 최소수리비용이고 $h(t)$ 는 T 의 고장률 함수이다

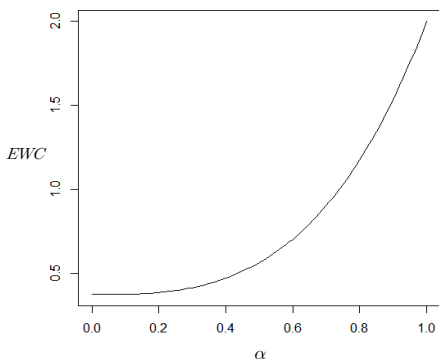
따라서, 식 (3.1), 식 (3.2), 식 (3.3)으로 부터 무료 이단계 보증기간 동안에 발생하게 되는 기대보증비용 $EWC(w)$ 는 다음과 같다.

$$EWC(w) = c_r \frac{F(\alpha w)}{F(\alpha w)} + c_m \int_{\alpha w}^w h(t) dt \quad (3.4)$$

이제 식 (3.4)에 정의된 기대보증비용 $EWC(w_0)$ 와 기본보증기간 w_0 그리고 재생교체보증이 차지하는 기간을 결정하는 값인 α 와의 관계를 각각 살펴보고자 한다.



(a) $c_r = 12, c_m = 2, \alpha = 0.1$ 일 때



(b) $c_r = 12, c_m = 2, w = 0.5$ 일 때

Fig. 2. Expected warranty cost function

먼저, Fig. 2의 (a)는 시스템의 수명분포가 형태 모수(shape parameter)가 3이고 척도모수(scale parameter)가 1인 와이블분포(Weibull distribution)를 따르고 $c_r = 12, c_m = 2, \alpha = 0.1$ 일 때 판매자 측면에서 보증기간 동안에 발생하게 되는 제품당 기대보증비용 $EWC(w)$ 을 보증기간 w 에 대해서 표현한 것이다. 이 그림으로부터 주어지는 보증기간이 늘어나면 예상할 수 있는 것처럼 기대보증비용이 증가하게 된다. 또한 Fig. 2의 (b)는 $c_r = 12, c_m = 2, w = 0.5$ 일 때 기대보증비용 $EWC(w)$ 을 α 에 대해서 표현한 것이다. α 는 전체 보증기간에서 재생교체보증이 차지하는 기간을 결정하는 값이므로 α 가 커지면 재생교체보증이의 기간이 길어지게 된다. 따라서 전체 보증기간 w 가 고정되어 있을 때 α 가 커지면 기대보증비용이 증가하게 된다.

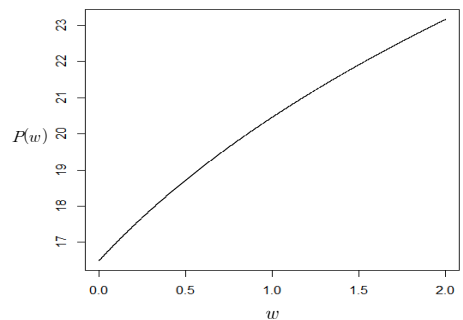
3.2. 판매가격

제품의 판매가격은 생산자(또는 판매자)의 수익과 직결되는 매우 중요한 마케팅 전략 중의 하나라고 할 수 있다. 따라서 판매가격을 결정하는 판매가격모형과 관련된 다양한 연구들이 있는데, 가장 일반적으로 사용되는 판매가격모형으로는 단순선형모형(Chien et al^[11]), 지수모형(Shang et al^[12]), Cobb-Douglas-type logarithmic linear model (Glickman and Berge^[13]) 등이 있다. 이러한 모형 중 Cobb-Douglas-type 대수선형모형(logarithmic linear model)이 다양한 형태의 판매가격함수로의 적합이 가능하고 예측 능력이 우수하여 가장 널리 사용된다(Su and Yang, Xie)^{[14]-[15]}. 한편, Qiaom et al^[16]은 Glickman and Berger^[13]이 제시한 제품수요함수(product demand function)를 활용하여 일차원 보증에 대한 보증기간의 Cobb-Douglas-type 함수를 고려하였는데, 본 논문에서는 이를 사용하여 다음과 같은 판매가격함수를 정의하여 활용하고자 한다.

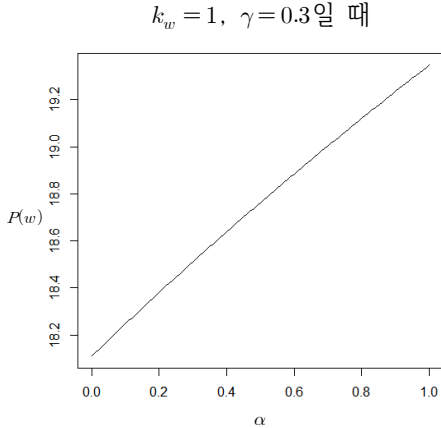
$$P(w) = k_0 P_0 (a\alpha w + (1-\alpha)w + k_w)^\gamma \quad (3.5)$$

위에서 k_0 는 진폭요인(amplitude factor), P_0 는 보증이 없는 새 제품의 판매가격, k_w 는 보증이 없는 경우에 판매가격이 0이 되지 않도록 조정 해주는 비음수 상수, $\gamma (> 0)$ 는 보증 탄력성(warranty elasticity)을 나타내는 상수, a 는 전체 보증기간에서 재생교체보증이 차지하는 기간을 결정하는 값인 α 의 효과를 반영하기 위한 상수이고 $a > 1$ 이다.

이제 식 (3.5)에 정의된 판매가격함수 $P(w)$ 와 보증기간 w 그리고 재생교체보증이 차지하는 기간을 결정하는 값인 α 와의 관계를 각각 살펴보고자 한다.



(a) $a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, \alpha = 0.1,$



(b) $a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, w = 0.5,$
 $k_w = 1, \gamma = 0.3$ 일 때

Fig. 3. Sale price function

먼저, Fig. 3.의 (a)는 $a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, \alpha = 0.1, k_w = 1, \gamma = 0.3$ 일 때 $P(w)$ 를 보증기간 w 에 대해서 표현한 것이다. 식 (3.5)와 Fig. 3의 (a)로 부터 보증기간 w 가 늘어나면 예상할 수 있는 것처럼 판매가격이 증가하게 된다. Fig. 3의 (b)는 $a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, w = 0.5, k_w = 1, \gamma = 0.3$ 일 때 판매가격함수 $P(w)$ 를 α 에 대해서 표현한 것이다. 전체 보증기간 w 가 고정되어 있을 때 α 가 커지면 재생교체보증의 기간이 길어지게 되므로 판매가격 $P(w)$ 도 증가하게 됨을 식 (3.5)와 Fig. 3.의 (b)로부터 알 수 있다.

식 (3.5)에 정의된 $P(w)$ 에서 $a = 1$ 이면 Qiaom et al^[16].에서 고려한 판매가격함수와 동일해진다. $a = 1$ 이 갖는 의미는 판매가격이 전체보증 길이에서 재생교체보증이 차지하는 기간에 영향을 받지 않는다는 것이다.

3.3. 최적의 보증정책

이제, 판매자 측면에서의 무료 이단계보증인 주어진 경우에 최적의 보증기간을 결정하는 문제를 다루고자 한다. 본 논문에서는 최적의 보증기간을 결정하기 위한 기준으로 판매자의 제품당 기대수익을 사용하고자 한다. 판매자의 제품당 기대수익은 Qiaom et al^[15].에서 고려된 것처럼 기대보증비용, 판매가격, 고정비용을 사용하여 다음과 같이 정의할

수 있다.

$$J(w) = P(w) - EWC(w) - c_v \quad (3.6)$$

위 식에서 c_v 는 생산되는 제품의 수와는 무관하고 보증비용을 제외한 모든 비용을 포함하는 고정비용이라고 가정한다.

따라서 무료 이단계보증이 주어진 경우에 판매자의 제품당 기대수익은 식 (3.4)와 식 (3.5)를 식 (3.6)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$J(w) = P(w) - EWC(w) - c_v \quad (3.7)$$

$$= k_0 P_0 (a\alpha w + (1-\alpha)w + k_w)^\gamma - \left(c_r \frac{F(\alpha w)}{F(\alpha w)} + c_m \int_{\alpha w}^w h(t) dt \right) - c_v$$

결국, 식 (3.7)에 주어진 판매자의 제품당 기대수익을 최대로 해주는 보증기간이 판매자 측면에서의 무료 이단계보증에 대한 최적의 보증정책이라고 할 수 있다. 즉 다음과 같이 식 (3.7)를 사용하여 판매자 측면에서의 최적의 보증기간 w^* 를 결정할 수 있다.

$$w^* = \max_w J(w) \quad (3.8)$$

4. 수치적 예

본 절에서는 3절에서 살펴본 이단계 보증이 주어진 경우에 기대보증비용, 판매가격, 기대수익을 수치적 예를 통해서 구해보고 이의 특성을 살펴보고자 한다. 더불어 기대수익 측면에서의 최적의 보증기간도 찾아보고 이의 특성도 함께 파악해 보고자 한다. 이를 위해서, 시스템의 수명분포로 형태모수(shape parameter)가 3이고 척도모수(scale parameter)가 1인 와이블분포(Weibull distribution)를 따른다고 가정하고자 한다.

무료 이단계보증이 주어진 경우에 판매자의 제품당 기대수익을 계산하기 위해서 입력 모수값으로 $\alpha = 0.3, c_r = 12, c_m = 2, c_v = 9, a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, k_w = 1, \gamma = 0.3$ 이 주어졌을 경우에 식 (3.4)에 주어져 있는 기대수익 $J(w)$ 를 구해서 시각적으로 표현하면 Fig. 4와 같다. Fig. 4에서 볼 수 있는 것처럼 이러한 경우에 판매자 측면에서 제품당 기대수익을 최대로 해주는 보증기간은 0.7369 (단위시간)이 된다는 사실을 알 수 있다. Table 1에

는 $a=1.5$ 일 때 다양한 α 의 값에 대하여 최적의 무료 이단계 보증정책이 나타나 있다. 예를 들어 $\alpha=0.3$ 일 때 최적의 보증기간은 0.7369(단위시간) 이고 이러한 보증기간이 주어질 때 기대수익이 9.926978(단위비용)으로 가장 크게 된다는 것이다.

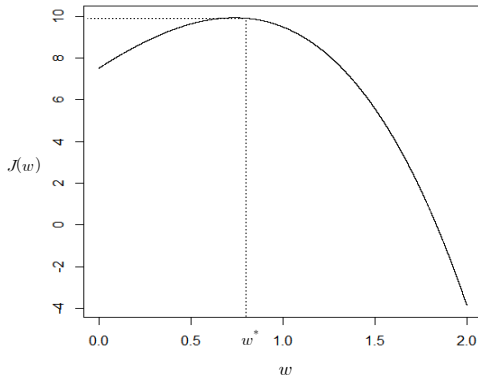


Fig. 4. Expected profit function $J(w)$
 ($\alpha=0.3, c_r=12, c_m=2, c_v=9, a=1.5, k_0=1.1, P_0=15, k_w=1, \gamma=0.3$)

Table. 1.에 있는 다른 α 의 값에 대한 최적의 보증기간도 같은 의미를 갖는다. 한편, **Table. 1.**로부터 α 의 값이 증가함에 따라 w^* 가 감소하는 사실을 알 수 있는데, 이는 α 값이 커질수록 재생교체 보증의 기간이 길어지기 때문일 것이다.

Table. 2.에는 $a=1$ 일 때 다양한 α 의 값에 대하여 최적의 무료 이단계 보증정책이 나타나 있다. $a=1$ 이 갖는 의미는 판매가격이 전체보증 길이에서 재생교체보증에 차지하는 기간에 영향을 받지 않는다는 것이다. **Table. 2.**에서 α 의 값이 증가함에 따라 w^* 와 $J(w_o^*)$ 가 모두 감소한다는 것을 볼 수 있는데, 이는 α 값이 커질수록 재생교체보증의 기간이 길어지고 동시에 α 값이 판매가격에 영향을 주지 않기 때문일 것이다.

Table. 3.과 **Table. 4.**에는 다양한 c_r 값과 c_m 값에 대하여 최적의 무료 이단계 보증정책이 나타나 있다. 이 표들로부터 시스템의 교체비용과 수리비용이 증가함에 따라 w^* 와 $J(w^*)$ 가 모두 감소한다는 것을 볼 수 있다.

Table. 1. Optimal free two-stage warranty policy for various values of α when $a=1.5$
 ($c_r=12, c_m=2, c_v=9, a=1.5, k_0=1.1, P_0=15, k_w=1, \gamma=0.3$)

α	w^*	$EWC(w^*)$	$P(w^*)$	$J(w^*)$
0.1	0.7566	0.8705538	19.66355	9.792995
0.3	0.7369	0.9090494	19.83603	9.926978
0.5	0.6430	0.8707048	19.69413	9.823427
0.7	0.5217	0.7854800	19.36187	9.576393
0.9	0.4191	0.7014544	19.02589	9.324438

Table. 2. Optimal free two-stage warranty policy for various values of α when $a=1$
 ($c_r=12, c_m=2, c_v=9, a=1.5, k_0=1.1, P_0=15, k_w=1, \gamma=0.3$)

α	w^*	$EWC(w^*)$	$P(w^*)$	$J(w^*)$
0.1	0.7455	0.8327977	19.50114	9.668338
0.3	0.7066	0.8013880	19.36973	9.568338
0.5	0.6006	0.7085484	19.00066	9.292116
0.7	0.4745	0.5882635	18.53862	8.950355
0.9	0.3708	0.4820168	18.13745	8.655431

Table. 3. Optimal free two-stage warranty policy for various values of c_r . $(\alpha = 0.3, c_m = 2, c_v = 9, a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, k_w = 1, \gamma = 0.3)$

c_r	w^*	$EWC(w^*)$	$P(w^*)$	$J(w^*)$
8	0.7527	0.9225122	19.89435	9.971842
9	0.7487	0.9192706	19.87963	9.960355
10	0.7447	0.9158194	19.86487	9.949052
11	0.7408	0.9125336	19.85046	9.937928
12	0.7369	0.9090494	19.83603	9.926978

Table. 4. Optimal free two-stage warranty policy for various values of c_m . $(\alpha = 0.3, c_r = 12, c_v = 9, a = 1.5, k_0 = 1.1, P_0 = 15, k_w = 1, \gamma = 0.3)$

c_m	w^*	$EWC(w^*)$	$P(w^*)$	$J(w^*)$
2	0.7369	0.9090494	19.83603	9.926978
3	0.6316	0.8173747	19.43667	9.619295
4	0.5632	0.7533021	19.16663	9.413330
5	0.5139	0.7043188	18.96635	9.262032
6	0.4762	0.6654619	18.80980	9.144334

5. 결론

우리가 가능한 제품에 대한 보증 기간과 제품의 판매가격은 마케팅에 있어서 매우 중요한 역할을 한다고 할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 제품의 판매가격과 보증비용을 고려하여 생산자 측면에서 수익을 극대화 해주는 최적의 보증 기간을 결정하는 문제를 다루었으며, 고려된 보증정책은 Jung et al^[8].이 제안한 교체보증 기간과 최소수리보증 기간이 동시에 존재하는 이단계 보증이다. 즉, 생산자 측면에서의 기대수익을 최대화하는 최적의 이단계 보증정책을 제안하였다. 이러한 최적의 이단계 보증정책을 제시하기 위해서 필요한 제품당 기대수익을 생산자 측면에서의 기대보증비용과 이단계 보증정책의 특성이 고려된 제품의 판매가격함수를 통해서 유도하였다.

4절의 수치적 예에서는 시스템의 수명분포가 와

이분분포를 따르고 입력 모수값으로 재생교체보증 기간의 비율(α), 시스템의 교체비용(c_r), 최소수리비용(c_m), 판매가격에서 α 의 효과를 반영하기 위한 값(a), amplitude factor(k_0), 보증이 없는 새 제품의 판매가격(P_0), 보증이 없는 경우에 판매가격이 0이 되지 않도록 해주는 비음수 상수 k_w , warranty elasticity를 나타내는 상수(γ)가 주어져 있을 때 판매자 측면에서의 제품당 기대수익 $J(w)$ 를 가장 크게 해 주는 최적의 보증 기간을 결정하였다. 또한 결정된 최적의 보증기간으로부터 다음과 같은 특성을 알 수 있었다. 1) 재생교체보증기간의 비율인 α 의 값이 증가함에 따라 최적의 보증기간 w^* 는 감소한다. 2) 시스템의 교체비용 c_r 값이 증가함에 따라 최적의 보증기간 w^* 와 $J(w^*)$ 가 모두 감소한다. 3) 시스템의 최소수리비용 c_m 값이 증가함에 따라 최적의 보증기간 w^* 와 $J(w^*)$ 가 모두 감소한다. 이와 같은 수치분석을 통해서 시스템의 수명분포, 판매비용 그리고 이에 영향을 주는 입력 모수값이 판매자 측

면에서의 제품당 기대수익 $J(w)$ 를 가장 크게 해 주는 최적의 보증기간을 결정하는데 영향을 주는 요인임을 확인할 수 있었다.

한편, 본 논문에서 제시된 이단계 보증모형은 매우 단순한 보증의 형태인 무료보증인 경우이므로 이를 유료보증의 형태인 비례보증인 경우에 대해서도 고려해 볼 필요가 있다.

Acknowledgments

이 논문은 2023학년도 경성대학교 연구년 과제지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- [1] Sahin, I. and Polatoglu, H., "Maintenance strategies following the expiration of warranty", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 45, pp. 220-228, 1996.
- [2] Jung, G. M. and Park, D. H., "Optimal maintenance policies during the post-warranty period", Reliability Engineering and System Safety, Vol. 82, pp. 173-185, 2003.
- [3] Yeh, R. H., Chen, M. Y. and Lin, C. Y., "Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty", European Journal of Operational Research, Vol. 176, pp. 1678-1686, 2007.
- [4] Chien, Y. H., "A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty", European Journal of Operational Research, Vol. 186, pp. 1046-1058, 2008.
- [5] Chien, Y. H., "Optimal age-replacement policy under an imperfect renewing free-replacement warranty", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 57, pp. 125-133, 2008.
- [6] Jung, K. M., Park, M. and Park, D. H., "Optimal maintenance strategy for non-renewing replacement-repair warranty", Applied Stochastic Models in Business and Industry, Vol. 28, pp. 607-614, 2012.
- [7] Jung, K. M., Park, M. and Park, D. H., "Cost optimization model following extended renewing two-phase warranty", Computers & Industrial Engineering, Vol. 79, pp. 188-194, 2015.
- [8] Jung, K. M., "Cost analysis of the extended two-phase warranty model", Journal of the Korean Data Analysis Society, Vol. 23, pp. 2655-2665, 2021.
- [9] Chien, Y. H., Zhang, Z. G., Wang, J. and Sheu, S. H., "A note on optimizing practical product warranty via linear pricing.", Quality Technology & Quantitative Management, Vol. 17, pp. 234-253, 2020.
- [10] Shang, L., Si, S., Sun, S. and Jin, T., "Optimal warranty design and post-warranty maintenance for products subject to stochastic degradation", IIE Transactions, Vol. 50, pp. 913-927, 2018.
- [11] Glickman, T. S. and Berger, P. D., "Optimal price and protection period decisions for a product under warranty", Management Science, Vol. 22, pp. 1381-1390, 1976.
- [12] Su, C., and Yang, X., "Two-stage renewing warranty policy with the threshold of maintenance times", International Journal of Production Research, pp. 1-13, 2020.
- [13] Xie, W., "Optimal pricing and

two-dimensional warranty policies for a new product”, *International Journal of Production Research*, Vol. 55, pp. 6857-6870, 2017.

- [14] Qiaom, P., Shen, J., Zhang, F. and Ma, Y., “Optimal warranty policy for repairable products with a three-dimensional renewable combination warranty”, *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 168, p. 108056, 2022.