韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.2.187
2024. 4. 제 27권, 제 2호, 187-198

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2024, Vol. 27, No. 2, 187-198

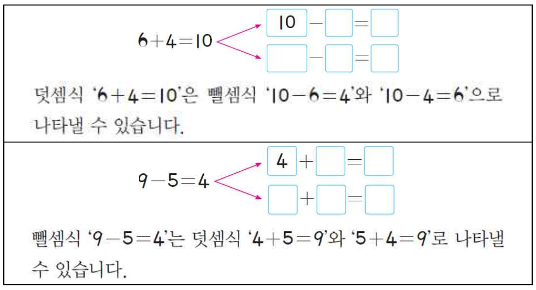
초등학교 수학에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계의 활용

백대현(부산교육대학교, 교수)

덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계는 초등학교 2, 3학년 수학에서 명시적으로 제시된다. 그러나 이후 학습에서 이러한 관계는 더 이상 논의되지 않는다. 본 논문은 초등학교 수학 교과서에서 뺄셈과 나눗셈의 계산 방법을 살펴보고, 이를 바탕으로 아동들의 이해 수준에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화하고 뺄셈과 나눗셈에 활용할 수 있는 문제 상황과 활동을 논의한다. 또한 아동들이 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 뺄셈과 나눗셈에 활용하여 얻을 수 있는 교육적 시사점을 도출한다.

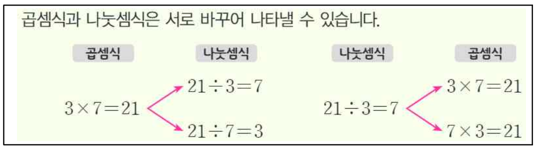
I. 서론

초등학교 수학과 교육과정의 수와 연산 영역에서 사칙 계산은 수학 1-1의 한 자리 수의 덧셈부터 수학 6-2의 분수와 소수의 나눗셈까지 다루어진다. 아동들은 ‘초등학교 수학 교과서(이하 교과서)’에 제시된 형식화된 알고리즘으로 사칙 계산을 반복하여 연습한다. 그러나 교과서에서 사칙 계산 알고리즘을 이해하고 적용하기 어려운 아동들에게 대안적인 계산 방법을 제공하기는 쉽지 않다. 본 연구에서는 뺄셈과 나눗셈의 대안적인 계산 방법의 하나로 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용할 수 있는 방안을 모색한다. 먼저 덧셈과 뺄셈의 관계는 [그림 1]과 같이 구체적인 수로 나타낸 상황으로 제시된다.



[그림 1] 덧셈과 뺄셈의 관계 (교육부, 2017b, pp. 78-79)

마찬가지로 곱셈과 나눗셈의 관계는 [그림 2]와 같이 제시된다.



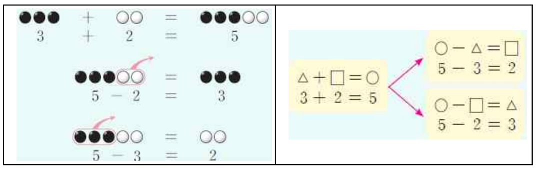
[그림 2] 곱셈과 나눗셈의 관계 (김성여 외, 2022, p. 63)

이와 같이 교과서에 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계가 명시적으로 제시되었지만 덧셈식과 뺄셈식, 곱셈식과 나눗셈식을 각각 서로 바꾸어 나타낼 수 있는 이유는 명확하게 논의되지 않는다. 단지 교사용지도서(교육부, 2017c, p. 210)의 참고 자료에는 덧셈식을 뺄셈식으로 나타내는 방법과 원리를 아동들이 쉽게 익히도록 하기 위해서 한 자리 수를 이용하면 효율적이라고 서술되었다. 예를 들어, [그림 3]과 같이 흰 바둑돌 2개와 검은 바둑돌 3개를 이용하여 $2+3=5$를 나타내게 한다. 여기서 흰 바둑돌의 수는 $5-3=2$, 검은 바둑돌의 수는 $5-2=3$으로 나타내게 한다. 또한 이를 기호로 나타내어 형식화한다.

[그림 3]은 덧셈식이 뺄셈식으로 나타나는 것에 대한 정당화이다. 이와 관련하여 ‘2022학년도 1학기에 A 교육대학교 교육대학원에서 초등수학교육을 전공하는

* 접수일(2024년 2월 14일), 심사(수정)일(2024년 3월 21일), 게재확정일(2024년 4월 12일)
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 뺄셈, 나눗셈, 덧셈과 뺄셈의 관계, 곱셈과 나눗셈의 관계, 등식의 성질, 정당화 활동, 초등학교 수학 교과서

교사 7명(이하 교사들)'은 [그림 3]과 같이 덧셈식이 뺄셈식으로 나타나는 이유를 아동들에게 지도한 경우가 전혀 없었다고 밝혔다. 또한 교사들은 덧셈과 뺄셈의 관계를 정당화해야 하는 필요성도 인식하지 못하였다.



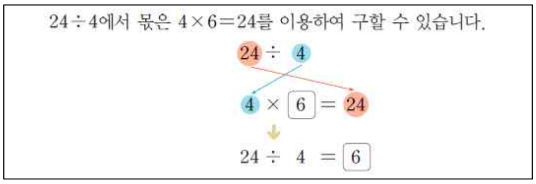
[그림 3] 덧셈식을 뺄셈식으로 나타내는 방법과 원리 (교육부, 2017c, p. 210)

초등학교 수학 교실에서 이루어지는 정당화 활동은 이후 중학교에서의 증명 활동의 기초가 된다는 점에서 중요하다. 이와 같은 정당화 활동은 교수-학습의 과정에서 비형식적으로 이루어진다(권성룡, 2003). 비형식적인 정당화 활동은 학습자에게 의미가 있으며, 충분한 환경이 제공된다면 연역적 추론의 필요성을 인식하는 단계까지 발전될 수 있다(Almeida, 1996). 초등학교 아동들을 대상으로 한 수학적 정당화에 대한 연구는 권성룡(2003), 김정하(2010), 서지수, 류성림(2012) 등에서 찾을 수 있다. 특히 서지수, 류성림(2012)은 3학년 아동 수준에서의 수학적 정당화 활동의 사례를 제시하였다. 이런 관점을 고려하면 본 연구에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용할 수 있는 문제 상황과 활동을 논의하기에 앞서 이들 관계의 정당화가 전제되어야 한다.

교과서에서는 [그림 1]이 제시된 이후 학습에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용할 수 있는 명시적인 문제 상황과 활동을 찾기 어렵다. 교사용지도서(교육부, 2017c)는 덧셈과 뺄셈의 관계를 통해 덧셈식과 뺄셈식의 상호 연관성을 파악할 수 있다고 언급한다. 한편, 곱셈과 나눗셈의 관계의 활용은 [그림 4]와 같이 나눗셈의 몫을 곱셈식을 이용하여 구하는 정도로 다룬다. 따라서 교과서에 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 제시하고 이를 활용할 수 있는 문제 상황과 활동이 명확하지 않은 셈이다.

사실, 잘 알려진 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계의 활용은 문제 상황에 따라 뺄셈을 덧셈으로, 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 것이다. 이는 형식화된 알고리즘 또는 특정한 계산 원리로 뺄셈과 나눗셈을 계산하는 데 어려움을 겪는 아동들에게 대안적인 계산 방법의 하나로 논의되었다. 특히 Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquiere, & Verschaffel(2009), Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith(2014), Dixon, Larson, Burger, Sandoval-Martinez, & Leinwand (2015b), Bay-Williams, SanGiovanni, Martinie, & Suh(2022a) 등은 문제 상황에 따라 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하여 뺄셈을 덧셈으로 계산하는 것이 효율적이라고 강조하였다.

앞서 언급했듯이 교과서에서 덧셈과 뺄셈의 관계와 마찬가지로 나눗셈과 곱셈의 관계를 활용하는 명시적인 문제 상황과 활동을 많이 찾을 수 없다. [그림 4]와 같이 나누어떨어지는 자연수의 나눗셈에서 몫을 곱셈으로 구하는 정도로 제한적으로 다루어진다. 그러나 나누어떨어지는 자연수의 나눗셈에서 나눗셈식을 곱셈식으로 나타내어 계산하는 것이 효율적이라고 판단하기는 어렵다. 또한 아동들이 $24 \div 4$를 계산하는 과정에서 $4 \times 6 = 24$를 연계하여 사고하는 것을 자연스럽게 받아들일 수 있는 상황은 아니다. 특히 곱셈식이 곱셈구구의 범주를 벗어나면 나눗셈식을 곱셈식으로 나타내어 계산하는 것이 쉽지 않게 된다.



[그림 4] 몫 구하기 (박교식 외, 2022a, p. 66)

외국 교과서나 문헌에서도 덧셈과 뺄셈의 관계에 비하여 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하는 문제 상황과 활동은 상대적으로 적게 논의되고 있다. Dixon et al. (2015b)은 곱셈과 나눗셈의 관계를 언급하고 아동들에게 나눗셈을 하는 데 곱셈을 어떻게 활용할 수 있는지 질문한 후 이와 관련된 구체적인 사례를 논의한다. Bay-Williams et al.(2022b)은 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여 나눗셈식을 곱셈식으로 나타내어 계산하는 사례를 제시하지만, 그런 방식으로 계산하는 것이 항상 효율적이라고 강조하지는 않는다. 예를 들어, $3 \div \frac{1}{4}$

의 계산을 살펴보자. $3 \div \frac{1}{4} = \square$이라 두면, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여, $\square \times \frac{1}{4} = 3$ 또는 $\frac{1}{4} \times \square = 3$으로 나타낼 수 있다. $\square \times \frac{1}{4} = 3$인 경우는 어떤 수의 $\frac{1}{4}$이 3인지를 판단해야 하고, $\frac{1}{4} \times \square = 3$인 경우는 $\frac{1}{4}$을 몇 번 더해야 3이 되는지를 판단해야 한다. 이런 관점에서 $3 \div \frac{1}{4}$의 계산에 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하는 것은 3에서 $\frac{1}{4}$을 몇 번 뺄 수 있는지를 생각하는 동수누감의 원리를 적용하는 것에 비하여 효율적인 계산이 아닐 수 있다. 따라서 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여 나눗셈을 곱셈으로 계산하는 문제 상황과 활동에서 계산의 효율성보다는 특히 나눗셈의 여러 가지 계산 원리를 일관성 있게 이해하는 방안이 될 수 있는지를 살펴볼 필요가 있다. 이와 함께 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용한 나눗셈 계산의 효율성 측면에서 등식의 성질을 적용할 수 있는 여지가 있는지도 살펴볼 필요가 있다.

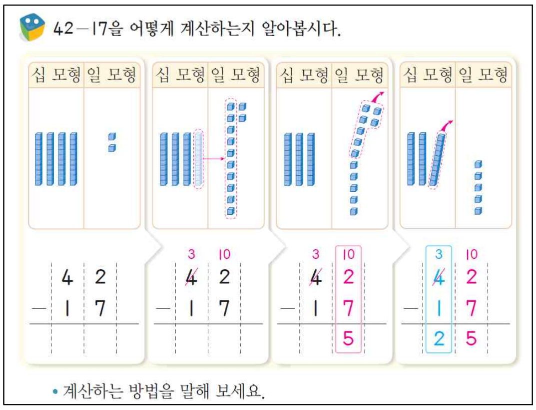
그러므로 본 논문의 목적은 교과서에서 뺄셈과 나눗셈의 계산 방법을 살펴보고, 이를 바탕으로 아동들의 이해 수준에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화하고 뺄셈과 나눗셈에 활용할 수 있는 문제 상황과 활동을 논의하는 것이다. 또한 아동들이 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 뺄셈과 나눗셈에 활용하여 얻을 수 있는 교육적 시사점을 도출하는 것이다.

II. 뺄셈과 나눗셈의 계산 방법

교과서에서 뺄셈은 수학 1-1의 한 자리 수의 뺄셈, 수학 2-1의 두 자리 수의 뺄셈, 수학 3-1의 세 자리 수의 뺄셈, 수학 4-2의 분수의 뺄셈과 소수의 뺄셈, 수학 5-1의 분수의 뺄셈 등이다. 나눗셈은 수학 3-1, 3-2의 자연수의 나눗셈, 수학 6-1, 6-2의 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 등이다.

2, 3학년 수학에서 다루는 자연수의 뺄셈은 대부분 [그림 5]와 같이 수모형을 이용하여 형식화된 세로셈의 원리를 설명한다.

수학 2-1에는, 예를 들어, 뺄셈의 표준 알고리즘 외에 [그림 13]과 같이 여러 가지 방법으로 뺄셈을 하는 차시의 내용이 포함되어 있다. 그러나 수학 2-1에서 이와 같은 대안적인 뺄셈 방법은 표준 알고리즘에 익숙해진 이후 단원의 마무리 단계에서 한 차시 정도로 다루어지기 때문에 대부분의 아동들은 교과서에 제시된 형식화된 알고리즘으로 뺄셈을 하는 데 익숙하게 된다.



[그림 5] 두 자리 수의 뺄셈 (교육부, 2017b, p. 73)

다음과 같이 교사용지도서(교육부, 2017b, p. 207)에 제시된 여러 가지 방법으로 $45-28$을 계산하는 사례에서 알 수 있듯이 교과서에서 다루는 여러 가지 대안적인 뺄셈에서 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 방법은 논의되지 않는다.

$$45-30+2=15+2=17,\quad 45-20-8=25-8=17,$$
$$40-28+5=12+5=17,\quad 50-28-5=22-5=17,$$
$$45-25+3=20-3=17.$$

위의 계산식에서 $45-30+2=15+2=17$을 제외한 나머지 계산식은 계산 과정에 받아 내리는 뺄셈이 필요하다. 또한 교사들은 아동들이 $45-28=45-30+2$와 같이 30을 빼고 2를 더하는 방법을 이해하기 어려워한다고 지적하였다. 따라서 교과서에 제시된 대안적인 계산 방법이 형식화된 세로셈에 비하여 효율적이라고 판단하기는 어렵다.

장혜원(2014)은 아동들로 하여금 덧셈과 뺄셈의 대안적인 계산 방법을 경험하게 하는 의의를 다음과 같

이 제시하였다. 첫째, 표준 알고리즘의 기계적 모방에서 탈피하여 아동 스스로 문제에 적합한 계산 방법을 사고하기를 기대할 수 있다. 둘째, 아동 스스로의 지식 구성을 위해 그들의 비형식적 지식에 기초하는 것이 자연스럽다는 전제가 있다. 셋째, 알고리즘의 지나친 적용을 막기 위해서 필요하다. 넷째, 수 가르기와 모으기의 적절한 사용이 요구되므로 수에 대한 감각과 유연성이 발달된다. 한편, 남승인, 강영란, 박인묵(2002)은 표준화된 알고리즘의 지나친 강조로 인하여 아동들은 대수적 구조나 계산 원리를 이해하지 못한 채 반복 연습으로 익힌 알고리즘을 기계적으로 적용하여 답을 구하는 경우가 많다고 지적하였다. 따라서 표준 알고리즘뿐만 아니라 대안적인 알고리즘을 병행하여 지도할 필요가 있다고 주장하였다.

교과서에서 자연수의 뺄셈은 대안적인 계산 방법을 여러 가지로 방법으로 계산하는 활동에서 한 차시 정도 다루지만, 분수의 뺄셈은 대안적인 계산 방법을 명시적으로 다루지 않는다. 먼저 분수의 뺄셈에서의 전형적인 계산 방법과 이에 대한 정당화를 살펴보자. 예를 들어, 수학 4-2에서 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}$를 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$으로 계산하는 이유를 '$\frac{5}{6}$는 $\frac{1}{6}$이 5개, $\frac{2}{6}$는 $\frac{1}{6}$이 2개이므로 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}$는 $\frac{1}{6}$이 3개'라고 설명한다(박교식 외, 2022c, p. 16). 여기서 '$\frac{5}{6}-\frac{2}{6}$는 $\frac{1}{6}$이 3개'를 식으로 나타내면 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$이 되어 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}$로 계산하는 근거를 명확하게 제시하지 못한다. 따라서 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$으로 나타내는 것으로 충분하다. $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}$가 되는 이유를 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}$과 $\frac{3}{6}=\frac{5-2}{6}$를 이용하여 설명할 수 있지만 계산 과정에 요구되지는 않는다. 그러므로 분수의 뺄셈에서 대안적인 계산 방법에 대한 논의와 함께 교과서에 제시된 계산 방법에 대한 근본적인 논의도 필요해 보인다.

다음으로 대분수의 뺄셈에서의 계산 방법을 살펴보자. [그림 6]은 교과서에 제시된 대분수의 뺄셈의 전형적인 계산 방법이다. 방법 2에서는 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}$와 같은 문제점이 나타난다.

$3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}$을 어떻게 계산하는지 알아봅시다.

방법 1 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}=2\frac{\square}{6}-1\frac{3}{6}=\square\frac{\square}{6}$

방법 2 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}=\frac{\square}{6}-\frac{\square}{6}=\frac{\square}{6}=\square\frac{\square}{6}$

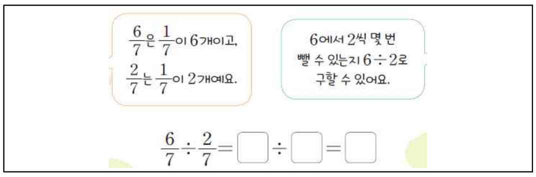
[그림 6] 대분수의 뺄셈 (박교식 외, 2022c, p. 23)

이제 분수의 나눗셈에 집중하여 나눗셈 계산 방법을 살펴보자. 교과서에 제시된 기본적인 분수의 나눗셈의 계산 방법은 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 것이다. 이때 나누는 수가 자연수일 때와 분수일 때 나눗셈을 곱셈으로 나타내는 계산 원리가 다른 방식으로 제시된다. 먼저 나누는 수가 자연수인 상황을 살펴보자. 예를 들어, 교과서에서 $\frac{7}{4}\div 3$을 $\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$로 계산할 수 있는 근거는 '$\frac{7}{4}\div 3$은 $\frac{7}{4}$을 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1인 상황이므로 $\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$로 계산된다'는 것이다(박교식 외, 2023b, p. 17). 그러나 $\frac{7}{4}$을 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1의 상황을 그림으로 나타내어 이해하는 과정을 거치면 $\frac{7}{12}$이 된다. 즉, $\frac{7}{4}\div 3=\frac{7}{12}$이 되는 것과 $\frac{7}{12}$을 $\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$로 나타내는 것을 별개의 상황으로 간주할 수 있는 셈이다. 따라서 $\frac{7}{4}\div 3=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$이 되는 이유를 $\frac{7}{4}\div 3=\frac{7}{12}$과 $\frac{7}{12}=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$를 이용하여 설명할 수 있지만 계산 과정에 필요한 것은 아니다.

다음으로 나누는 수가 분수인 상황을 살펴보자. 예를 들어, [그림 7]에서 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}$를 $6\div 2$로 나타내어 계산하거나 [그림 8], [그림 9]와 같이 이중수직선을 도입하여 $4\div\frac{2}{3}$과 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$를 각각 $(4\div 2)\times 3$과 $\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}\times 5$로 계산한다.

[그림 7]에서 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}=6\div 2$로 나타낼 수 있는 이유는 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}=3$이고 $6\div 2=3$이기 때문이다. 이런 관점에서 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}=3$의 계산 원리를 이해한다면 이것만으로

이미 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}$를 계산한 상황이 된다. 따라서 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}$를 다시 $6\div2$로 나타내어 계산할 필요는 없는 셈이다.

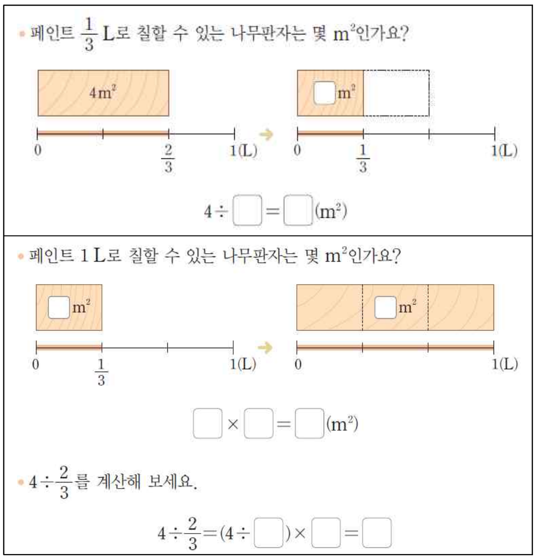


[그림 7] 분수의 나눗셈 (박교식 외, 2023c, p. 11)

[그림 8], [그림 9]는 분수의 나눗셈을 곱셈으로 계산하는 원리를 설명하기 위하여 이중수직선을 도입한 상황이다. 김정하(2020)에 의하면 현장 교사들은 이중수직선을 이용하여 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 방법을 지도하는 것을 어려워한다. 서동엽(2021)은 분수의 나눗셈 지도에 대한 교사들의 의견을 바탕으로 아동들이 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내는 방법을 이해하기 어렵다는 것을 확인하였다. 또한 분수의 나눗셈 지도를 전형적인 사례로 추론하는 방식의 논리가 적절한지 판단하는 기준에 대한 문제를 제기하였다.

이제 구체적으로 [그림 8], [그림 9]의 문제 상황과 계산 과정을 살펴보자. [그림 8]은 페인트 $\frac{2}{3}$L로 나무판자 $4m^2$를 칠할 수 있을 때, 이 페인트 1L로 칠할 수 있는 나무는 몇 m^2인지 알아보는 상황이다.

$4\div\frac{2}{3}$를 $(4\div2)\times3$으로 계산하는 것을 $\frac{4}{2}\times3$으로 나타내면 이는 결국 $4\times\frac{3}{2}$으로 계산하는 것과 같게 된다. 따라서 아동들의 이해 수준을 고려하면 $4\div\frac{2}{3}$를 $(4\div2)\times3$로 계산하는 것보다 $4\times\frac{3}{2}$로 계산하는 것이 효율적이다. 한편, $4\div\frac{2}{3}$를 [그림 7]과 같은 방식으로 $\frac{12}{3}\div\frac{2}{3}$로 대안적으로 계산할 수 있다. 이런 관점에서 $4\div\frac{2}{3}$을 계산하기 위하여 이중수직선을 도입하여 계산해야 하는 당위성을 강조하기 어렵다. 또한 $\frac{2}{3}$L로 $4m^2$를 칠할 수 있다면 $\frac{2}{3}\times\square$L로 $4\times\square m^2$를 칠할 수 있는 상황을 비례적으로 이해하여 □을 $\frac{3}{2}$으로 두면 1L로 $4\times\frac{3}{2}m^2$를 칠하게 된다.

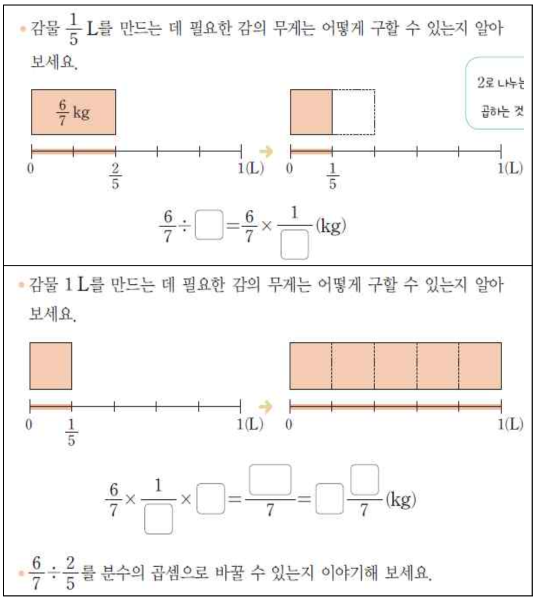


[그림 8] (자연수)÷(분수) (박교식 외, 2023c, p. 19)

[그림 9]는 감 $\frac{6}{7}$kg으로 감물 $\frac{2}{5}$L를 만들 수 있을 때, 이 감물 1L를 만드는 데 필요한 감이 몇 kg인지 알아보는 상황이다.

[그림 8]에서의 계산 방법과 마찬가지로 [그림 9]에서 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$를 $\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}\times5$로 계산하는 것은 결국 $\frac{6}{7}\times\frac{5}{2}$로 계산하는 것과 같고, $\frac{6}{7}\times\frac{5}{2}$로 계산하는 것이 효율적이다. 또한 [그림 7]과 같은 계산 방식으로 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$를 $\frac{30}{35}\div\frac{14}{35}$로 나타내어 $30\div14$로 계산할 수 있고, [그림 8]에서의 논의와 같이 $\frac{6}{7}\times\square$kg으로 $\frac{2}{5}\times\square$L를 만드는 상황으로 문제를 해결할 수 있다. 따라서 [그림 8], [그림 9]의 계산 원리를 이중수직선을 사용하지 않고 [그림 7]의 계산 방식으로 이해하거나 비례 상황으로

이해하는 것도 가능하다. 그럼에도 불구하고 여전히 $4\div\frac{2}{3}$와 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$를 각각 $4\times\frac{3}{2}$과 $\frac{6}{7}\times\frac{5}{2}$로 나타내어 계산하는 것이 효율적이다. 그러므로 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여 분수의 나눗셈 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$를 분수의 곱셈 $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$로 일관성 있게 계산하는 대안적인 방법은 아동들에게 교과서에 제시된 분수의 나눗셈의 여러 가지 계산 원리를 한 가지 방식으로 이해할 수 있는 기회를 제공한다. 소수의 나눗셈은 소수를 분수로 나타내어 분수의 나눗셈으로 계산할 수 있기 때문에 논의하지 않기로 한다.

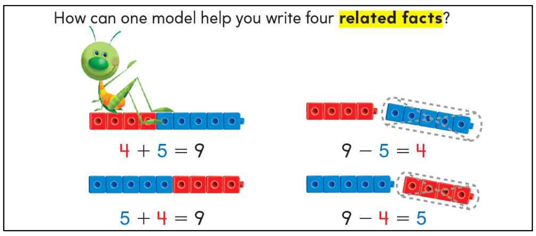


[그림 9] (분수)÷(분수) (박교식 외, 2023c, p. 21)

III. 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계의 정당화

이 장에서는 아동들의 이해 수준에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화하는 방안에 대하여 논의한다. 교사용지도서(교육부, 2017c)에 제시된 [그림 3]은 덧셈식이 뺄셈식으로 나타나는 것을 정당화하지만, 뺄셈식이 덧셈식으로 나타나는 것을 정당화하는 상황은 아니다. 본질적으로 덧셈과 뺄셈의 관계의 정당화는 중학교 수학에서 다루는 등식의 성질에 기초한다. 즉, $a+b=c$의 양변을 b로 빼면 $a+b-b=c-b$가 되고, $b-b$를 먼저 계산하면 $a=c-b$가 나타난다. 마찬가지로 $a=c-b$가 $a+b=c$로 나타난다. 초등학교 수학에서도 이와 같은 방식으로 [그림 3]과 같이 기호를 사용하여 □+△=○과 □=○− *TRIANGLE*을 서로 바꾸어 나타낼 수 있다고 정당화할 수 있지만 아동들이 이해하기는 어렵다. 또한 구체적인 수를 사용하여 $6+4=10$의 양변을 4로 빼면 $6+4-4=10-4$가 되고, $4-4$를 먼저 계산하여 $6=10-4$가 나타나고, 마찬가지로 $6=10-4$가 $6+4=10$으로 나타난다고 정당화할 수 있다. 그러나 여전히 아동들이 이와 같은 정당화를 이해하기는 쉽지 않다. 사실 [그림 1]에서 덧셈식이 뺄셈식으로, 뺄셈식이 덧셈식으로 나타나는 이유를 정당화하지 않아도 교과서에서 아동들의 학습에 지장을 초래하는 명시적인 문제 상황과 활동은 찾기 어렵다. 그러나 Ⅰ장에서 언급하였듯이 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용할 수 있는 문제 상황과 활동을 논의하기에 앞서 이들 관계의 정당화가 전제되어야 한다.

아동들의 이해 수준에서 등식의 성질을 사용하지 않고, 예를 들어, 수직선이나 연결 큐브를 이용하여 덧셈과 뺄셈의 관계를 정당화할 수 있다. 먼저 수직선을 이용한 정당화를 논의하자. [그림 1]의 $6+4=10$을 수직선의 6에서 출발하여 4만큼 뛰어 10에 도착하는 그림으로 표현하자. 여기서 그림의 출발과 도착 방향을 반대로 진행하면 10에서 출발하여 4만큼 거꾸로 뛰어 6에 도착하고, 이는 $10-4=6$으로 나타난다. 뺄셈식에서 덧셈식이 나타나는 것도 같은 방식으로 이해할 수 있다. 다음으로 [그림 10]과 같이 연결 큐브를 이용한 정당화를 논의하자.

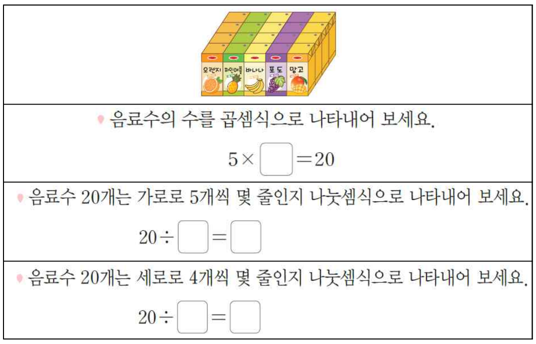


[그림 10] Addition and Subtraction Relationship (Dixon et al., 2015a, p. 190)

예를 들어, $4+5=9$는 큐브 4개와 큐브 5개가 연결된 상황으로, $9-5=4$는 연결된 9개의 큐브에서 5개의 큐브가 분리되는 상황으로 이해하면 덧셈식이 뺄셈식으로, 뺄셈식이 덧셈식으로 나타나는 것을 정당화하고 일반화할 수 있다. 또한 이를 바탕으로 분수의 덧셈식이 분수의 뺄셈식으로, 분수의 뺄셈식이 분수의 덧셈식으로 나타나는 것으로 확장하여 일반화할 수 있다. 마찬가지로 소수의 덧셈식과 뺄셈식을 서로 바꾸어 나타낼 수 있다.

등식의 성질에 기초한 곱셈과 나눗셈의 관계의 정당화에 대한 논의는 덧셈과 나눗셈이 관계의 정당화와 같은 맥락에서 이해할 수 있으므로 생략하기로 하자. 아동들의 이해 수준에서 등식의 성질을 사용하지 않고, 예를 들어, [그림 11]의 문제 상황을 이용하여 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화할 수 있다. 즉, 음료수 20개가 놓여 있는 상황을 $5\times4=20$으로 생각하면, 음료수를 5개씩 4줄로 나눈 상황은 $20\div5=4$로 나타난다. 또한 음료수를 5개씩 4줄로 나눈 상황을 $20\div5=4$로 두면, 음료수를 다시 모은 상황은 $5\times4=20$으로 나타난다. 이런 방식으로 곱셈식과 나눗셈식을 서로 바꾸어 나타낼 수 있다.

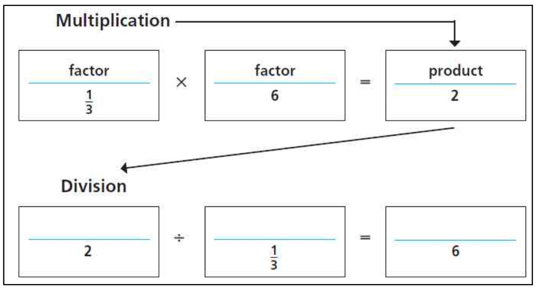
또한 수학 2-2, 3-1에서 학습한 곱셈의 동수누가 원리와 나눗셈의 동수누감 원리를 적용하면 $5\times4=20$은 덧셈식 $5+5+5+5=20$으로 나타나고, 이를 다시 뺄셈식 $20-5-5-5-5=0$으로 표현하면 $20\div5=4$가 나타난다. 다만, 아동들이 $5+5+5+5=20$을 산술적으로 $20-5-5-5-5=0$으로 조작하는 과정을 이해하기가 쉽지 않다.



[그림 11] 곱셈식과 나눗셈식 (박교식 외, 2022a, p. 66)

IV. 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계의 활용

이제 교과서에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용할 수 있는 뺄셈과 나눗셈의 문제 상황과 활동을 살펴보자. 논의에 앞서 이러한 관계가 분수와 소수까지 확장된다는 전제가 필요하다. 예를 들어, [그림 12]와 같이 Dixon et al.(2015c)이 제시한 곱셈과 나눗셈의 관계를 참고할 수 있다.



[그림 12] Multiplication and division relationship (Dixon et al., 2015c, p. 356)

1. 덧셈과 뺄셈의 관계의 활용

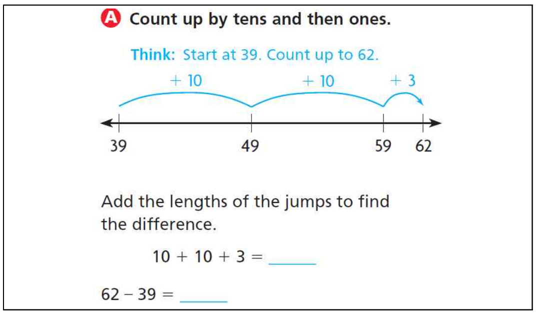
앞서 언급했듯이 교과서와 교사용지도서는 [그림 13]과 같이 뺄셈을 여러 가지 방법으로 계산하는 것을 언급하지만 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 대안적인 방법은 명시적으로 다루지 않는다. 교사용지도서(교육부, 2017c, p. 206)는 참고 자료에 ‘더해 가면서 빼기’ 전략을 언급하고, $73-46$을 $46+30=76$과 $76-3=73$을 이용하여 $30-3$으로 계산하는 방법을 소개한다. 그러나 이와 같은 계산은 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 방법보다 효율적이지 않다.

수학 2-1의 ‘덧셈과 뺄셈’ 단원은 모두 15차시로 구성되어 있다. 이때 9차시에서 [그림 13]과 같이 여러 가지 방법으로 뺄셈을 하는 상황을 다루고, 11차시에서 [그림 1]의 덧셈과 뺄셈의 관계를 다룬다(교육부, 2017c, pp. 206-211). 따라서 해당 단원의 전개 방식을 고려하면 [그림 13]에서 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 방법을 적용하기가 적절한 상황이 아니다. 그러므로 뺄셈에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하려면

해당 단원을 재구성하여 덧셈과 뺄셈의 관계를 학습한 이후에 이를 대안적인 뺄셈 방법의 하나로 사용할 수 있는 문제 상황과 활동이 필요해 보인다.

[그림 13] 두 자리 수의 뺄셈 (교육부, 2017b, p. 74)

Reys et al.(2014)에서 어떤 아동은 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하여 $523-279$를 $1+20+223$으로 계산한다. 다른 아동은 등호의 관계적 의미를 반복 적용하여 $523-279$를 $524-280$으로, $524-280$을 다시 $544-300$으로 계산한다. Torbeyns et al.(2009)은 아동들이 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 경우가 많지 않더라도 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 전략을 활용할 수 있는 문제 상황을 제시하는 것이 필요하다고 강조하였다. 또한 Dixon et al.(2015b)은 [그림 14]와 같이 수직선을 이용하여 $62-39$를 $10+10+3$으로 계산하는 문제 상황을 제시하였다. 이때, 아동들이 39에서 얼마만큼, 몇 번, 어떤 방식으로 62에 도착하는지를 스스로 결정하게 하는 것이 중요하다고 강조하였다.



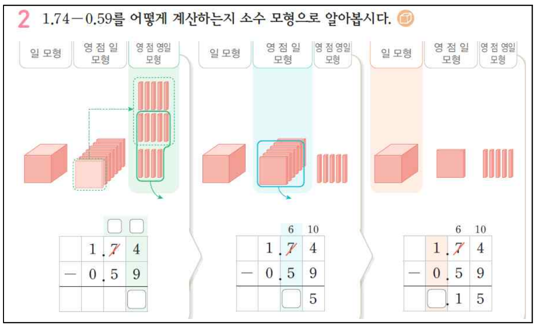
[그림 14] Subtraction by Addition (Dixon et al., 2015b, p. 39)

한편, 백대현(2017)은 등호의 관계적 의미를 적용한 뺄셈의 효율성을 강조하였다. 앞서 Reys et al.(2014)이 언급하였듯이 등호의 관계적 의미를 적용한 뺄셈은, 예를 들어, $523-279$를 $524-280$으로 계산하는 것이다. 이 상황에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하려면 $523-279=\square$보다 $524-280=\square$을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 것이 아동들에게 다소 쉽게 느껴질 수 있다. 이와 같이 $523-279=524-280$으로 계산할 수 있는 원리는 덧셈과 뺄셈의 관계와 등식의 성질에 기초한다. 즉, $\square=523-279$라 두고 $523=\square+279$로 나타내고, 등식의 양변을 1로 더하면 $524=\square+280$이 되고, 이는 $\square=524-280$으로 나타난다. 따라서 등호의 관계적인 의미를 활용하는 것은 아동들의 이해 수준에서 감수와 피감수에 같은 수를 더하거나 빼도 등식이 같다는 의미로 설명된다. 이와 관련하여 Falkner, Levi, & Carpenter(1999)는 등호의 관계적 의미를 학습한 1, 2학년 아동들의 87.5%는 이후 학년의 학습에서 이와 같은 계산 원리를 활용한다고 보고하였다. 이는 우리나라 아동들이 학습을 통하여 뺄셈에서 등호의 관계적 의미와 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하여 효율적인 계산을 할 수 있다는 것을 시사한다.

이제 분수의 뺄셈을 살펴보자. 수학 2-1에서 여러 가지 방법으로 계산하는 대안적인 뺄셈을 다루는 자연수의 뺄셈과는 달리 수학 4-2의 분수의 뺄셈과 소수의 뺄셈, 수학 5-1의 분수의 뺄셈에서는 대안적인 뺄셈을 명시적으로 다루지 않는다.

앞서 [그림 6]에서 대분수의 뺄셈의 전형적인 계산 방법은 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}$을 $2\frac{7}{6}-1\frac{3}{6}$ 또는 $\frac{19}{6}-\frac{9}{6}$로 계산하는 것이다. 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하여 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}$은, 예를 들어, $1\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=2$와 $2+1\frac{1}{6}=3\frac{1}{6}$을 이용하여 $\frac{3}{6}+1\frac{1}{6}$로 계산한다. 등호의 관계적 의미를 적용하면 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}$을 $3\frac{4}{6}-2$로 계산할 수 있다. 또한 등호의 관계적 의미와 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하면 $3\frac{1}{6}-1\frac{3}{6}$을 $3-1\frac{2}{6}$로 나타내고, 이를 $\frac{4}{6}+1$로 계산할 수 있다. 이러한 대안적인 계산 방법은 아동들이 스스로 자신에게 맞는 적절한 계산 방법을 선택하는 데 도움을 줄

수 있다. 소수의 뺄셈도 분수의 뺄셈과 마찬가지로 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용할 수 있다. 예를 들어, [그림 15]에서 $1.74-0.59$를 $0.01+1.10+0.04$로 계산한다. 여기서 $1.74-0.59$를 $1.75-0.60$으로 나타내면 효율적인 계산이 된다. 또한 소수의 뺄셈을 분수의 뺄셈으로 나타내어 계산할 수 있다.



[그림 15] 소수의 뺄셈 (박교식 외, 2022c, p. 72)

2. 곱셈과 나눗셈의 관계의 활용

이 절에서는 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여 나눗셈식을 곱셈식으로 나타내어 계산할 수 있는 문제 상황과 활동을 살펴본다. 앞서 [그림 4]에서 나누어떨어지는 자연수의 나눗셈의 몫을 곱셈식을 이용하여 구하는 상황을 논의하였다. 즉, $24\div4$에서 몫은 $4\times6=24$를 이용하여 구한다. 그러나 $124\div4$에서 몫을 곱셈식으로 구하는 방법은 그렇게 단순하지 않다. 예를 들어, $4\times25=100$과 $4\times6=24$를 이용하여 몫 31을 구할 수 있지만, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙에 대한 이해가 필요하다.

또한 수학 3-2의 나누어떨어지지 않는 자연수의 나눗셈에서 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하기는 적절하지 않다. 이런 관점에서 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용할 수 있는 나눗셈의 문제 상황과 활동은 주로 분수의 나눗셈으로 한정된다. 앞서 논의했듯이 교과서에서 분수의 나눗셈을 계산하는 방법은 나누는 수가 자연수인지 분수인지에 따라 계산 방법이 다르게 제시된다. 특히, 나누는 수가 분수일 때 [그림 7]은 자연수의 나눗셈으로 나타내어 계산하고, [그림 8], [그림 9]는 이중 수직선을 도입하여 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산한다.

이제 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하여 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 방법을 논의하자. 이와 같은 방식의 계산은 [그림 7], [그림 8], [그림 9]에 모두 적용될 수 있다. 이때, 등식의 성질에 대한 이해가 전제되어야 한다. 먼저 Ⅱ장에서 논의한 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 자연수인 나눗셈 $\frac{7}{4}\div3$의 계산 원리를 논의하자. $\square=\frac{7}{4}\div3$이라 두고 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용하면 $\square\times3=\frac{7}{4}$로 나타난다. 이때 $\square\times3=\frac{7}{4}$에서 $\square$을 구하는 것이 바로 $\frac{7}{4}\div3$을 계산하는 것이다. 앞서 박교식 외(2023a)에서 $\frac{7}{4}$을 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1인 상황을 $\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$로 계산하는 방식의 논리적인 문제점을 지적하였다. 이를 해결하기 위한 한 방안은 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용하는 것이다. 즉, $\square=\frac{7}{4}\div3$을 $\square\times3=\frac{7}{4}$로 나타내어 양변을 $\frac{1}{3}$로 곱하면 $\square\times3\times\frac{1}{3}=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$이 된다. 여기서 $3\times\frac{1}{3}$을 먼저 계산하면 $\square=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$로 나타난다. 한편, Norwood, Roby, Mendoza Epperson, Dixon, Scheer, Wright et al.(2009)은 $3\times\frac{1}{3}=1$을, 곱셈과 나눗셈이 관계를 활용하여, $1\div3=\frac{1}{3}$으로 나타내고, 이를 다시 $1\div3=1\times\frac{1}{3}$로 나타내어 $\frac{7}{4}\div3=\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}$이 된다고 설명한다. 따라서 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 자연수인 경우에 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용하여 계산과정을 정당화할 수 있다.

다음으로 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 분수인 경우는 [그림 7], [그림 8], [그림 9]의 논의에서 알 수 있듯이 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용하여 $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}$, $4\div\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}\div\frac{2}{5}$를 각각 $\frac{6}{7}\times\frac{7}{2}$, $4\times\frac{3}{2}$, $\frac{6}{7}\times\frac{5}{2}$로 일관성 있게 계산할 수 있다. 정리하면, 교과서에서 나누는 수가 자연수인지 분수인지에 따라 분수

의 나눗셈을 다른 방식으로 계산하는 교과서의 서술 방식이 적절하지 않다는 의미가 아니라 아동들에게 대안적인 계산 방법이 추가적으로 필요하다는 것이다. 소수의 나눗셈은 분수의 나눗셈으로 나타낼 수 있으므로 논의하지 않기로 한다. 한편, Dixon et al.(2015c)은 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 방법을 동수누감으로 설명한다. 또한 [그림 16]과 같이 패턴을 발견하는 활동을 통하여 분수의 나눗셈을 곱셈으로 계산할 수 있다는 것을 이해하게 한다.

Division	Multiplication
$\frac{4}{7} \div \frac{2}{7} = 2$	$\frac{4}{7} \times \frac{7}{2} =$
$\frac{5}{6} \div \frac{4}{6} = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{6} \times \frac{6}{4} =$
$\frac{1}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{3}{5}$	$\frac{1}{3} \times \frac{9}{5} =$

[그림 16] Multiplication and division relationship (Dixon et al., 2015c, p. 356)

V. 결론

본 연구에서는 교과서에서 뺄셈과 나눗셈의 계산 방법을 살펴보고, 이를 바탕으로 아동들의 이해 수준에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화하고 뺄셈과 나눗셈에 활용할 수 있는 문제 상황과 활동을 논의하였다. 연구 결과에 기초하여 도출한 연구 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 교과서의 뺄셈과 나눗셈에서 계산 방법에 대한 정당화가 명확하지 않은 사례가 있었다. 예를 들어 수학 4-2의 $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ 에서 $\frac{5-2}{6}$ 가 계산 과정에 나타나는 이유가 분명하지 않았다. 또한 수학 6-2의 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = 6 \div 2 = 3$ 은 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = 3$ 와 $6 \div 2 = 3$ 을 이용하여 정당화하였다. 즉, 계산 결과를 이용하여 계산 과정을 설명한 셈이다. 따라서 뺄셈과 곱셈의 계산 방법에 대한 정당화가 좀 더 논리적으로 서술될 필요가 있었다.

둘째, 아동들의 이해 수준에서 교과서에 명시적으로 제시된 자연수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계를 정당화하고, 이러한 관계를 [그림 12]와 같이 분수까지 확장하여 일반화하는 것이 필요하다. 이는 특히 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 분수인 경우 대안적인 계산 원리를 이해하는 데 도움이 된다. 또한 [그림 15]와 같이 소수의 뺄셈에서도 대안적인 계산 방법을 제공한다.

셋째, 문제 상황에 따라 아동들에게 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하여 뺄셈식을 덧셈식으로 나타내어 계산하는 것이 효율적이라는 것을 이해할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다. Torbeyns et al.(2009)은 일반적인 뺄셈을 한 후 반성 단계에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하는 전략을 논의하는 것이 아동들의 뺄셈 학습에 긍정적인 효과가 나타났다고 확인하였다. 따라서 남승인, 강영란, 박인묵(2002)이 주장한 것처럼 수학 2-1의 덧셈과 뺄셈 단원의 뺄셈의 계산 원리를 다루는 차시에서 대안적인 계산 알고리즘의 하나로 덧셈과 뺄셈의 관계를 활용하는 것이 필요하다.

넷째, 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용하면 분수의 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 여러 가지 계산 원리를 통합적으로 이해할 수 있는 장점이 있다. 이때, 중학교 수학에서 명시적으로 다루는 등식의 성질을 암묵적으로 사용하는 것이 적절한지에 대한 논의와 교육적 합의가 필요하다. 예를 들어, [그림 7]에서 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = 6 \div 2$ 의 계산 원리를 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용하여 설명할 수 있다. 한편, Carpenter, Franke, & Levi(2003)는 초등학교 아동들이 등식의 성질을 이해하고 문제 해결에 활용할 수 있다는 사실을 확인하였다. 또한 초등학교 수학에서 연산의 성질을 암묵적으로 사용하는 것을 고려하면 문제 상황과 활동에 따라 등식의 성질을 암묵적으로 사용하는 것을 의도적으로 배제할 필요는 없다.

끝으로 아동들이 사칙 계산을 교과서에 제시된 계산 방식으로만 학습해야 하는 것이 충분하지 않은 경우가 종종 있다. 특히, 교과서에 제시된 계산 방식을 이해하고 적용하는 데 어려움을 겪는 아동들에게 대안적인 계산 방법을 경험할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다. 이런 관점에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 관계와 등식의 성질을 활용할 수 있는 문제 상황과 활동이 수학 학습에서 명시적으로 다루어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부(2017a). 수학 1-1. ㈜천재교육.

교육부(2017b). 수학 2-1. ㈜천재교육.

교육부(2017c). 수학 2-1 교사용지도서. ㈜천재교육.

권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 초등수학교육, 7(2), 85-99.

김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현 외 10인(2022). 수학 3-1. ㈜아이스크림미디어.

김정하(2010). 초등학생들의 수학적 정당화에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 박사학위논문.

김정하(2020). 이중수직선을 이용한 분수 나눗셈 지도에 대한 고찰. 학습자중심교과교육연구, 20(8), 1253 - 1277.

남승인, 강영란, 박인묵(2002). 연산능력을 기르기 위한 대안적 알고리즘 지도 방안-사칙연산을 중심으로-. 수학교육 논문집, 13, 19-38.

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2022a). 수학 3-1. 동아출판(주).

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2022b). 수학 3-2. 동아출판(주).

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2022c). 수학 4-2. 동아출판(주).

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2023a). 수학 5-1. 동아출판(주).

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2023b). 수학 6-1. 동아출판(주).

박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영 외 28인(2023c). 수학 6-2. 동아출판(주).

백대현(2017). 초등학교 수학에서 연산의 성질과 등호의 사용에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 21(4), 643-662.

서동엽(2021). 분수의 나눗셈 지도 방법에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 25(1), 81-102.

서지수, 류성림(2012). 수와 연산・도형 연역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구. 수학교육논문집, 28(1), 85-108.

장혜원(2014). 덧셈과 뺄셈의 대안적 계산방법 지도에 대한 연구. 수학교육학연구, 24(4), 623-644.

Almedia, D. (1996). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 9.*

Bay-Williams, J. M., SanGiovanni, J. J., Martinie, S., & Suh, J. (2022a). *Figuring out fluency addition & subtraction with fractions and decimals.* Corwin Press.

Bay-Williams, J. M., SanGiovanni, J. J., Martinie, S., & Suh, J. (2022b). *Figuring out fluency multiplication & division with fractions and decimals.* Corwin Press.

Baroody, A. J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137-175.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, S. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann.

Dixon, J. K., Larson, M. R., Burger, E. B., Sandoval-Martinez, M. E, & Leinwand, S. J. (2015a). *Go math. first grade.* Houghton Mifflin Harcourt.

Dixon, J. K., Larson, M. R., Burger, E. B., Sandoval-Martinez, M. E, & Leinwand, S. J. (2015b). *Go math. third grade.* Houghton Mifflin Harcourt.

Dixon, J. K., Larson, M. R., Burger, E. B., Sandoval-Martinez, M. E, & Leinwand, S. J. (2015c). *Go math. fifth grade.* Houghton Mifflin Harcourt.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-232.

Norwood, K. S., Roby, T., Mendoza Epperson, J. A. Dixon, J. K., Scheer, J. K., Wright, D. G. et al. (2009). *HSP math grade 6.* Harcourt School Publishers.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2014). *Helping children learn mathematics* (11th ed.). Wiley.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Stassens, N., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Solving subtraction problems by means of indirect addition. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 79-91.

Applications of the addition and subtraction, multiplication and division relationships in elementary school mathematics

Paek, Dae Hyun
Busan National University of Education
E-mail : daehyunpaek@gmail.com

The addition and subtraction relationship and the multiplication and division relationship are explicitly dealt with in second and third grade mathematics textbooks. However, these relationships are not discussed anymore in the problem situations and activities in the 4th, 5th, and 6th grade mathematics textbooks. In this study, we investigate the calculation principles of subtraction and division in the elementary school mathematics textbooks. Based on our investigation, we justify the addition and subtraction relationship and the multiplication and division relationship at the level of children's understanding so that we discuss some problem situations and activities where the relationships can be applied to subtraction and division. In addition, we suggest educational implications that can be obtained from children's applying the relationships and the properties of equations to subtraction and division.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : subtraction, division, addition and subtraction relationship, multiplication and division relationship, properties of equations, justification activities, elementary school mathematics textbooks