

다중 균열을 갖는 신장 보의 균열 에너지와 지배방정식

Crack Energy and Governing Equation of an Extensible Beam with Multiple Cracks

손 수 덕*
Shon, Sudeok

Abstract

This paper aims to advance our understanding of extensible beams with multiple cracks by presenting a crack energy and motion equation, and mathematically justifying the energy functions of axial and bending deformations caused by cracks. Utilizing an extended form of Hamilton's principle, we derive a normalized governing equation for the motion of the extensible beam, taking into account crack energy. To achieve a closed-form solution of the beam equation, we employ a simple approach that incorporates the crack's patching condition into the eigenvalue problem associated with the linear part of the governing equation. This methodology not only yields a valuable eigenmode function but also significantly enhances our understanding of the dynamics of cracked extensible beams. Furthermore, we derive a governing equation that is an ordinary differential equation concerning time, based on orthogonal eigenmodes. This research lays the foundation for further studies, including experimental validations, applications, and the study of damage estimation and detection in the presence of cracks.

Keywords : *Multiple cracked beam, Extensible beam, Flexibility, Crack energy, Eigenvalue problem, Mode shape function, Governing equation, Dynamic analysis*

1. 서론

균열을 가진 보의 연구는 건축이나 토목 구조물만 아니라 기계를 포함한 다양한 공학 분야에서 다루어진다. 이것은 수직하중에 대한 선 부재의 역학적 거동이 분야 별로 적용되는 모델에 다소 차이가 있지만 대상의 거동이 유사하다면 수학적 모형도 매우 유사하기 때문이다. 균열을 고려한 보의 수학적 모형은 손상으로 인한 구조물의 물리적인 특성의 변화를 예측할 수 있게 한다. 이것은 초기 설계의 의도에서 벗어난 손상 문제를 해결할 방법을 제공하거나 물리적인 매개변수를 추정하여 현재 상태의 안전성을 판단하기도 한다. 또한 실험적 연구와 연계되어 구조물의 손상 예측, 유지 보수를 비롯한 다양한 주제에 적합한 수학적 모델이 개발된다. 이러한 맥락에서 볼 때, 균열 보의 수학적 모델의 엄격한 수학적 체

계를 구축하는 것은 상당히 중요하며, 이러한 연구의 중요성과 더불어 연관된 모델을 공학적인 관점에서 설명하고 또한 이해하는 접근이 필요하다.

균열 보의 수리 모델은 일반적으로 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)와 티모셴코 보(Timoshenko beam) 이론에 근거하여 많이 다룬다. 특히, 오일러-베르누이 보 이론을 바탕으로 균열 부분을 가상 회전 스프링(massless torsional spring) 모델로 치환하여 수학적 모형을 구현하는 경우가 많다. 그 이유는 균열 보의 경우 응력은 균열 지점에서 집중되고, 그 분포는 균열에서부터 멀어질수록 일정한 상태로 나타나는데 이러한 물리적 가정을 모두 고려하여 보 모델을 유도하는 것보다 균열 지점에서 가상의 등가 유연도(flexibility) 개념을 도입하기가 더 쉽기 때문이다. 이러한 균열의 유연도 모델은 등가 강성(equivalent stiffness)을 구하는 것에서 시작하며, Ostachowicz & Krawczuk(1991)에서 두 가지 종류의 열린 균열(open crack)에 대한 유연도 함수가 유도되었고¹⁾, 사각형 단면 보의 고유진동수(natural

* 한국기술교육대학교 건축공학과 연구교수, 공학박사
Dept. of Architectural Engineering, KoreaTECH
Tel: 041-560-1221 Fax: 041-560-1224
E-mail: sdshon@koreatech.ac.kr

frequency)를 구하였다. 이 연구를 바탕으로 균열의 모델링은 회전 스프링으로 치환되었고, Lin et al.(2002)는 균열 위치에서 패치 조건(patching condition)을 이용해 수직 진동 모델의 고유치 문제를 해결하였으며, 다중 균열 보에서 재귀적(recursive)인 방법으로 특성방정식(characteristic equation)을 구하였다²⁾. 이러한 연구에 대해서 Caddemi & Calio(2009)와 Caddime & Morassi(2013)의 문헌^{3),4)}에서는 수학적 배경을 만들려고 노력하였고, 이 연구에서 균열을 가진 오일러-베르누이 보의 닫힌-해(closed-form solution)와 등가 유연도 에너지 모델에 대한 수학적 정당성과 정해(exact solution)에 대해서 논의하게 되었다. 그러나 이들의 모델은 균열을 가진 수직 진동 보의 선형 부분만 다루고 있어서 휨 변형 에너지만 고려하는 고전적인 오일러-베르누이 보의 경우이었다.

최근 균열을 가진 신장 보(extensible beam)와 얇은 아치(shallow arch)의 수학적 모형과 연산자 및 정해에 대해서 문헌[5]~[7]에서 연구되었다. 이들의 연구는 엄격한 수학적 체계를 개발하고 균열의 에너지 모델에 대한 연산자를 통해 지배방정식을 유도하는 과정과 시스템의 정해에 대해서 논의하고 있다. 이 문헌에서 다루는 신장 보는 오일러-베르누이 보 이론을 기초로 하지만 수직 진동 보에서 축 방향 내력의 영향을 고려한 모델로서 Woinowsky-Krieger(1950)의 논문⁸⁾에서 소개되었다. 감쇠의 영향까지 고려하여 신장 보의 초기-경계치 문제(initial-boundary problem)를 문헌[9]에서 다루었고, 얇은 아치의 운동 방정식¹⁰⁾과 유사한 형태로 유도된다. 이것은 축 방향과 휨에 대한 변형 에너지를 함께 고려하는 모델이어서 일차원 문제로 유도되면 거의 비슷한 형태가 제안되기 때문이다. 그러나 균열의 에너지 함수에서는 휨 변형 에너지에서만 고려하면 되는데 그 이유는 변위 함수가 연속이고 단면에 분포되는 균열의 응력 변화가 균열의 위치에서만 정의되는 경우는 더 이상 나타나지 않기 때문이다^{5),6)}.

본 논문에서는 이와 같은 축력과 휨이 동반된 균열의 에너지 모델에 대한 수학적 타당성을 문헌[4]에서 접근하는 방법으로 다루고자 한다. 또한 이러한 균열 에너지를 통해 운동 방정식이 유도되는 과정과 고유치 문제를 통한 모드 형상 함수(mode shape function)와 균열을 포함해 수직 진동하는 신장 보의 지배방정식을 유도하

도록 한다. 논문의 구성은 2장에서 균열 에너지의 수학적 검증을 다루고, 3장에서 균열 신장 보의 운동 방정식 유도 과정을 설명한다. 4장에서 균열의 패치 조건을 이용한 시스템의 고유치 문제를 다루도록 하며, 5장에서 고유함수(eigen-function)를 기저(basis)로 유도된 지배 방정식과 예제를 설명하고, 6장에서 결론을 도출한다.

2. 균열의 에너지 모델

본 절에서는 신장 보의 균열 에너지 방정식에 대한 제시된 수학적 모델의 타당성을 살펴보도록 한다. 오일러-베르누이 보에서의 균열 에너지에 대한 수학적 모델은 문헌[4]에 그 타당성이 증명되었다. 그러나 이 균열 에너지 모델을 신장 보에서 적용하는 것은 어떠한지는 다루지 않았다. 일반적으로 축력이 고려된 보의 모델에서 균열에 대한 방정식의 유도는 같은 방식으로 적용되며 수학적 고찰은 없었다. 최근 축 변형을 고려한 얇은 아치나 신장 보에 대해서는 문헌[6]에서 엄밀한 수학적 체계를 제시하고 있으며, 이것을 이용해서 구간 연속인 균열 경계조건을 만족하는 상태 방정식을 정의된 연산자를 통해 유도할 수 있게 된다. 본 절에서는 이 균열 모델에 대한 타당성과 축 변형 에너지를 함께 고려하였을 때 적용되는 균열 에너지 모델도 그 결과가 같음을 보이기 위해서 문헌[4]의 접근 방법으로 살펴본다.

$x \in [-1, 1]$ 인 보의 에너지 방정식을 생각해 보자. $x = 0$ 에서 균열을 갖는 탄성 재료이며, 양단 모두 핀 지지이다. 보의 축 강성 $EA_h(x) = a_h(x)$ 와 휨 강성 $EI_h(x) = b_h(x)$ 은 다음과 같다고 가정하자.

$$EA_h(x) = a_h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq h^{-1} \\ h^{-1}, & |x| < h^{-1} \end{cases} \quad (1)$$

$$EI_h(x) = b_h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq h^{-1} \\ h^{-1}, & |x| < h^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

여기서, h 는 양의 값을 가지며, 이들은 구간별 상수이다. 신장 보의 경우 변형 에너지 U 는 축 변형과 휨 변형 에너지 U_a 및 U_b 로 구성되며, 다음과 같다.

$$U_{a_h}(\epsilon_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_h(x) \epsilon_0^2 dx \quad (3)$$

$$U_{b_h}(\epsilon_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 b_h(x) \kappa^2 dx \quad (4)$$

여기서, ϵ_0 는 축 방향 변형이고, κ 는 곡률이다. 두 함수의 표현은 유사한 형태이며, 표현의 단순화를 위해서 다음과 같은 두 식을 도입하도록 하자.

$$J_h(f) = f(h^{-1}) - f(-h^{-1}) \quad (5)$$

$$J_h^+(f) = f(h^{-1}) + f(-h^{-1}) \quad (6)$$

위에서 정의된 함수들은 $f(h^{-1})$ 과 $f(-h^{-1})$ 사이의 차와 평균을 나타낸 함수이다.

휨 변형 에너지를 살펴보기 위해서, 보의 처짐 v 는 연속이며, v' 은 $x = 0$ 에서 값이 좌우 극한값이 다르고, $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 에서 매끄럽다(smooth)고 가정하자. 그리고 $v_h'(x)$ 를 정의하면,

$$v_h'(x) = \begin{cases} v'(x), & |x| \geq h^{-1} \\ \frac{h}{2} J_h(v')x + \frac{1}{2} J_h^+(v'), & |x| < h^{-1} \end{cases} \quad (7)$$

이다. 위 식으로부터 v_h 와 v_h'' 를 구하면,

$$v_h(x) = \int_{-1}^x v_h'(s) ds + v(-1) \quad (8)$$

$$v_h''(x) = \begin{cases} v''(x), & |x| \geq h^{-1} \\ \frac{h}{2} J_h(v'), & |x| < h^{-1} \end{cases} \quad (9)$$

이다. 위에서 구한 v_h'' 을 식(4)에 대입하고 정리하면,

$$\begin{aligned} U_{b_h}(v_h) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 b_h(x) v_h''^2 dx \quad (10) \\ &= \frac{1}{2} \int_{|x| \geq h^{-1}} v''^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{|x| < h^{-1}} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} J_h(v') \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{|x| \geq h^{-1}} v''^2 dx + \frac{1}{4} J_h(v')^2 \end{aligned}$$

이고, 따라서, $h \rightarrow \infty$ 로 두면, 다음과 같은 휨 변형에 대한 에너지 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{b_h}(v_h) &\rightarrow \frac{1}{2} \int_{-1}^0 v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v''^2 dx \quad (11) \\ &\quad + \frac{1}{4} \{v'(0^+) - v'(0^-)\}^2 \end{aligned}$$

다음으로 축 변형에 대한 에너지에 대해 살펴보자. 축 방향 변위 u 가 연속이라 하자. 이 경우도 휨 변형 에너지 모델을 다루던 때와 같이 u' 을 $x = 0$ 에서 값이 뛰고, $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 에서 매끄럽다고 가정한다. 그리고 다음과 같이 u_h' 를 정의하자.

$$u_h'(x) = \begin{cases} u'(x), & |x| \geq h^{-1} \\ \frac{h J_h(u')}{2} x + \frac{J_h^+(u')}{2}, & |x| < h^{-1} \end{cases} \quad (12)$$

위 식으로부터 u_h 를 구하면 다음과 같다.

$$u_h(x) = \int_{-1}^x u_h'(s) ds + u(-1) \quad (13)$$

식(3)의 축 변형 에너지 U_{a_h} 의 ϵ_{0_h} 을 u_h 와 v_h 로 표현하면 다음과 같다.

$$U_{a_h}(\epsilon_{0_h}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_h(x) \left(u_h' + \frac{1}{2} v_h'' \right)^2 dx \quad (14)$$

구간별로 정리하면,

$$\begin{aligned} U_{a_h}(\epsilon_{0_h}) &= \frac{1}{2} \int_{|x| \geq h^{-1}} \epsilon_0^2 dx \quad (15) \\ &\quad + \frac{1}{2h} \int_{|x| < h^{-1}} \left(u_h' + \frac{1}{2} v_h'' \right)^2 dx \end{aligned}$$

와 같다. 위 식의 오른쪽 두 번째 항은 $[-1, 1]$ 에서 다항식(polynomial)이기 때문에 양의 상수 C 에 관한 다음과 같은 부등식 관계로 정의된다.

$$\frac{1}{2h} \int_{|x| < h^{-1}} \left(u_h' + \frac{1}{2} v_h'' \right)^2 dx \leq C \frac{1}{h^2} \quad (16)$$

따라서, $h \rightarrow \infty$ 이면, 다음과 같다.

$$U_{a_h}(\epsilon_{0_h}) \rightarrow U_{a_h}(\epsilon_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \epsilon_0^2 dx \quad (17)$$

위의 관계에 대해서 u' 이 연속이라는 가정에서의 변형 에너지를 살펴보면,

$$U_{a_h}(\epsilon_{0_h}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_h(x) \left(u' + \frac{1}{2} v_h'^2 \right)^2 dx \quad (18)$$

이다. 따라서, 위 식 또한 $h \rightarrow \infty$ 이면 식(17)과 같은 결과를 얻게 된다. 이 결과에서 보면 열린 균열을 가진 축 방향 변형을 가진 유도도 모델의 경우, 변위 함수 u 가 연속이고, 또 균열로 인한 응력분포가 고려되지 않고 그 위치에서만 응력의 전달이 단절된 모델에서는 균열로 인한 축 방향 변형 에너지가 무시된다.

결론적으로 균열 보는 균열 위치에서 힘에 대한 에너지 방정식만 남게 되므로 식(11)에서 보는 바와 같이 우측 세 번째 항의 형태로 제시된다. 이 식을 에너지 함수로 표현하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$\frac{1}{2} k_b \{ v'(0^+) - v'(0^-) \}^2 \quad (19)$$

여기서, k_b 는 균열 위치 $x = 0$ 의 탄성 회전 스프링의 휨 강성이고 균열의 영향은 등가 스프링으로 고려될 수 있다. 만약 균열의 위치가 x_0 라면, 위의 방정식에서 나타난 0^+ 와 0^- 는 x_0^+ 와 x_0^- 로 바뀌어야만 한다. 휨만을 고려한 보의 모델은 문헌[4]에서 그 정당성이 논의 되어 졌고, 일차원 응력의 모델에 대한 균열 신장 보의 균열 에너지 함수도 등가 회전 스프링의 모델의 경우 식(19)을 이용하면 된다.

3. 운동 방정식과 균열의 경계조건

신장 보의 진동을 다루기 위한 운동 방정식의 유도는 오일러-베르누이 보에서 보의 처짐이 축 방향에 대한 영향을 고려하는 것에서 시작한다. 이 과정에서 앞 장에서 설명한 바와 같이 균열의 에너지 모델이 고려된다. 우선, 수직 처짐 $y(x, t)$ 이고, 구간 $I \in (0, L)$ 에 대해서 $x \in \Omega$, $t \geq 0$ 인 오일러 베르누이 보에서 균열 위치

$x = x_0$ 을 고려한다. 변형 에너지 U 는 앞 장에서 설명한 바와 같이 축 방향 U_a 와 휨 변형 U_b 의 합으로 이루어진다. 여기서, 균열을 고려한 방정식은 식(19)의 에너지를 포함하며 다음과 같다.

$$U_a = \frac{1}{2} \int_I EA \left(u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right)^2 dx \quad (20)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{I \setminus x_0} EI v_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} k_b \mathcal{J}[v_{,x}](x_0)^2 \quad (21)$$

여기서, 아래첨자 $,x$ 와 $,xx$ 는 각각 $\partial/\partial x$ 와 $\partial^2/\partial x^2$ 을 의미하고, $\mathcal{J}[f](x)$ 는 뿔 함수(jump function)로 $f(x^+) - f(x^-)$ 이다. 우선, 식(20)의 변분(variation)을 계산하면 다음과 같다.

$$\delta U_a = \int_I N \delta u_{,x} dx + \int_I N v_{,x} \delta v_{,x} dx \quad (22)$$

여기서, 식(22)는 두 항으로 나뉘며, $N = EA \epsilon_0$ 이다. 이 식의 우변 두 번째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_I N v_{,x} \delta v_{,x} dx = - \int_{I \setminus x_0} (N v_{,x})_{,x} \delta v dx + C_1 \quad (23)$$

여기서,

$$C_1 = - [N(x_0^+) v_x(x_0^+) - N(x_0^-) v_x(x_0^-)] \delta v(x_0^-)$$

다음으로 휨 변형 에너지인 식(21)의 경우에 대한 변분은 다음과 같다.

$$\delta U_b = \int_{I \setminus x_0} EI v_{,xxx} \delta v dx + \sum_{i=2}^4 C_i \quad (24)$$

여기서,

$$C_2 = - EI v_{,xx}(x_0^+) \delta v_{,x}(x_0^+) + EI v_{,xx}(x_0^-) \delta v_{,x}(x_0^-)$$

$$C_3 = \{ EI v_{,xxx}(x_0^+) - EI v_{,xxx}(x_0^-) \} \delta v(x_0^-)$$

$$C_4 = k_b \mathcal{J}[v_{,x}](x_0) \mathcal{J}[\delta v_{,x}](x_0)$$

운동 에너지와 변형 에너지의 변분 δT 및 δU 로 구

한 라그랑지안 방정식의 변분 $\delta \mathcal{L}$ 와 비 보존력에 대한 외부 일의 변분 δW_{nc} 을 이용해 확장된 해밀턴의 원리 (extended Hamilton's principle)에 적용하여 계산하면 다음과 같은 $x \in I \setminus \{x_0\}$ 에 대한 수직 진동을 하는 균열 신장 보의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho A v_{,tt} + c v_{,t} + E I v_{,xxxx} - N v_{,xx} = p \quad (25)$$

위의 식(25)는 $N_{,x} = 0$ 인 조건과 더불어 식(23)과 식(24)의 $C_1 \sim C_4$ 항으로부터 다음과 같은 균열 조건을 추가로 얻는다.

$$J[v](x_0) = J[v_{,xx}](x_0) \quad (26)$$

$$k_b J[v_{,x}](x_0) = E I v_{,xx}(x_0^-) \quad (27)$$

$$N J[v_{,x}](x_0) = E I J[v_{,xxx}](x_0) \quad (28)$$

또한, 보의 경계조건에 따라 다양한 조건을 예상할 수 있지만 양단 힌지의 경우 다음과 같은 조건을 추가로 정의할 수 있다.

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad (29)$$

$$v_{,xx}(0,t) = v_{,xx}(L,t) = 0 \quad (30)$$

만약 캔틸레버 보라면 식(29), 식(30)의 경계조건이 달라지고, 경계가 양단 고정인 경우는 처짐각과 곡률에 대한 경계조건 식(30)이 다음으로 바뀐다.

$$v_{,x}(0,t) = v_{,x}(L,t) = 0 \quad (31)$$

균열 위치에서 경계조건은 식(26)~식(28)과 같고, 뒀 함수로 표현되는 조건인 식(27)은 앞서 설명한 바와 같이 가상의 회전 스프링 강성 k_b 로 나타난다. 이 모델은 문헌[1]에서 표현된 유연도 함수로 설명될 수 있으며, 이들의 방정식 외에도 다양한 관계 함수를 문헌[3]에서 잘 정리해 두고 있다. 이 표현에 대해서 유연도 함수로 나타낼 때 다음과 같다⁴⁾.

$$k_b = \frac{E I}{h} \frac{1}{C(\beta)} \quad (32)$$

여기서, $\beta = a/h$ 이며, 균열 깊이(crack depth) a 에 대한 사각형 단면의 높이 h 에 관한 비이다. $C(\beta)$ 는 무차원의 균열 유연도 함수이며, 단방향 열린 균열의 경우 다음과 같은 함수로 정의할 수 있다^{3),4)}.

$$C(\beta) = 6\pi\beta^2(0.6384 - 1.035\beta + 3.7201\beta^2 - 5.1773\beta^3 + 7.553\beta^4 - 7.332\beta^5 + 2.4909\beta^6) \quad (33)$$

따라서, 식(27)을 유연도 함수로 표현하면 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$J[v_{,x}](x_0) = h C(\beta) v_{,xx}(x_0^-) \quad (34)$$

무차원 매개변수를 이용하여 식을 간단하게 정리하도록 하며, 사용되는 표기의 단순화를 위해 같은 기호로 변수를 치환한다.

$$x \leftarrow \frac{x}{L}, \quad x_0 \leftarrow \frac{x_0}{L}, \quad v \leftarrow \frac{v}{r}, \quad p \leftarrow \frac{pL^4}{EIr}, \quad (34)$$

$$t \leftarrow \omega_0 t, \quad c \leftarrow \frac{c}{\rho A \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

여기서, r 은 단면 이차 반경이다. 식(34)의 매개변수를 이용해서 식(25)~식(30)을 정리하면 다음과 같은 $x \in (0,1) \setminus x_0, \quad t \geq 0$ 로 정의된 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$v_{,tt} + c v_{,t} + v_{,xxxx} - N v_{,xx} = p \quad (35)$$

$$J[v](x_0) = J[v_{,xx}](x_0) = J[v_{,xxx}](x_0) = 0 \quad (36)$$

$$J[v_{,x}](x_0) = \theta v_{,xx}(x_0^-) \quad (37)$$

$$N J[v_{,x}](x_0) = 0 \quad (38)$$

$$v(0,t) = v(1,t) = v_{,xx}(0,t) = v_{,xx}(1,t) = 0 \quad (39)$$

여기서,

$$N = \frac{1}{2} \int_0^1 v_{,x}^2 dx, \quad \theta = \frac{h}{L} C(\beta) \quad (40)$$

따라서, 식(35)~식(40)을 이용해서 균열을 가진 신장 보의 동적 운동을 관찰할 수 있다.

4. 고유치와 고유함수

본 절에서는 균열 신장 보 방정식의 고유치 문제를 다루도록 한다. 식(35)에서 선형 부분의 고유치와 이에 상응하는 고유함수는 각각 균열 보의 고유진동수와 모드 형상(mode shape) 함수이며, 균열 위치에서 패치 조건(patching condition)을 이용해 구간별로 조합된 닫힌 해를 구성한다. 이 기법은 Lin et al.(2002)의 문헌²⁾에서 다중 균열 보의 진동을 다루었고, 다음과 같다.

우선, k 개의 균열을 가진 신장 보의 선형 부분에 대한 고유치 문제를 고려하자.

$$w_i'''' = \lambda^4 w_i, \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \tag{41}$$

$$, \quad i = 1, 2, \dots, k+1$$

양단 힌지 경계조건을 고려하면 식(39)는

$$w_1(0) = w_1'' = w_{k+1}(0) = w_{k+1}'' = 0 \tag{42}$$

와 같다. 균열 위치 x_i 에서 식(36)과 식(37)의 변위와 그 미분값에 대한 적합성(compatibility)을 고려한 패치 조건을 정의하면,

$$w_i(x_i) = w_{i+1}(x_i) \tag{43}$$

$$w_i''(x_i) = w_{i+1}''(x_i)$$

$$w_i'''(x_i) = w_{i+1}'''(x_i)$$

$$w_{i+1}'(x_i) - w_i'(x_i) = \theta_i w_{i+1}''(x_i)$$

이다. 여기서, θ_i 는 i 번째 균열의 무차원 유연도 값이다. 구간 (x_{i-1}, x_i) 에서 식(41)의 일반해는

$$w_i^\lambda(x) = A_i \sin \lambda \hat{x} + B_i \cos \lambda \hat{x} \tag{44}$$

$$+ C_i \sinh \lambda \hat{x} + D_i \cosh \lambda \hat{x}$$

이다. 여기서, $\hat{x} = x - x_{i-1}$ 라 한다. 균열 사이의 구간을 $l_i = x_{i+1} - x_i$ 로 정의하고, 식(42)의 계수를 벡터 $\vec{A}_i = [A_i, B_i, C_i, D_i]^T$ 로 나타내면, $x = x_i$ 에서의 패치 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$A_i \vec{A}_{i+1} = P_i \vec{A}_i \quad \text{or} \quad \vec{A}_{i+1} = \Lambda_i^{-1} P_i \vec{A}_i \tag{45}$$

여기서, Λ_i, P_i 는 식(43), 식(44)에서 구성된다.

식(45)는 재귀 순서(recursive sequence)에 따라 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\vec{A}_{i+1} = T \vec{A}_1, \quad T = T_i T_{i-1} \dots T_1 \tag{46}$$

경계조건으로 정의된 행렬 B 에 대해 $R = BT$ 라 두고, R 의 i 번째 열벡터를 \vec{R}_i 라 두면, 식(42)의 조건에서 $B_i = D_1 = 0, \vec{0} = B \vec{A}_{k+1}$ 이며, B 는 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} S_{k+1} & C_{k+1} & SH_{k+1} & CH_{k+1} \\ -S_{k+1} & -C_{k+1} & SH_{k+1} & CH_{k+1} \end{bmatrix} \tag{47}$$

여기서, $S_i = \sin \lambda l_i, C_i = \cos \lambda l_i, SH_i = \sinh \lambda l_i, CH_i = \cosh \lambda l_i$ 이다. 따라서 $B \vec{A}_{k+1} = \vec{0}$ 는

$$(BT) \vec{A}_1 = R [A_1 \ 0 \ C_1 \ 0]^T = \vec{0} \tag{48}$$

와 같은 조건을 가지게 된다. 여기서, 식(48)이 자명하지 않은 해(non-trivial solution)를 가질 조건은 2×2 행렬 $[\vec{R}_1; \vec{R}_3]$ 의 행렬식(determinant)이 반드시 0이어야만 한다. 이때, 행렬식은 무수히 많은 $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ 을 만족하는 양의 고유치 $\lambda_j, j = 1, 2, \dots$ 를 제공하며, 동시에 다음의 관계를 만족한다.

$$A_1 \vec{R}_1 = -C_1 \vec{R}_3 \tag{49}$$

따라서 모든 계수 \vec{A}_{i+1} 은 $\vec{A}_{i+1} = T_i \vec{A}_i$ 의 관계로부터 구할 수 있다.

고유치 λ_j 에 상응하는 고유함수는 다음과 같다.

$$\phi_j = \phi(\lambda_j, x) \tag{50}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \{H(\hat{x}) - H(\hat{x})\} w_i^{\lambda_j}(x)$$

따라서, ϕ_j 는 균열을 가지는 신장 보의 지배방정식의 고유 모드 함수로 이용되며, 여기서 $H(x)$ 는 헤비사이드 함수(Heaviside function)이다.

5. 균열을 갖는 신장 보의 지배방정식

본 장에서는 3장의 식(35)-식(40)을 $x \in (0,1) \setminus x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ 인 다중 균열의 신장 보인 $x_i < -x_0$ 로 치환한 방정식을 고려하고, 모드 형상인 식(50)을 이용한 변위 v 와 외력 p 를 다음과 같이 정의한다.

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(t) \phi_j(x) \tag{51}$$

$$p(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \phi_j(x) \tag{52}$$

식(51)-식(52)을 식(35)를 다중 균열에 대한 신장 보의 형태로 치환한 방정식에 대입하고, 모드 형상 함수인 정규 직교 기저(normalized orthogonal basis) ϕ_n 을 이용해 내적을 취하면 지배방정식을 얻을 수 있다.

식을 편리하게 표기하기 위해서 식(50)의 균열 구간 함수 $w_i^{\lambda_j}(x)$ 와 이 함수의 미분 $w_{i,x}^{\lambda_j}(x)$ 및 $w_{i,xx}^{\lambda_j}(x)$ 를 벡터로 나타내면 다음과 같다.

$$w_i^{\lambda_j}(x) = \vec{A}_i^j \cdot \vec{b}_i^j \tag{53}$$

$$w_{i,x}^{\lambda_j}(x) = \lambda_j \vec{A}_i^j \cdot \vec{b}_{i1}^j \tag{54}$$

$$w_{i,xx}^{\lambda_j}(x) = \lambda_j^2 \vec{A}_i^j \cdot \vec{b}_{i2}^j \tag{55}$$

1차 고유 모드에 관한 지배방정식은 식(51)과 식(52)의 $j = 1$ 인 경우를 이용해 방정식을 구할 수 있으며, 내적 결과의 표현을 간단히 하기 위해 $Y \leftarrow Y_1 q \leftarrow q_1$, $\vec{A}_i \leftarrow \vec{A}_i^1$, $\vec{b}_i \leftarrow \vec{b}_i^1$ 로 두면 다음과 같다.

$$\ddot{Y} + c\dot{Y} + \lambda^4 Y - \frac{N}{\Phi}(A + A^\theta) = p \tag{56}$$

여기서, λ 와 Φ 는 첫 번째 고유치인 고유진동수와 직교 기저의 내적이고, N 은 처짐에 의해 발생한 축력이며, A 와 A^θ 는 각각

$$A = Y\lambda^2 \sum_{i=1}^{k+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\vec{A}_i \cdot \vec{b}_{i2})(\vec{A}_i \cdot \vec{b}_i) dx \tag{57}$$

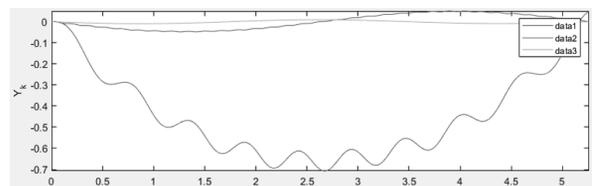
$$A^\theta = Y\lambda^2 \sum_{i=1}^k \theta_i (\vec{A}_i \cdot \vec{b}_{i2}(x_i)) (\vec{A}_i \cdot \vec{b}_i(x_i)) \tag{58}$$

이다. 식(56)의 경우 축력 N 이 무시된다면 이 방정식은 선형이다. 즉, 균열 신장 보의 모델이 미소 변형일 경우는 이 항의 영향이 고려되지 않으며, 균열을 가진 고전적인 오일러-베르누이 보가 되고, 고려하면 대변형(large deflection)을 고려한 비선형 시스템으로 균열을 가진 신장 보가 된다. 또한 n 개의 고유 기저를 이용하면 각 기저에 상응하는 비선형 연립 미분 방정식을 얻을 수 있으며 다양한 비선형 방정식의 해법을 통해서 식(51)의 Y_n 을 구할 수 있다.

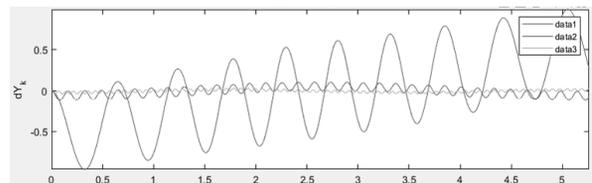
유도된 지배방정식을 이용해 이동하중을 받는 단순 지지 보를 해석하도록 한다. 대상 예제는 탄성계수 $E = 2.0 \times 10^{11} N/m^2$, 밀도 $\rho = 7800 kg/m^3$, 보의 길이 $L = 20m$, 단면은 사각형의 $b = h = 0.2m$ 이며, $0.4L$ 과 $0.7L$ 위치에 균열이 $0.5h$ 와 $0.4h$ 의 깊이로 발생하였고, $P = 1.0kN$ 의 하중이 $10km/h$ 로 이동하는 조건이다. 이동하중은 다음과 같이 표현된다.

$$P\delta(x - x_p(t)) \tag{59}$$

위 식에서 나타나는 $\delta(x)$ 는 디랙 델타 함수(Dirac delta function)이고 $x_p(t)$ 는 이동하중의 시간 이력을 표현한 것이다. 진동해석의 결과는 <Fig. 1>에서 보는 바와 같고, 세 개의 고유 모드에 대한 해석 결과이며 변위 및 속도 응답이다.



(a) Displacement



(b) Velocity

<Fig. 1> Responses of an extensible beam example with two cracks

6. 결론

다중 균열을 갖는 신장 보의 균열에 대한 변형 에너지와 수직 진동에 대한 운동 방정식의 유도 과정을 본 논문의 주제로 다루었다. 축 방향 및 휨 변형 에너지를 함께 고려해야만 하는 신장 보에서 균열 에너지 함수에 대한 수학적 타당성을 얻기 위해 위해서 문헌[4]에서 접근한 방식과 같이 균열 에너지를 유도하고 정의하였다. 확장된 해밀턴 원리로 균열 에너지를 고려한 신장 보의 운동을 지배하는 정규화된 방정식을 유도하였다. 시스템의 닫힌-해를 얻기 위해, 선형 부분의 고유치 문제를 문헌[2]에서 제안된 균열 패치 조건을 적용하여 특성방정식을 구하고, 고유치와 고유함수를 구하였다. 고유함수를 이용해 균열을 가진 신장 보의 지배방정식을 유도하였으며, 간단한 예제를 통해 이동하중을 받는 보의 수직 진동의 결과를 얻을 수 있었다.

이 연구를 통해서 균열을 가진 신장 보의 비선형 시스템의 닫힌 형태의 정해와 진동을 예측할 수 있으며, 제시된 수학적 모델을 이용해 균열이 존재하는 비선형 보 시스템의 손상 추정 및 탐지 연구를 포함한 응용 연구에 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

감사의 글

이 논문은 2023년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(RS-2023-00248809)

References

1. Ostachowicz, W.M. & Krawczuk, M., "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.150, No.2, pp.191-201, 1991.
2. Lin, H.P., Chang, S. & Wu, J., "Beam vibrations with an arbitrary number of cracks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.258, pp.987-999, 2002.
3. Caddemi, S. & Cali'ò, I., "Exact closed-form solution for the vibration modes of the

- Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.327, No.3, pp.473-489, 2009.
4. Caddemi, S. & Morassi, A., "Multi-cracked Euler-Bernoulli beams: Mathematical modeling and exact solutions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.50, No.6, pp.944-956, 2013.
DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.11.018>
5. Gutman, S., Ha, J.H. & Shon, S.D., "Equations of motion for cracked beams and shallow arches," *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Vol.27, No.2, pp.405-432, 2022.
DOI:<https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11197>
6. Gutman, S., Ha, J.H. & Shon, S.D., "Variational setting for cracked beams and shallow arches," *Archive of Applied Mechanics*, Vol.92, pp.2225-2236, 2022.
DOI:<https://doi.org/10.1007/s00419-022-02174-6>
7. Gutman, S., Ha, J.H. & Shon, S.D., "Dynamic behavior of cracked beams and shallow arches," *Journal of the Korean Mathematical Society*, Vol. 59, No.5, pp.869-890, 2022.
DOI:<https://doi.org/10.4134/JKMS.j210650>
8. Woinowsky-Krieger, S., "The effect of an axial force on the vibration of hinged bars," *Journal of applied Mechanics*, Vol.17, pp.35-36, 1950.
9. Ball, J.M., "Initial-boundary value problems for an extensible beam," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.42, No.1, pp.61-90, 1973.
DOI:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X73901212?via%3Dihub>
10. Shon, S.D., Ha, J.H. & Lee, S.J., "Dynamic model and governing equations of a shallow arches with moving boundary", *Journal of Korean Association for Spatial Structures*, Vol.22, No.2 pp.57~64, 2022.
DOI:<https://doi.org/10.9712/KASS.2022.22.1.57>

- Received : February 9, 2024
- Revised : February 22, 2024
- Accepted : February 26, 2024