East Asian Math. J.
Vol. 40 (2024), No. 2, pp. 127-148
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2024.011

학교수학과 대학수학 교과서에 나타난 최대·최소와 극대·극소의 분석1)

Anaysis of the max·min and local max·local min in the school mathematics and department mathematics textbook

오 혜 영

ABSTRACT. Maximum and minimum have a historical background in mathematics and occupy an important part of the differential unit in school mathematics. As the curriculum is revised, there are changes and problems in the way definition introduced.
Therefore, this study analyzes the changes in the method of introducing maximum and minimum definitions following the reorganization of the 2007 and 2009 revised mathematics curriculum, and analyzes the differences in maximum and minimum definition methods compared to the nine mathematics Ⅱ textbooks in the 2015 revised mathematics curriculum and three real analysis. In addition, methods to improve the terms used in relation to the maximum and minimum values are presented.

Ⅰ. 서론

미적분학의 중요한 활용 중에는 최적화 문제가 있는데 이런 문제는 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제로 환원된다(Stewart, 2011). 실용적인 많은 문제는 비용을 최소화하거나 넓이를 최대화해서 최선의 결과를 찾기를 요구한다. 함수의 최대·최솟값을 찾는 문제는 미분법의 발견을 유도하고, 이것은 수학사에서

Received January 26, 2024; Accepted February, 26 2024.
1) This work was supported by the Incheon University Research Grant in 2023.
2010 Mathematics Subject Classification: 97I10
Key Words: max·min, loca-max·local-min, real analysis, school mathematics, mathematical term

잘 알려진 사실이며 수학의 위대한 순간이다.

17세기 이전에는 미분법에 관한 의미있는 공헌을 찾아볼 수 없다. 진정한 미분법을 예견할 수 있는 최초의 내용은 페르마가 8,9년 뒤에야 발표했지만 1629년에 설명한 발상에 나타난다(Eves, 1995). 페르마의 설명에서 나타난 논리는 미비한 점이 많지만 그의 방법은 다음과 같이 놓는 것과 동치임을 알 수 있다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

즉, $f(x)$의 미분계수를 0으로 놓는 것과 동치이다. 이것은 함수 $f(x)$의 통상적인 최대･최솟값을 찾는 전통적인 방법이며, 학교수학 교과서에서 종종 이 방법을 페르마의 방법이라 인용하고 있다. 이 방법은 (극한과 도함수가 발견되기 전에) 미분학의 발견 과정에서 그가 뉴턴의 선구자임을 보여 주고, 최대･최솟값과 함수의 극값이 관련되어 있음을 시사한다. 최대･최솟값 문제는 페르마의 연구에 힘입어 미분과정이 발전했고 최대･최솟값 문제에 적용하는 수학사적인 배경을 가졌다. 이와 같은 미분의 중요성이 반영되어 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학Ⅱ에서 다항함수의 미분을 배우게 되었다.

계승혁 외(2010)는 극대･극소 단원에서 대학에서 배운 내용과 고등학교에서 배운 내용이 서로 달라서 학생들이 고민한다고 서술한다. 또한 박세희(1983)는 제4차 교과서를 분석하여 극대･극소를 정의하는데 있어서의 문제점을 살펴보고 최대･최소와 관련하여 어떤 오류를 범하고 있는지 분석했다. 이동근 외(2018)는 극대･ 극소의 정의에 관한 고등학교 수학 교사의 인식을 조사했고 양성현(2019)은 극대 ･극소의 정의에 관한 고등학교 학생들의 인식을 조사했다. 양성현(2019)은 2007 개정 수학과 교육과정에서 2009 개정 수학과 교육과정으로 넘어오는 시점에 많은 교과서에서 개념 도입 방식에 변화가 있다고 서술했으며, 극대･극소의 정의에 대해서 고등학생뿐만 아니라 교사까지도 극대･극소 정의를 정확하게 인식하지 못함을 보여 주었다.

이처럼 극대･극소는 학교수학에서 미분 단원의 중요한 부분을 차지하고 교육과정이 개정됨에 따라 정의 도입 방식의 변화와 문제점이 존재하여 2007, 2009 개정 수학과 교육과정에서 극대･극소의 정의를 분석한 연구가 존재한다. 그러나 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서 분석 연구와 학교수학과 학문수학 사이의 연계성을 분석한 연구는 아직 부족한 상황이다.

이에 본 연구에서 2007과 2009 개정 수학과 교육과정으로 개편됨에 따라 교과서에서 도입한 극대･극소 정의 방식의 변화와 2015 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 교과서 9종과 해석학 3종을 비교할 때 나타나는 극대･극소 정의 방법의 차이를 분석한다. 또한, 최대･최솟값과 관련하여 사용하는 용어의 개선 방안을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 서술 방식에 대한 선행연구

계승혁 외(2010)는 극대·극소 개념을 함수의 증가·감소를 이용하여 설명할 때 설명하는 방식에 문제점이 있다고 서술했다. 계승혁 외(2010)는 수학Ⅱ 영역에서 평균값의 정리를 이용하면 명확히 설명할 수 있지만, 미적분과 통계 기본 영역에서는 평균값의 정리를 사용하지 않으므로 증가 상태나 감소 상태라는 개념을 도입하여 함수의 증감을 설명한다고 서술했는데, 이 과정에 문제를 나타내는 교과서가 있음을 서술했다. 7차 고등학교 교과서에서 2종의 교과서를 제외하고 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이라는 가정을 하지 않고 극댓값을 정의하는데, 이것으로 상수함수와 불연속 함수에 극대·극소 정의를 적용할 때는 정의에 문제가 있음을 밝히고 있다. 또한 최대·최소와 연계했을 때 발생하는 불완전함을 서술했다.

이동근 외(2018)는 극대와 극소 개념을 중심으로 상수함수와 불연속함수에서의 극값 판정과 관련된 검사 도구를 6문항 개발하여 137명의 교사들에게 제시하여 극대와 극소의 정의에 관한 교사의 인식을 조사하였다. 6문항의 극대·극소로 모두 정확하게 판단한 교사는 설문에 응답한 137명 교사 중 45명 (32.85%)이라는 낮은 정답률을 나타냈다.

양성현(2019)은 이동근 외(2018)가 개발하여 교사를 대상으로 적용했던 검사 도구를 동일하게 334명의 고등학교 3학년 학생들에게 적용하였으며, 6문항에 대한 학생의 답지 반응률을 교사 답지 반응률과 비교하면, 6문항 모두 정답지 반응률이 교사가 높게 나타났으나 학생의 오답지 반응률이 교사의 오답지 반응률과 유사한 패턴으로 나타난다고 서술했다. 결과를 통하여 극대·극소에 대한 교사의 오개념이 학생들에게 상당한 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있다고 분석했다.

심상길 외(2009)는 대학의 이공계열 학생들에게 극값의 정의, 극값을 찾는 문항으로 구성된 설문조사를 했으며, 많은 학생들이 특수한 경우(미분 불가능 함수, 상수함수)에서 극값을 갖는다는 사실을 알지 못함을 제시했다. 그리하여 다양한 예를 통해서 이공계열 학생들의 전공학습에 도움을 주어야 한다고 제안했다.

2. 수학용어

박교식·임재훈(2005)은 어떤 용어가 수학적 실재물을 나타낼 때 그 용어를 수학용어라고 하였고, 수학용어를 다시 일상 기반용어와 순수용어로 분류하였다.

박학순(2006)은 수학적 개념 표현 관점에서의 용어, 문제 해결과 의사 소통을 위한 용어 지도, 정의적 측면에서 용어 지도와 같은 관점에서 용어를 정리했다. 하나의 수학적 개념에 대해 정의를 내리고, 또 그 정의를 축약하거나 대표할 수 있는 언어적 표현으로 용어 및 상징적 표현인 기호가 사용된다고 서술한다.

수학적 용어는 단순히 개념을 표현하기 위해 만들어진 상징적인 단어가 아니다. 정의를 축약해 놓은 용어도 있고 그 개념에 대한 이미지를 내포하고 있는 용어도 있다. 그러므로 용어의 의미를 파악하는 것 자체로도 개념을 정립하는 하나의 방법이 될 수 있고, 그 용어가 개념을 적절히 표현하고 있는지 고찰해 볼 필요가 있다. 문제 해결과 의사 소통을 위한 용어 지도 관점에서 수학용어는 수학 문제 해결 상황에서 문제 정보에 표상을 창출해 내는데 큰 영향을 주고 의사 소통을 위한 관점에서 학생들은 수학적 언어 및 용어, 기호 체계, 구조를 사용하여 아이디어와 관계성을 이해하고 표현하는 등의 의사 소통을 한다(박학순, 2006).

한대희(1998)는 수학용어의 성격을 일상용어와 전문용어, 의미성과 규약성, 일관성, 이름과 의미, 개념과 개념 이미지, 번역과 qwerty 효과의 관점에서 고찰했으며, 수학용어의 성격, 즉 특히 용어의 의미성과 일관성과 관련해서 미분법 단원에서 사용하는 용어에 대한 문제점을 제시했다.

미분이란 용어는 글자 자체로 잘게 나눈다는 의미를 가지고 있지만 미분계수에서 잘게 나눈다는 것과 계수 사이에는 직접적인 연관성을 찾기 어렵다. 또한 미분이라는 용어의 의미성에 집착하면 미분 단원의 여러 개념의 수학적 의미와는 다른 의미가 연관하게 된다. 일관성 측면에서 미분계수는 수학적 용어로서의 계수의 의미를 찾기 힘들다. 미분계수의 정의는 평균변화율에서 순간변화율로 진행하는 것에 초점을 맞추고 있는데 미분계수가 어떤 의미를 지니는지에 대해서는 알 수 없어서 미분계수를 계수라는 용어에 관심을 두고 생각하면 일관성이 없다. 그리고 미분계수, 미분한다, 미분가능, 미분법은 모두 미분이라는 용어와 관련되어 있는데 도함수의 등장으로 일관성을 저해한다(한대희, 1998).

이같이 수학 교수·학습에서 수학용어는 학교수학에서 개념 이해와 문제 해결 및 의사 소통에 중요한 역할을 한다(최주연, 2011).

Ⅲ. 본론

1. 수학과 교육과정에 따른 교과서 분석

교과서는 교사들이 수업을 계획하고 실천하기 위해서 가장 많이 사용하는 자료이며, 교육 현장에서 실질적으로 활용되는 주요한 교수·학습 매체로써 교육과정이 잘 반영되도록 설계·제작된 자료 중의 하나이다. 교과서는 교사가 학생들에

게 현재의 교육과정을 교수·학습 상황에서 실질적으로 잘 적용할 수 있도록 안내하는 나침반 역할을 할 수 있다. 그러나 교과서마다 설명하는 방식에 차이가 있고 교과서에 따라서 정의하는데 문제를 갖고 있어서 교사와 학생들은 혼란에 직면하게 된다.

수학 분야에서 같은 수학 개념에 대해서 다른 정의를 사용하는 것은 이상한 일이 아니다. 그러나 정의가 정확하지 않고 앞뒤가 맞지 않을 때 이런 정의에 대해서 수학적으로 부조화적이고 불일치하는 결과를 나타낸다. 대학에서 해석학이나 미적분을 배우는 학생들은 몇몇 단계에서 고등학교에서 배운 내용과 대학에서 배우는 내용이 서로 달라서 당황하는데 그 대표적인 부분이 극대·극소 정의이다.

학교수학의 극대·극소 정의 방식은 2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서 차이를 보이고, 학문수학과도 차이가 있다. 이에 이 절에서 2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서 도입한 극대·극소 정의 방식의 변화를 살펴보고, 2015 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 정의를 학문수학과 비교하여 분석한다. 2022 개정 수학과 교육과정의 교과서는 출판되기 이전이므로 이에 대한 분석은 차후의 연구로 남긴다.

가. 2007, 2009 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 정의 도입 방식의 변화

2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서 극대·극소를 정의할 때 증가·감소상태 용어를 사용하거나 근방의 성질을 이용, $x=a$의 좌우에서 함수의 증가·감소를 이용하고, 연속함수로 제한하거나 제한하지 않는다. 2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서 극대·극소 정의를 도입할 때 방식에 차이를 보이므로 이 절에서 2007과 2009 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 개념 도입 방식 변화를 서술하고자 한다.

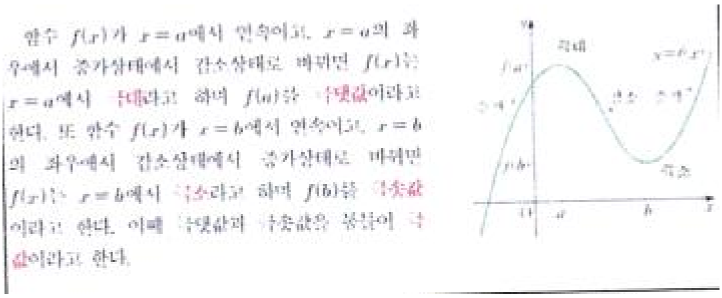
1) 2007 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 정의 도입 방식

2007 개정 수학과 교육과정 교과서에서는 극대·극소를 증가·감소상태 용어를 사용하거나 근방의 성질을 이용하여 정의한다. 양성현(2019)은 이것을 표1에 나타냈다.

교육과정	교과서 명칭	정의방식	종수
2007 개정 수학과 교육과정	미적분과 통계기본	연속함수제한, 증감상태용어사용	12
		연속함수제한안함, 근방성질사용	1
	수학Ⅱ	연속함수제한, 증감상태용어사용	9
		연속함수제한안함, 근방성질사용	2
2009 개정 수학과 교육과정	미적분 Ⅰ	연속함수제한, 함수의증감이용	1
		연속함수제한안함, 근방성질사용	8

[표1] 교육과정에 따른 극대·극소 정의 방식

2007 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 2종을 제외한 모든 교과서는 증가·감소 상태 용어를 이용하여 함수의 증감을 설명하고 극값을 정의하고 있다. 그림1은 최용준 외(2010)를 포함한 2007 개정 수학과 교육과정 대다수 수학Ⅱ 교과서에 나타난 극값의 정의인데, 증가·감소 상태 용어를 이용하고 f가 $x=a$에서 연속임을 가정하고 있다.



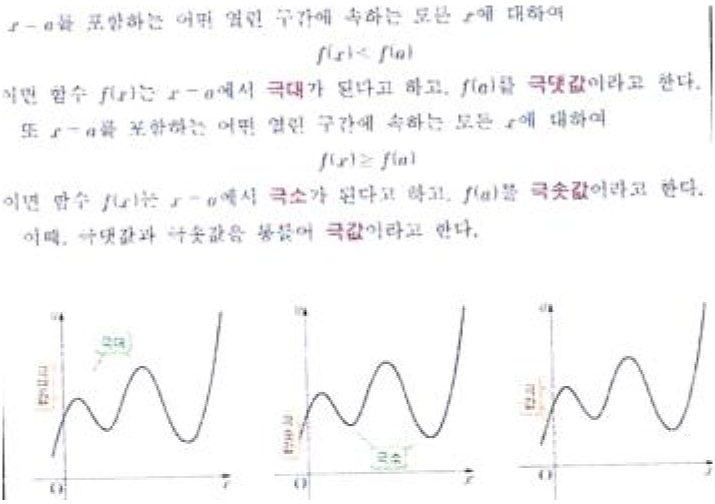
[그림1] 2007 개정 수학과 교육과정의 증감상태를 이용한 극값의 정의

계승혁 외(2010)는 2007 개정 수학과 교육과정 어떤 미적분과 통계 기본 교과서에서 증가·감소상태를 설명할 때 서술한 명제 “$f'(a)>0$ 이면 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)$는 증가함수이다.”는 $x=a$ 을 포함하는 어떤 구간을 잡더라도 증가·감소 함수가 되지 않음을 밝힌다. 그럼으로써 주어진 명제가 오류임을 보인다. 이것은 학생뿐아니라 교사들도 증가·감소 상태를 공부하면서 오해하는 내용이라고 서술한다. 게다가 2007 개정 수학과 교육과정에서 사용한 증감상태에 대해서 잘못된 설명을 서술하는 교과서가 있으므로 증가·감소 상태라는

용어는 도움이 되지 않는다고 했다. 또한 2007 개정 수학과 교육과정의 미적분과 통계 기본 12종, 수학Ⅱ 9종은 연속함수로 제한하고 증가·감소상태 용어를 사용하여 극대·극소를 정의했는데(표1) 이 방식은 함수가 연속이건 아니건 간에 문제점이 있다고 서술한다.

양성현(2019)은 연속함수로 제한해서 극대·극소의 정의를 다루면 상수함수와 불연속함수의 극값 판단 문제에서 교사뿐 아니라 학생들은 오류를 나타낸다고 했으며, 이동근 외(2018)는 극대·극소 관련 문제에서 교사들도 극값 정답률이 55%내외이고 정확하게 답한 문항이 32.85%라는 낮은 정답률을 나타낸다고 했다.

2007 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ 2종 이준열 외(2010)의 소수 교과서만 연속함수로 제한하지 않고 증감상태 대신에 근방의 성질을 이용하여 극대·극소를 정의한다(그림2). 그러나 교과서에서 사용한 예제는 연속함수로 제한함으로써 정의에 적합한 문제를 골고루 다루지 않음을 볼 수 있다.


$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \le f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고, $f(a)$를 극댓값이라고 한다.

또 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \ge f(a)$$

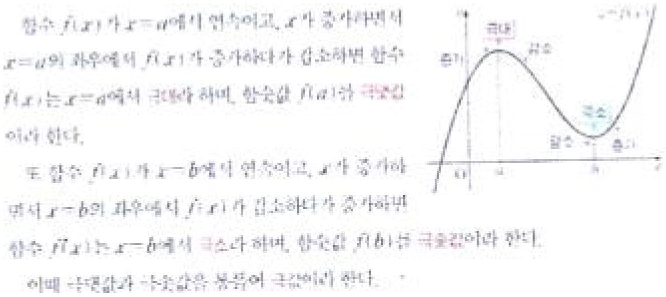
이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

이때, 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

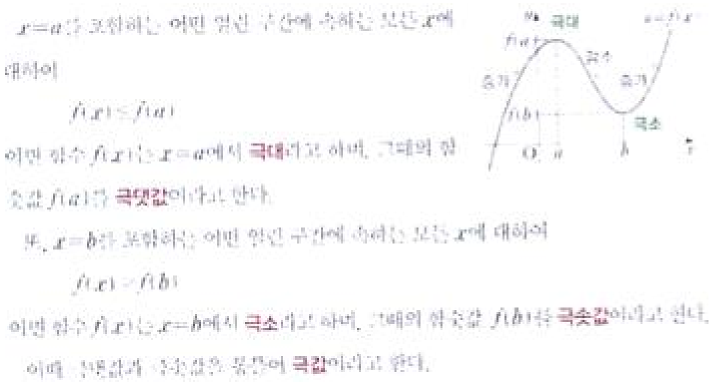
[그림2] 2007 개정 수학과 교육과정의 근방의 성질을 이용한 극값의 정의

2) 2009 개정 수학과 교육과정 교과서의 극대·극소 정의 도입 방식

2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서는 $x = a$의 좌우에서 함수의 증가·감소를 이용하여 극대·극소를 정의하거나 근방의 성질을 이용하여 극대·극소를 정의한다. 2009 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ에서는 혼란을 일으키는 증가·감소상태 용어를 사용한 교과서는 보이지 않았다.



[그림3] 2009 개정 수학과 교육과정 미적분1 함수의 증감을 이용한 극값의 정의



[그림4] 2009 개정 수학과 교육과정의 근방의 성질을 이용한 극대·극소 정의

그림3은 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서 증가·감소상태 용어를 사용하지 않고 $x = a$의 좌우에서 함수의 증가·감소를 이용하여 극대·극소를 정의한 그림이다. 그림4는 근방의 성질을 이용하여 극대·극소를 정의한 그림인데, 2009 개정 수학과 교육과정 미적분 8종의 대다수 교과서는 극대·극소 정의를 설명할 때 근방의 성질을 이용하여 열린 구간에서 최대·최솟값을 정의하는 최대·최소의 국소적 성질을 이용한다.

2007 개정 수학과 교육과정 교과서에서 증감상태와 근방의 성질로 극대·극소를 정의하다가 2009 개정 수학과 교육과정 교과서에서는 함수의 증가·감소와 근방의

성질로 극대·극소를 정의한다. 2007 개정 수학과 교육과정에서는 2종의 소수 수학Ⅱ 교과서만 근방 성질을 이용한 정의를 이용한 반면에, 2009 개정 수학과 교육과정에서는 대다수 교과서가 증감상태의 용어는 사용하지 않고 근방의 정의를 이용함으로써 용어의 혼란의 소지를 배제함을 볼 수 있다.

이같이 교육과정이 개정됨에 따라 정확한 정의 도입과 근방의 성질을 이용하면서 연속함수에서 일반함수로 확장하는 교과서의 수가 늘어나는 변화가 있음을 볼 수 있다. 그러나 극값 문제를 설명할 때 근방의 성질을 이용한 설명보다는 함수 증감과 도함수 부호 사이의 연관성을 이용하여 부연 설명하고 있고, 특수한 경우(미분 불가능 함수, 상수함수)의 함수에 대한 극값 판단 문제는 존재하지 않음을 볼 수 있다. 양성현(2019)은 연속함수에서 일반함수로 개념 도입 방식에 변화가 있으면 특수한 경우(상수함수, 불연속함수)의 예와 관련한 적절한 예제가 주어져야 한다고 서술한다.

나. 2015 개정 수학과 교육과정의 극대·극소 정의에 따른 교과서 분석

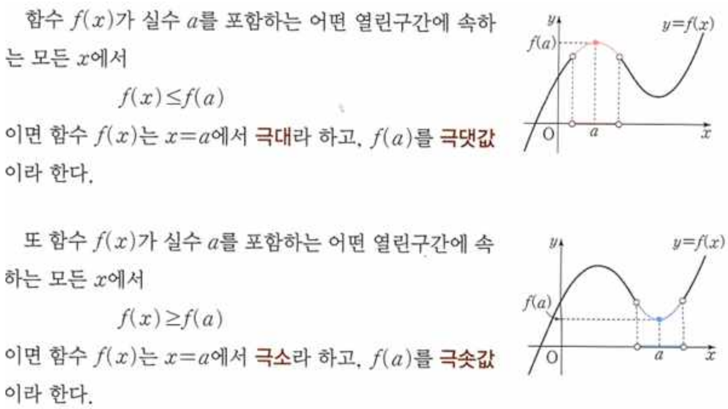
이 절에서는 2015 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ 9종에 나타난 극대·극소 정의 도입 방식의 교육과정 개정에 따른 교과서의 변화를 파악하고, 대학 해석학의 극대·극소 정의 방식과 비교하여 차이점에 대해서 분석하고자 한다. 2015 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ 교과서의 명칭은 다음과 같은 기호로 나타낸다.

기호	고등학교 교과서
M1	박교식 외 19인(2019)
M2	고성은 외 5인(2019)
M3	이준열 외 7인(2019)
M4	황선욱 외 8인(2019)
M5	김원경 외 14인(2019)
M6	권오남 외 14인(2019)
M7	홍성복 외 10인(2019)
M8	류희찬 외 9인(2019)
M9	배종숙 외 6인(2019)

1) 극대·극소 정의 도입 방식

류희찬 외(2019)를 비롯한 2015 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ 교과서 9종은 모두 그림5와 같이 극대·극소를 정의할 때 연속함수로 제한하지 않고 근방에서의 최대·최솟값 성질을 이용한다. 이것은 함수의 증감 상태 용어를 사용하지 않고 연속함수로 제한해서 함수의 증감을 이용하는 극대·극소 정의 방식에서 벗어남을

나타낸다. 즉, 열린 구간에서 최대·최솟값을 사용하는 최대·최소의 국소적 성질을 이용한다(그림5). 그러나 극대·극소를 설명할 때는 극대·극소 정의보다는 도함수 부호를 이용하여 함수 증감을 서술하고 이것을 함수의 극대·극소 판정에 이용하여 설명하고 있다.


함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서

$$f(x) \le f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라 한다.

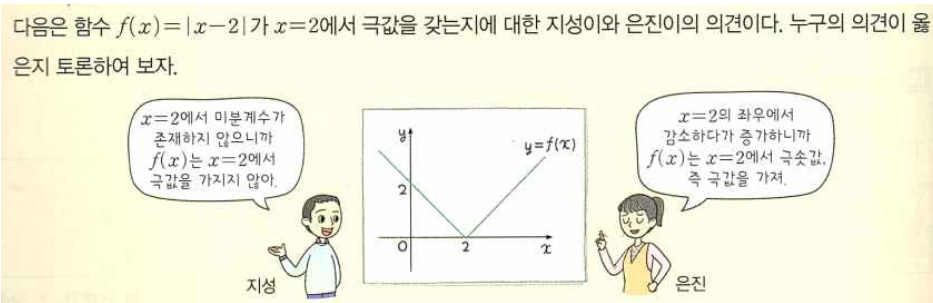
또 함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서

$$f(x) \ge f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라 한다.

[그림5] 2015 개정 수학과 교육과정의 극방의 성질을 이용한 극값의 정의

실제로 고등학교 교과서 M1-M5는 극대·극소 정의는 근방 개념을 이용하지만 개념 확인 문제는 없다. M6-M9는 개념 확인 문제는 있지만 근방에서의 개념으로 극대·극소를 설명하기보다는 함수 증감을 이용해서 극값 판정을 설명한다. 그림6은 극대·극소의 정의를 이용하지 않고 함수의 증감을 이용하여 극값 판정한 것의 예를 보여준다.



[그림6] 함수의 증감을 이용하여 극값 판정한 예

고등학교 교과서 M1,M2,M6에서 극대·극소의 정의를 근방의 개념을 이용하여 일관성있게 서술하지만 정의는 서술한 것에 그치고 극대·극소 정의의 확인은 함

수의 증감을 이용하여 극대·극소를 판정하고 있음을 볼 수 있다. 이것은 근방의 개념을 이용한 설명의 부족을 나타낸다.

박교식 외(2019) 4종의 교과서는 극대·극소 정의를 근방에서 최대·최소로 정의하는 개념을 확인하는 문제를 서술하지만 개념을 확인하는 문제는 없고, 도함수의 근을 구하고 도함수의 부호와 함수의 증감을 이용하는 극대·극소 판정법이 주를 이루었다.

이같이 2007, 2009, 2015 개정 수학과 교육과정으로 개편됨에 따라 혼란을 일으키는 용어를 배제한 정확한 정의를 도입하는 개념 방식의 변화를 가져온다. 또한 연속함수로 제한하던 극값의 정의가 2015 개정 수학과 교육과정 교과서에서 근방 성질을 이용하면서 전부 연속함수에서 일반함수로 확장하는 정의로 바뀌게 된다. 그러나 극값 문제를 설명할 때는 근방의 성질을 이용한 설명보다 함수 증감과 도함수 부호 사이의 연관성을 이용하여 부연 설명하고 있음을 볼 수 있으며, 특수한 경우(미분 불가능 함수, 상수함수)의 함수에 대한 극값 판단 문제는 보이지 않는다. 이것은 정의 도입 방식이 2007, 2009 개정 수학과 교육과정 교과서와 달라졌지만 정의만 달라졌을 뿐 2007, 2009 개정 수학과 교육과정 교과서의 설명 방식대로 함수의 증감을 이용한 극대·극소 판정법으로 설명하고 있다는 것을 나타낸다.

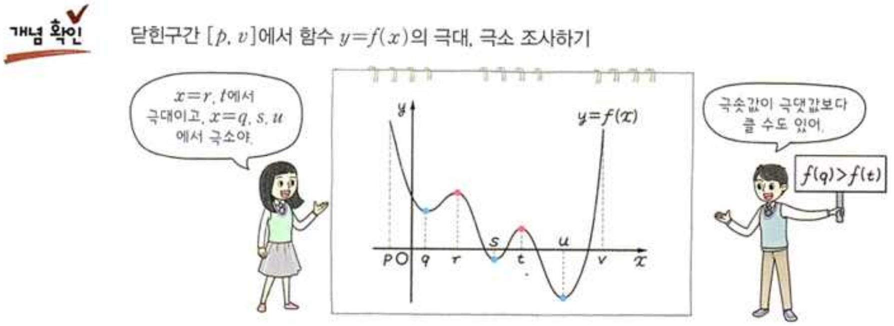
고등학교 교과서에서는 연속함수에서만 극값을 구하는 문제를 다루지만 해석학에서는 정의부터 연속이라는 언급없이 근방의 개념을 활용하여 모든 함수를 대상으로 한다(심상길외, 2009). 극값 문제를 설명할 때 함수 증감과 도함수 부호 사이의 연관성을 이용한 방법만으로는 해석학에서 다루는 일반함수의 극값 판단 문제에 오답이 생길 수 있는 점을 고려하여 근방의 개념을 활용한 적절한 문제의 추가가 필요하다.

2) 닫힌 구간 양 끝점에서의 극대·극소 판단

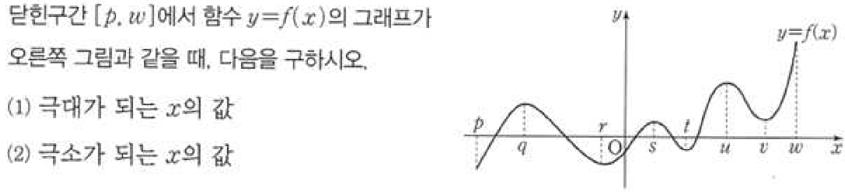
닫힌 구간 양 끝점에서 극대·극소를 판단할 때 2015 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ에서 함수의 증가·감소로만 판단하는데, 함수의 증가·감소로만 판단하게 되면 양 끝점에서는 증가만 하던가 감소만 해서 판단을 제대로 하지 못하는 문제가 생긴다. 양 끝점에서 발생하는 상황을 설명하며 극대·극소를 판단할 수 있는 방법을 설명해야 하는데 고등학교 교과서는 설명하지 않고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정 9종의 어떤 교과서도 닫힌 구간 양 끝점에서 극대·극소를 설명하지 않고 있다.

류희찬 외(2019) 3종의 교과서는 극대·극소 정의를 근방에서 최대·최소로 정의하는 개념을 확인하는 문제를 서술하지만 양 끝점에서 극값 판단을 하지 않고 있다. 그림7 문제는 양 끝점 $x=p$와 $x=v$에서 극대이지만 이를 다루지 않고 있

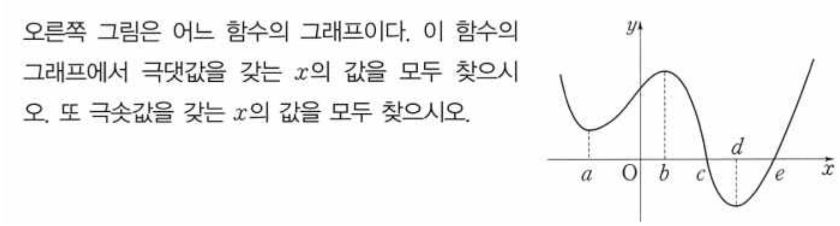
다. 닫힌 구간의 양 끝점은 극대·극소의 근방 개념 정의에 의하면 극값을 가지는데 이에 대한 설명은 배제하고 있다. 그림8 문제에서도 극대·극소가 되는 x의 값에 양 끝점이 빠져 있다. 그림9에서도 극값 구하기에서 양 끝점을 전부 배제하고 있다.



[그림7] 극값의 개념 확인 문제



[그림8] 닫힌 구간에서 극값을 갖는 x의 값 구하는 문제



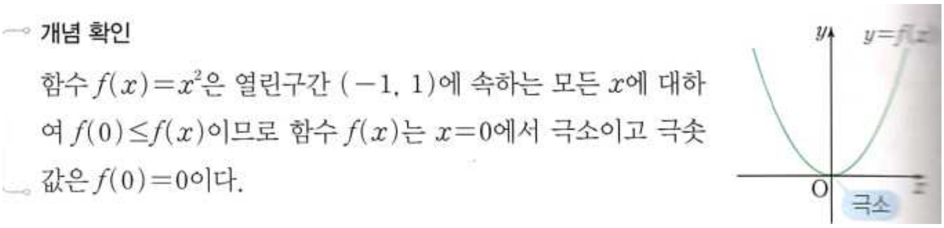
[그림9] 극값을 갖는 x의 값 구하기

고등학교 교과서에서 극대·극소 문제는 다항함수만을 다루고, 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 미분가능한 함수 $f(x)$의 $f'(a)=0$ 인 a를 실수 전체의 집합에서 구하고 도함수의 부호를 이용하여 극대·극소를 판정한다.

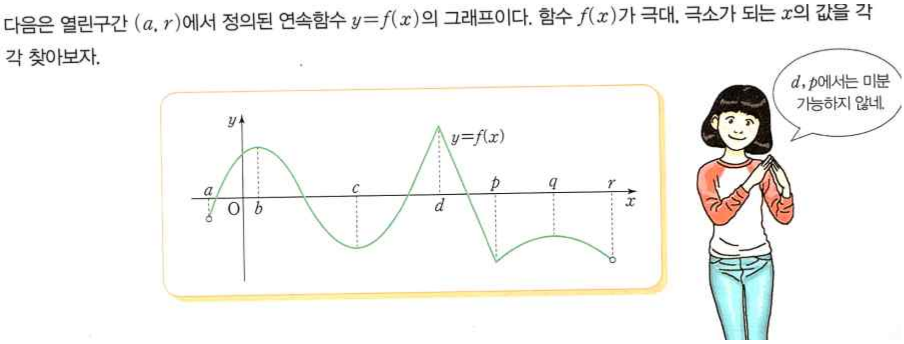
학교수학 교과서에서 사용하는 페르마 정리는 어떤 열린 구간의 내점에서만 성립하기 때문에 극값을 구할 때 내점만 다루는 것을 당연히 생각할 수 있다. 그리하여 닫힌 구간에서 함수의 극값을 다룬 문제는 $f'(a)=0$을 만족하는 구간의 내점 a값 이외에도 구간의 양 끝점에서도 극값 판단을 해야 하는데, 양 끝점은

도함수의 근이 아니므로 극값 판단에서 제외시킬 가능성이 있다.

수학II 교과서는 근방 개념의 부연 설명을 하는 문제에서 닫힌 구간인데도 양 끝점에서의 극값을 판단하지 않고 있다. 실수 전체의 집합을 정의역으로 하여 극값을 판단함으로써 극대·극소 정의를 살펴보게 하지만 닫힌 구간에서 개념을 확인하는 문제는 없다. 실제로 그림10은 정의 제시후 개념 문제 확인을 하고 있지만 닫힌 구간에서 극값 판정 문제는 제시하지 않고 있으며, 그림11은 열린 구간을 제시하여 양 끝점에서 극대·극소 판단을 하지 않고 내점에서만 극대·극소를 확인하고 있다.



[그림10] 극값 정의에 대한 개념 확인 문제



[그림11] 열린 구간에서 극값 찾는 문제

이처럼 모든 수학II 교과서는 닫힌 구간에서 극값 구하기와 닫힌 구간 양 끝점에서의 극값 판단 문제를 다루지 않고, 극값 문제풀 때 $f'(a)=0$의 근에서 도함수의 부호를 이용하여 함수의 증감으로 극대·극소를 판단하는 것을 강조하고 있다. 이런 전개 방식은 닫힌 구간의 문제가 주어진다 할지라도 $f(x)$의 $f'(a)=0$ 인 a를 실수 전체의 집합에서 구하고 도함수의 부호를 이용하여 극대·극소를 판정하려는 방법을 기억하여 적용하는 연습에 치중하여 양 끝점에서 극대·극소 판단을 빠뜨릴 수 있는 것이다. 그러므로 닫힌 구간에서 극값과 양 끝점에서 극값 판단 문제를 보완하여 극대·극소 정의를 완성시키는 노력이 필요하며, 이것은 극대·극소 개념에 대한 이해를 높이는 계기가 될 수 있다.

2. 해석학 교재와 고등학교 교과서와의 비교

중·고등학교 수준의 수학을 가르치기 위해서는 대학의 학부 수준에서 다루어지는 학문수학에 대한 이해가 필요하다. 예비 수학교사 교육을 위한 교수 설계와 관련하여 수학 지식의 내용 측면에 기반을 두고 학문수학과 학교수학 사이의 연계성을 고려할 필요성이 제기된다(Zazkis & Leikin, 2010).

이에 이 절에서 2015 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ 교과서 9종과 해석학 3종과 비교했을 때 나타나는 극대·극소 정의 방법의 차이를 분석하고자 한다. 대학 해석학 교재의 명칭은 다음과 같은 기호로 나타낸다.

기호	해석학 교재
A1	Stoll, M. (2015) Introduction to real analysis (second edition).
A2	Wade, W. R. (2009). An introduction to analysis (fourth edition).
A3	정동명·조승제, 실해석학 개론

Stoll에 나타난 극대·극소의 정의는 다음과 같은데, 이것은 2015년 개정 수학과 교육과정의 9종 수학Ⅱ에서 서술한 근방에서 최대·최솟값을 이용한 극대·극소 정의이다.

$E \subset R$이고 f는 정의역이 E 인 실숫값 함수라 하자. 함수 f는 점 $p \in E$에서 극대라는 것은 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 모든 $x \in E \cap N_\delta(p)$에서 $f(x) \leq f(p)$가 성립하는 경우이다. 마찬가지로 함수 f는 점 $q \in E$에서 극소라는 것은 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 모든 $x \in E \cap N_\delta(q)$에서 $f(x) \geq f(q)$가 성립하는 경우이다. 여기서 E는 열린 구간, 닫힌 구간 모두 가능하다.

해석학 A1, A2, A3에서 서술한 극대·극소 정의는 E가 열린 구간뿐만 아니라 닫힌 구간일 때도 성립한다. 그러나 고등학교 교과서 M1-M9에서 서술한 극대·극소 정의는 열린 구간일 때 성립하지만 닫힌 구간일 때는 성립하지 않고 있다. 그리하여 고등학교 교과서 M1-M9에서 p가 구간의 내점일 때는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대해서 교과서의 정의를 만족하므로 타당한 정의가 되지만, p가 닫힌 구간의 양 끝점일 때는 “어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여”를 만족하지 못하므로 고등학교 교과서의 정의로는 양 끝점 p에서 극값을 가지는 것을 확인하지 못하게 된다.

그러나 해석학 A1, A2, A3처럼 정의하게 되면 끝점 p에서 극값을 가지게 된

다. 즉, $E \cap N_\delta(p)$에 속한다는 것은 E에서 상대적으로 열린 구간에 속한다는 것을 의미하므로 닫힌 구간의 양 끝점 p에서 극값을 가지게 된다. 그러므로 해석학 A1, A2, A3에 있는 정의처럼 열린 구간을 상대적으로 열린 구간으로 서술하여 극대·극소 정의를 보완해야 할 필요가 있다. 고등학교 교과서의 현재 극대·극소 정의는 닫힌 구간 양 끝점에서의 극대·극소 정의를 포함하지 않으므로 양 끝점에서 정의를 따로 명시하는 것이 필요하다.

실제로 학교수학에서 연속의 정의를 내릴 때 닫힌 구간에서의 연속은 별도로 정의했다. 함수 $f(x)$를 그림12와 같이 양 끝점에서 극한을 명시하며 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속을 별도로 정의하고 있다(박교식 외, 2010).

특히, 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

❶ 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이다.

❷ $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$

[그림12] 닫힌 구간에서 연속의 정의

이같이 닫힌 구간에서 연속성을 정의하는 것과 마찬가지로 닫힌 구간에서 극대·극소의 정의를 별도로 설명하면 고등학교 교과서에서 배제된 닫힌 구간에서 극대·극소의 문제점을 보완할 수 있다. 즉, $[a,b]$구간의 끝점 a,b에서는 다음과 같이 변경하여 극대·극소를 정의할 때 양 끝점에서 상대적으로 열린 구간을 사용하는 것이 필요하다.

> 함수 $f(x)$가 적당한 δ가 존재하여 $N_\delta(b) \cap [a,b] = (b-\delta, b]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(b)$를 만족하는 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극대라고 한다. 함수 $f(x)$가 적당한 δ가 존재하여 $N_\delta(a) \cap [a,b] = [a, a+\delta)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \le f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 한다.

닫힌 구간의 양 끝점에서 정의할 때는 “어떤 열린 구간에 속하는” 이 아니라 “어떤 반열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여”를 이용해야 하기 때문에 해석학 A1, A2, A3 정의를 사용하지 않을 경우에는 닫힌 구간에 대해서 별도로 정의하는 것이 바람직하다.

해석학에서는 양 끝점에서 극대·극소를 확인하는 설명이 주어져서 닫힌 구간 양 끝점에서 극값 판단의 필요성을 인지하게 되는데, 학교수학에는 이런 설명이

나타나지 않아서 학생들은 양 끝점에서 극값 판단을 간과하기 쉽다. 해석학 그림 5.2는 내점뿐만 아니라 양 끝점에서 극대·극소를 확인하는 해석학 A1에 나타난 그림이다.

그림 5.2에 나타낸 함수 f는 a, p_2, p_4에서 극대이고, p_1, p_3, b에서 극소이다. 점 $(p_4, f(p_4))$는 최대이고, 점 $(p_1, f(p_1))$은 최소이다.

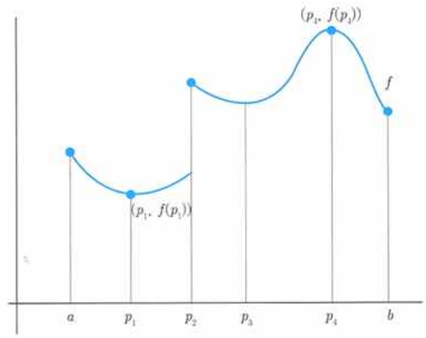


그림 5.2

2015 개정 교육과정 교과서에서는 $f'(x)=0$인 곳에서만 극값을 구하고 양 끝점에서는 극값을 구하지 않고 있다. 해석학에서는 그림5.2와 같이 그래프를 이용해서 양 끝점에서 극값 갖는 것을 명확히 표기한 반면에 고등학교 수학Ⅱ 어떤 교과서도 양 끝점에서 극값을 다루지 않고 $f'(x)=0$의 근에서만 극대·극소를 다루고 있다. 이것은 교사나 학생들이 내점에서만 극대·극소를 갖는다고 생각하고 양 끝점을 판단에서 제외시키는 오류를 범할 가능성이 있다는 것을 나타낸다.

해석학에서는 극대·극소뿐만 아니라 미분가능에 대해서도 닫힌 구간에서 별도로 정의하는데, Stoll(2015)은 미분가능을 다음과 같이 정의한다.

$I \subset R$가 구간이고 $f: I \to R$ 이며 $a \in I$ 라 하자. f가 a에서 미분할 수 있을 때 다음과 같이 정의한다.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a가 I 의 내점일 때 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a가 I 의 왼쪽 끝점일 때 다음이 성립하면 된다.

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b가 I 의 오른쪽 끝점일 때 다음이 성립하면 된다.

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

이같이 해석학에서는 닫힌 구간 오른쪽 끝점과 왼쪽 끝점에서는 함수의 우미분계수 및 좌미분계수를 정의한다. 반면에 이준열 외(2019)를 비롯한 2015년 개정 수학과 교육과정 수학Ⅱ에서는 $\Delta x \to 0$ 일 때 평균변화율의 극한값이 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이것은 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능함을 말하는데, 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수는 그 구간에서 미분가능함을 말한다. 닫힌 구간에서 미분가능을 표현하지 않고 있다. 정의역이 닫힌 구간일 때는 한쪽 도함수를 정의하는 것이 필요한데, 한쪽 도함수에 대한 정의없이 학교수학 교과서에서 우미분계수, 좌미분계수를 사용하고 있다.

실제로 M2, M3, M6, M7, M8, M9는 예제에서 우미분계수 좌미분계수를 사용하지만 이에 대한 정의는 없다. $|x|$의 $x=0$에서 우미분계수와 좌미분계수가 다름을 보임으로써 미분할 수 없다고 서술한다. 한쪽 미분계수에 대한 정의없이 사용하고 있는 것이다. 한쪽 미분계수에 대한 정의는 닫힌 구간 양 끝점에서 미분과 연결할 수 있으므로 한쪽 미분계수의 정의를 우선적으로 언급하는 것이 바람직하다.

게다가 고등학교 교과서 9종은 연속성을 설명할 때 닫힌 구간에서 연속성을 별도로 설명하고 있지만, 극대·극소, 미분의 경우는 별도로 설명하지 않고 있는데, 해석학과 마찬가지로 닫힌 구간 양 끝점에서 미분, 극대·극소를 언급하여 연속과 일관성을 유지하는 것이 필요하다.

해석학에서는 극한, 연속, 미분, 극대·극소에서 한쪽 극한과 한쪽 미분계수를 정의하고 닫힌 구간에서 이것들을 정의할 때 반닫힌 구간을 사용한다. 그러나 학교수학에서는 반닫힌(열린) 구간을 소개는 하지만 어디에 사용하는지를 알 수 없고 실제로 사용된 곳은 보이지 않는다. 닫힌 구간, 열린 구간, 반열린 구간, 반닫힌 구간은 닫힌 구간에서의 미분, 극대·극소를 정의할 때 사용할 수 있는 기호이다. 또한 반닫힌 구간이나 구간 $(-\infty, a], [a, \infty)$에서 함수의 연속을 정의한 것과 마찬가지로 반닫힌 구간에서 미분, 극대·극소를 정의하면 학생들도 반닫힌 구간, 반열린 구간의 효용성을 알게 된다. 그리하면 극대·극소 정의의 보완과 더불어 반닫힌 구간을 사용하는 기회를 가지므로 정의만 하고 사용하지 않을 때 보다 개념 확인에 효과적이라 할 수 있다. 또한 해석학에서는 이 기호를 사용하므로 학교수학과 학문수학간의 연계성 측면에서 기호의 사용은 바람직하다.

3. 최대·최소정리와 극값정리

수학 교수·학습에서 수학용어는 학생들의 개념 이해와 문제 해결 및 의사 소통에 중요한 역할을 한다. 정리의 명칭만 잘 정해도 명칭으로부터 정리의 내용을 쉽게 짐작할 수 있다.

한대희(1998)는 우리의 수학용어가 영어의 표현을 '글자 그대로' 옮겨 놓은 것은 문제점이 있다고 말한다. 영어권에서는 미분계수에 해당하는 differential coefficient를 더 이상 사용하지 않고 대신에 derivative를 사용하고 있는데, 미분계수에서 수학적 용어로서 계수의 의미는 찾기 힘들기 때문이라고 서술한다.

대학수학 원서에서는 미분계수 대신에 도함수를 사용하지만 고등학교 교과서, 대학수학 번역본에서는 미분계수와 도함수를 분리해서 사용하고 있다(허민, 2019). 원서에서처럼 대학수학 번역본과 고등학교 교과서에서도 적절한 현대 수학용어로 대체하여 학교수학과 학문수학을 일관성있게 연결하는 노력이 필요하다.

해석학에서는 미분계수를 도함수로 바꿔서 사용하는 것처럼 최대·최소 정리를 극값정리로 바꿔서 사용한다. 최대·최소 정리를 극값정리로 명명하는 것은 극값에 대한 용어를 이용해서 정리까지 일관성 있게 서술한 것이어서 학생들이 정리를 수월하게 파악할 수 있는 현대적 접근방식이다. 해석학과 학교수학의 수학용어를 일치시켜 현대 수학의 변화에 따르는 노력이 필요하다.

최대·최소 정리와 극값정리는 동일한 정리인데, 학교수학에서 최대·최소 정리를 해석학에서는 극값정리라고 명명한다. 학교수학 M1-M9에서는 최대·최소 정리를 $f:[a,b]\rightarrow R$ 에서 f의 최댓값, 최솟값을 극값들과 $f(a), f(b)$와 비교해서 가장 큰 값을 최댓값, 가장 작은 값을 최솟값으로 서술하고 있다. 즉, 그 구간에서의 극값과 경계값을 비교해서 그 중에서 최대를 최댓값으로, 최소를 최솟값으로 정한다. 반면에 해석학 A1,A2,A3에서 극값정리는 모든 극값 중에서 가장 큰 극댓값을 최댓값으로 정하고, 모든 극값 중에서 가장 작은 극솟값을 최솟값으로 정한다. 닫힌 구간 양 끝점에서 극값을 갖기 때문에 그 구간에서 극값과 경계값을 비교해서 그중에서 최대를 최댓값으로, 최소를 최솟값으로 정하는 최대·최소 정리와 일치한다. 극값정리는 극대와 극소를 아우르는 극값이라는 용어를 사용하여 극값과 최대·최솟값을 연결시키지만, 최대·최소 정리는 극값과 최대·최솟값을 연결시키지 않기 때문에 극값정리가 최대·최소 정리라는 명칭 보다 더 일관성 있는 명칭이라 할 수 있다.

극대와 극소는 이것을 아우르는 극값이라는 용어가 존재하는 반면에 최대와 최소는 이것을 아우르는 용어가 없다. 이것은 극대·극소 용어의 활용이 용어의 위계와 정리의 내용을 짐작하고 함축시키는 의미 있는 방법임을 말해 주는 것이

다. 이런 의미있는 용어의 채택은 학생들의 극대·극소 용어에 대한 정의를 더 수월하게 이해할 수 있게 해 준다. 또한 용어의 이해가 극대·극소 개념의 이해로 확장되어 특수한 경우에서의 극대·극소에 대한 판단을 잘 할 것과 학교수학과 학문수학의 수학용어를 연결시킬 수 있는 계기가 될 것으로 기대할 수 있다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서는 2007, 2009 개정 수학과 교육과정으로 개편됨에 따라 교과서에서 도입한 극대·극소 정의 방식의 변화와 2015 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 교과서 9종과 해석학 3종과 비교했을 때 나타나는 극대·극소 정의 방법의 차이를 분석한다. 또한, 최대·최솟값과 관련하여 사용하는 용어의 개선방안을 제시한다.

극대·극소 정의가 함수의 증감을 이용한 정의에서 근방의 개념을 이용한 정의로 바뀌었을 때 나타나는 설명 방식의 변화와 닫힌 구간 양 끝점에서의 극값 판단에 주안점을 두고 분석했는데, 2015 개정 수학과 교육과정 교과서는 이전 수학과 교육과정 교과서와 비교할 때 개념 도입 방식에 변화는 있지만, 연속함수에서만 극값 문제를 다루고 근방의 개념을 활용할 수 있는 다양한 함수의 예제와 설명은 주어지지 않음을 볼 수 있다. 또한 극대·극소를 정의할 때 해석학 교재와 달리 닫힌 구간 양 끝점에서의 설명이 주어지지 않았다. 미분가능, 연속과 함께 이 부분의 적절한 설명이 일관성있게 제시되어서 학문수학과 연계되어야 한다.

실제로, 고등학교 교과서에서는 극값의 정확한 이해 보다 극값을 구하는 방법을 기억하여 적용하는 연습에 치중하는 경향이 있다. 그리하여 학생들은 극값을 구할 때 미분가능하지 않으면 극값이 존재하지 않는다고 생각하고, 연속하지 않은 함수는 미분가능하지 않기 때문에 연속이 아니거나 미분가능하지 않아 극값이 존재하지 않는다고 생각하게 된다. 연속하지 않은 다양한 함수와 닫힌 구간 양 끝점에서 극값 판단을 근방의 개념을 활용하여 정의와 일관성있게 설명하게 되면 정의를 더 잘 이해하는 계기가 될 수 있다.

모든 극값 중에서 가장 큰 극댓값은 최댓값, 가장 작은 극솟값은 최솟값이라는 설명은 최댓값은 극댓값이라는 상식에 부합할 수 있게 된다. 극대·극소를 아우르는 체계적인 용어인 극값을 이용하여 대학 교재에서 처럼 최대·최소 정리를 극값 정리로 바꾸면 극값과 최대·최솟값을 연결하여 학생들이 정리를 수월하게 이해할 수 있게 된다.

오랜 전통으로 굳어진 정리의 명칭을 바꾸는 것이 쉬운 일은 아니지만 시대 흐름 변화에 따라 생긴 수학용어의 변화를 반영하는 노력은 교수자와 예비교사에게 중요한 시사점을 준다. 극대·극소 정의는 오랜 역사의 중요성을 가진 만큼 극대·극소 정의의 교과서 분석뿐만 아니라 학생들의 각 정의 이해에 대한 피드백

을 포함하는 질적 연구가 수행되어 극값에 대한 유용한 정보가 제공되길 기대한다. 또한, 고등학교 교과서와 대학 교재 사이에 극대·극소 정의에 차이가 있음을 인식하고 학교수학과 학문수학이 연계될 수 있도록 꾸준히 연구되길 기대한다.

참고문헌

[1] Apostol, T. M. (1974). *Mathematical analysis* (second edition). Reading: Addison Wesley.

[2] Ball, D. L., Lubienski, S. T., Mewborn, D. S., & Richardson, V. (2001). *Handbook of research on teaching*. ed., (pp. 433 - 456). Washington, DC: American Educational Research Association.

[3] Bartle, R. G. (1991). *The elements of real analysis* (second edition). New York: Wiley.

[4] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (fourth edition). Hoboken, New Jersey: Wiley.

[5] Stoll, M. (2015). *Introduction to real analysis* (second edition). Boston: Addison-Wesley Longman

[6] Wade, W. R. (2009). *An introduction to analysis* (fourth edition). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

[7] Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). *Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. Mathematical thinking and learning*. 12(4), 263-281.

[8] 계승혁·하길찬. (2010). 우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대·극소를 설명하는 방식에 대한 비판적 논의, 한국수학교육학회지 시리즈 A<수학교육> 제49권 제2호, 2010.

[9] 김원경 외 14명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜비상교육.

[10] 고성은 외 5인. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜좋은책신사고.

[11] 권오남 외 14명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜교학사.

[12] 김연식·박교식. (1994). 우리나라 학교수학 용어의 재검토, 대한수학교육학회지<학교수학> 제4권 제2호, 1-10.

[13] 류희찬 외 9명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜천재교과서.

[14] 박교식 외 19인. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜동아출판.

[15] 박교식·임재훈(2005). 초등학교 수학 교과서에서 사용되는 무정의 용어 연구. 수학교육학 연구 15(2), 197-213.

[16] 박세희(1983). 고교 교과서내용의 몇가지 문제점. 수학교육논총 1. pp.109-128, 서울:대한수학회.
[17] 박학순(2006). 중등수학에서 수학 용어에 대한 고찰. 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.
[18] 배종숙 외 6인. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜금성출판사.
[19] 수학교재편찬위원회역. Stewart, J. (2011). Essential Calculus. 교우사.
[20] 심상길•최재길. (2009). 함수의 극값에서 이공계열 학생들의 오류에 대한 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E<수학교육 논문집> 제23권 제3호, 2009. 9. 583-597.
[21] 양성현. (2019). '극대와 극소'의 정의에 대한 고등학교 학생의 인식 조사, 대한수학교육학회지<학교수학> 제21권 제1호, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, Vol. 21, No.1, 155-172, Mar 2019.
[22] 우정호 외. (2002). 고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜대한 교과서.
[23] 이동근•양성현. (2019). '극대와 극소'의 정의에 대한 고등학교 수학교사의 인식 조사, 대한수학교육학회지<학교수학> 제20권 제2호, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, Vol. 21, No.1, 269-285, Jun 2018``1 .
[24] 이준열 외 7명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜천재교육.
[25] 이준열 외 9명. (2010). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜천재교육.
[26] 정동명, 조승제. (2007). 실해석학개론 (제2판). 서울: 경문사.
[27] 최용준 외. (2003). 고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서. 서울: ㈜천재교육.
[28] 최용준 외 9명. (2010). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜천재교육.
[29] 최주연. (2011). 학생들의 수학용어를 통한 개념의 이해에 관한 연구, 서울대학교 대학원 수학교육과.
[30] 한대희. (1998). 미분법 단원에서 용어의 문제, 대한수학교육학회지<학교수학> 제8권 제2호, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, Vol. 8, No.2, 495-507, Dec 1998.
[31] 허민. (2019). 실해석학 첫걸음. 서울: 경문사.
[32] 허민・오혜영역. Howard Eves (1995). 수학의 위대한 순간들. 경문사.
[33] 홍성복 외 10명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜지학사.
[34] 황선욱 외 8명. (2019). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: ㈜미래엔.

Oh Hye Young
Department of Mathematics Education, Incheon National University,
Yeonsu-ku Gaetval-ro 12 Meetyou Hall Campus Byeol Guan A-dong 102-ho
College of Education, Incheon, Korea
E-mail address: hyoh@inu.ac.kr