

<https://doi.org/10.7236/JIIBC.2024.24.2.99>
JIIBC 2024-2-15

이진트리의 최소선형배열 알고리즘

Algorithm for Minimum Linear Arrangement(MinLA) of Binary Tree

이상운*

Sang-Un Lee*

요약 이진트리의 최소 선형 배열(MinLA) 문제의 해는 선형 복잡도 $O(n)$ 의 근사 알고리즘으로 구하고 있으며, $k=10$ 에 대해 다양한 근사 알고리즘 수행 결과가 제시되어 있고, 단지 2개 알고리즘만이 최적 해 3,696을 얻었다. 본 논문은 이진트리의 정확한 해를 $O(n)$ 복잡도로 구하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 먼저, $n=2^k-1$ 개 노드들에 중위 탐색(in-order search) 방법으로 번호를 부여하고, $2 \leq l \leq k-2, (k=5)$ 와 $2 \leq l \leq k-3, (k=6)$ 레벨에 존재하는 노드들에 대해 단 노드 자식들까지의 범위를 대상으로 번호를 재배열하는 방법을 적용하였다. 제안된 알고리즘을 $k=5,6,7$ 에 적용한 결과 Chung[14]의 $S_{\min}^{(k)} = 2^{k-1} + 4 + S_{\min}^{(k-1)} + 2S_{\min}^{(k-2)}$ 이론을 증명하였으며, $S_{\min}^{(5)}$ 에 대해서는 Chung[14]의 60보다 좋은 58을 얻었다. 또한, 기존의 근사 알고리즘들은 배열 결과를 제시하지 않고 있는데 비해 제안된 알고리즘은 정확한 배열 방법도 제시하는 장점을 갖고 있다. 따라서 제안된 알고리즘은 $k > 10$ 인 이진트리에 대해서도 항상 빠르게 최적의 해를 얻을 수 있기 때문에 기존의 근사 알고리즘을 적용하지 않아도 된다.

Abstract In the deficiency of an exact solution yielding algorithm, approximate algorithms remain as a solely viable option to the Minimum Linear Arrangement(MinLA) problem of Binary tree. Despite repeated attempts by a number of algorithm on $k=10$, only two of them have been successful in yielding the optimal solution of 3,696. This paper therefore proposes an algorithm of $O(n)$ complexity that delivers the exact solution to the binary tree. The proposed algorithm firstly employs an In-order search method by which $n=2^k-1$ number of nodes are assigned with a distinct number. Then it reassigns the number of all nodes that occur on level $2 \leq l \leq k-2, (k=5)$ and $2 \leq l \leq k-3, (k=6)$, including that of child of leaf node. When applied to $k=5,6,7$, the proposed algorithm has proven Chung[14]'s $S_{\min}^{(k)} = 2^{k-1} + 4 + S_{\min}^{(k-1)} + 2S_{\min}^{(k-2)}$ conjecture and obtained a superior result. Moreover, on the contrary to existing algorithms, the proposed algorithm illustrates a detailed assignment method. Capable of expeditiously obtaining the optimal solution for the binary tree of $k > 10$, the proposed algorithm could replace the existing approximate algorithms.

Key Words : Minimum linear arrangement, Optimal linear ordering, Layout problem, Lattice, Mesh

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 2023년 10월 21일, 수정완료 2024년 3월 9일
게재확정일자 2024년 4월 5일

Received: 21 October, 2023 / Revised: 9 March, 2024 /
Accepted: 5 April, 2024

*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr

Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National
University, Korea

I. 서 론

주어진 그래프 $G=(V,E)$ 에 대해 특정 목표 비용(objective cost)을 최소화하도록 정점들을 선형 배치(linear layout) 하는 문제를 그래프 배치 문제(graph layout problems)라 한다. 여기서 목표 비용은 대역폭(bandwidth), 최소선형배열(minimum linear arrangement, MinLA), 절단 폭(cutwidth), 정점 분리(vertex separation), 절단 합 프로필(sumcut profile), 간선 양분(edge bisection), 정점 양분(vertex bisection)등 다양하다. 이들 문제는 망 최적화, VLSI 회로 설계, 정보 검색, 수치해석, 계산 생물학, 그래프 이론, 일정, 고고학 등 다양한 분야에 응용되고 있다.[1-3] 배치(layout)는 선형 배열(linear arrangement), 분류(labeling) 또는 번호부여(numbering)라고도 부른다.

최소 선형 배열(MinLA)은 무 방향 그래프(undirected graph) $G=(V,E), n=|V|$ 의 각 정점들을 $\pi: V \rightarrow \{1,2,\dots,n\}$ 함수로 선형으로 번호를 부여 하였을 때 부속된 간선들의 길이 가중치(edge weight)의 합을 최소로 하는 $\min \sum_{vw} \{ \pi(v) - \pi(w) \} : \{v,w\} \in V$ 를 찾는 문제이다. MinLA를 최적 선형 순서(optimal linear ordering, OLO), 간선 합 문제(edge sum problem, ESP) 또는 최소-1-합(minimum-1-sum, M1S)이라고도 한다. MinLA 문제는 VLSI 배치 설계에서 총 배선 길이를 최소화하는 문제에 적용된다.

MinLA 문제는 일반적으로 NP-난제(NP-hard)로 알려져 있다. 그러나 특정 그물망 그래프인 Rectangular mesh와 Square mesh, Tree에 대해서는 $O(n)$ 의 다항 시간 근사 알고리즘이 제안되어 있다.[1,2]

본 논문은 $n=2^k-1$ 의 이진트리에 대해 근사 해가 아닌 정확한 해를 $O(n), n=2^{k-3}-2, n=2^{k-3}-2$ 로 구하는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 트리에 대해 MinLA를 구한 연구 결과를 고찰한다. 3장에서는 최적의 MinLA를 $O(n)$ 으로 구하는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 $k=6$ 과 $k=7$ 의 이진트리를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용하여 성능을 검증한다.

II. 관련 연구와 연구 배경

$k=10, n=1,023, m=1,022$ 인 정 이진트리 Full(= Proper 또는 Perfect binary tree)에 대한 MinLA인 $S_{\min}^{(10)}$ 을 구한 결과는 표 1과 같다.[1,3-12]

표 1. 정 이진트리의 MinLA
Table 1. MinLA for Full binary tree

방법		$S_{\min}^{(10)}$
트리 탐색 알고리즘	BFS = Level-order	124,423
	DFS = Pre-order	4,544 (5,119)
	Naive = In-order	4,850 (4,608)
근사 알고리즘	Hill2	38,559
	spec	29,579
	Simulated Annealing (SA)	4,096
	Random	5,037
	Heuristic Improvement (30회 반복)	3,714
	KH	3,950
	Poranen	3,899
	Safro's Multilevel weighted edge contraction	3,696
	Poranen's SA	3,714
	Poranen's GH	3,807
	Petit's SS+SA	4,069
	Petit's DT+SA	3,762
	AMG	3,696
	MAMP	3,790
	GRASP+PR	4,267
	C4+HC	13,951
	SAN	14,247
TSSA	4,440	

k -레벨의 전 이진트리(complete binary tree)의 MinLA 비용 $S_{\min}^{(k)}$ 에 대해 Cahit 추정(conjecture)^[13]은 식 (1)과 같다.

$$S_{\min}^{(k)} = (k-1) \times 2^{k-1} \tag{1}$$

이는 중위(in-order) 탐색 방법으로 각 노드에 번호를 부여한 방법과 동일하다. 반면에, Chung^[14]은 식 (2)를 제안하였다.

$$S_{\min}^{(k)} = 2^{k-1} + 4 + S_{\min}^{(k-1)} + 2S_{\min}^{(k-2)} \quad \text{or} \tag{2}$$

$$2^k(k/3 + 5/18) + (-1)^k(2/9) - 2, (k > 4)$$

Chung^[14]은 그림 1과 같이 $S_{\min}^{(2)} = 2, S_{\min}^{(3)} = 8, S_{\min}^{(4)} = 24$ 를 제시하였다. 또한, $S_{\min}^{(5)} = 2^{5-1} + 4 + S_{\min}^{(4)} + 2S_{\min}^{(3)} = 2^4 + 4 + 24 + 2 \times 8 = 60$ 이 되는 MinLA를 제시하지 못하고 $S_{\min}^{(5)} = 62$ 를 제시하였다. Chrobak과 Rytter^[15]는 Naive 방법 (=중위 방법)으로 $S_{\min}^{(5)} = 64$ 를 제안하였다.

$k=5$ 인 정 이진트리에 대해 트리 탐색 알고리즘으로 구한 MinLA는 그림 2와 같다. 4가지 방법 중에서 중위 탐색 방법이 가장 좋은 결과를 얻을 수 있다. $2 \leq k \leq 10$ 의 정 이진트리에 대해 Cahit^[13]의 중위 탐색 방법과 Chung^[14]의 방법으로 MinLA를 구한 결과는 표 2와 같다.

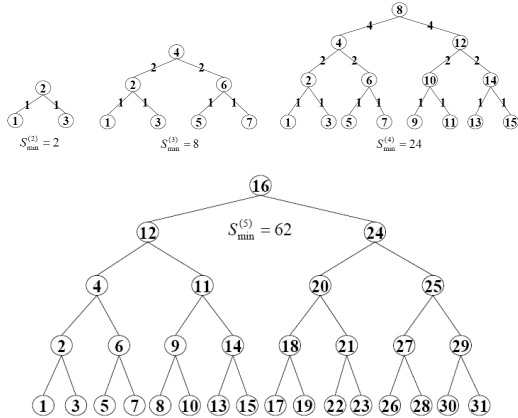


그림 1. $2 \leq k \leq 5$ 정 이진트리의 MinLA
 Fig. 1. MinLA for $2 \leq k \leq 5$ full binary tree

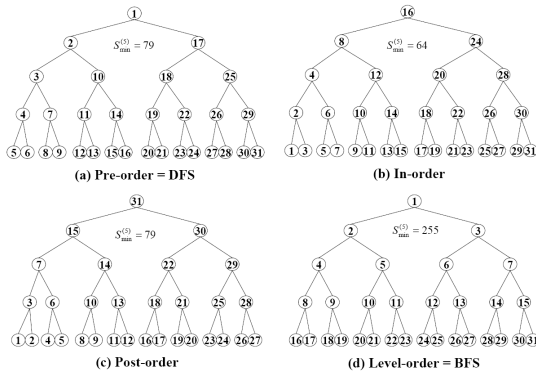


그림 2. $k=5$ 정 이진트리의 다양한 탐색 방법 MinLA
 Fig. 2. Various search methods for $k=5$ full binary tree

표 2. 정 이진트리의 MinLA
 Table 2. MinLA for full binary tree

MinLA	Cahit ^[13] 식 (1)	Chung ^[14] 식 (2)
$S_{\min}^{(2)}$	2	2
$S_{\min}^{(3)}$	8	8
$S_{\min}^{(4)}$	24	24
$S_{\min}^{(5)}$	64	60
$S_{\min}^{(6)}$	160	144
$S_{\min}^{(7)}$	384	332
$S_{\min}^{(8)}$	896	752
$S_{\min}^{(9)}$	2,048	1,676
$S_{\min}^{(10)}$	4,606	3,696

Chung^[14]의 방법에 따르면 $S_{\min}^{(10)} = 3,696$ 임을 알 수 있다. 그러나 Chung^[14]의 식 (2)의 방법으로 $S_{\min}^{(k)}, k \geq 5$ 를 구할 수 있지만 실제로 MinLA를 구하기 위해 노드들에 번호를 부여하는 정확한 방법은 알려지지 않고 있다. 따라서 3장에서는 정 이진트리에 대한 $S_{\min}^{(k)}, k \geq 5$ 를 정확히 얻는 번호 부여 방법을 제안한다.

III. 이진트리의 MinLA 알고리즘

정 이진트리에 대한 $S_{\min}^{(k)}, k \geq 5$ 를 정확히 얻는 번호 부여 알고리즘은 다음과 같이 수행된다.

- (1) 중위탐색 방법으로 노드들 번호 부여. /*
 $O(n), n = 2^k - 1$ */ 주어진 k -레벨 정 이진트리에 대해 k^{th} -레벨인 단 노드들 u 에 $1 \leq n \leq 2^k - 1$ 번호 중 홀수(odd)를 순서대로 $\pi(u)$ 배정.

$k-1 \leq l \leq 1$ 레벨의 부 노들 P 들은 $l+1^{th}$ 레벨의 자 노드 C_1 과 C_2 번호에 대해

$$\pi(P) = \frac{\pi(C_1) + \pi(C_2)}{2} \text{가 되도록 짝수(even) 배정.}$$

이는 그림 3의 표준 중위탐색 번호부여 방법 적용.

- (2) $2 \leq l \leq k-3 (k \geq 6)$ 에 대해 번호 재배정. 단, $2 \leq l \leq k-2 (k=5)$ 수행. /* $O(n), n = 2^{k-3} - 2$ */
 (2-1) 재배정 범위 설정

해당 l^{th} 레벨 값이 $l-1^{th}$ 레벨 부 노드의 좌측에 있으면 값을 증가시키기 위해 $l+1^{th}$ 레벨의 우측 자 노드를 선택하고 $l+1^{th}$ 노드의 $l+2^{th}$ 레벨이 단 노드가 아닌 경우 우측 자 노드 간선을 삭제. 반대로, l^{th} 레벨 값이 $l-1^{th}$ 레벨 부 노드의 우측에 있으면 값을 감소시키기 위해 $l+1^{th}$ 레벨의 좌측 자 노드를 선택하고 $l+1^{th}$ 노드의 $l+2^{th}$ 레벨 좌측 자 노드가 단 노드가 아닌 경우 간선 삭제. 이때 l^{th} 레벨 값과 $l-1^{th}$ 레벨 값의 차이가 1인 노드는 생략.

- (2-2) 번호 재배정
 해당 l^{th} 레벨 값이 $l-1^{th}$ 레벨 부 노드의 좌측에 있으면 l^{th} 레벨 값을 k^{th} 레벨의 좌측 첫 번째로 이동시키고, +1씩 증가시키면서 그림 3의 변형 중위탐색 번호 부여 방법으로

번호 배정. 반대로, l^{th} 레벨 값이 $l-1^{th}$ 레벨 부 노드의 우측에 있으면 l^{th} 레벨 값을 k^{th} 레벨의 우측 첫 번째로 이동시키고, -1씩 감소시키면서 번호 배정.

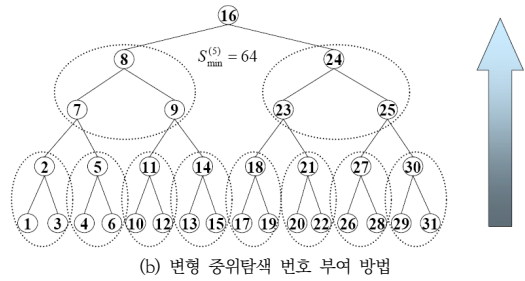
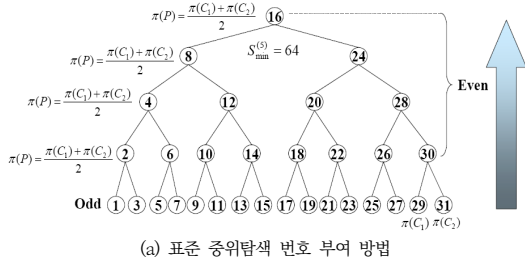


그림 3. 중위탐색 번호 부여 방법
Fig. 3. In-order labeling method

$k=5$ 인 정 이진트리에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 그림 4와 같다. $k=5, 2 \leq l \leq k-2$ 인 레벨 2와 3에 존재하는 8,24,4,12,20,28에 대해 번호 재배열을 수행한다. 레벨 2의 8,24에 대해 번호 재조정 결과, 레벨 3에서는 4,11,21,28이 존재하며, $|12-11|=|20-21|=1$ 이 되어 4와 28에 대해서만 번호 재배열을 수행하였다. 제안된 알고리즘은 $S_{\min}^{(5)}=58$ 을 얻어 Chung^[14]의 $S_{\min}^{(5)}=2^{5-1}+4+S_{\min}^{(4)}+2S_{\min}^{(3)}=2^4+4+24+2 \times 8=60$ 보다 좋은 결과를 얻었다.

IV. 알고리즘 적용 및 결과 분석

본 장에서는 $k=6$ 과 $k=7$ 정 이진트리의 MinLA를 구하여 Chung^[14]의 수치적 방법을 증명한다. $k=6$ 정 이진트리에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 그림 5에 제시하였다. $k=6, 2 \leq l \leq k-3$ 인 레벨 2의 16,48과 레벨 3의 8,24,40, 56에 대해 번호 재배열을 수행한다. 먼저, 레벨 2의 16과 48의 번호 재배열 결과 레벨 3에서는 8,23,41,56이 존재하며, $|24-23|=|40-41|=1$ 이 되어 8과 56에 대해서만 번호 재배열이 수행된다.

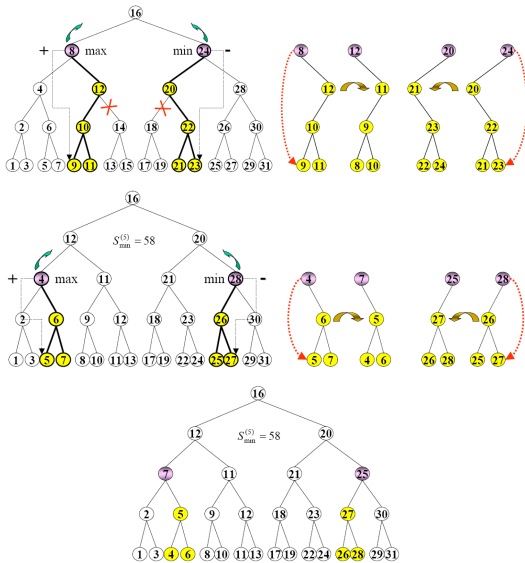
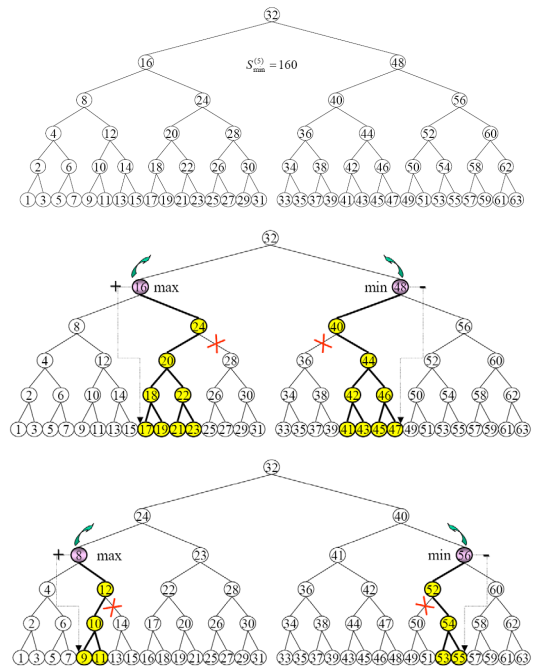


그림 4. $k=5$ 정 이진트리의 제안된 알고리즘 MinLA
Fig. 4. Proposed algorithm's MinLA for $k=5$ full binary tree



Problem," Information Technology Laboratory, Cinvestav, Tamaulipas, <https://www.tamps.cinvestav.mx/~ertello/MinLA/bestSolutionsMinLA-120107.pdf>, Retrieved Apr. 2023.

- [8] A. R. S. Amaral, A. Caprara, A. N. Letchford, and J. J. Salazar-Gonzalez, "A Cutting Plane Algorithm for the Linear Arrangement Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 141, No. 2, pp. 274-294, Sep. 2002, [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(02\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00125-X)
- [9] I. Safro, D. Ron, and A. Brandt, "Graph Minimum Linear Arrangement by Multilevel Weighted Edge Contractions," *Journal of Algorithms*, Vol. 60, No. 1, pp. 24-41, Jul. 2006, <https://doi.org/10.1016/j.jalgor.2004.10.004>
- [10] J. Díaz, M. D. Penrose, J. Petit, and M. Serna, "Layout Problems on Lattice Graphs," *International Computing and Combinatorics conference*, pp. 103-112, Jan. 1999, https://doi.org/10.1007/3-540-48686-0_10
- [11] R. T. Eduardo, J. K. Hao, and T. J. Jose, "Memetic Algorithms for the MinLA Problem," *International Conference on Artificial Evolution*, pp. 73-84, Oct. 2005, https://doi.org/10.1007/11740698_7
- [12] A. Duarte, J. J. Pantrigo, V. Campos, and R. Marti, "Heuristics for the Minimum Linear Arrangement Problem," *Universidad Rey Juan Carlos, Spain*, pp. 1-13, Jul. 2008.
- [13] F. R. K. Chung, "Some Problems and Results in Labelings of Graphs," *The Theory and Application of Graphs*, John Wiley and Sons, pp. 255-264, 1981.
- [14] F. R. K. Chung, "A Conjectured Minimum Validation Tree," *SIAM Review*, Vol. 20, No. 3, pp. 601-604, Jul. 1977, <https://doi.org/10.1137/1020084>
- [15] M. Chrobak and W. Rytter, "Two Results on Linear Embeddings of Complete Binary Trees," *Theoretical Computer Science*, Vol. 136, No. 2, pp. 507-526, Dec. 1994, [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)00036-1](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)00036-1)

저 자 소개

이 상 윤(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학 학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007.3 ~ 2015.3 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부 교수
- 2015.4 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석 과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 인 공지능과 빅데이터분석, 최적화 알고리즘
- e-mail : sulee@gwnu.ac.kr