韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.1.91
2024. 1. 제 27권, 제 1호, 91-110

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2024, Vol. 27, No. 1, 91-110

카테시안 곱의 역 맥락에서 살펴본 분수 나눗셈 알고리즘의 시각적 통합모델에 대한 연구

이광호(한국교원대학교, 교수)
박중규(익산어양초등학교, 교사)[†]

본 연구의 목적은 이 통합모델인 직사각형 분할 모델을 초등학교 교실에서 교수・학습하였을 때, 학생들이 이 통합모델을 어떻게 이해하는지, 분수 나눗셈 상황들 사이의 관계를 어떻게 구성하는지 알아보는 데 있다. 이 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다. 첫째, 제수의 역수를 곱하는 이유나 역수의 의미를 상기시키기 위해서 분수의 나눗셈식을 측정 맥락이나 단위 비율 결정 맥락으로 해석하여 계산 과정을 설명할 필요가 있다. 둘째, 직사각형 분할 모델은 분수의 나눗셈식을 측정 맥락으로 해석할 때 기존 모델에서 나타나는 우회적이거나 부적절한 부분을 보완할 수 있다. 또한 카테시안 곱의 역 맥락의 문제에서 표준알고리즘을 도출하기에 적절한 모델이라고 할 수 있다. 셋째, 카테시안 곱의 역 맥락에서 직사각형 분할 모델은 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락에서의 계산 과정을 자연스럽게 드러낼 수 있다. 그리고 하나의 나눗셈식이 왜 두 가지 해석이 가능한지를 보여줄 수 있어 통합모델로 사용할 수 있다.

I. 서론

분수의 나눗셈은 분수의 곱셈만큼 간단하게 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 통해 해결될 수 있다(교육부, 2019a). 하지만 제수의 역수를 곱해야 하는 이유와 역수의 의미를 모르는 학생들이 적지 않다(김민경, 2009; 송정화, 2005; 박미연, 박영희, 2017). 따라서 학습 지도 과정에서 제수의 역수를 곱하는 이유와 역수의 의미를 명확히 드러낼 필요가 있으며(임재훈, 김수미, 박교식, 2005), 학생들이 다양한 분수의 나눗셈 상황에서 알고리즘을 이해하고, 해결하는 과정을 설명할 수 있도록(교육부, 2019a) 교육과정이 구성되어야 한다. 그럼에도 불구하고 교과서의 한정된 지면과 교과 시수 배정의 한계 등으로(이대현, 2022) 인해 분수의 나눗셈 알고리즘을 단위 비율 결정 상황으로 구체화하고 카테시안 곱의 역 상황에서는 이를 적용하는 방법을 취하고 있어 각 상황에 따른 적절한 구체화가 충분하지 않은 실정이다(교육부, 2019b).

우리나라 교과서에서 분수의 나눗셈 알고리즘 도입 방법을 살펴보면, 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하거나, 포함제 상황에서 통분을 통해 동분모 분수의 나눗셈으로 바꾸어 계산하는 측정 단위의 세분 방법으로 분수의 나눗셈 알고리즘을 도입하였다(김정하, 2020a). 그리고 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 교과서(이하 2015 개정 교과서)에서는 제수의 한 단위에 해당하는 피제수의 값을 구하기 위해 제수의 분자만큼 줄이고 분모만큼 늘리는 방법으로 분수의 나눗셈 알고리즘을 도입하고 있다(교육부, 2019b). 이와 같이 분수의 나눗셈 지도 방법이 변화되면서 제수의 역수를 곱하는 이유를 비교적 통찰력 있게 제시해주고 있다(서동엽, 2021).

이러한 분수 나눗셈 지도 방법의 긍정적인 변화에도 여전히, 포함제 상황의 공통분모를 이용한 방법은 이를 단위 비율 결정 상황의 문제에 적용했을 때 몫을 구할 수는 있으나 그 과정이 자연스럽지 않으며, 단위 비율 결정 상황에서 이중수직선을 활용한 모델은 이를 포함제 상황의 문제에 적용했을 때 몫을 구할 수는 있으나 그 과정이 자연스럽지 않다(박중규, 이광호, 성창근, 2019). 그리고 다양한 현실적 상황에서 분수의 나눗셈 알고리즘 도입이 풍부하게 이루어져야 되지만(임재훈 외, 2005), 직사각형의 넓이와 가로를 알고 있을

* 접수일(2023년 12월 28일), 심사(수정)일(2024년 1월 26일), 게재확정일(2024년 1월 29일)
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 분수 나눗셈, 분수 나눗셈 알고리즘, 통합모델, 직사각형 분할 모델, 측정 맥락, 단위 비율 결정 맥락, 카테시안 곱의 역 맥락
† 교신저자 : pjkrang@hanmail.net

때 세로를 구하는 문제는 넓이가 가로와 세로의 곱이라는 개념으로 접근하기보다는 포함제와 등분제 상황에서 도출된 과정을 확인하는 단계에 머무르고 있다(교육부, 2019b).

실생활의 다양한 상황에서 분수 나눗셈을 해결하기 위해 여러 가지 구체화 모델을 선행 연구들(김정하, 2020a; 박중규 외, 2019; 이용률, 2005; 임재훈, 2016; Siebert, 2002; Sinicrope, Mick & Kolb, 2002)에서 제시하고 있지만, 이러한 모델은 특정한 하나의 상황에 적용될 뿐이다. 그리고 분수 나눗셈에 대한 포함제 상황과 단위 비율 결정 상황을 통합하려는 시도들이 있었으나(교육부, 2015; 김정하, 2020b; 김홍회, 2014; 이지영, 2015; 임재훈, 2016; 임재훈, 2018), 포함제와 단위 비율 결정이라는 본래의 의미를 그대로 유지한 상태로 피제수에 제수의 역수를 곱하는 표준알고리즘(박교식, 2014)을 자연스럽게 이끌어내는 통합모델은 찾아보기 어렵다.

본 연구에서는 실생활의 다양한 상황에서 분수의 나눗셈 알고리즘을 도출하는 시각적 모델들을 고찰하고, 카테시안 곱의 역 상황의 문제 풀이를 포함제나 단위 비율 결정과 같은 방법으로 접근하여 자연스럽게 표준알고리즘이 도출되는 시각적 통합모델을 제시하고자 한다. 그리고 이 통합모델을 교수하는 교실 수업의 진행 과정을 살펴보고, 학습을 통해 학생들이 이 통합모델을 어떻게 이해하는지, 분수 나눗셈 상황들의 해결 방법들 사이의 관계를 어떻게 구성하는지 알아보고자 한다. 이를 통해 국정 교과서에서 검정 교과서 체제로 전환된 시점에서 다양한 실생활 상황의 분수 나눗셈 이해 자료와 분수 나눗셈 지도에 대한 교육적 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

분수의 나눗셈에 관한 많은 연구들(김정하, 2020a; 박중규 외, 2019; 이용률, 2005; 임재훈, 2016; 임재훈, 2018; 조선미, 방정숙, 2021; Ma, 1999; Siebert, 2002; Sinicrope et al., 2002)에서 다루고 있는 분수의 나눗셈 상황을 분석하여 정리하고, 분수의 나눗셈 알고리즘 도입을 위한 구체화 모델들을 유형별로 살펴보고자 한다.

1. 분수의 나눗셈 유형 분류

분수의 나눗셈은 제수의 범위가 자연수인지 분수인지에 따라, 피제수가 제수의 몇 배인지 또는 제수의 단위량에 해당하는 피제수의 양이 얼마인지에 따라, 직사각형의 한 변의 길이를 구하는지에 따라 다양하게 해석될 수 있다.

Ma(1999)는 교사들의 응답 자료를 토대로 분수의 나눗셈 개념을 측정 모델, 분할 모델, 곱과 인수 모델로 나누었으며, Sinicrope et al.(2002)은 알고리즘의 다름, 문제 상황, 교육 모델을 탐구함으로써 분수의 나눗셈 상황을 포함제, 등분제, 단위 비율 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역의 다섯 가지로 해석하고 있다.

김정하(2020a)는 우리나라 분수 나눗셈 지도 방법의 변천 과정을 분석하면서 분수의 나눗셈이 적용되는 문제 상황을 포함제 상황, 단위 비율 결정 상황, 곱셈의 역연산 상황으로 크게 분류하고 있고, 임재훈(2018)은 Sinicrope et al.(2002)의 분류를 바탕으로 분수의 나눗셈을 포함제, 등분제, 카테시안 곱의 역의 세 맥락으로 대별하였으며, 조선미 외(2021)는 피제수와 제수의 관계와 문제 해결의 공통점에 따라 포함제와 곱셈적 비교를 피제수가 제수의 몇 배인지를 구하는 나눗셈으로, 등분제와 단위 비율 결정, 곱셈의 역을 제수 1에 대응하는 피제수의 양을 구하는 나눗셈으로, 직사각형의 넓이를 알 때 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 분수의 나눗셈을 카테시안 곱의 역 맥락으로 분류하였다

분수의 나눗셈 상황이 다양하지만, 문제를 해결하는 과정에서 제수가 변형되는지 또는 변형되지 않는지에 따라 분수의 나눗셈 상황을 구분할 수 있다. 즉, 해결 과정에서 제수가 변형되지 않고 주어진 그대로 이용되어 피제수가 제수의 몇 배인지 구할 수 있는 상황이 있고, 해결 과정에서 제수가 1로 변형되어 이에 해당하는 피제수의 양을 구함으로써 간접적으로 피제수가 제수의 몇 배인지 구하게 되는 상황이 있다. 전자는 주어진 제수를 바꾸지 않고 그대로 이용할 수 있는 장점이 있고, 후자는 제수가 1이 되므로 피제수와 비교하기 쉽다(신준식, 2013)는 장점이 있다.

본 연구에서는 분수의 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 제수의 변형 유무에 따라 분수의 나눗셈 유형을 다음 세 가지로 분류하였다.

첫째, 제수를 주어진 그대로 이용하여 피제수가 제

수의 몇 배인지 구하는 것이 자연스러운 경우이며, 이것을 ‘측정* 맥락’으로 부르도록 하겠다. 초등학교에서 수학적 개념은 보통 학생들이 공감하는 현실적 상황에서 출발하게 되는데 이러한 현실적 상황을 ‘맥락’이라고 한다(김명윤, 장경윤, 2009).

둘째, 제수를 1로 만들어 이에 해당하는 피제수의 양을 구하는 것이 자연스러운 경우이며, 이것을 ‘단위 비율 결정** 맥락’으로 부르도록 하겠다.

셋째, 제수를 그대로 이용하여 피제수가 제수의 몇 배인지 구하거나 제수를 1로 만들어 이에 해당하는 피제수의 양을 구하여도 자연스러운 경우이며, 이것을 ‘카테시안 곱의 역 맥락’으로 부르도록 하겠다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락으로 모두 접근 가능한지에 대한 것은 Ⅱ장 3절에서 자세히 다루도록 하겠다.

다음 [표 1]은 여러 연구자들이 분수의 나눗셈을 어떻게 분류하고, 서로 어떤 관계에 있는지를 나타낸 것이다.

[표 1] 분수 나눗셈의 유형 분류

<table>
<tr><th>연구자
제수 이용 방법</th><th>Ma (1999)</th><th>김정하 (2020a)</th><th>임재훈 (2018)</th><th>Sinicrope et al. (2002)</th><th>조선미 외 (2021)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제수를 그대로 이용하기</td><td rowspan="2">측정 모델</td><td rowspan="2">포함제</td><td rowspan="2">포함제</td><td rowspan="2">포함제</td><td>포함제</td></tr>
<tr><td>곱셈적 비교</td></tr>
<tr><td rowspan="3">제수를 1로 만들기</td><td rowspan="2">분할 모델</td><td rowspan="2">단위 비율 결정</td><td rowspan="3">등분제</td><td>등분제</td><td>등분제</td></tr>
<tr><td>단위 비율 결정</td><td>단위 비율 결정</td></tr>
<tr><td rowspan="2">곱과 인수 모델</td><td rowspan="2">곱셈의 역연산</td><td>곱셈의 역</td><td>곱셈의 역</td></tr>
<tr><td>제수를 그대로 이용하거나 제수를 1로 만들기</td><td>카테시안 곱의 역</td><td>카테시안 곱의 역</td><td>카테시안 곱의 역</td></tr>
</table>

* 측정 나눗셈(measurement division)을 보통 포함제로 번역하고 있다(박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; 조선미 외, 2021; NCTM, 2011). 포함제는 ‘몇 번 들어있는가’의 의미로 정의되는데, 포함제 나눗셈에서 나머지가 있는 경우 나머지(작은 것) 안에 제수(큰 것)가 몇 번 들어가는가를 따지는 것이므로 불합리하다(강홍규, 2014)는 입장도 있어 배의 의미까지 포함하는 ‘측정’이라는 용어를 사용하였다.

** 자연수 나눗셈의 등분제를 확장하여 분수 나눗셈에도 적용할 수 있다는 연구들(강홍규, 2014; 김명윤 외, 2009; 신준식, 2013; 임재훈, 2018; Ott, Snook & Gibson, 1991)이 있으나, 일상적으로 2등분, 3등분은 잘 어울리지만 $\frac{1}{2}$등분한다는 말은 성립되지 않는다(박교식 외, 2004)는 용어 상의 문제와 등분제의 본질을 제수의 한 단위량에 해당하는 양을 구하는 것으로 보면 단위 비율 결정이 되므로(임재훈, 2007) 자연수 나눗셈의 등분제를 포함하는 개념으로 단위 비율 결정이라는 용어를 사용하였다.

2. 분수 나눗셈 알고리즘의 시각적 모델

먼저, 분수의 나눗셈 알고리즘 도출 과정을 시각적으로 표현한 모델을 분수 나눗셈의 세 가지 맥락(측정 맥락, 단위 비율 결정 맥락, 카테시안 곱의 역 맥락) 중에서 측정 맥락에 대해 살펴보고자 한다. 시각적 표현은 학생들이 문제를 명확히 이해하고 해결 방법을 발견하게 하고(김소희, 이광호, 구미영, 2013), 문제해결력, 수학 학습 태도, 메타 인지, 추론 능력 향상에 효과가 있으며(강창옥, 2013; 최경아, 2013), 문제를 창의적으로 해결해 가도록 한다(이경화, 2016).

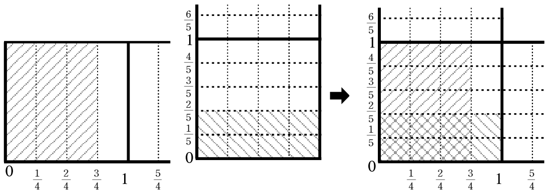
가. 측정 맥락

측정 맥락의 분수 나눗셈을 해결하는 시각적 모델로는 측정 단위의 세분 방법과 관련이 있는 패턴 블록 모델(Sinicrope et al., 2002), 피제수의 단위 비율을 이용하는 모델(Siebert, 2002), 피제수가 제수의 몇 배인지를 알기 위해 피제수를 제수가 포함된 수들의 곱으로 나타내는데 초점을 둔 정사각형 분할 모델(박중규 외, 2019), 제수를 수직선에 나타내고 제수의 단위분수들에 피제수만큼 분할하여 몫을 구하는 수직선 모델(이용률, 2005) 등이 있다. 이들 연구 중 분모가 12의 약수에 한정되는 Sinicrope et al.(2002)의 패턴 블록 모델을 개선한 수직 막대 모델을 새롭게 제시하고, 실험 수업에서 사용하였던 정사각형 분할 모델에 대해 알아보도록 하겠다.

1) 수직 막대 모델

$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 예로 들어보자. 너비가 1인 막대 2개를 준비하여 하나는 수평으로 눕혀서 [그림 1]의 ⓐ와 같이 1을 세로로 4등분하고, 다른 하나는 수직으로 세워서 1을 가로로 5등분한다. 이것을 ⓑ와 같이 서로 수직이 되도록 겹친다. 그러면 한 변의 길이가 1인 정사각형 안에 20개의 단위사각형이 만들어진다. $\frac{3}{4}$에 해당하는 단위사각형은 (3×5)개이고, $\frac{2}{5}$에 해당하는 단위사각형은 (4×2)개이다. $\frac{3}{4}$이 $\frac{2}{5}$의 몇 배인지를 구하는 것은 피제수와 제수의 측정 단위가 같으면 피제수와 제수의 분자로 나누는 것과 같으므로(임재훈 외, 2005), 단위사각형 (3×5)개가 단위사각형 (4×2)개의 몇 배인지 구

하는 것과 같다. 즉, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=(3\times5)\div(4\times2)=\frac{3\times5}{4\times2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$ 이다.



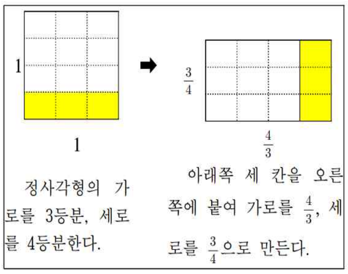
(a) $\frac{3}{4}$을 수평 막대에, $\frac{2}{5}$를 수직 막대에 표시 (b) 두 막대를 수직으로 겹침

[그림 1] $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$의 수직 막대 모델

수직 막대 모델을 통해 분수의 나눗셈을 해결하는 과정에서 피제수의 분모에 2를 곱하고, 분자에 5를 곱하여 $\frac{2}{5}$와 $\frac{3}{4}$에 해당하는 단위사각형의 수를 알 수 있다. 따라서 제수에 해당하는 양과 피제수에 해당하는 양이 모두 자연수가 되고, 수식의 변형을 통해 표준알고리즘에 이르게 된다. 여기에서 피제수에 제수의 역수를 곱하는 것은 피제수와 제수의 측정 단위를 세분하였을 때, 새로운 측정 단위에 해당하는 양을 나타내기 위한 것이다.

2) 정사각형 분할 모델

정사각형 분할 모델은 피제수가 제수의 몇 배인지를 알기 위해 피제수를 제수가 포함된 수들의 곱으로 나타내는데 초점을 두고 있다. 예를 들어 $\frac{17}{2}\div\frac{3}{4}=(\frac{17}{2}\times1)\div\frac{3}{4}$이고, $1=1\times1$로 나타낼 수 있으므로, $\frac{17}{2}\div\frac{3}{4}=(\frac{17}{2}\times1)\div\frac{3}{4}=\{\frac{17}{2}\times(1\times1)\}\div\frac{3}{4}=\{\frac{17}{2}\times(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4})\}\div\frac{3}{4}=\{(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})\times\frac{3}{4}\}\div\frac{3}{4}=\{\frac{3}{4}\times(\frac{17}{2}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\frac{17}{2}\times\frac{4}{3}$이다.



[그림 2] $1\times1=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$의 정사각형 분할 모델 (박중규 외, 2019, p.123)

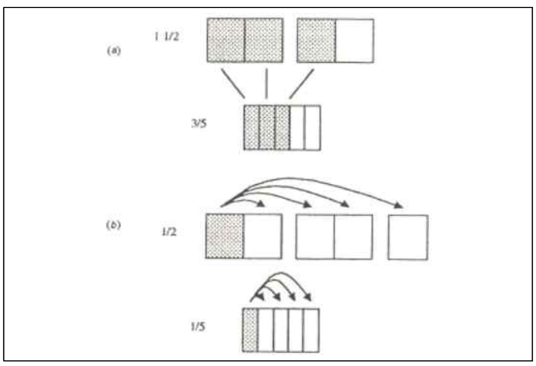
이때 피제수에 제수의 역수를 곱하는 것은 정사각형을 분할하여 한 변을 제수로 만들었을 때 이에 수직인 다른 한 변의 크기가 제수의 역수가 되어 피제수에 곱해지기 때문이다. 이 모델에서는 피제수가 제수의 몇 배인지를 수식으로 보여주고 있다는 장점이 있다.

나. 단위 비율 결정 맥락

단위 비율 결정 맥락의 분수 나눗셈을 해결하는 시각적 모델로 2015 개정 교과서에서 분수 나눗셈의 알고리즘 형식화 과정에 등장하는 줄이고 늘리기 모델(Siebert, 2002)과 제수의 한 단위를 하나의 원으로 모델화하여 단위원에 나누어지는 피제수의 양을 구하는 단위원 분할 모델(박중규 외, 2019) 등이 있다. 실험수업에서 사용하였던 줄이고 늘리기 모델을 살펴보도록 하겠다.

1) 줄이고 늘리기 모델

Siebert(2002)는 '한 그룹의 $\frac{3}{5}$이 $1\frac{1}{2}$을 가진다면, 하나의 그룹은 얼마나 가지게 될까?'와 같은 문제를 [그림 3]에서 제수 $\frac{3}{5}$을 3으로 나누고 5를 곱하는 것처럼 피제수 $1\frac{1}{2}$을 3으로 나누고 5를 곱하여 한 그룹이 가지는 양을 구함으로써 해결하고 있다. 여기에서 $\frac{3}{5}$의 역수 $\frac{5}{3}$의 의미는 $\frac{3}{5}$을 3으로 나누어 줄이고, 5를 곱하여 1로 늘리는 '연산자'의 역할을 한다(Siebert, 2002). 이 모델은 비형식적 사고 과정에서 분수 나눗셈의 표준 알고리즘이 자연스럽게 도출된다.



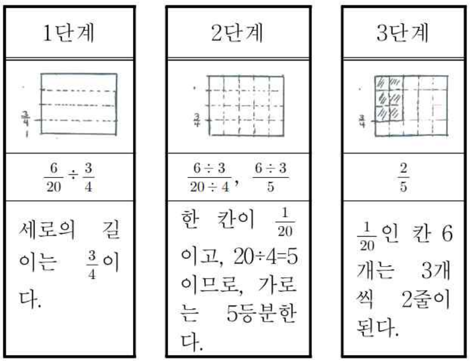
[그림 3] $1\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}$의 등분제 해결 그림 (Siebert, 2002, p.253)

다. 카테시안 곱의 역 맥락

카테시안 곱의 역 맥락의 분수 나눗셈을 해결하는 시각적 모델로 분자는 분자로, 분모는 분모로 나누는 모델(Sinicrope et al., 2002), 직사각형을 정사각형으로 만드는 모델(이용률, 2005) 등이 있다.

1) 분자는 분자로, 분모는 분모로 나누는 모델

넓이가 $\frac{6}{20}$㎡이고, 세로가 $\frac{3}{4}$m인 직사각형의 가로를 구하는 문제를 생각해 보자. 먼저 넓이가 1인 정사각형에서 세로를 4등분하고, 가로를 5등분하여 작은 칸이 20개가 되게 한다. 이때 한 칸의 넓이는 $\frac{1}{20}$이 된다. 20÷4=5이고, 넓이 $\frac{6}{20}=\frac{1}{20}\times 6$이므로, $\frac{1}{20}$인 6칸을 가로의 $\frac{2}{5}$에 표시한다. 따라서 가로의 길이는 $\frac{2}{5}$m가 된다(Sinicrope et al., 2002).



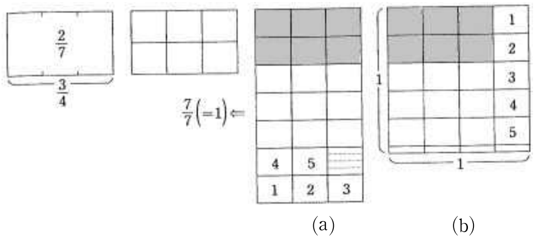
[그림 4] 분수 나눗셈의 이해 (Sinicrope et al., 2002, p. 160)

Sinicrope et al.(2002)의 모델은 제수와 피제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계에 있는 경우만 해당한다는 한계점이 있다(임재훈, 2007).

2) 직사각형을 정사각형으로 만드는 모델

이용률(2005)은 직사각형을 재배열하여 정사각형으로 만드는 방법을 통해 분수 나눗셈의 알고리즘을 이끌어내고 있다.

넓이가 $\frac{2}{7}$㎡인 판자의 가로가 $\frac{3}{4}$m일 때, 이 판자의 세로는 몇 m인지 알아보자. 넓이가 $\frac{2}{7}$, 가로가 $\frac{3}{4}$인 직사각형에서 가로를 3등분, 세로를 2등분 하고, [그림 5]의 (a)와 같이 넓이가 1이 되는 직사각형으로 만들기 위해 아래에 5줄을 붙인다. (b)처럼 단위사각형 5개를 오른쪽에 세로로 붙이고, 남은 1개를 가로로 4등분하여 아래쪽에 한 개씩 붙여 정사각형을 만든다. 그러면 가로가 1, 넓이가 1이 되므로 세로는 1이 되고, 단위사각형을 4등분한 사각형의 세로는 $\frac{1}{21}$이 된다. 그리고 단위사각형의 세로는 $\frac{4}{21}$이다. 따라서 구하고자 하는 처음 직사각형의 세로는 단위사각형 세로의 2배이므로, 그 길이는 $\frac{8}{21}$이 된다. 이것은 $\frac{2\times 4}{7\times 3}$와 같다(이용률, 2005).



[그림 5] 직사각형을 정사각형으로 만드는 모델 (이용률, 2005, p.163)

결과적으로 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{8}{21}=\frac{2\times 4}{7\times 3}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$가 되어 분수 나눗셈의 표준 알고리즘이 도출되지만, 이러한 과정을 초등학교 학생들이 생각해내기 어렵고 제수의 역수가 곱해지는 이유가 잘 드러나지 않는다(임재훈, 2007)는 단점이 있다.

3. 분수 나눗셈 알고리즘의 시각적 통합모델

가. 통합모델의 시도들

측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락을 연결하려는 시도들이 있다(교육부, 2015; 김정하, 2020b; 김홍회, 2014; 이지영, 2015; 임재훈, 2016; 임재훈, 2018). 이러한 시도 중 측정 맥락의 문제에서 통분을 통한 공통분모 알고리즘에 곱셈의 교환법칙을 적용하는 방법(교육부, 2015), 1÷(제수)를 매개로 제수의 역수를 구한 것에 피제수를 곱하는 방법(이지영, 2015), 나눗셈의 성질을 이용하여 제수의 역수를 피제수와 제수에 곱하여 피제수가 제수 1의 몇 배인지를 구하는 방법(김홍회, 2014)은 곱셈의 교환법칙을 이용하는 등 측정 맥락과

제수의 역수 곱하기 알고리즘의 관련성이 중간까지만 유지되거나, 제수의 역수를 곱한다는 결과만을 단위 비율 결정 맥락과 공유하고 있다고 임재훈(2016)은 지적하면서, 기존 논의를 넘어서는 '측정접근법'과 '동형접근법'을 제시하고 있다. 그러나 일반적으로 측정 맥락은 제수 자체를 기준으로 피제수가 제수의 몇 배인지를 구하는 것이고, 단위 비율 결정 맥락은 제수의 한 단위에 해당하는 피제수의 양을 구하는 것이라고 볼 때, 측정접근법은 나눗셈 해결 과정에서 제수를 새로운 공간의 측도로 바꾸면서 제수가 1이 되도록 하였으며, 동형접근법은 제수의 한 단위에 해당하는 피제수의 양을 구하는 것과 비슷하여 두 접근법 모두 제수 자체를 이용하고 있지 않다.

한편 임재훈(2018)은 측정 맥락에서 1÷(제수)를 매개로 분수 나눗셈의 통합을 생각하였다. 예를 들어 $3\div\frac{2}{5}$는 피제수를 1의 3배로 하여 $(1\div\frac{2}{5})\times3$로 나타내고, a의 b배를 $b\times a$로도 나타내는 융통성을 허용하면, $3\div\frac{2}{5}=3\times(1\div\frac{2}{5})=3\times\frac{5}{2}$로 나타낼 수 있다. 하지만, a의 b배를 $b\times a$로 나타내기로 한다면 표준알고리즘에도 이러한 융통성을 적용해야 하는 바, 표준알고리즘은 피제수에 제수의 역수를 곱하는 것이 아니라 제수의 역수에 피제수를 곱하는 것으로 바뀌게 된다. 이에 따라 1÷(제수)를 매개로 도출된 묶은 바뀐 표준알고리즘과 순서가 또 바뀌게 된다. 김정하(2020b)는 이중수직선을 이용한 통합모델을 제안하고 있지만, 이중수직선 모델은 단위 비율 결정 맥락에서는 자연스럽지만, 측정 맥락의 경우 제수가 가분수일 때에는 수직선 위에 나타낼 수 없다는 한계점이 있다.

나. 통합모델의 정의

통합모델과 관련하여 임재훈(2016)은 "포함제와 등분제를 아우르는 알고리즘"을 "표준알고리즘 또는 통합 알고리즘(p.522)"으로 정의하면서, 한 예로 단위 비율 결정 맥락으로부터 유도되는 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 표준알고리즘이 되려면, 포함제에서도 제수의 역수 곱하기 알고리즘이 유도될 수 있어야 한다고 하였다.

본 연구에서는 '분수 나눗셈에서 피제수에 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 표준알고리즘(박교식, 2014)으로 하고, 분수의 나눗셈의 한 맥락에서 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락 모두로 접근하여 표준알고리즘이 자연스럽게 도출되는 모델'을 '통합모델'로 정의한다.

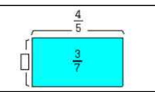
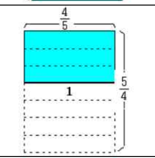
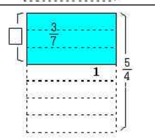
다. 직사각형의 넓이 또는 가로를 1로 만드는 모델

임재훈(2007)은 통합모델이라는 용어를 사용하지는 않았지만, 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈의 풍부한 의미를 전달할 수 있어 분수 나눗셈을 도입하는 대안으로 고려할 수 있다고 하였다. 그는 넓이가 1인 직사각형을 이용하여 측정 맥락의 입장에서 분수 나눗셈의 알고리즘을 이끌어내고 있다. 또한 가로를 1로 만들어 단위 비율 결정 맥락의 입장에서 알고리즘을 도출하고 있다.

1) 측정 맥락으로

'넓이가 $\frac{3}{7}$㎡이고 가로가 $\frac{4}{5}$m일 때, 세로의 길이는 얼마인가?'라는 문제를 예로 들어보자. 이 문제를 해결하기 위한 나눗셈식은 $\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$이다.

직사각형의 넓이를 1로 만드는 모델은 측정 맥락과 관련이 있다. 넓이가 1일 때 세로는 가로의 역수가 된다. [그림 6]의 ⓐ와 같은 직사각형에서 세로를 3등분하고, ⓑ처럼 세로를 늘여 넓이를 1로 늘리면, 세로는 $\frac{5}{4}$가 된다. ⓒ에서 비례 관계에 의해 처음 직사각형의 세로는 $\frac{5}{4}\times\frac{3}{7}$이다. 이와 같은 방법은 어떤 수에 그 수의 역수를 곱하면 1이 된다는 개념과 비례식에 대한 지식이 필요하며(임재훈, 2007), 표준 알고리즘을 도출하기 위해서는 피제수와 제수의 곱이 바뀌어야 한다는 단점이 있다.

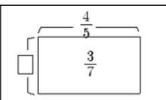
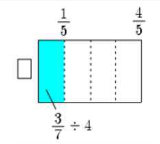
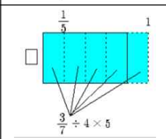
(a)		$\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$
(b)		넓이를 1로 만든 직사각형의 세로 길이는 $\frac{5}{4}$가 된다.
(c)		넓이가 1일 때 세로 길이가 $\frac{5}{4}$이므로 넓이가 $\frac{3}{7}$일 때 세로의 길이는 $\frac{5}{4}\times\frac{3}{7}$이 된다.

[그림 6] 넓이가 1인 직사각형을 이용하는 모델(임재훈, 2007, p.22)

2) 단위 비율 결정 맥락으로

직사각형의 가로를 1로 만드는 모델은 단위 비율 결정 맥락과 관련이 있다. 위에서 예로 든 문제에서 가로를 1m로 만들었을 때 넓이는 세로와 같아지므로, 세로를 구할 수 있게 된다.

[그림 7]에서 가로를 4로 나누어 가로 $\frac{1}{5}$에 해당하는 넓이($\frac{3}{7}\div4$)를 구하고, 다시 가로 $\frac{1}{5}$을 5배하여 1로 만들면 넓이($\frac{3}{7}\div4\times5$)가 구해진다. 이때 넓이는 $\frac{3}{7}\div4\times5=\frac{15}{28}$이며, 곧 세로가 된다.

(a)		$\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$
(b)		가로가 $\frac{1}{5}$일 때, 넓이는 $\frac{3}{7}\div4=\frac{3}{28}$
(c)		가로가 1일 때, 넓이는 $\frac{3}{7}\div4\times5=\frac{15}{28}$

[그림 7] 세로를 고정하고 가로를 1로 만드는 모델 (임재훈, 2007, p.20)

이러한 구체화 모델은 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈의 표준 알고리즘을 단위 비율 결정 맥락만큼이나 제수를 1로 만드는 과정이 잘 드러나지만(임재훈, 2007), 제수가 바뀔 때 제수의 변화에 비례하여 피제수도 변하는 과정이 연속적으로 일어나고 있다.

라. 직사각형 분할 모델

다음으로 직사각형의 넓이를 1로 만드는 모델의 단점을 보완할 수 있는 직사각형 분할 모델을 새롭게 제시하고자 한다. 이 모델은 직사각형을 분할하는 방법에 따라 측정 맥락으로 접근하여 문제를 해결할 수 있고, 또 단위 비율 결정 맥락으로 접근하여 문제를 해결할 수 있다.

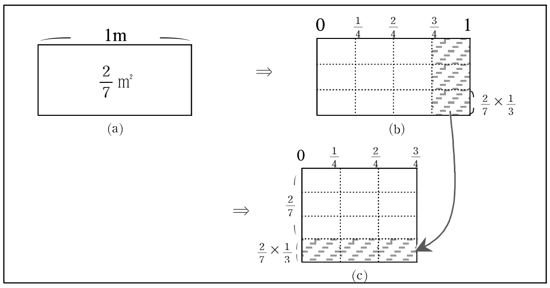
1) 측정 맥락으로 접근하기

문제 '직사각형의 넓이가 $\frac{2}{7}$㎡이고, 가로가 $\frac{3}{4}$m인 직사각형의 세로는 몇 m인가?'를 예로 들어보자. 이 문제를 풀기 위한 나눗셈식은 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$이다.

[그림 8]의 (a)처럼 가로가 1이고, 넓이가 $\frac{2}{7}$인 직사각형이 있다고 하자. 넓이가 $\frac{2}{7}$이므로 세로는 $\frac{2}{7}$이다. (b)에서 제수의 분모에 따라 가로를 4등분하고, 세로를 제수의 분자에 따라 3등분하면, 작은 칸의 세로는 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}$이다. 빗금친 부분을 그림의 (c)와 같이 옮긴다. 그러면 가로가 $\frac{3}{4}$이고, 넓이가 $\frac{2}{7}$인 직사각형의 세로는 $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{7}\times(1+\frac{1}{3})=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$이다.

측정 맥락의 의미가 드러나도록 형식화해 보면, 가로가 $\frac{3}{4}$, 세로가 $\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$이므로, 직사각형의 넓이 $\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}\times(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})$로 나타낼 수 있고, 이것은 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$배를 나타낸다. 이 과정을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=\{\frac{3}{4}\times(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$



[그림 8] 가로가 1인 직사각형 분할 모델

이 방법은 측정 맥락을 기존 모델로 분수의 나눗셈 알고리즘을 도출할 때 피제수와 제수가 뒤바뀌어 나타나는 부자연스러움을 해소할 수 있다. 또한 $\{\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$의 과정은 피제수와 제수를 각각 $\frac{3}{4}$으로 나누는 과정, $\{\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\{(\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})\div\frac{3}{4}\}\div(\frac{3}{4}\div\frac{3}{4})$이 생략된 것으로 볼 수 있다. 이것은 '피제수

와 제수를 0이 아닌 같은 분수로 나누어도 그 몫은 같다.'라는 분수 나눗셈의 성질을 알 수 있게 한다.

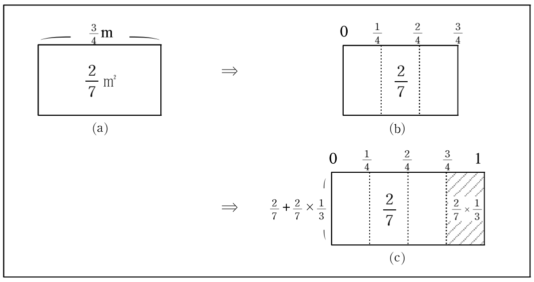
2) 단위 비율 결정 맥락으로 접근하기

나눗셈식 $\frac{2}{7}(㎡)\div\frac{3}{4}(m)$에서 몫을 구하기 위해 $\frac{3}{4}$이 1이 될 때, $\frac{2}{7}$는 얼마인지 알아보자. [그림 9]의 (a)처럼 가로가 $\frac{3}{4}$m이고, 넓이가 $\frac{2}{7}$㎡인 직사각형을 생각할 수 있다. 그리고 (b)처럼 가로를 3등분하자. 가로 $\frac{3}{4}$이 1이 되기 위해서는 $\frac{3}{4}$에서 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$만큼 더 늘어나야 하므로 넓이도 $\frac{2}{7}$에서 (c)의 빗금친 부분인 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}$만큼 더 늘어나게 된다.* 변형된 도형에서 가로가 1이므로 넓이는 세로와 같게 된다. 즉,

$$(세로)=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{7}\times(1+\frac{1}{3})=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$

변형된 도형의 세로는 처음 도형의 넓이 $\frac{2}{7}$에 가로 $\frac{3}{4}$의 역수인 $\frac{4}{3}$를 곱한 것과 같다. 이 과정을 단위 비율 결정 맥락이 드러나도록 식으로 형식화하여 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\div(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})=(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\div 1=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$



[그림 9] 가로가 1이 되는 직사각형 분할 모델

$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$가 되는 과정은 피제수와 제수를 각각 $\frac{4}{3}$로 곱하는 과정, 즉 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\div(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})$이 있다. 이것은 '피제수와 제수를 0이 아닌 같은 분수로 곱하여도 그 몫은 같다.'라는 분수 나눗셈의 성질을 알 수 있게 한다.

Ⅲ. 연구의 방법

1. 연구 대상

본 연구의 목적은 새롭게 구안한 통합모델을 학생들이 어떻게 이해하고, 분수 나눗셈의 실생활 상황들 사이의 관계를 어떻게 구성하는지 살펴보는 데 있다. 이를 위해 전라북도 I시 소재 6학년 1학급을 편의 표집하고, 남학생 13명, 여학생 11명, 총 24명을 대상으로 연구를 진행하였다. 이 학생들은 6학년 2학기 분수의 나눗셈 단원을 학습한 후에 본 실험에 참여하였다. 따라서 학생들은 공통분모를 이용하여 포함제 상황의 분수 나눗셈을 해결하거나, 제수를 줄이고 늘리는 방법으로 단위 비율 결정 상황의 문제를 해결할 수 있게 되었다. 이 학생들을 대상으로 본 실험을 진행함으로써 카테시안 곱의 역 상황을 해결하기 위해 새롭게 구안한 통합모델을 어떻게 이해하고, 기존에 학습한 분수 나눗셈 상황들의 해결 방법 사이의 관계를 어떻게 구성하는지 알아보고자 하였다. I시는 지방에 있는 중·소도시이며, 실험 학급은 보통의 학력을 가진 학생들로 구성되어 있다. 표집 방법의 한계로 본 연구의 결과를 일반화하기에는 제한점이 있다.

---

* 서동엽(2021)은 6학년 2학기 분수의 나눗셈을 지도해 본 교사의 의견을 보면, 문제 상황에 맞는 나눗셈식을 세운 후, $\frac{4}{5}$를 반으로 나누어 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양을 구하고, 원래 있던 $\frac{4}{5}$와 더함으로써 한 통을 가득 채울 수 있는 양을 구하려 하였다. 이를 통해 학생들은 한 통을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하기 위해 이미 채워져 있는 양에 통의 나머지 $\frac{1}{3}$만큼의 바닷물을 더 채우는 것에 초점을 맞추고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 원래 있던 $\frac{4}{5}$와 $\frac{4}{5}$를 반으로 나누어 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양을 더하면 한 통을 가득 채울 수 있는 양을 구할 수 있음을 알고 있다고 해석할 수 있다. 이를 예시 문제 상황에 적용하면, 2015 개정 교과서에서 제시한 것과 같이 가로 $\frac{3}{4}$이 1이 되게 하여 가로 1에 해당하는 넓이 값을 구할 때, 넓이 $\frac{2}{7}$를 3으로 나누고 4를 곱할 수 있으나, 가로가 $\frac{3}{4}$에서 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$만큼 더 늘어나 1이 되는 것처럼, 넓이도 $\frac{2}{7}$에서 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}$만큼 더 늘어나게 된다고 전개하는 것이 학생들의 이해에 도움이 되리라 생각하였다.

2. 교수 실험

가. 사전 검사

새롭게 구안한 통합모델을 제시했을 때 학생들이 얼마나 이해하는지, 6학년을 대상으로 하는 수업을 어떻게 구성해야 하는지 등을 알아보기 위해 초등학교 과정을 마치고 중학교 1학년 과정에 있는 수학 전문학원 수강 학생 6명을 대상으로 2023년 9월에 사전 검사를 실시하였다. 학생들의 수학과 성취도는 상 3명, 중 2명, 하 1명으로 골고루 분포되었다고 볼 수 있다.

검사 결과 대부분의 학생들은 분수의 나눗셈 알고리즘을 이끌어내는 과정을 이해하는데 어려움을 겪었고, 그 과정을 자신의 말로 잘 설명하지 못했으며, 넓이 문제에서 두 가지 풀이 방법이 2015 개정 교과서의 측정 맥락 문제와 단위 비율 결정 맥락 문제와 어떻게 연결되는지도 명확히 알지 못했다. 사전 검사를 통하여 얻은 시사점은 다음과 같다.

첫째, 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 차이점을 자연수의 나눗셈으로 설명하여 분수의 나눗셈에도 적용할 수 있도록 한다.

둘째, 대표적인 나눗셈 상황을 포함제와 등분제라는 용어 대신 “몇 배 구하기”, “한 몫 구하기”와 같이 포함제나 등분제의 의미를 내포하는 쉬운 용어를 사용하도록 한다.

셋째, 맥락을 파악하는 것에 초점을 맞추기 위해 모든 맥락에서 나누어지는 수와 나누는 수를 같게 한다.

넷째, 구체적 조작 활동을 통해서 문제 해결 과정을 관계적으로 이해하도록 한다.

다섯째, 나눗셈의 두 맥락이 나누는 수의 변화와 관련이 있음을 알게 하고 카테시안 곱의 역 맥락에서 어떻게 구현되는지를 알도록 한다.

나. 예비 실험 수업안 작성

예비 검사 결과의 시사점을 반영하여 2차시의 수업안을 작성하였으며, 교육 전문가 1인의 검토를 받아 수업안을 확정하였다. 수업안은 교수·학습 과정안과 학생 학습지로 구성되어 있다. 교수·학습 과정안은 학습의 흐름을 교사가 파악할 수 있도록 개괄적으로 작성하였으며, 학생 학습지는 학생들이 직접 보고 수업에 임할 수 있도록 문제와 질문, 그림 등이 혼합된 형태로 작성하였다.

1차시 수업안은 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 한 개씩 제시하고, 둘의 차이점을 발견하도록 구성하였으며, 2차시 수업안은 카테시안 곱의 역 맥락에서 해결 과정을 두 가지 방법으로 제시하고, 이 두 가지 방법이 1차시에서 풀어본 문제와 어떤 관련성이 있는지 질문을 하였다. 각 차시의 전체적인 흐름은 도입-전개-정리의 단계로 진행하였다.

다. 예비 실험

예비 실험은 2023년 10월 6학년 2학기 ‘분수의 나눗셈’ 단원을 마친 I시 소재 초등학교 6학년 1학급을 대상으로 2차시 수업을 진행하였다.

학생들의 학습지를 살펴본 결과 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 차이점을 잘 설명하지 못했으며, 카테시안 곱의 역 상황의 문제의 방법들과 이미 학습한 맥락 중 비슷한 것끼리 연결하는 데 어려움을 겪었다. 또한 문제 해결 전략을 처음 접하고, 각 상황에서 알고리즘 도출 과정까지 학습하다보니 그 양이 많아 연구에 필요한 질문을 숙고할 수 있는 시간이 부족하였다. 수업을 통하여 얻은 시사점은 다음과 같다.

첫째, 학습이 지루하지 않도록 이미 학습한 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제 계산 과정을 지나치게 자세히 다루지 않는다.

둘째, 2차시 수업을 1차시로 줄여, 카테시안 곱의 역 맥락의 계산 과정에 방점을 둔다.

셋째, 측정 맥락에서 통분을 이용한 해결로는 표준 알고리즘 도출이 자연스럽지 않아, 몇 배의 의미가 잘 드러나는 정사각형 분할 모델을 사용한다.

넷째, 학생들의 수준에 맞도록 질문을 되도록 쉽게 만든다.

라. 본 실험 수업안 작성

예비 실험 결과의 시사점을 반영하여 본 연구자가 1차시의 수업안을 작성하였으며, 교육 전문가 1인의 검토를 받아 수업안을 확정하였다. 수업안은 교수·학습 과정안과 학생 학습지로 구성되어 있다.

먼저 도입 단계에서 자연수의 나눗셈을 ‘몇 배 구하기’와 ‘한 몫 구하기’가 있음을 예시로 취급하였다. 그리고 전개 단계에서 이미 학습한 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 나눗셈 문제를 자연수의 나눗셈과 연결하여 계산 과정을 살펴보았고, 카테시안 곱의 역 맥

락과 관련된 문제를 2가지 방법으로 풀이할 수 있음을 자세히 다루었다. 마지막으로 정리 단계에서 각 분수 나눗셈 문제들의 관련성이 어떠한지에 대해 답하는 것으로 마무리하였다.

전개 단계에서 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 풀어본 후에 두 문제의 계산 과정이 같은지 다른지를 질문하여 답하도록 하고, 왜 그렇게 생각했는지도 적게 하였다. 또한 정리 단계에서 카테시안 곱의 역 맥락에서 해결하는 두 과정이 앞에서 푼 분수 나눗셈 문제들과 계산 과정에서 서로 관련된 것끼리 연결하도록 했으며, 카테시안 곱의 역 맥락의 문제가 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 대신할 수 있다고 생각하는지 묻고, 그 이유도 적도록 하였다.

[표 2] 문제 유형에 따른 주요 학습 내용

문제의 유형	나눗셈식	해결 모델	주요 학습 내용
측정 맥락	$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$	정사각형 분할 모델	- 식 세우기 - 문제 해결하기
단위 비율 결정 맥락	$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$	줄이고 늘리기 모델	- 식 세우기 - 문제 해결하기
카테시안 곱의 역 맥락	$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$	직사각형 분할 모델	- 식 세우기 - 측정 맥락의 과정으로 문제 해결하기 - 단위 비율 결정 맥락의 과정으로 문제 해결하기

마. 본 실험

본 실험은 예비 실험 1주일 후에 실시하였다. 예비 실험을 한 초등학교의 다른 6학년 1학급 24명을 대상으로 하였다.

생각 열기를 통해 자연수의 나눗셈에서 '몇 배 구하기', '한 묶 구하기'라는 용어를 사용하여 두 가지 나눗셈이 있음을 상기하였으며, 몇 배와 한 묶의 의미를 수식으로 나타낼 수 있음도 깨닫도록 하였고, 분수 나눗셈의 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 다루었다. 측정 맥락의 문제는 박중규 외(2019)의 정사각형 분할 모델을 사용하였고, 단위 비율 결정 맥락의 문제는 2015 개정 교과서의 모델을 사용하였다. 두 가지 맥락이 자연수 나눗셈의 두 가지 나눗셈과 어떻게 연관되어있는지 설명하였다. 다음으로 카테시안 곱의 역 맥락 문제를 통해 측정 맥락으로 접근하는 풀이 방법과 단위 비율 결정 맥락으로 접근하는 풀이 방법을 설명하고 구체적 조작 활동을 통해 표준알고리즘을 이끌어내었다. 정리하기에서 카테시안 곱의 역 맥락의 문제 풀이 방법들이 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제 풀이 방법과 어떻게 관련이 있는지 비슷한 풀이 방법끼리 연결하도록 하고, 카테시안 곱의 역 맥락의 문제가 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 대신할 수 있다고 생각하는지도 질문을 하였다.

3. 자료 수집 및 자료 분석

본 연구에서 연구자가 1차시의 수업을 실시하면서 학생들이 학습지의 질문에 답을 공유하지 않고, 자신이 생각한 것을 기술하도록 하였다. 수업 후 학습지를 수집하여 각 질문에 대한 학생들의 반응을 선택형과 서술형으로 나누어 분석하였다.

이미 학습한 분수 나눗셈의 두 가지 맥락의 계산 과정에서 차이점 찾기, 카테시안 곱의 역 맥락에서 두 가지 해결 방법 중 각각의 방법이 이미 학습한 어떤 맥락과 비슷한지 연결하기, 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 카테시안 곱의 역 맥락의 문제 하나로 대신하기와 같은 선택형 질문에 대해서 각각의 비율을 구했다. 그리고 선택형 질문에 대해 왜 그렇게 생각했는지 서술한 내용을 분석하고, 그 내용이 적절한 경우와 적절하지 않은 경우로 나누었으며, 각각 비슷한 서술끼리 유목화하여 그 비율을 구했다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 계산 과정 구별하기

카테시안 곱의 역 문제는 두 가지 방법으로 풀이할 수 있다. 따라서 두 가지 방법이 어떻게 다른지 알기 위해서는 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락에서 풀이 과정이 어떻게 전개되고 이 둘의 풀이 과정이 어떻게 다른지 알 필요가 있다.

가. 중점 지도 내용

생각 열기에서 자연수의 나눗셈식 12 ÷ 3을 해결하

는 두 가지 방법을 소개하고 분수 나눗셈 맥락과 연결하고자 하였다.

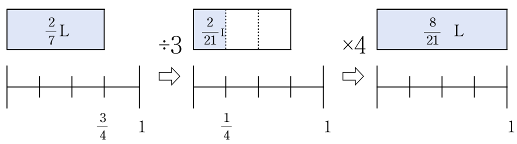
첫 번째 방법은 '사과 12개가 있습니다. 한 명에게 3개씩 주면 몇 명에게 줄 수 있습니까?'와 같이 해석하였다. 사과 12개를 3개씩 덜어내면 4번 덜어낼 수 있으므로 12는 3의 4배 즉, $12=3\times4$이다. 피제과정에서 수를 제수가 포함되는 곱셈으로 나타내는 12가 제수 3의 4배인 것이 드러나므로, $12\div3=(3\times4)\div3=4$와 같이 식으로 표현할 수 있다. 이러한 해석을 포함제의 의미가 들어 있으면서, 학습자들에게 좀 더 쉽도록 '몇 배 구하기'라는 용어를 사용하였다.

두 번째 방법은 '사과 12개가 있습니다. 3명에게 똑같이 나누면 한 명에게 몇 개씩 줄 수 있습니까?'와 같이 해석하였다. 사과 12개를 3명에게 똑같이 나누기 위해 먼저 사과 3개를 3명에게 각각 1개씩 준다. 그러면 1명에게 사과 1개씩 나누어진다. 이를 식으로 표현하면, $3\div3=\frac{3}{3}\div\frac{3}{3}=1\div1=1$이다. 나머지 사과 9개도 3개씩 3명에게 각각 1개씩 주는 것을 반복한다. 그러면 1명에게 사과 4개씩 나누어진다. 우리는 3명에게 사과 12개를 똑같이 나누었고, 1명에게 나누어진 사과의 개수에 관심이 있으므로, 특정한 1명이 가지고 있는 사과의 개수를 나눗셈의 몫으로 할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 $12\div3=\frac{12}{3}\div\frac{3}{3}=4\div1=4$이다. 여기에서 피제수와 제수를 3으로 나눈 것은 사과를 3명에게 똑같이 나누어주었지만 특정한 1명에게 관심을 가지기 때문이다. 이러한 해석을 등분제의 의미가 들어 있으면서, 학습자들에게 좀 더 쉽도록 '한 몫 구하기'라는 용어를 사용하였다.

분수의 나눗셈 중 측정 맥락의 문제로 '갯벌 체험에서 연수는 조개 $\frac{2}{7}$kg을, 슬기는 조개 $\frac{3}{4}$kg을 캤습니다. 연수가 캔 조개양은 슬기가 캔 조개양의 몇 배인지 구해 봅시다(교육부, 2019b).'를 제시하였고, 구하려고 하는 것과 주어진 조건은 무엇인지 질문하였다. 다음으로 식을 세우도록 하고, 식을 계산하는 과정을 문제의 맥락에 맞게 설명하였다. 식은 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$이다. $\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\times1$로 나타낼 수 있고, 정사각형 분할 모델을 통해 $1=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}$가 됨을 설명하였다. 결국 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=(\frac{2}{7}\times1)\div\frac{3}{4}=\{\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}$과 같이 쓸 수 있고, 피제수를 제수가 포함된 곱셈식으로 나타냄을 통해, $\frac{2}{7}(=\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}))$는 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$배가 됨을 알 수 있다. 이 과정의 핵심은 자연수의 나눗셈에서 '몇 배 구하기'처럼 피제수를 제수가 포함된 곱셈으로 나타내는 과정을 통해 문제를 해결하고 있는 것이다. 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=(\frac{2}{7}\times1)\div\frac{3}{4}=\{\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$

분수의 나눗셈 중 단위 비율 결정 맥락의 문제로 '현서는 자격루의 원리가 궁금해서 간이 물시계를 만들었습니다. 맨 위에 있는 종이컵에 물 $\frac{2}{7}$L를 넣었더니 맨 아래에 있는 비커의 $\frac{3}{4}$만큼 물이 찼습니다. 맨 아래에 있는 비커를 가득 채우는 데 필요한 물은 몇 L인지 구해 봅시다(김성여 외, 2022).'를 제시하였고, 구하려고 하는 것과 주어진 조건은 무엇인지 질문하였다. 다음으로 식을 세우도록 하고, 식을 계산하는 과정을 문제의 맥락에 맞게 설명하였다. 식은 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$이다. 비커의 $\frac{3}{4}$만큼 물이 차는 데 물 $\frac{2}{7}$L가 필요하고, 비커의 $\frac{1}{4}$은 $\frac{3}{4}$을 3으로 나눈 만큼이므로, 비커의 $\frac{1}{4}$만큼 물이 차는 데 필요한 물은 $\frac{2}{7}$L를 3으로 나눈 양, 즉 $\frac{2}{7}$L의 $\frac{1}{3}$이다. 이것은 $\frac{2}{21}$이다. 비커의 $\frac{1}{4}$만큼 물이 차는 데 물 $\frac{2}{21}$L가 필요하고, 비커 하나는 $\frac{1}{4}$의 4배이므로, 비커 하나에 가득 차는 물의 양은 $\frac{2}{21}$의 4배이다. 이것을 그림과 식으로 표현하면 [그림 9]와 같다. 이 과정의 핵심은 자연수의 나눗셈에서 '한 몫 구하기'처럼 제수의 한 몫에 해당하는 피제수의 양이 얼마인가를 알아보는 과정을 통해 문제를 해결하고 있는 것이다.



$\frac{2}{7}\div3=(\frac{2}{7}\times\frac{1}{3})$(L) $\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}\times4=\frac{8}{21}$(L)

[그림 10] 단위 비율 결정 맥락에서 문제 해결하기 과정 (교육부, 2019b)

두 과정을 합하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$$

나. 학생들의 반응

위의 지도 과정 후에 학생들에게 던진 질문은 측정 맥락 문제(갯벌 체험 문제)와 단위 비율 결정 맥락 문제(자격루 문제)의 계산 과정은 어떠한가이다. 둘의 계산 과정이 같다고 생각한 비율은 41.6%(10명)이며, 다르다고 생각한 비율은 58.4%(14명)으로 나타나, 다르다고 생각한 비율이 더 높게 나타났다.

계산 과정이 같다고 응답한 학생 중 5명(20.8%)은 응답이 적절하였고, 나머지 5명(20.8%)은 적절하지 않았다.

응답이 적절한 학생들은 모두 역수로 바꿔서 푸는 것은 똑같기 때문이라고 응답하였는데, 계산의 최종 단계에 초점을 두었다고 해석할 수 있다.

[표 3] 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락 문제의 계산 과정 구별하기

(N=24)

구분	같다	다르다	계
응답 수(명)	10	14	24
백분율(%)	41.7	58.3	100

계산 과정이 다르다고 응답한 학생 중 6명(25.0%)은 몇 배 구하기와 한 몫 구하기로 계산 과정이 다르다고 하거나, 구하는 방식이 다르다고 하였고, 3명(12.5%)은 두 맥락의 몫을 구하는 과정이 다르다고 하여 그 이유가 적절하며, 응답 수는 9명(37.5%)이다. 이유가 적절하지 않은 5명(20.9%)은 계산 과정의 차이보다는 식 또는 수직선을 사용하였는지 또는 복잡한지 등 계산 과정이 아닌 주변적인 요소에 주목하거나 응답하지 않았다.

[표 4] 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 계산 과정이 같다는 이유

(N=24)

이유		응답수(명)	백분율(%)	학생 응답 예시
적절함	역수로 바꿔서 푼다	5	20.7	역수로 바꿔서 푸는건 똑같아서
적절하지 않음	식이 비슷하다	3	12.5	식이 비슷해서
	분수의 나눗셈이다	1	4.2	똑같이 분수의 나눗셈을 하니까
	하나는 요약이다	1	4.2	활동 1을 활동 2로 요약한 것 같아서
계		10	41.6	

[표 5] 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 계산 과정이 다르다는 이유

(N=24)

이유		응답수(명)	백분율(%)	학생 응답 예시
적절함	계산 과정이 다르다	6	25.0	갯벌은 몇 배 구하기 문제인데 자격루 문제는 한 몫을 구하는 문제여서 계산 과정이 다르다.
	몫을 구하는 과정이 다르다	3	12.5	갯벌 체험문제는 ×을 추가하여 나누는값의 역수를 남기고 생략했고 자격루 문제는 한칸에 해당하는 값을구해 전체를 구했다.
적절하지않음	계산 과정이 아닌 주변적인 것에 주목	4	16.7	다른것 같다. 갯벌 체험은 [illegible] 식으로 나타냈고 자격루 문제에선 수직선을 사용했다
	무응답	1	4.2	
계		14	58.4	

2. 카테시안 곱의 역 맥락에서 두 가지 해결 방법의 의미 이해하기

가. 중점 지도 내용

분수의 나눗셈 중 카테시안 곱의 역 맥락의 문제로 '직사각형의 넓이가 $\frac{2}{7}$㎡이고, 가로가 $\frac{3}{4}$m인 직사각형의 세로는 몇 m입니까?'를 제시하였다.

첫 번째 방법으로 세로를 구하였다. 구하려고 하는 것과 주어진 조건을 알아보고, 식을 세우고 문제의 맥락에 맞도록 풀이 과정을 설명하였다. 나눗셈식은 $\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$이다. [그림 8]의 ⓐ처럼 가로가 1m이고, 넓이가 $\frac{2}{7}$㎡인 직사각형이 있다고 하자. (넓이)=(가로)×(세로)인데, 가로가 1이기 때문에 넓이가 $\frac{2}{7}$이면, 세로는 $\frac{2}{7}$이다. ⓑ에서 제수의 분모에 따라 가로를 4등분하고, 세로를 제수의 분자에 따라 3등분하면, 작은 칸의 세로는 $\frac{2}{7}$의 $\frac{1}{3}$, 즉 $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$이다. 빗금친 부분을 ⓒ와 같이 옮겨 보자. 그러면 가로가 $\frac{3}{4}$이 되고, 세로는 원래 있던 3칸의 길이와 옮긴 한 칸의 길이를 더한 것과 같아서, $\frac{2}{7}+\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}=\frac{2}{7} \times (1+\frac{1}{3})=\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$이다.

가로가 $\frac{3}{4}$, 세로가 $\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$이므로, 직사각형의 넓이 $\frac{2}{7}$는 (가로)×(세로)$=\frac{3}{4} \times (\frac{2}{7} \times \frac{4}{3})$로 나타낼 수 있고, 이것은 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$배를 나타낸다. 이 과정을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}=\{\frac{3}{4} \times (\frac{2}{7} \times \frac{4}{3})\} \div \frac{3}{4}=\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$$

두 번째 방법으로 세로를 구하였다. 구하려고 하는 것과 주어진 조건을 알아보고, 식을 세우고 문제의 맥락에 맞도록 풀이 과정을 설명하였다. 나눗셈식은 $\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$이다. [그림 9]의 ⓐ처럼 가로가 $\frac{3}{4}$m이고, 넓이가 $\frac{2}{7}$㎡인 직사각형을 생각할 수 있다. 그리고 ⓑ처럼 가로를 3등분하자. 가로 $\frac{3}{4}$이 1이 되기 위해서는 $\frac{3}{4}$에서 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$만큼 더 늘어나야 하므로 넓이도 $\frac{2}{7}$에서 ⓒ의 빗금친 부분인 $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$만큼 더 늘어나게 된다. 변형된 직사각형에서 가로가 1이므로 넓이는 세로와 같게 된다. 즉,

$$(\text{세로})=\frac{2}{7}+\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}=\frac{2}{7} \times (1+\frac{1}{3})=\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$$

변형된 직사각형의 세로는 처음 도형의 넓이 $\frac{2}{7}$에 가로 $\frac{3}{4}$의 역수인 $\frac{4}{3}$를 곱한 것과 같다. 이 과정은 한 몫 구하기에서 제수가 1이 될 때, 피제수는 얼마인지 알아보는 것이다. 즉,

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}=(\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}) \div 1=\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$$

나. 학생들의 반응

위의 지도 과정 후에 학생들에게 던진 첫 번째 질문은 카테시안 곱의 역 맥락의 두 가지 해결 방법이 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 계산 과정에 있어서 비슷한 것 연결하기이다. 문제 해결의 계산 과정이 비슷한 것끼리 바르게 찾은 경우는 45.8%(11명), 틀리게 찾거나 응답하지 않은 경우는 54.2%(13명)이다.

[표 6] 카테시안 곱의 역 맥락의 두 가지 해결 방법과 같은 맥락 찾기

(N=24)

구분	바르게 찾음	틀리게 찾음	무응답	계
응답 수(명)	11	12	1	24
백분율(%)	45.8	50.0	4.2	100

이어진 두 번째 질문은 카테시안 곱의 역 문제가 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 대신할 수 있겠는가이다. 대신할 수 있다는 응답은 58.4%(14명), 대신할 수 없다는 응답은 41.6%(10명)이다. 대신할 수 있다는 응답의 비율이 더 높다.

대신할 수 있다고 답한 학생 중 적절한 이유를 제시한 경우가 7명(29.2%)이며, 적절하지 않은 이유를 제시한 경우가 7명(29.2%)이다. 적절한 이유로는 '계산의 과정이 비슷하다'는 6명(25.0%), '분수 나눗셈으로 같다'는 1명(4.2%)으로 나타났고, 적절하지 않은 이유로는 '문제가 같다'는 3명(12.5%), '계산 결과는 같다'는 2명(8.3%), '식이 비슷하다'는 1명(4.2%), 기타 1명(4.2%)으로 나타났다.

대신할 수 없다고 답한 학생 중 적절한 이유를 제시한 경우가 4명(16.7%)이며, 적절하지 않은 이유를 제

시한 경우가 6명(24.9%)이다. 적절한 이유로는 ‘문제가 다르다’가 4명(16.7%)으로 나타났고, 적절하지 않은 이유로는 ‘어렵다’가 2명(8.3%), ‘문제 상황을 이해하지 못함’이 2명(8.3%), ‘완성하지 못하거나 무응답’이 2명(8.3%)으로 나타났다.

[표 7] 카테시안 곱의 역 맥락의 문제가 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 대신하기

(N=24)

구분	대신할 수 있다	대신할 수 없다	계
응답 수(명)	14	10	24
백분율(%)	58.4	41.6	100

[표 8] 대신할 수 있다는 이유

(N=24)

이유		응답수(명)	백분율(%)	학생 응답 예시
적절함	계산의 과정이 비슷하다	6	25.0	같은 풀이 방식이어서 문제를 대신할 수 있다 과 과정
	식이 비슷하다	1	4.2	식이 비슷해서
적절하지 않음	문제가 같다	3	12.5	두 문제는 같기 때문
	계산 결과는 같다	2	8.3	방법만 다르고 결과는 같기 때문에 어떤 방법으로 계산해도
	분수 나눗셈으로 같다	1	4.2	똑 같은 분수의 나눗셈을 구하는 방법중 하나니까
	기타	1	4.2	쉽고 다음에 할 수 있다
계		13	54.2	

[표 9] 대신할 수 없다는 이유

(N=24)

이유		응답수(명)	백분율(%)	학생 응답 예시
적절함	문제가 다르다	4	16.7	문제가 다르기 때문에
적절하지 않음	어렵다	2	8.3	갯벌 체험 문제와 자격증 문제가 더 쉬운 것 같다.
	문제 상황을 이해하지 못함	2	8.3	하나는 넓이=가로×세로이고 다른 것은 넓이=세로이기 때문
	완성하지 못하거나 무응답	2	8.3	왜냐하면, 갯벌은 몇 배 구하기지만 넓이는
계		8	33.3	

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 카테시안 곱의 역 맥락에서 직사각형 분할 모델을 새롭게 제시하고, 수업 상황에서 학생들이 이 통합모델을 어떻게 이해하고, 분수의 나눗셈 맥락들 사이의 관계를 어떻게 구성하는지 살펴보았다. 학습지의 질문에 대한 학생들의 응답을 분석함으로써 분수 나눗셈 지도와 관련하여 몇 가지 시사점을 확인할 수 있었다.

첫째, 분수의 나눗셈을 계산할 때 단순히 표준알고리즘을 적용하기보다는 제수의 역수를 곱하는 이유나 역수의 의미를 상기시키기 위해서 분수의 나눗셈식을 측정 맥락이나 단위 비율 결정 맥락으로 해석하여 계산 과정을 설명할 필요가 있다.

측정 맥락 문제와 단위 비율 결정 맥락 문제의 계산 과정이 같다고 응답한 학생 중에서 5명(20.7%)이 제수를 역수로 바꿔서 풀었기 때문이라고 하면서 분수의 나눗셈식을 계산할 때 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 초점을 맞추고 있다. 그리고 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 계산 과정이 다르다고 응답한 학생 중에서 9명(37.5%)은 두 맥락의 계산 과정이 왜 다른지 그 까닭을 어느 정도 알고 있어서 두 맥락에서 계산 과정의 차이를 인식할 수 있다. 따라서 자연수의 나눗셈식을 계산할 때 “똑같이 나누어 주는 나눗셈(교육부, 2018, p.198)”이나 “같은 양이 몇 번 들어 있는 나눗셈(교육부, 2018, p.200)”으로 해석하여 그 계산 과정을 깨닫도록 하는 것처럼 분수의 나눗셈식을 계산할 때도 제수를 그대로 이용하는 측정 맥락이나 제수를 1로 만드는 단위 비율 결정 맥락으로 해석하여 계산함으로써 계산 과정에서 제수의 역수를 곱하는 이유나 역수의 의미를 상기시킬 필요가 있다.

둘째, 직사각형 분할 모델은 분수의 나눗셈식을 측정 맥락으로 해석할 때 기존 모델에서 나타나는 우회적이거나 부적절한 부분을 보완할 수 있고, 카테시안 곱의 역 문제에서 표준알고리즘을 이끌어내기에 적절한 모델이라고 할 수 있다.

카테시안 곱의 역 맥락의 두 가지 해결 방법 중 각각의 방법이 측정 맥락이나 단위 비율 결정 맥락 중 계산 과정이 비슷한 맥락과 연결하기에서 11명(45.8%) 학생들이 바르게 연결하고 있다. 분수의 나눗셈식이 있을 때 이를 실생활 맥락인 측정 맥락이나 단위 비율 결정 맥락으로 해석하여 풀이 과정을 설명할 수 있다. 하지만 측정 맥락으로 해석하여 설명하기 위한 측정 단위 세분 모델이나 수직선 모델, 수직 막대 모델 등은 표준알고리즘에 이르기까지 측정 맥락과 직접적으로 관련 없는 교환법칙 적용과 같은 대수적 계산 과정 등을 거쳐야 한다. 그러나 직사각형 분할 모델을 통해 카테시안 곱의 역 맥락으로 해석하면, 제수를 그대로 이용하는 방법인 측정 맥락처럼 계산 과정을 자연스럽게 설명할 수 있다.

한편 2015 개정 교과서에서 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 카테시안 곱의 역 맥락으로 풀이하지 않고, 측정 맥락이나 단위 비율 결정 맥락에서 도출된 계산 과정을 적용하고 있다. 예를 들어, 넓이가 2㎡인 직사각형이 있을 때, 세로가 $\frac{5}{7}$m이면, 가로는 몇 m인지 알아보는 문제의 풀이를 $2\div\frac{5}{7}$로 식을 세우고, 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하고 있다(교육부, 2019a). 따라서 적용한 계산 과정이 문제의 맥락을 고려하지 않아 자연스럽지 않다. 이뿐만 아니라 최근 보급되고 있는 검정 교과서에서도 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 그 문제의 맥락에 적합하도록 알고리즘을 직접 도출하여 적용하지 않고 있다(강완 외, 2022; 김성여 외, 2022; 류희찬 외, 2022; 박교식 외, 2022; 박만구 외, 2022; 박성선 외, 2022; 신항균 외 2022; 안병곤 외, 2022; 장혜원 외 2022; 한대희 외 2022). 예를 들어, 넓이가 $3\frac{3}{4}$㎡인 직사각형 모양의 텃밭을 만들 때 가로가 $\frac{5}{6}$m이면, 세로를 몇 m로 해야 하는지 구하는 문제의 풀이를 $3\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{15}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{15}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$과 같이 단위 비율 결정 맥락에서 도출한 분수 나눗셈의 알고리즘을 적용하고 있다(박만구, 2022).

카테시안 곱의 역 맥락에서 넓이와 가로가 주어졌을 때 세로를 구하는 방법은 이용률(2005), Sinicrope et al.(2002), 임재훈(2007)이 제시한 모델들을 사용할 수 있다. 그러나 이용률(2005)의 모델은 변형 과정이 복잡하고 독창성을 요하여 학생들이 생각해내기 어렵고, Sinicrope et al.(2002)의 모델은 제수와 피제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계에 있는 경우에 설명되므로 일반적으로 적용하기에는 한계가 있다(임재훈,

2007). 또한 임재훈(2007)이 제시한 가로의 길이를 1로 만드는 방법이나 넓이를 1로 만드는 방법은 어떤 수에 그 수의 역수를 곱하면 1이 된다는 것과 비례식에 대한 지식(임재훈, 2007), 또는 피제수와 제수의 공변적 사고 과정을 요구한다. 따라서 이들 방법이나 모델을 카테시안 곱의 역 맥락의 문제에 적용하기는 어려워 보인다. 하지만 직사각형 분할 모델은 단순한 조작 활동을 통해 계산 과정을 시각적으로 보여줄 수 있다는 장점이 있다.

셋째, 카테시안 곱의 역 맥락의 직사각형 분할 모델은 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락에서의 계산 과정을 자연스럽게 드러낼 수 있고, 하나의 나눗셈식이 왜 두 가지 해석이 가능한지를 보여줄 수 있어 통합 모델로 사용하기에 적절하다고 볼 수 있다.

카테시안 곱의 역 문제로 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락의 문제를 대신할 수 있다고 응답한 학생들은 14명(58.4%)으로, 1차시의 수업으로 과반수의 학생들이 직사각형 분할 모델을 사용한 카테시안 곱의 역 맥락의 문제 해결 과정들이 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락에서 문제를 해결하는 계산 과정들을 포함한다는 사실을 인지하게 되었다. 분수 나눗셈의 측정 맥락에서 문제를 해결하기 위해서는 문제에서 주어진 제수를 그대로 이용하여 피제수가 제수의 몇 배인지 구하고, 피제수를 제수가 포함된 곱셈식으로 자연스럽게 표현할 수 있어야 한다. 그리고 단위 비율 결정 맥락에서 문제를 해결하기 위해서는 제수의 한 단위에 해당하는 피제수의 양을 구하고, 제수가 1이 되면서 피제수가 제수의 1에 해당하는 양으로 자연스럽게 바뀔 수 있어야 한다. 본 논문에서 제시한 카테시안 곱의 역 맥락에서의 직사각형 분할 모델을 통해 측정 맥락 문제의 계산 과정처럼 주어진 제수를 그대로 사용하여 피제수가 제수의 몇 배인지 (넓이)=(가로)×(세로)이므로 (넓이)÷(가로)={(가로)×(세로)}÷(가로)=(세로)가 됨을 통해 자연스럽게 구할 수 있고, 단위 비율 결정 맥락 문제의 계산 과정처럼 제수 한 단위에 해당하는 피제수의 양을 자연스럽게 구할 수 있다. 따라서 카테시안 곱의 역 맥락의 직사각형 분할 모델은 측정 맥락과 단위 비율 결정 맥락에서의 계산 과정을 자연스럽게 드러낼 수 있을 뿐만 아니라 하나의 나눗셈식이 왜 두 가지 해석이 가능한지를 보여줄 수 있다.

본 연구는 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 해결하기 위해 직사각형 분할 모델을 새롭게 제시하고 수업 상황에서 학생들이 직사각형 분할 모델을 어떻게 받아들이는지를 살펴보았다. 다양한 검정 교과서가 출판되고 있는 시점에서 학생들이 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 단순히 표준알고리즘을 적용하여 해결하기보다는 직사각형 분할 모델을 통해 의미있게 해결하고, 분수의 나눗셈식을 계산할 때 실생활 맥락으로 해석하여 그것에 맞게 계산하는 과정을 드러냄으로써 제수의 역수를 곱하는 이유와 그 의미를 상기할 수 있기를 바란다.

참 고 문 헌

강완 외(2022). 수학 6-2. 대교.

강창옥(2013). 시각적 표현을 강조한 수업이 문제해결력과 수학 학습 태도에 미치는 영향. 서울교육대학교 석사학위논문.

강흥규(2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 319-339.

교육부(2015). 수학 6-1. ㈜천재교육.

교육부(2018). 수학 3-1 교사용지도서. ㈜천재교육.

교육부(2019a). 수학 6-2 교사용지도서. ㈜천재교육.

교육부(2019b). 수학 6-2. ㈜천재교육.

김명윤, 장경윤(2009) 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도. 학교수학, 11(4), 685-706.

김민경(2009). 초등학생의 분수 이해 분석 - 6학년 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로 -. 한국학교수학회논문집, 12(2), 151-170.

김성여 외(2022). 수학 6-1. 서울: 아이스크림 미디어.

김소희, 이광호, 구미영(2013). 초등학교 4학년 학생들의 수학 문제해결과정에서의 시각적 표현. 초등수학교육, 18(2), 319-339.

김정하(2020a). 분수 나눗셈 지도 방법의 변천 과정 분석. 수학교육학연구, 30(1), 67-88.

김정하(2020b). 이중수직선을 이용한 분수 나눗셈 지도에 대한 고찰. 학습자중심교과교육연구, 20(8), 1253-1277.

김홍회(2014). 6학년 분수 나눗셈의 개념 이해를 위한 프로그램 개발; 제수를 1로 만드는 방법을 중심으

로. 경인교육대학교 석사학위논문.
류희찬 외(2022). 수학 6-2. 금성출판사.
박교식(2014). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 정당화 과정 분석. 한국초등수학교육학회지, 18(1), 105-122.
박교식, 송상헌, 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, 6(3), 235-249.
박교식 외(2022). 수학 6-2. 동아출판.
박만구 외(2022). 수학 6-2. 천재교과서.
박미연, 박영희(2017). 초등학교 6학년 학생이 분수 계산 문제에서 보이는 오류의 학업성취 수준별 분석. 한국초등수학교육학회지, 21(1), 23-47.
박성선 외(2022). 수학 6-2. 와이비엠.
박중규, 이광호, 성창근(2019). 초등학교 수학에서 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화하기. 초등수학교육, 22(2), 113-127.
서동엽(2021). 분수 나눗셈 지도 방법에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 25(1), 81-102.
송정화(2005). 분수의 곱셈, 나눗셈 문제 해결 과정에서 나타난 장애 요인 분석. 전주교육대학교대학원 석사학위논문.
신준식(2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. 수학교육, 52(2), 217-230.
신항균 외(2022). 수학 6-2. 비상교육
안병곤 외(2022). 수학 6-2. 동아출판.
이경화(2016). 현실적 수학교육 이론의 재음미. 수학교육학연구, 26(1), 47-62.
이대현(2022). 우리나라 초등 수학 교과서에 제시된 분수 나눗셈 내용과 해결 방법 분석. 한국학교수학회논문집, 25(2), 105-124.
이용률(2005). 지도내용의 핵심과제 99. 경문사.
이지영(2015). 초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습경로 개발. 한국교원대학교 박사학위논문.
임재훈(2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. 학교수학, 9(1), 13-28.
임재훈(2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성. 한국초등수학교육학회지, 20(4), 521-539.
임재훈(2018). 분수 나눗셈의 통합적 이해를 위한 방편으로서 포함제에서 1÷(제수)를 매개로 하는 방법에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 22(4), 385-403.
임재훈, 김수미, 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. 학교수학, 7(2), 103-121.
장혜원 외 2022). 수학 6-2. 미래엔.
조선미, 방정숙(2021). 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업의 분석. 학교교육, 60(4), 409-429.
최경아(2013). 시각적 표현을 강조한 문제해결지도가 문장제 해결에 미치는 영향 : 초등학교 5학년 중심으로. 경인교육대학교 석사학위논문.
한대희 외(2022). 수학 6-2. 천재교과서.
NCTM (2011). *Developing Essential Understanding of Multiplication and Division for Teaching Mathematics in grades 3-5*. NCTM. 백석윤, 류현아, 이종영, 도주원 역(2016). 곱셈과 나눗셈의 필수 이해. 교우사.
Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). NCTM.
Sinicrope, R.; Mick, H. W. & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). NCTM.

A study on the visual integrated model of the fractional division algorithm in the context of the inverse of a Cartesian product

Lee, Kwangho
Korea National University of Education
E-mail : paransol@knue.ac.kr

Park, Jungkyu†
Yeoyang Elementary School
E-mail : pjkrang@hanmail.net

The purpose of this study is to explore visual models for deriving the fractional division algorithm, to see how students understand this integrated model, the rectangular partition model, when taught in elementary school classrooms, and how they structure relationships between fractional division situations. The conclusions obtained through this study are as follows. First, in order to remind the reason for multiplying the reciprocal of the divisor or the meaning of the reciprocal, it is necessary to explain the calculation process by interpreting the fraction division formula as the context of a measurement division or the context of the determination of a unit rate. Second, the rectangular partition model can complement the detour or inappropriate parts that appear in the existing model when interpreting the fraction division formula as the context of a measurement division, and can be said to be an appropriate model for deriving the standard algorithm from the problem of the context of the inverse of a Cartesian product. Third, in the context the inverse of a Cartesian product, the rectangular partition model can naturally reveal the calculation process in the context of a measurement division and the context of the determination of a unit rate, and can show why one division formula can have two interpretations, so it can be used as an integrated model.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : division of fractions, fractions division algorithm, integrated model, rectangular partition model, context of measurement division, context of the determination of a unit rate, context of the inverse of a Cartesian product
† Corresponding Author

[부록 1] 교수 · 학습 과정안

단원	1. 분수의 나눗셈	차시	8/11
학습 목표	분수의 나눗셈을 실생활 상황에 맞게 계산하는 과정을 알 수 있다.		
단계	교수 • 학습 활동		주의사항
도입	◎ 동기 유발 <자연수의 나눗셈 상황 알아보기> • 몇 배 구하기: 몇 번 덜어낼 수 있는가? 나누는 수의 몇 배인가? $12 \div 3 = (3 \times 4) \div 3 = 4$ • 한 묶 구하기: 하나의 양은 얼마인가? 똑같이 나누면, 한 묶은 얼마인가? $12 \div 3 = \frac{12}{3} \div \frac{3}{3} = 4 \div 1 = 4$		포함제, 등분제 대신 '몇 배 구하기', '한 묶 구하기'로 나눗셈상황의 의미를 쉽게 알 수 있는 용어를 사용한다.
전개	◎ 학습 안내 • 분수의 나눗셈 문제 해결하기(몇 배 구하기, 한 묶 구하기) • 넓이 문제에서 해결 방법 두 가지 알아보기 ◎ 활동 1 〈측정 맥락 문제 해결하기〉 • 구하려고 하는 것과 주어진 조건 알아보기 • 식을 세우고, 문제의 상황에 맞게 계산하기 ◎ 활동 2 〈단위 비율 결정 맥락 문제 해결하기〉 • 구하려고 하는 것과 주어진 조건 알아보기 • 식을 세우고, 문제의 상황에 맞게 계산하기 [잠깐!] <활동 1, 2 비교하기> • 갯벌 체험 문제와 자격루 문제의 계산 과정 설명하기 ◎ 활동 3 〈두 가지 방법으로 문제 해결하기〉 [방법 1] 〈측정 맥락으로 카테시안 곱의 역 문제 해결하기〉 • 구하려고 하는 것과 주어진 조건 알아보기 • 식을 세우고, 문제의 상황에 맞게 계산하기 [방법 2] 〈단위 비율 결정 맥락으로 카테시안 곱의 역 문제 해결하기〉 • 구하려고 하는 것과 주어진 조건 알아보기 • 식을 세우고, 문제의 상황에 맞게 계산하기		활동 1의 문제를 '갯벌 체험 문제', 활동 2의 문제를 '자격루 문제', 활동 3을 '넓이 문제'로 이름지어 각 문제 상황을 연상할 수 있도록 한다.
정리	◎ 정리하기 <활동 1, 2, 3 비교하기> • 문제 해결의 계산 과정이 비슷한 것 찾기 • 넓이 문제가 갯벌 체험 문제와 자격루 문제 상황을 대신할 수 있는지 설명하기		

[부록 2] 학생용 학습지

계산하는 과정을 생각하며 분수의 나눗셈을 해 봅시다.

생각 열기 철수와 수지는 아래의 나눗셈을 어떻게 해결하려고 하는지 알아봅시다.

12 ÷ 3
철수: 사과 12개가 있습니다. 한 명에게 3개씩 주면 몇 명에게 줄 수 있을까? 수지: 사과 12개가 있습니다. 3명에게 똑같이 나누면 한 명에게 몇 개씩 줄 수 있을까?

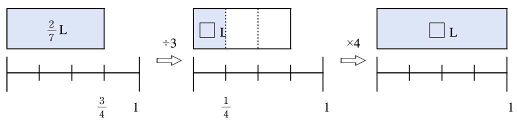
활동 1 갯벌 체험에서 연수는 조개 $\frac{2}{7}$kg을, 슬기는 조개 $\frac{3}{4}$kg을 캤습니다. 연수가 캔 조개양은 슬기가 캔 조개양의 몇 배인지 구해 봅시다.

• 구하려고 하는 것은 무엇인가요? (   )
• 주어진 조건은 무엇인가요? (   )
• 알맞은 식을 세우고, 과정을 생각하며 계산을 해 봅시다.

$$\frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = (\frac{2}{7} \times \square) \div \frac{\square}{\square} = \{\frac{2}{7} \times (\frac{3}{4} \times \frac{\square}{\square})\} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{7} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

활동 2 현서는 자격루의 원리가 궁금해서 간이 물시계를 만들었습니다. 맨 위에 있는 종이컵에 물 $\frac{2}{7}$L를 넣었더니 맨 아래에 있는 비커의 $\frac{3}{4}$만큼 물이 찼습니다. 맨 아래에 있는 비커를 가득 채우는 데 필요한 물은 몇 L인지 구해 봅시다.

• 구하려고 하는 것은 무엇인가요? (   )
• 주어진 조건은 무엇인가요? (   )
• 알맞은 식을 세우고, 과정을 생각하며 계산을 해 봅시다.



$$\frac{2}{7} \div 3 = (\frac{2}{7} \times \frac{1}{\square})(L) \qquad \frac{2}{7} \times \frac{1}{\square} \times \square = \square\ (L)$$

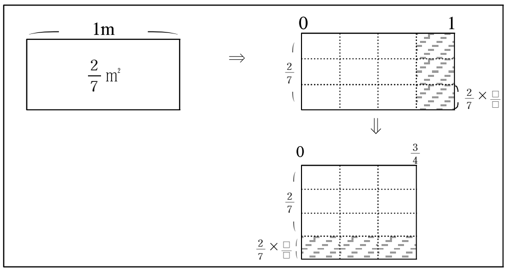
잠깐!

• 위의 갯벌 체험 문제와 자격루 문제에서 계산 과정은 (같다, 다르다).
• 왜 그렇게 생각했나요?
(   )

활동 3 직사각형의 넓이가 $\frac{2}{7}\text{m}^2$이고, 가로가 $\frac{3}{4}$m인 직사각형의 세로는 몇 m입니까?

(방법 1) '몇 배 구하기'로 세로를 구해 봅시다.

- 구하려고 하는 것은 무엇인가요? (   )
- 주어진 조건은 무엇인가요? (   )
- 알맞은 식을 세우고, 과정을 생각하며 계산을 해 봅시다.



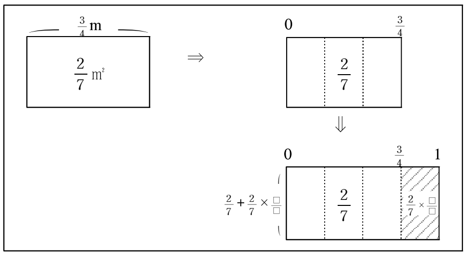
$$\frac{\square}{\square}\div\frac{\square}{\square}=\frac{2}{7}+(\frac{2}{7}\times\frac{\square}{\square})=\frac{2}{7}\times(1+\frac{\square}{\square})=\frac{2}{7}\times\frac{\square}{\square}$$

$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=\{\frac{3}{4}\times(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$

((넓이)=(가로)×(세로)이기 때문이다.)

(방법 2) '한 묶 구하기' 로 세로를 구해 봅시다.

- 구하려고 하는 것은 무엇인가요? (   )
- 주어진 조건은 무엇인가요? (   )
- 알맞은 식을 세우고, 과정을 생각하며 계산을 해 봅시다.



$$\frac{\square}{\square}\div\frac{\square}{\square}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{\square}{\square}=\frac{2}{7}\times(1+\frac{\square}{\square})=\frac{2}{7}\times\frac{\square}{\square}$$

$$\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3})\div1=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$$

(가로가 1일 때, 넓이는 세로와 같기 때문이다.)

정리하기 활동 1, 2, 3의 문제를 해결하는 방법을 비교해 봅시다.

- 문제 해결의 계산 과정이 비슷한 것끼리 선을 이으시오.

갯벌 체험 문제 •	• 넓이 문제의 (방법 1)
자격루 문제 •	• 넓이 문제의 (방법 2)

- 넓이 문제가 갯벌 체험 문제와 자격루 문제를 대신할 수 (있다, 없다).
- 왜 그렇게 생각했나요?
  (   )