韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.1.39
2024. 1. 제 27권, 제 1호, 39-55

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2024, Vol. 27, No. 1, 39-55

등호 도입 단원에서 관계적 이해를 강조한 수업에 따른 학생들의 이해 분석

이유진(대전홍릉초등학교, 교사)

최근 2022 개정 수학과 교육과정에 등호와 동치관계에 관한 성취기준이 신설됨에 따라 등호의 관계적 이해를 강조한 지도방안과 학생의 등호 이해를 살펴보려는 노력이 활발하다. 이러한 맥락에서 본 연구는 등호가 도입되는 1학년 1학기 덧셈과 뺄셈 단원을 등호의 관계적 이해를 강조하여 재구성하였으며, 재구성한 수업에 참여한 실험반 학생들과 일반 수업에 참여한 비교반 학생들 간의 등호 이해를 분석하였다. 이를 위해 실험반과 비교반, 총 2개 학급 학생을 대상으로 등호 이해에 관한 사전·사후 검사를 실시하고 결과를 비교·분석하였다. 연구 결과, 실험반 학생들은 비교반 학생들에 비해 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 모든 유형에서 평균이 유의미하게 높았다. 또한 문항별 분석 결과 ‘a=b’와 ‘a+b=c+d’ 구조의 등식을 다룬 문항에서 비교반과 실험반의 평균이 큰 차이를 보였으며, 실험반 학생들은 대부분 등호의 의미로 ‘같다’를 옳다고 답했으나 여전히 ‘문제에 대한 답’으로 이해하는 응답도 많음을 확인할 수 있었다. 이러한 결과를 토대로 등호의 도입 단원에서 관계적 이해를 강조한 지도 방안과 관련된 시사점을 논의하였다.

I. 서론

전통적인 대수 교육의 문제점을 극복하기 위해 초등학교에서부터 대수적 사고를 지도해야 한다는 초기 대수 관점이 대두됨에 따라 대수적 사고의 필수 요소 중 하나인 등호의 관계적 이해에 대한 중요성도 커지고 있다(Blanton et al., 2011). 등호에 대한 관계적 이해 즉, 등호를 두 식의 동치 관계를 나타내는 기호로 이해하고 등식을 계산해야 하는 대상이 아니라 그 자체로 추론하는 것은 이후 대수 학습에 영향을 주며(Alibali et al., 2007), 특히 저학년에서의 등호 지식은 고학년에서의 대수 학습에 영향을 미친다는 점에서 저학년에서의 등호 학습은 더욱 중요하다 할 수 있다(Matthews et al., 2020). 이러한 등호 학습의 중요성을 반영하여 최근 2022 개정 수학과 교육과정에서는 3~4학년군 성취기준에 ‘등호와 동치관계’를 추가하고, 등호의 관계적 이해를 강조하기 위해 “등호(=)의 의미를 토대로 구체물, 그림 등을 사용하여 주어진 식이 옳은 식인지 판단하는 활동, 크기가 같은 두 양을 찾는 활동을 통해 동치 관계를 이해하고 이를 식으로 나타내게 한다.”는 성취기준 해설을 제시하고 있다(교육부, 2022, p. 19).

하지만 등호에 대한 학생 이해를 다룬 선행연구를 살펴보면 다른 학년에 비해 저학년 학생들의 이해가 부족하며(김정원 외, 2016; Matthews et al., 2012), 특히 저학년 학생들이 등호의 의미를 가장 최근에 배웠음에도 불구하고 다른 학년에 비해 등호를 ‘답’이나 ‘더한다’라는 연산적 의미로 이해하는 경향을 보였다(김정원 외, 2016; 이유진, 방정숙, 2023). 이처럼 저학년 학생들은 등호 이해에 어려움을 겪고 있지만, 초등학교 3학년 이상 학생들을 대상으로 한 연구가 많으며 저학년을 대상으로 한 연구, 특히 등호가 처음 도입되는 초등학교 1학년 학생을 대상으로 한 연구는 별반 없다. 예외적으로 초등학교 1학년 학생들을 대상으로 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 진행한 연구(예, 김소현, 방정숙, 2023; 이유진, 2023)가 있지만, 수업에 초점을 맞춰 분석하였기 때문에 학생들의 이해가 어떻게 달라졌는지 알기가 어렵다.

이에 본 연구에서는 1학년에서 처음으로 등호를 도입하는 덧셈과 뺄셈 단원을 재구성하여 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 진행하였으며, 일반적인 수업을 받은 학생과 비교하여 학생들의 등호 이해를 면밀하게 비교·분석하였다. 이러한 연구 결과를 토대로 등호를 처음 도입하는 단계에서 저학년 학생들에게 등호를 관

* 접수일(2023년 12월 19일), 심사(수정)일(2024년 1월 13일), 게재확정일(2024년 1월 23일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 등호, 관계적 이해, 등식 구조, 등식 해결

계적으로 지도하기 위한 구체적인 지도 방안에 시사점을 논의하였다.

II. 이론적 배경

1. 저학년 학생들의 등호 이해

가. 저학년 학생들의 등호 이해

본 연구는 초등학교 1학년 학생들을 대상으로 하였기 때문에, 학생들의 등호 이해를 살펴본 연구 중 저학년 학생들을 대상으로 한 연구를 중점적으로 살펴보았다. 우선 초등학교 학생들의 등호 이해를 전반적으로 분석한 연구로는 Matthews 외(2012)가 대표적이다. 이 연구에서는 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 3가지 유형의 과제를 활용하여 등호 이해를 측정하기 위한 검사도구를 개발하였으며, 초등학교 2~6학년 학생 224명을 대상으로 적용하여 타당도와 신뢰도를 검증하였다. 이러한 검사 문항을 국내에 활용하여 초등학교 2~6학년 학생 총 695명을 대상으로 검사를 진행한 김정원 외(2016)의 연구에 따르면 2학년 학생들은 등식 구조 문항 중 비표준구조의 등식 문항에서 참·거짓을 제대로 판별하는 데 어려움을 겪었으며, 등식 해결 문항에서도 비표준구조의 등식 문항에서는 정답률이 낮았다. 특히 초등학교 2~6학년 중 2학년의 등호 이해가 가장 낮았으며, 등호 의미를 배운 지 얼마 되지 않은 2학년 학생들 대다수가 등호 의미로 '더한다'를 옳다고 답했다는 점에서 저학년에서의 등호의 관계적 이해를 강조할 필요가 있음을 지적했다.

한편, 본 연구와 유사한 연구로서 등호 이해를 지도하기 위한 프로그램을 개발하여 적용한 뒤 학생들의 이해 변화를 살펴본 연구도 있다. 우선 유치원생을 대상으로 포함한 연구를 살펴보면 Stephens 외(2021)는 유치원생 10명을 대상으로 초기 대수 수업을 매년 8차시씩 진행하며 추적 관찰을 진행한 결과 개입 전보다 개입 후 등호 이해가 발전함을 확인하였다. 구체적으로 개입 전에는 등호의 의미를 관계적으로 응답한 학생이 거의 없었지만, 개입 후 초등학교 1학년일 때는 대부분 등호의 의미를 관계적으로 응답하였다. 또한 개입 전에는 학생 대부분이 'a+b=c' 구조의 등식만을 참·거짓으로 판별할 수 있었지만, 개입 후 초등학교 1학년일 때는 모든 구조의 등식을 판별할 수 있었다. 또한 '5+4=_+3'과 같은 등식 해결 문항을 대부분 계산적 전략을 활용하여 해결할 수 있었으며, 일부 학생은 수 저울이나 관계적 전략을 사용하여 해결하기도 했다. Blanton 외(2018)에서도 유치원생 40명을 대상으로 등호에 대한 학생 이해와 등호를 관계적으로 가르치기 위해 고안된 8주의 교수실험에서 학생 이해가 어떻게 달라지는지 질적으로 분석한 결과 사전 면담 검사에서는 극히 일부 학생들만이 양변을 계산하여 'a=b+c'와 'a=a' 구조의 등식에 대해 옳다고 답하였지만, 사후 면담 검사에서는 'a+b=c+d' 구조의 등식에서도 학생들이 관계적으로 사고할 수 있음을 확인하였다.

다음으로 초등학교 저학년 학생을 대상으로 등호 이해 변화를 살펴본 연구가 있다. Bajwa 외(2021)는 초등학교 2~3학년 학생 148명을 대상으로 해당 연구진이 개발한 디지털 저울 프로그램을 적용한 후 사전, 사후 검사를 실시하였다. 검사 결과 한 학생은 사전 검사에서 'a+b=c+d' 구조의 등식을 제대로 해결하지 못했지만 사후 검사에서는 양변을 계산하여 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 찾을 수 있었으며, 사전 검사에서 등호를 연산적 의미로 답한 학생 비율이 사후 검사에서는 크게 감소함을 확인할 수 있었다. 초등학교 2학년 학생 3006명을 대상으로 한 Davenport 외(2023)의 대규모 연구에서도 동치 이해 향상(ICUE) 프로그램을 투입한 실험집단과 전통적인 산술 연습만을 제공한 비교집단의 검사 결과를 비교한 결과 실험집단 학생들의 성적은 사전 검사보다 더 향상되었으며, 비교집단과 비교하였을 때도 통계적으로 유의미한 차이를 보였다. 특히 덧셈 유창성에서 비교집단과 통계적으로 유의한 차이가 없었다는 점에서 동치 이해 향상을 위한 개입이 계산 유창성에 부정적인 영향을 끼치지 않음을 확인했으며, 실험집단 학생 중 사전 검사에서 더 낮은 성적을 받은 학생이 더 큰 점수 향상을 보였다는 점에서 성적인 낮은 학생에게 동치 이해 향상을 위한 개입이 특히 효과적일 수 있음을 제시했다.

이처럼 저학년 학생들을 대상으로 등호 이해를 지도하기 위한 프로그램을 개발·적용한 결과 학생들의 유의미한 변화를 관찰할 수 있었지만, 대부분 저학년 중에서도 2학년 학생이나 유치원생을 대상으로 포함한 연구로 등호를 처음 도입하는 초등학교 1학년을 대상으로 한 연구는 드물었다.

나. 등호 이해의 측정 방법

본 연구는 초등학교 1학년 학생들을 대상으로 하였기 때문에 저학년 학생들의 특성을 반영하여 등호 이해를 측정한 연구를 중점적으로 살펴보았다. 우선 초등학교 학생들의 등호 이해를 측정하기 위한 검사도구를 개발하여 타당도와 신뢰도를 검증한 Matthews 외(2012)는 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결 총 3가지 유형의 과제를 제시하였다. 구체적으로 등식 구조 문항은 등식의 참·거짓을 판별하는 문항과 'a+b=c'가 참일 때 'a+b+d=c+d'도 참인지 판별하는 문항 등이 제시되었으며, 등호 정의 문항은 등호의 의미를 서술하는 문항과 제시된 등호의 의미가 맞는지 판별하는 문항 등이 제시되었다. 등식 해결 문항은 빈칸에 들어갈 알맞은 값을 구하거나 z, n, m과 같이 문자로 제시된 미지수의 값을 구하는 문항 등이 제시되었다.

저학년 학생들의 등호 이해를 측정한 연구에서 사용한 검사 도구를 살펴보면 대부분 Matthews 외(2012)에서 사용한 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결 유형을 활용하였으나, 저학년 학생의 특성상 문제를 읽고 이해하거나 글로 자신의 생각이나 풀이과정을 충분히 설명하기에 어려운 부분이 있기 때문에 면담이나 관찰을 통해 학생 이해를 측정한 경우가 많았다. 예를 들어, Blanton 외(2018)는 유치원생을 대상으로 과제를 기반으로 한 면담 평가를 실시하였고, Stephens 외(2021)도 유치원생과 초등학교 1학년 학생을 대상으로 과제 기반 면담을 진행하였다. 이때, 면담 과제는 두 연구 모두 등호 의미, 등식 구조, 등식 해결의 3가지 유형의 과제를 기반으로 하였다. 구체적으로 등식 구조는 등식의 참·거짓을 판별하는 문항으로, 등식 해결은 등식에서 빈칸에 들어갈 알맞은 수 찾는 문항으로 Matthews 외(2012) 문항 사례와 유사하지만, 등호 정의와 관련된 문항은 '='를 본 적이 있는지, '='가 무엇인지, '='의 의미가 무엇인지, 이 기호가 사용될 수 있는 예를 제시하여 설명하도록 하였으며, 추가로 Blanton 외(2018)는 등식(equation)과 수식(number sentence)의 의미 설명하는 문항을 제시하기도 하였다.

다음으로 초등학교 저학년 학생들의 이해를 측정하기 위해 검사지를 활용한 연구를 살펴보면 우선 Bajwa 외(2021)는 초등학교 2~3학년 학생을 대상으로 등식 해결, 등호 정의, 등식에서 양변 구분하기 3가지 유형을 다루었다. 선행연구와 구별되는 점은 '등식에서 양변 구분하기'와 관련된 문항으로 5=3+2에서 두 변(two sides)에 각각 ○하여 표시하도록 하였다. 이러한 문항을 통하여 학생들이 등식에서 무엇과 무엇이 같은지, 그 대상을 명확하게 인식하고 있는지 확인할 수 있었다. 또한 Davenport 외(2023)에서는 학생들의 등호 이해를 측정하기 위해 등식 인코딩, 덧셈 유창성, 등호 명명 및 정의, 등식 해결, 등식 해결 전이에 대한 이해를 측정하는 지필 검사지를 해결하도록 하였으며, 실리콘밸리 수학 평가 협력체의 수행과제(MAC) 중 동치 이해와 관련된 문항과 아이오와 기초 능력 테스트(ITBS)에서 8수준 계산 검사도 함께 활용하였다. 기존 연구에서 주로 선행연구를 기반으로 자체 개발한 검사지를 활용한 것과 달리 외부에서 개발된 수학 평가 문항 및 산술 평가 문항도 포함하여 그 효과를 확인하였으며, 등식 인코딩 즉, 제시된 등식을 5초 동안 본 후 다시 써보도록 하는 문항과 등식 해결 전이 즉, 좌변에는 덧셈, 우변에는 뺄셈이 있는 좀 더 복잡한 등식 해결 문항을 제시하였다.

이처럼 저학년 학생들의 등호 이해를 어떻게 측정하였는지 살펴본 결과 과제 기반 면담이나 검사지를 활용한 경우가 많았으며, 이때 활용한 과제는 주로 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 3가지 유형을 다루었다. 이 외에도 산술 능력을 살펴보는 별도의 문항을 추가한 경우도 있었으며, 등호가 사용된 예를 제시하게 하거나 제시된 등식에서 두 변이 무엇인지 찾는 문항 등이 제시된 경우도 있었다.

2. 등호의 도입 및 지도 방안

가. 교과서에 나타난 등호의 도입 방안

2015 개정 수학과 교육과정에서는 초등학교 1학년 1학기 3단원 덧셈과 뺄셈 단원에서 등호를 처음 도입한다. 해당 단원에서 등호를 도입하는 과정을 살펴보면 우선 모으기와 가르기 활동과 이야기를 통해 덧셈과 뺄셈 상황을 살펴봄으로써 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해한 뒤, 덧셈 상황을 덧셈식을 어떻게 나타내는지 살펴보는 과정에서 '+', '=' 기호를 도입한다. 구체적으로 교과서 장면을 살펴보면 [그림 1]처럼 그림을 통해 '3+1'의 상황을 제시하고, '+', '=' 기호의 의미를 명시적으로 제시한 뒤 '3+1=4'라고 표현하며 덧셈식의 쓰고 읽는 방법을 제시한다. 이후 '－' 기호를 도입하는 차

시에서 유사하게 등호의 의미를 다시 한번 제시하지만, 덧셈 및 뺄셈 연산, 0을 더하거나 빼는 방법을 학습하는 과정에서 표준구조의 등식만 다루는 등 등호의 관계적 이해를 강조할 만한 활동은 별반 없다. 이와 관련하여 교과서를 중심으로 싱가포르, 미국, 일본의 등호 도입과 비교한 방정숙 외(2022)를 살펴보면 싱가포르는 ‘number balance’와 ‘number bond’를 시각적 모델로 활용하고 ‘3+2=5’의 상황에서 3+2를 하나로 묶어 표현함으로써 무엇과 무엇이 같은지 명확하게 표현하였으며, 미국의 경우 가르기와 모으기 상황에서 자연스럽게 비표준구조의 등식 ‘a=b+c’를 활용하였고, 일본은 식 카드를 활용하여 결과값이 7이 되는 식을 찾는 활동을 통해 식 사이의 관계를 살펴봄으로써 학생들의 관계적 이해 신장에 도움을 줄 수 있는 활동을 제시하고 있다. 반면 국내 교과서는 등호의 관계적 이해를 강조할 수 있는 시각적 모델이나, 등호의 관계적 이해를 강조할 수 있는 활동이 상대적으로 부족하다고 지적했다.

[그림 1] 등호 도입 장면(교육부, 2023, p64)

나. 등호의 관계적 이해를 강조한 지도 방안

저학년 학생의 등호 이해를 측정한 연구에서 활용한 과제와 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 진행한 연구 중 저학년을 대상으로 한 연구를 참고하여 초등학교 1학년 학생들에게 적합한 등호의 관계적 이해를 강조한 지도방안을 정리하였다. 구체적으로 1학년 학생을 지도한 김소현과 방정숙(2023)의 지도방안을 토대로 선행연구에서 제시한 지도방안을 종합하여 살펴보면 우선 관계적 기호로서 등호의 의미를 강조하고 있음을 알 수 있다. 구체적으로 등호가 두 양이 같음을 나타내는 관계적 기호임을 강조하기 위해 저울이나 수 저울과 같은 다양한 시각적 모델이나 구체물을 활용할 수 있다(Blanton et al., 2018; Davenport et al., 2023; Stephens et al., 2022). 또한 등호가 무엇과 무엇이 같음을 의미하는 기호인지 같음의 대상을 명확하게 하는 것은 등호의 의미를 이해하는 데 도움을 줄 수 있다(이유진, 방정숙, 2023; Bajwa et al., 2021). 더불어 비순차적으로 등식을 읽고 쓰고(임재훈, 2013), 비표준구조의 등식을 제시하는 것은(McNeil et al., 2019) 등호의 관계적 이해를 강화할 수 있다.

두 번째로 등식을 계산해야 할 대상이 아닌 추론의 대상으로 다루었다. 구체적으로 주어진 등식을 계산하지 않고 양변을 비교하여 참·거짓을 판별해 보게 하거나(Blanton et al., 2018; Molina & Ambrose, 2008), 다양한 구조의 등식을 해석하는 활동(Fonger et al., 2018)을 통해 등호를 관계적으로 이해할 수 있다.

세 번째로 미지수가 포함된 등식을 활용하여 등식을 해결하도록 하는 경우가 있다. 예를 들어 다양한 구조의 등식에서 빈칸이나 □에 들어갈 알맞은 값을 구하도록 함으로써 등호를 관계적으로 이해하고 양변의 관계를 구조적으로 추론할 수 있도록 할 수 있다(Blanton et al., 2018; Davenport et al., 2023; McNeil et al., 2019). 이때 학생들이 양변의 관계를 추론하여 문제를 해결하기에 효과적인 등식을 제시함으로써 등호를 관계적으로 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

다만 김소현과 방정숙(2023)에서는 초등학교 1학년 학생의 수준을 고려하여 미지수가 포함된 등식을 해결하는 활동과 양 사이의 관계를 기호로(>, <, =) 표현하는 활동은 제시하지 않았지만, 저학년 학생 또는 유치원생을 대상으로 선행연구에서 미지수가 포함된 등식을 활용하여 등식을 해결하도록 하는 경우도 있었다(Blanton et al., 2018; Davenport et al., 2023; McNeil et al., 2019). 이에 본 연구에서는 관련 내용을 포함하여 다루었으며 등호 외에 다른 관계적 기호(>, <)도 학생 수준에 적합한 ‘악어 입’이라는 용어를 도입하여 다루었다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 등호를 처음 도입하는 1학년 1학기 덧셈과 뺄셈 단원에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업의 효과를 살펴보고자 D광역시 소재 A초등학교에 재학 중인 1학년 1개 학급을 실험반으로, 동일 학교에 재학 중인 1학년 1개 학급을 비교반으로 선정하였다. 실험반 학생은 총 25명(남 11명, 여 14명)으로 덧셈과 뺄셈 단원 총 15차시에 걸쳐 기존 수업 활동에 맞게 등호의 의미를 강조하고, 저울 모델을 활용하며, 다양한 구조의 등식을 제시하는 등의 지도 방안을 적용하였다. 특히 8, 13, 15차시는 등호에 대한 관계적 이해를 강조한 수업으로 전면 재구성하고 13~15차시로 배치하여 적용하였다. 비교반은 1학년 1개 학급 총 24명(남 12명, 여 12명)으로 선정하였으며 재구성하지 않은 덧셈과 뺄셈 총 15차시의 수업에 참여하였다.

수업을 진행하기에 앞서 실험반 25명과 비교반 24명을 대상으로 사전 검사를 실시하였다. 이때 외국인 학생 3명, 특수교육 대상자 1명을 제외한 실험반 23명과 비교반 22명을 대상으로 검사 결과를 분석하였다. 사전 검사는 크게 선행학습 정도를 파악하고자 한 설문 문항과 등식 구조, 등호 의미, 등식 해결 문항으로 구성된 등호 이해 검사로 구성되었다. 실험반과 비교반의 선행학습 정도 및 등호 이해도를 비교하기 위해 실시한 사전 검사의 결과는 다음과 같다. 먼저 선행학습 정도를 파악하고자 한 설문 문항에서 실험반은 '+', '−', '='에 대해 각각 96%, 83%, 71%의 학생들이 알고 있다고 답했으며, 비교반은 각각 91%, 73%, 77%의 학생들이 알고 있다고 답해 선행학습 정도에 큰 차이가 없는 것으로 나타났다. 두 번째로, 사전 검사에서 등호 이해 검사 문항에 대한 실험반의 평균은 약 0.44, 비교반의 평균은 약 0.40이였다. 실험반과 비교반이 통계적으로 유의미한 차이가 있는지 검정한 결과, Levene의 등분산 검정에 의하여 실험반과 비교반의 등분산을 가정할 수 있으며(F=.106, p=.747), 사전 검사 평균에서 실험반과 비교반 간 유의미한 차이는 없었다(t=1.081, p=.285). 따라서 본 연구에서 선정한 1학년 실험반과 비교반은 등호에 대한 이해 정도가 서로 유사한 동질집단이라 할 수 있다.

2. 자료 수집

본 연구는 크게 네 가지의 과정으로 자료 수집을 진행하였다. 첫째 문헌 검토를 통해 도출한 관계적 이해를 강조한 등호의 도입 방안을 바탕으로 1학년 1학기 덧셈과 뺄셈 단원 총 15차시를 재구성하였으며, 일부 차시(8, 13, 15차시)는 전면 재구성하였다. 구체적인 단원 재구성 방안은 [표 1]과 같다.

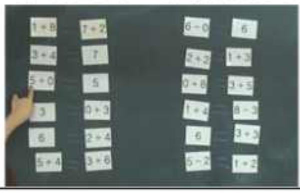
둘째, 실험반과 비교반을 선정한 후 사전검사를 실시하였다. 정규교육과정에서 등호를 배우지 않았지만, 등호를 배우기 이전부터 학생들이 등호에 대한 잘못된 지식을 가지고 있다는 선행연구의 결과를 반영하여 (Falkner, Levi, & Carpenter, 1999), 사전검사에서 학생들의 등호 지식을 확인하고자 하였다. 더불어 학생들이 사전에 등호에 대한 학습 경험의 유무가 사전검사 결과에 중요한 영향을 끼칠 것으로 판단하여 연산기호와 등호 중 알고 있는 기호에 표시할 수 있도록 하였으며, 1학년 학생들의 특성상 아직 문항에 대한 이해가 높지 않으므로 사후 검사보다 문항 수를 축소하여 학생들의 검사에 대한 부담을 낮추고자 하였다. 사전 검사는 동일한 일시에 담임교사의 감독하에 1학년 실험반과 비교반에서 실시하였고, 검사 시간은 40분으로 제한하였다.

셋째, 본 연구의 수업 진행을 위하여 사전에 실험반과 비교반의 담임교사와 전반적인 수업 과정을 협의하였고 3주에 걸쳐 덧셈과 뺄셈 단원 총 15차시 수업을 각 학급에서 진행하였다. 비교반 교사는 2015 수학과 교육과정에 따른 1학년 교과서를 중심으로 수업을 진행하였으며, 실험반 교사는 등호에 대한 관계적 이해를 강조하여 재구성한 단원의 지도 계획을 중심으로 수업을 진행하였다([표 1], [그림 2] 참조).

마지막으로 실험반과 비교반의 수업이 종료된 시점에 담임교사의 감독하에 사후 검사를 실시하였고, 검사 시간은 40분으로 제한하였다. 연구에 참여한 초등학생 49명을 대상으로 수집한 사후 검사지 중 유효한 45부를 분석하였으며, 그 결과를 토대로 등호 도입 단원에서 관계적 이해를 강조한 수업에 참여한 학생들의 등호 이해가 어떻게 변화하였는지 살펴보았다.

[표 1] 재구성한 단원의 지도 계획

차시	차시명	지도 방안	수업 내용 및 활동
2~3	모으기와 가르기를 해 볼까요	등호의 의미 강조하기	- 9까지의 수를 모으기와 가르기 하기
4	이야기해 볼까요	등호의 의미 강조하기	- 그림을 보고 덧셈과 뺄셈 이야기를 해 보고, 구체물을 이용하여 합하거나 덜어 내는 활동을 통해 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해하기
5	더하기는 어떻게 나타낼까요	등호의 의미 강조하기	- 덧셈 상황을 인식하고 구체물이나 손가락을 이용하여 덧셈하기 - 구체적인 활동을 기초로 덧셈 상황을 +, = 기호를 사용하여 덧셈식으로 쓰고 읽기
6~7	덧셈을 해 볼까요	등호의 의미 강조하기	- 그림 그리기 전략과 식 만들기 전략 등을 이용하여 덧셈하기 - 모형(연결큐브)나 바둑돌, 수판 등을 이용하여 덧셈하기
8	빼기는 어떻게 나타낼까요	등호의 의미 강조하기	- 뺄셈 상황을 인식하고 구체물이나 손가락을 이용하여 뺄셈하기 - 구체적인 활동을 기초로 뺄셈 상황을 −, = 기호를 사용하여 뺄셈식으로 쓰고 읽기
9~10	뺄셈을 해 볼까요	등호의 의미 강조하기	- 그림 그리기 전략과 식 만들기 전략 등을 이용하여 뺄셈하기 - 모형(연결큐브)나 바둑돌, 수판 등을 이용하여 뺄셈하기
11	0을 더하거나 빼면 어떻게 될까요	등호의 의미 강조하기	- 0에 어떤 수를 더하거나 어떤 수에 0을 더할 수 있음을 알고 덧셈하기 - 어떤 수에서 0을 빼거나 어떤 수에서 그 수 전체를 뺄 수 있음을 알고 뺄셈하기
12	얼마나 알고 있나요	-	- 문제를 풀며 이 단원에서 배운 내용 정리하기
13 (기존8)	덧셈과 뺄셈을 해 볼까요	등식 해결하기 (기존 8차시)	- 다양한 구조(a+b=c, a=b+c, a=b, a+b=c+d)의 등식 참 거짓 판별하기 - □에 알맞은 값 찾기
14 (기존13)	덧셈과 뺄셈 놀이를 해 볼까요	등식 추론하기 (기존 13차시)	- 수카드를 활용하여 크기가 같은 두 양을 찾아 다양한 구조(a+b=c, a=b+c, a=b, a+b=c+d)의 등식 만들기 - 다양한 구조(a+b=c, a=b+c, a=b, a+b=c+d)의 등식 참 거짓 판별하기
15	덧셈식과 뺄셈식을 만들어 볼까요	등식 추론하기	- 다양한 구조(a+b=c, a=b+c, a=b, a+b=c+d)의 덧셈식과 뺄셈식 만들기 - 만든 식의 참 거짓 판별하기

단원	3. 덧셈과 뺄셈	차시	14/15
학습 목표	• 크기가 같은 두 양을 찾아 다양한 구조의 등식으로 표현할 수 있다. • 등식을 다양한 모델로 표현할 수 있다. • 다양한 구조의 등식을 보고 참·거짓을 판단할 수 있다.		
단계	교수·학습 활동		
활동 1	• 나의 짝카드 찾기 - 학생들마다 '2+3', '5+0', '7-2'와 같은 형태의 수나 식이 적힌 카드를 받는다. - 학생들은 자신이 가진 카드와 같은 값인 카드를 찾아 '='만 제시된 칠판에 붙임으로써 식을 완성한다.		
활동 2	• 학생들이 만든 식 살펴보기 - 학생들이 만든 식을 보고 잘못 만든 식은 없는지 생각해보도록 한다. - 학생들이 만든 식 중에서 잘못된 식은 왜 잘못됐는지 설명해 본다. - 수카드를 바꾸어 붙였을 때도 식이 맞는지 틀린지 살펴본다. 		

[그림 2] 14차시 수업 지도안

3. 사전·사후 검사

본 연구에서는 등호 도입 단원에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에 따른 초등학교 1학년 학생들의 등호 이해가 어떻게 변화하였는지 분석하기 위해 등호 이해 검사지를 개발하여 활용하였다. 이를 위하여 Matthews 외(2012)의 문항을 토대로 선행연구 분석에서 살펴본 저학년 학생을 대상으로 한 등호 이해 검사 문항 및 과제를 참고하여 1학년 학생의 수준에 맞게 재구성하였다. 구체적으로 1학년 학생들은 3단원에서 합과 차가 10 미만인 덧셈과 뺄셈을 학습하므로 이 범위에 맞게 수를 조정하였으며, 등식 구조, 등호 의미, 등식 해결 유형에 해당하는 문항들을 제시하였다. 다만, 연구 당시 1학년 학습자는 아직 한글 학습을 마치지 않은 상태이기 때문에 최대한 문항 설명을 간단하게 제시하고 학생의 전략을 글로 설명하도록 하는 부분과 등호의 정의를 서술하도록 하는 부분은 검사 문항에서 제외하였다. 더불어 1학년 학생은 아직 지필검사를 한 번도 경험하지 못한 상태이기 때문에 최대한 검사 문항의 수를 줄이고 학생의 산술 능력은 별도의 문항을 추가하지 않고 표준구조의 등식을 해결하는 문항으로 측정하였다. 또한 1학년 학습자의 경우 3단원에서 처음으로 덧셈, 뺄셈, 등호에 대해 학습하므로 사전·사후 검사를 동형으로 제작하여 처지에 대한 효과를 분석하기 어렵다고 판단하였다. 이에 사전 검사는 [표 2]와 같이 '+', '−', '=' 기호에 대해 알고 있는지 사전 지식을 알아보는 문항과 등식 구조, 등호 의미, 등식 해결에 해당하는 기본 문항을 제시하였다. 이를 통해 학생들의 사전 지식 및 집단 간 차이를 확인하고자 하였다. 사후 검사는 사전 검사 중 등식 구조, 등호 의미, 등식 해결 문항에서 숫자만 바꾸는 형식으로 개발하였으며, 추가적으로 Matthews 외(2012)에서 다룬 두 등식 사이의 관계를 다루는 문항이나 계산하지 않고 등식을 추론하도록 하는 다소 복잡한 문항을 추가하였다. 검사 문항에 대한 신뢰도를 확인한 결과, 사후 검사 문항의 신뢰도는 Cronbach Alpha 값 .917로 신뢰도를 확보하였다. 더불어 독립표본 t 검정을 실시하기에 앞서 실험반과 비교반 모두 학생 수가 30명 미만이었기 때문에 각 집단의 정규성을 검정하기 위해 Kolmogorov-Smirnov 검사를 실시한 결과 사후 검사에 대해서 실험반 p=.103, 비교반 p=.200으로 두 집단 모두 정규성을 만족하였다.

[표 2] 등호 이해 검사

검사 유형	문항유형 (번호)	문항 설명
사전 검사	사전지식 (1)	사전 지식 확인하기 예) 다음 중 알고 있는 기호에 동그라미 치시오. (+ − =)
	등식구조 (2~3)	등식의 참·거짓 판별 예) 4+4=4+5 (O X)
	등호의미 (4~5)	등호의 의미 판별 예) 등호(=)는 '같다'는 뜻이다. (O X)
	등식해결 (6~7)	□에 알맞은 수 찾기 예) □에 알맞은 수를 써 넣으시오. □+2=6+3
사후 검사	등식구조 (1~4)	등식의 참·거짓 판별
	등호의미 (5~6)	등호 의미 서술하기
	등식해결 (7~10)	□에 알맞은 수 찾기

4. 자료 분석

본 연구에서는 연구에 참여한 초등학교 1학년 학생들의 사전·사후 검사 결과를 분석하기 위하여 정답은 1점, 오답은 0점으로 코딩하였으며, 하위 문항도 동일한 가중치(1점)로 코딩하였다. 먼저 실험반과 비교반의 사전 검사 결과에 대해 SPSS 22.0 통계 프로그램을 사용하여 독립표본 t 검정을 실시한 결과 동질집단임을 확인하였고, 실험반과 비교반의 사후 검사 결과에 대해 독립표본 t 검정을 실시하여 실험 처치에 따른 집단 간 유의한 차이를 보이는지 검증하였다. 또한 각 문항별 차이를 비교하기 위해 문항별 평균 점수를 추가로 살펴보았으며, 단답형 문항의 경우 오답 반응을 분석하여 집단별 학생 응답의 차이를 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 전반적인 학생들의 등호 이해 분석

등호 이해에 대한 전반적인 사후 검사 결과는 다음과 같다. 먼저 기본적인 연산 능력을 비교하기 위해 검사 문항 중 'a+b=c' 표준구조의 문항(1(1), 7(1), 7(2), 7(4))만 선별하여 분석한 결과는 다음 [표 3]의 기본 연산 부분과 같다. [표 3]에서 보는 바와 같이 기본 연산 부분에서 실험반의 평균은 3.6087, 비교반의 평균은 3.4545로, 유의수준 .05에서 통계적으로 유의미한 차이가 없었다(t=1.668, p=.203). 이러한 결과는 기본적으로 교육과정에서 기대하는 수와 연산의 성취기준 즉, 두 수의 합이 9 이하인 덧셈과 한 자리 수의 뺄셈 연산에 대한 학습 내용을 실험반과 비교반 학생 모두 충분히 이해하고 있다는 것을 의미한다. 반면 등호 이해에 대한 전반적인 사후 검사 결과는 [표 3]의 등호 이해 부분과 같다. 구체적으로 실험반의 평균은 19.6522, 비교반의 평균은 9.3636으로, 실험반의 평균은 비교반의 평균보다 유의수준 .05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있었다(t=7.814, p=.000). 이러한 결과는 본 연구에서 설계한 관계적 이해를 강조한 등호 도입 수업을 통해 등호에 대한 이해가 신장되었다는 것을 나타낸다. 다음으로 두 집단 간의 차이를 좀 더 면밀하게 비교하기 위하여, 등식 구조, 등호 이해, 등식 해결의 유형별로 평균을 비교한 결과는 [표 4]와 같다. [표 4]에서 보는 바와 같이 등식 구조, 등호 의미, 등식 해결의 세 유형에서 모두 실험반의 평균은 비교반의 평균보다 유의수준 .05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있었으며(등식 구조: t=8.505, p=.000, 등호 의미: t=7.422, p=.000, 등식 해결: t=4.454, p=.000), 특히 세 유형 중 등식 구조 유형에서 실험반과 비교반의 차이가 가장 두드러졌다.

[표 3] 사후 검사에 대한 t 검정

종속변수	집단	평균	표준편차	사례수	t	p
기본 연산	실험반	3.6087	0.7223	23	1.668	.203
	비교반	3.4545	1.0568	22		
등호 이해	실험반	19.6522	5.4155	23	7.814	.000
	비교반	9.3636	3.0323	22		

[표 4] 사후검사에 대한 t 검정

종속변수	집단	평균	표준편차	사례수	t	p
등식 구조	실험반	8.8696	2.0522	23	8.505	.000
	비교반	4.0455	1.7531	22		
등호 의미	실험반	3.5652	0.9921	23	7.422	.000
	비교반	1.4545	0.9117	22		
등식 해결	실험반	7.2174	3.2747	23	4.454	.000
	비교반	3.8636	1.4895	22		

2. 문항 유형별 학생들의 등호 이해 분석

가. 등식 구조 문항에 대한 학생들의 이해 분석

등식 구조에 대한 문항을 중심으로 두 집단의 평균을 비교한 결과는 [표 5]와 같다. 구체적으로 1번과 2번 문항은 주어진 식이 참인지 거짓인지 판별하는 문항이고, 3번과 4번 문항은 주어진 등식이 참일 때, 주어진 등식의 양변에 같은 수를 더하거나 빼도 참인지 추론하는 문항이다.

우선 등식의 참·거짓을 판별하는 문항에서는 [표 5]에서 보는 바와 같이 학생들은 등식의 구조에 따라 정답률이 달라지는 것을 확인할 수 있었다. ‘a+b=c’와 같은 표준구조의 등식을 다룬 1(1)번 문항에서는 실험반과 비교반 모두 매우 높은 평균을 보였지만, 비표준 구조의 등식을 다룬 문항에서는 실험반의 평균이 비교반에 비해 매우 높았다. 구체적으로 실험반의 경우 등식의 구조에 상관없이 평균의 편차가 비교반에 비해 작았으며 해당하는 모든 문항에서 약 0.54점 이상의

[표 5] 등식 구조 문항에 대한 결과 비교

구분	문항		사후 평균	
			실험반	비교반
등식의 참·거짓 판별하기	1	다음은 옳은 식일까요, 아닐까요? 주어진 식이 옳다고 생각되면 ‘O’에, 틀리다고 생각되면 ‘X’에, 잘 모르겠으면 ‘모름’에 동그라미 치시오. (1) 5+2=7 (O X 모름)	1.0000	0.9545
		(2) 1=1 (O X 모름)	0.9565	0.3182
		(3) 3+3=3+4 (O X 모름)	0.8696	0.3636
		(4) 6+2=2+6 (O X 모름)	0.9130	0.2727
		(5) 5+4=4+4+1 (O X 모름)	0.7391	0.2273
		(6) 3=3+0 (O X 모름)	0.8696	0.5000
		(7) 6=2+4 (O X 모름)	0.8261	0.6364
		(8) 1+3=2+2 (O X 모름)	0.7391	0.2273
	2	직접 더해보지 않고도, 식이 옳은지 틀린지를 알 수 있을까요? 8과 3을 더해보지 말고 아래 식이 옳은지 틀린지 생각해 보세요. 자신의 생각에 동그라미 치세요. 8+3=9+2 (O X 모름)	0.8261	0.1818
등식 추론하기	3	5+1=6은 옳은 식입니다. 이때 5+1+2=6+2는 옳은 식일까요? 틀린 식일까요? (O X 모름)	0.5455	0.1818
	4	직접 빼보지 않고도, 식이 옳은지 틀린지를 알 수 있을까요? 2를 빼보지 말고 아래 식이 옳은지 틀린지 생각해 보고 자신의 생각에 동그라미 치세요. 6+3=9는 옳은 식입니다. 이때 6+3-2=9-2는 옳은 식일까요? 틀린 식일까요? (O X 모름)	0.6087	0.1818

평균을 보였지만, 비교반의 경우 가장 평균이 낮은 문항의 평균이 약 0.18점으로 큰 차이를 보였다. 특히 실험반의 경우 등식 구조에 따라 'a=b'와 같은 양변에 연산이 없는 등식 구조에 해당하는 1(2)번 문항, 'a=b+c'와 같은 우변에만 연산이 있는 등식 구조에 해당하는 1(6), 1(7)번 문항, 'a+b=c+d'와 같은 양변에 연산이 있는 등식 구조에 해당하는 1(3), 1(4), 1(5), 1(8), 2번 문항의 순으로 평균이 대체로 낮은 것으로 나타났지만, 비교반의 경우에는 'a=b'를 'a=b+c'보다 더 어려워하는 것으로 나타났다. 실험반과 비교반이 큰 차이를 보인 문항을 살펴보면 비교반은 'a=b' 구조인 '1=1'로 연산이 없는 매우 간단한 형태임에도 'a=b+c' 구조인 '3=3+0', '6=2+4'보다 더 평균이 낮았다. 반면 실험반은 'a=b' 구조인 '1=1'문항에서 약 0.96점의 평균을 보이며 'a=b+c' 구조에 비해 매우 쉽게 해결한 것을 알 수 있다. 이처럼 비교반에서 연산이 없는 구조의 등식보다 우변에만 연산이 있는 구조의 등식 문항을 더 쉽게 해결한 것은 덧셈과 뺄셈 단원에서 표준구조의 등식만 다루고 연산을 강조했기 때문에 연산의 위치는 다르더라도 연산과 답의 형태로 이루어진 등식의 구조를 더 쉽게 받아들인 것으로 보인다.

더불어 실험반과 비교반에서 차이를 보인 1(4)번 문항에 대해 살펴보면 실험반에서는 해당 문항에서 세 번째로 높은 평균을 보이며 쉽게 해결한 데 반해, 비교반에서는 그렇지 않은 것으로 나타났다. 1(4)번에서 제시한 '6+2=2+6'은 'a+b=c+d'의 구조로 학생들이 가장 어려워하는 구조였지만, 양변의 수가 동일하고 순서만 바뀐 형태로 제시되었기 때문에 이례적으로 실험반에서는 평균이 높았던 것으로 보인다. 하지만 비교반에서는 학생들이 등호를 기준으로 양변을 비교하지 못하고 표준구조와 다른 형태에 집중했기 때문에 이러한 문항 특성과 관계없이 낮은 평균을 보였다.

다음으로 등식을 추론하는 3, 4번 문항에서는 [표 5]에서 보는 바와 같이 실험반과 비교반에서 모두 등식의 참・거짓을 판별하는 문항에 비해 평균이 낮은 것으로 나타났다. 등식의 참・거짓을 판별하는 문항에서는 하나의 등식만 보고 참・거짓을 판별하도록 제시되어 있지만, 등식을 추론하는 문항은 하나의 옳은 등식을 제시한 뒤 그 등식에 같은 수를 더하거나 빼는 변형을 한 후, 변형된 식의 참・거짓을 판별하도록 제시되어 있기 때문에 학생들이 더욱 어려워한 것으로 보인다. 또한 앞서 등식의 참・거짓을 판별하는 문항에서도 같은 'a+b=c+d' 구조의 등식에서 식에 제시된 수가 가장 많은 등식 '5+4=4+4+1'의 평균이 가장 낮았다는 점에서 변형된 등식에 제시된 수가 총 5개였다는 점이 영향을 미쳤을 것으로 예상된다.

다만 두 등식 추론 문항 간 차이는 학생들의 이해에 별다른 영향을 미치지 못한 것으로 보인다. 구체적으로 4번 문항의 경우는 양변에 똑같은 수를 더하는 변형을, 5번 문항의 경우는 양변에 똑같은 수를 빼는 변형을 제시했지만, 두 문항의 평균에는 두 집단 모두 큰 차이는 없는 것으로 나타났다. 더불어 5번 문항에서는 "직접 빼보지 않고도"라는 추가 조건을 제시하였고 이를 통해 계산적 전략 대신 관계적 전략을 사용하여 두 등식 사이의 관계를 추론하도록 유도하였지만, 학생들은 별다른 차이를 느끼지 못한 것으로 보인다.

나. 등호 정의 문항에 대한 학생들의 이해 분석

등호 정의에 대한 문항을 중심으로 두 집단의 평균을 비교한 결과는 [표 6]과 같다. 구체적으로 5번 문항은 주어진 등호의 정의가 맞는지 판별하는 문항이고, 6번 문항은 주어진 구체적인 동치 상황을 등호로 나타내도록 함으로써 등호의 정의를 이해하고 있는지 확인하는 문항이다.

우선 제시된 등호의 정의가 맞는지 판별하는 문항에서는 [표 6]과 같이 등호의 정의를 '같다', '더한다', '문제에 대한 답', '양변을 서로 바꿀 수 있다'로 나누어 제시하였다. 그 결과 실험반 학생들이 비교반 학생들에 비해 모든 문항에서 평균이 더 높은 것으로 나타났다. 즉, 실험반 학생들 대부분이 '같다'는 의미가 등호의 의미로 옳다고 응답했지만, 비교반 학생들은 '같다'는 의미보다 '더한다' 또는 '문제에 대한 답'이라는 의미를 옳다고 한 학생 비율이 더 높았다. 구체적으로 실험반 학생들은 등호의 의미로 '같다'가 옳은지 묻는 문항에서 약 0.96점의 평균을 보여 대다수 학생들이 등호의 의미로 '같다'를 옳게 인식함을 알 수 있었다. 반면 비교반 학생들은 '같다'에서 약 0.45점의 평균을 보여 절반 정도의 학생만이 등호의 의미로 '같다'를 옳다고 답했지만, 등호의 의미로 '더한다', '문제에 대한 답'이 옳은지 묻는 문항에서 각각 0.36점의 평균을 보여 등호의 의미를 '더한다', '문제에 대한 답'으로 이해하는 학생 즉, 연산적 의미로 이해하는 학생이 '같다'

즉, 관계적 의미로 이해하는 학생보다 많았다. 실험반과 비교반 모두 등호의 의미를 ‘같다’는 관계적 의미로 도입했지만 수업 전반에서 등호의 의미를 어떻게 강조하는지, 어떤 구조의 등식을 다루는지에 따라 학생들의 등호 정의 이해가 달라진 것으로 보인다. 또한 비교반에서는 ‘더한다’와 ‘문제에 대한 답’에 대한 평균이 서로 같았지만, 실험반에서는 ‘더한다’의 평균이 더 높았다. 즉, 비교반 학생들은 ‘더한다’, ‘문제에 대한 답’에 대해 옳다고 응답한 학생 비율이 같았지만, 실험반 학생들은 ‘더한다’에 비해(약 9%), ‘문제에 대한 답’을 등호의 의미로 생각한 비율이 높았다(약 30%). ‘양변을 서로 바꿀 수 있다’는 실험반의 경우 약 0.3점, 비교반의 경우 약 0.18점의 평균을 보여, ‘양변을 서로 바꿀 수 있다’를 등호의 의미로 인식하는 학생들이 ‘같다’에 비해 훨씬 적은 것으로 나타났다. 이처럼 등호 의미로 실험반 학생들은 ‘같다’는 관계적 의미를, 비교반 학생들은 주로 ‘더한다’, ‘문제에 대한 답’이라는 연산적 의미를 옳다고 생각하는 차이를 보여주었다. 다만 비교반 학생들도 등호의 의미로 ‘같다’가 옳다고 답한 학생이 절반 정도로 많았으며, ‘양변을 서로 바꿀 수 있다’는 의미를 옳다고 답한 학생은 ‘같다’는 의미에 비해 실험반과 비교반 모두 낮은 것으로 나타났다. 더불어 하나의 등호 의미만을 옳다고 답하기보다 여러 의미를 옳다고 답하는 경우가 많아 등호가 하나의 고정된 의미가 아닌 다양한 의미를 지닌 기호로 인식하는 것으로 보인다.

다음으로 동치 상황을 등호를 이용하여 나타내는 6번 문항에서는 [표 6]에서 보는 바와 같이 등호 정의를 판별하는 문항에 비해 대체로 평균이 낮은 것으로 나타났다. 등호 정의를 판별하는 문항에서는 제시된 등호 정의를 보고 옳은지 틀린지를 판별하도록 제시되어 있지만, 동치 상황을 등호를 이용하여 나타내는 문항은 색연필 6자루와 색연필 1세트가 같다는 것을 등호를 사용하여 문자가 포함된 식으로 나타내야 하므로 교과서에서 수와 기호로만 나타낸 식만 접해본 학생들에게 매우 낯설게 느껴진 것으로 보인다. 특히 비교반의 경우 6번 문항에서 약 0.09점의 매우 낮은 평균을 보였는데, 이는 앞서 등식 구조 문항에서 비교반 학생들의 경우 ‘a=b’ 구조의 등식 평균이 낮았다는 점에서 해당 문항을 해결하는 데 학생들이 어려움을 느낀 것으로 예상된다. 학생들의 오답 반응을 살펴보면 비교반의 경우 6원이라고 답한 학생이 9명, ‘+’로 답한 학생이 3명으로 나타났으며, 실험반의 경우 6원이라고 답한 학생이 2명, ‘+’로 답한 학생이 2명이었고, □안에

[표 6] 등호 정의 문항에 대한 결과 비교

구분	문항		사후 평균	
			실험반	비교반
등호 정의 판별하기	5	다음은 등호(=)에 대한 설명입니다. 설명이 옳은지 틀린지 생각해보고, 알맞은 것에 동그라미 치시오.		
		(1) 등호(=)는 ‘같다’는 뜻이다. (O X)	0.9565	0.4545
		(2) 등호(=)는 ‘더한다’는 뜻이다. (O X)	0.9130	0.3636
		(3) 등호(=)는 ‘문제에 대한 답’이라는 뜻이다. (O X)	0.6957	0.3636
		(4) 등호(=)는 ‘양변을 서로 바꿀 수 있다’는 뜻이다. (O X)	0.3043	0.1818
동치 상황 등호로 나타내기	6	사인펜 6자루는 사인펜 1세트와 같다는 것을 나타내려고 합니다. □ 안에 들어갈 알맞은 것에 동그라미 치시오. 사인펜 6자루 □ 사인펜 1세트 (6원 = +)	0.6957	0.0909

숫자 3을 써넣은 학생이 2명이었다. 이처럼 학생들의 오답반응을 살펴본 결과 제시된 상황에서 6이라는 수에만 집중하여 오답을 제시한 경우가 많았으며 3의 경우에도 제시된 상황에서 수에만 집중하여 6, 3, 1이라는 규칙적인 수 배열을 제시한 것으로 보인다.

다. 등식 해결 문항에 대한 학생들의 이해 분석

등식 해결 문항을 중심으로 두 집단의 평균을 비교한 결과는 [표 7]과 같다. 구체적으로 7~9번 문항은 주어진 등식에서 □에 알맞은 값을 구하는 문항이고, 10번 문항은 주어진 등식에서 △에 알맞은 값을 구하는 문항이다.

우선 주어진 등식에서 □에 알맞은 값을 구하는 문항에서는 앞서 등식 구조 문항에서와 같이 등식의 구조에 따라 정답률이 달라지는 것을 확인할 수 있었다. ‘a+b=c’와 같은 표준구조의 등식을 다룬 7(1), 7(2), 7(4)번 문항에서는 실험반과 비교반 모두 매우 높은 평균을 보였지만, 비표준구조의 등식을 다룬 문항에서는 비교반에 비해 실험반의 평균이 월등히 높았다. 구체적으로 실험반의 경우 등식의 구조에 상관없이 평균의 편차가 비교반에 비해 작았으며 해당하는 모든 문항에서 약 0.57점 이상의 평균을 보였지만, 비교반의 경우 7(7)번과 9번 문항은 정답 반응을 보인 학생이 1명도 없어 큰 차이를 보였다.

첫 번째로 표준구조의 등식을 다룬 7(1), 7(2), 7(4)번 문항을 좀 더 상세히 살펴보면 같은 구조의 등식임에도 불구하고 □가 제시된 위치에 따라 정답률이 달라짐을 볼 수 있었다. 교과서에서 주로 다루는 결과값을 구하는 형태인 7(1)번의 경우, 실험반과 비교반 모두 거의 모든 학생들이 문항을 잘 해결했지만 □가 우변에 제시된 경우 학생들의 평균이 낮아짐을 확인할 수 있었다. 구체적인 학생들의 오답반응을 살펴보면 7(2)의 경우 좌변의 4와 우변의 8을 더한 12가 가장 많았으며, 연산의 실수로 보이는 5나 2와 같은 경우도 발견할 수 있었다. 7(4)는 유일하게 실험반이 비교반에 비해 평균이 낮은 문항이었는데, 이전 문항과 마찬가지로 11처럼 좌우변의 수를 모두 더한 값으로 답한 경우가 있었으며, 실험반에서는 특히 계산 실수로 보이는 6이나 2와 같은 오답 반응이 많았다.

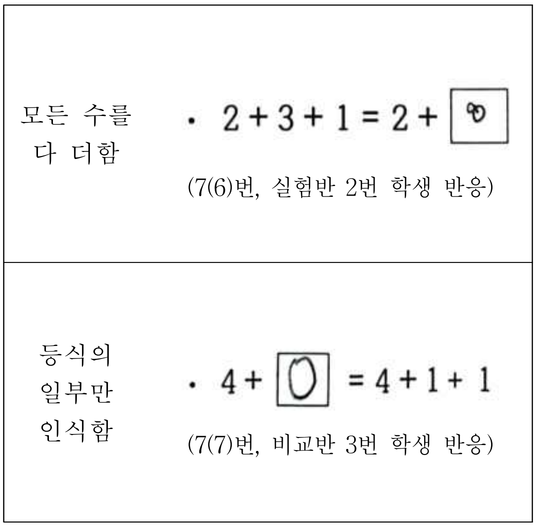
두 번째로 비표준구조 중 ‘a=b+c’ 구조인 7(3)을 살펴보면 앞서 등식 구조 문항에서와 마찬가지로 비교반 학생들이 다른 비표준구조의 문항에 비해 높은 평균을 보였다(약 0.64점). 구체적인 오답 반응을 살펴보면 실험반과 비교반 모두 좌변의 8과 우변의 1을 더한 결과

[표 7] 등식 해결 문항에 대한 결과 비교

구분	문항		사후 평균	
			실험반	비교반
□의 값 구하기	7	□에 알맞은 수를 써넣으시오.		
		(1) 2+3=□	1.0000	0.9545
		(2) 4+□=8	0.8696	0.7727
		(3) 8=□+1	0.8261	0.6364
		(4) □+4=7	0.7391	0.7727
		(5) □+1=7+2	0.6522	0.1818
		(6) 2+3+1=2+□	0.6087	0.0909
		(7) 4+□=4+1+1	0.6087	0
	8	7+8을 더해보지 말고, □에 알맞은 수를 써넣으시오. 7+8=□+8	0.6957	0.1364
	9	5+9를 더해보지 말고, □에 알맞은 수를 써넣으시오. 6+□=5+9	0.5652	0
△의 값 구하기	10	옳은 식을 만들려고 합니다. △의 값은 얼마일까요? 8=△+5 △의 값은? ( )	0.6522	0.3182

값인 9를 제시한 경우가 가장 많았으며, 비교반의 경우 우변의 8을 그대로 쓰거나 좌변의 1을 그대로 쓰는 경우도 있었다.

세 번째로 실험반과 비교반의 평균 차이가 가장 컸던 'a+b=c+d' 구조를 다룬 7(5), 7(6), 7(7), 8, 9번 문항을 살펴보면 비교반의 경우 약 0.18점 이하의 매우 낮은 평균을 보였으며, 특히 7(7)번과 9번은 정답 반응을 보인 학생이 한 명도 없었다. 'a+b=c+d' 구조를 다룬 문항은 크게 □가 등호와 연이어 제시된 경우와 아닌 경우로 나누어 살펴볼 수 있다. 먼저 □가 등호와 연이어 제시되지 않은 경우 비교반 학생들의 오답반응을 살펴보면 7(5)에서 등식의 일부인 '□+1=7'에만 주목하여 □의 값을 6이라 답하는 경우가 가장 많았으며, 이 외에도 0이라고 답하는 경우도 있었다. 실험반에서도 비교반과 마찬가지로 6이라고 답한 경우가 가장 많았으나, 비교반에서는 나타나지 않은 우변의 7+2의 결과값인 9라고 답하는 경우도 있었다. 7(6)의 경우 □의 위치가 가장 오른쪽에 위치하고 있어 [그림 3]처럼 앞서 7(5)에서는 잘 나타나지 않았던 제시된 모든 항 2, 3, 1, 2를 모두 더한 8을 응답한 경우가 많았으며, 2나 3을 응답한 경우도 많았다. 다음으로 □가 등호와 연이어 제시된 경우를 살펴보면 먼저, □가 등호의 우측에 제시된 8번 문항의 경우 좌변의 7+8의 결과값인 15를 제시한 경우가 가장 많았다. 이 외에도 비교반의 경우에는 0을 오답으로 제시한 경우가 많았는데 주어진 등식의 일부 즉 '8=□+8'에만 집중하여 0을 제시한 것으로 보인다. 마지막으로 실험반과 비교반에서 가장 낮은 평균을 보인 7(7)과 9번 문항의 경우 □가 등호의 좌측에 연이어 제시된 경우로, [그림 3]처럼 'a+□=c+d'에서 등식의 일부 즉, 'a+□=c'에만 집중하는 경우가 많았다. 예를 들어 7(7)에서 비교반은 '4+□=4'에만 주목하여 0이라고 답한 경우가 가장 많았으며, 4를 그대로 쓰는 경우도 많았다. 실험반과 비교반에서 공통적으로 □를 중심으로 양옆에 위치한 4와 4를 더한 값인 8을 제시한 학생도 많았다. 9번 문항은 비교반의 경우 '4+□=5'에만 주목하여 1이라고 답한 경우가 가장 많았으며, 우변의 9를 그대로 적는 경우도 있었다. 반면 실험반의 경우 우변의 5를 그대로 적는 경우가 많았다.



[그림 3] 등호 해결 문항에서 학생들의 오답 반응

마지막으로 □가 아닌 △의 값을 구하도록 제시한 10번 문항을 살펴보면 등식의 구조와 미지수의 위치가 7(3)번 문항과 동일하지만 7(3)에 비해 문항 설명이 길고 복잡한 점을 감안하더라도 실험반과 비교반에서 모두 평균은 훨씬 낮게 나타났다. 구체적인 오답 반응을 살펴보면 7(3)에서 가장 흔하게 보였던 오답반응인 나머지 항을 더하는 경우는 8+5로 교육과정 범위를 벗어나기 때문에 나타나지 않았다. 대신 좌변의 8을 그대로 쓰거나 우변의 5를 그대로 쓰는 경우가 가장 많았으며, 이 외에 2나 10과 같은 오답을 제시하기도 했다.

이처럼 등식 구조별 평균을 분석한 결과 실험반과 비교반 모두 등식 구조에 따라 평균이 달라짐을 확인할 수 있었으며 표준구조보다 비표준구조일 때 평균이 낮음을 알 수 있었다. 특히, 비표준구조 중에서도 'a+b=c+d'는 평균이 더 낮았고, 이때 □가 등호와 연이어 제시되는 경우 평균이 더 낮음을 확인할 수 있었다. 학생들의 오답을 분석한 결과 공통적으로 비표준구조를 표준구조에 맞춰 해석하는 과정에서 주로 오류가 나타났다. 구체적으로 'a=□+c'나 '□+b=c'에서 제시된 기호나 순서에 상관없이 두 수를 더한 결과값을 □의 값으로 제시하거나 'a+b=c+d'에서 □의 위치에 따라 등식의 일부 항에만 주목하여 표준구조처럼 인식한 후, □의 값으로 일부 항만 더한 값을 제시하거나 □를 제외한 모든 항을 더하는 등의 반응을 보였다. 더불어

□외에 다른 미지수를 사용하는 경우 같은 구조, 같은 위치에 미지수가 제시되었더라도 평균이 더 낮았다. 비교반과 실험반의 오답 반응 경향을 살펴보면, 문항에 따라 차이는 있지만 주로 실험반의 경우는 비교반에 비해 계산 실수나 항을 그대로 옮겨 적는 오류가 비교적 많았고, 비교반의 경우는 제시된 등식을 표준구조의 등식에 맞춰 해석하는 과정에서 나타나는 오류가 많았다. 이는 실험반 학생들의 경우 제시된 등식을 표준구조의 등식에 맞춰 해석할 수 있는 학생들의 경우 수업을 통해 비표준구조의 등식을 인식할 수 있게 되었고, 이 외에 등식 자체에 대해 제대로 인식하지 못하거나 계산 실수로 인한 오류가 주로 발생했기 때문으로 보인다.

Ⅳ. 결론 및 논의

본 연구에서는 등호 도입 단원에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에 따른 초등학교 1학년 학생들의 등호 이해를 분석하고자 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에 참여한 실험반과 일반 수업에 참여한 비교반 학생들 간의 사후 검사 결과를 비교·분석하였다. 그 결과 학생들은 등호 의미, 등식 구조, 등식 해결의 거의 모든 문항에서 비교반에 비해 통계적으로 유의미하게 높은 평균을 보였다. 이러한 연구 결과를 중심으로 등호의 관계적 이해를 강조한 등호 도입 지도와 관련된 시사점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교 1학년 학생들은 적절한 지도를 통해 등호를 처음 학습하는 과정에서 등호를 관계적으로 이해할 수 있었다. 등호 도입 단원에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 받은 실험반 학생들이 비교반 학생들보다 세 가지 유형의 문항에서 모두 더 높은 성취를 보였다. 이러한 결과는 선행연구에서 저학년 학생들을 대상으로 등호의 관계적 이해를 강조하여 지도하였을 때, 유의미한 변화를 보였다는 선행연구의 결과와도 일맥상통한 결과이다(Bajwa et al., 2021; Blanton et al., 2018; Davenport et al., 2023; Stephens et al., 2021). 특히 본 연구에서는 선행연구에서처럼 별도의 프로그램을 추가로 투입하지 않고 기존의 수업 내용을 유지하면서 15차시의 수업을 일부 또는 전면 재구성한 것이라는 점에서 시사하는 바가 크다. 또한 등호의 관계적 이해를 강조한 수업이나 프로그램의 투입이 학생들의 연산 능력에 부정적인 영향을 끼치지 않았다는 선행연구의 결과처럼(Davenport et al., 2023), 본 연구에서도 기본 연산과 관련된 문항에서 비교반과 실험반의 평균이 유사했다는 점에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업이 본 단원의 학습목표인 덧셈과 뺄셈 연산의 학습에 방해요인으로 작용하지 않았음을 확인할 수 있었다.

둘째, 비표준구조 특히 'a=b'와 'a+b=c+d' 구조의 등식은 기존의 등호 도입 단원의 지도만으로 이해하기 힘들다. 실제 등식 구조 문항과 등식 해결 문항에서 'a=b'와 'a+b=c+d' 구조의 문항에 대한 실험반과 비교반의 평균을 살펴보면 다른 등식 구조의 문항에 비해 그 차이가 매우 두드러졌다. 예를 들어, 1번 문항에서 실험반과 비교반의 평균 차이는 '6=2+4' 문항에서는 약 0.19점이었으나 '1=1' 문항은 약 0.64점, '1+3=2+2'문항은 약 0.51점으로 'a=b'와 'a+b=c+d' 구조의 문항에서 두드러진 차이를 발견할 수 있었다. 이를 통해 기존 방식의 연산 지도를 통해서는 'a=b'와 'a+b=c+d' 구조의 등식은 이해하기 어렵지만, 적절한 지도가 제공된다면 초등학교 1학년 학생도 다양한 비표준구조의 등식을 이해할 수 있다는 가능성을 발견했다. 다만 비표준구조 중 'a=b+c' 구조의 등식은 문항의 특성에 따라 차이는 있었지만, 비교반 학생들도 비교적 높은 평균을 보였다는 점에서 연산과 답으로 구성된 등식의 경우 기존 방식의 연산 지도를 통해서도 이해가 신장될 수 있음을 확인할 수 있었다. 이는 김정원 외(2016)에서 2학년 학생들이 등식 구조 문항에서 'a=b+c'에서 비교적 높은 정답률을 보인 것과 유사한 결과이다.

반면 실험반 학생들도 이해하기 어려워하는 문항들도 있었다. 구체적으로 두 등식 사이의 관계를 추론하는 등식 추론하기 문항은 다른 등식 구조 문항에 비해 평균이 낮았고, 등식 해결 문항에서도 문항 진술에 차이는 있었지만 같은 구조, 같은 위치에 미지수를 제시했음에도 □가 아닌 △를 제시하였을 경우 낮은 평균을 보였다는 점에서 이와 같은 활동을 1학년 학생들에게 도입하는 것은 신중히 고려할 필요가 있다.

셋째, 등호 도입 단원에서 등호의 의미를 강조하여 지도할 필요가 있다. 사후 검사에서 세 가지 유형의 문항 중 비교반과 실험반 모두 등호 의미 유형에서 가장 낮은 평균을 보였다는 점은 등호 지도에 시사하는

바가 크다. 이는 선행연구에서 등호의 의미를 묻는 문항을 다른 유형의 문항보다 어려워하며(Matthews et al., 2012), 다른 학년보다 등호의 정의를 배운 지 얼마 되지 않은 2학년 학생들의 등호 의미 이해가 가장 낮다는 결과와 일치하는 결과이지만(김정원 외, 2016), 본 연구는 등호 도입 단원을 학습한 이후에 실시된 검사 결과라는 점에서 시사하는 바가 더 크다 할 수 있다. 구체적으로 실험반과 비교반 모두 등호의 의미를 '같다'라고 명시적으로 학습했음에도 불구하고 '더한다'와 '문제에 대한 답'을 등호의 의미로 옳다고 답한 비교반 학생은 약 64% 정도며, 실험반 학생의 약 30%도 '문제에 대한 답'을 옳다고 답했다는 점에서 등호의 의미를 언어적으로 설명하는 것은 학생들에게 매우 도전적인 과제임이 분명하다. 선행연구에서 제시한 바와 같이 등호가 무엇과 무엇이 같음을 나타내는 기호인지 그 대상을 분명히 제시하고(김정원 외, 2016; 방정숙 외, 2023; 선우진, 방정숙, ; 이유진, 방정숙, 2023), 등호 정의에 대한 이해를 언어적인 방식으로 측정하는 경우 언어적인 능력이 다소 부족한 1학년 학생의 이해를 돕기 위해 구체적인 예시나 등식에서 등호의 의미를 제시하는 대안적인 측정 방법을 고려할 필요가 있다.

본 연구에서는 등호 도입 단원에서 관계적 이해를 강조한 수업을 실행하고 학생들의 등호 이해에 변화가 있는지 분석하였다. 다만 연구 결과와 별개로 덧셈과 뺄셈 연산을 처음 학습하는 1학년 학습자의 특성과 학습 부담의 측면에서 등호의 도입 단원에서 관계적 이해를 강조하여 지도하는 것은 신중한 접근이 필요하다. 또한 본 연구는 1개 학급만을 연구 대상으로 삼았다는 점, 1학년 학생의 특성상 검사 문항을 충분히 제시하지 못했다는 점에서 제한점을 지니고 있다. 그러나 비교반에 비해 실험반의 사후 검사 결과 세 가지 유형의 문항에서 모두 통계적으로 유의미한 변화가 있었다는 점에서 등호 도입 단원에서의 관계적 이해를 강조한 수업에 대한 가능성을 엿볼 수 있었다. 이에 등호 도입 단원에서 관계적 이해를 강조할 수 있는 지도방안이나 대안적인 활동을 설계하는 데 본 연구가 시사점을 제공할 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부(2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호 [별책 8].

교육부(2023). 수학 1-1. 서울: 비상교육.

김소현, 방정숙(2023). 덧셈과 뺄셈 도입 단원에서 등호에 대한 관계적 이해를 강조한 수업의 분석. 한국초등수학교육학회지, 26(1), 63-86.

김정원, 최지영, 방정숙(2016). 초등학생들은 '='를 어떻게 이해하는가?: 문항유형별 실태조사. 수학교육학연구, 26(1), 79-101.

방정숙, 김리나, 김소현(2022). 한국, 싱가포르, 미국, 일본의 초등학교 교과서에 제시된 덧셈과 뺄셈 도입에 대한 비교분석. 수학교육 논문집, 36(2), 299-252.

선우진, 방정숙(2022). 초등학교 3~4학년군 수학 교과서에 제시된 등호 및 동치에 대한 교수·학습 요소 분석. 초등수학교육, 25(4), 459-475.

이유진(2023). 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 학생의 노티싱 분석. 수학교육, 62(3), 341-362.

이유진, 방정숙(2023). 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에 따른 초등학교 2학년 학생들의 등호 이해 분석. 수학교육학연구, 33(2), 337-358.

임재훈(2013). 등호 해석의 두 시간적 차원인 읽기 · 쓰기의 불일치와 그 해소. 한국초등수학교육학회지, 17(2), 207-223.

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 221-247.

Bajwa, N. P., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students' developing understanding of mathematical equivalence. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 1-27.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. J. Dougherty, & R. M. Zbiek

(Eds.), *Essential understandings series*. National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Otalora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 167-201.

Davenport, J. L., Kao, Y. S., Johannes, K. N., Hornburg, C. B., & McNeil, N. M. (2023). Improving children's understanding of mathematical equivalence: An efficacy study. *Journal of Research on Educational Effectiveness, 16*(4), 615-642.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fonger, N. L., Stephens, A., Blanton, M., Isler, I., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2018). Developing a learning progression for curriculum, instruction, and student learning: An example from mathematics education. *Cognition and Instruction, 36*(1), 30-55.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316-350.

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth grade algebra competence. *Child Development, 91*(1), 14-28.

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C., & McKeever, M. O. (2019). Consequences of individual differences in children's formal understanding of mathematical equivalence. *Child Development, 90*(3), 940-956.

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61-80.

Stephens, A., Torres, R. V., Sung, Y., Strachota, S., Gardiner, A. M., Blanton, M., Stroud, R., & Knuth, E. (2021). From "you have to have three numbers and a plus sign" to "it's the exact same thing": K–1 students learn to think relationally about equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100871.

Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R. V., Morton, K., Gardiner, A. M., Blanton, M., & Stroud, R. (2022). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. *Mathematical Thinking and Learning, 24*(1), 1-18.

Analysis of students' understanding of equal sign through equal sign introduction lessons emphasizing their relational understanding

Lee, Yujin
Deajeon Heungryong Elementary School
E-mail : kjyjl4231@naver.com

Recently, the 2022 revised mathematics curriculum has established achievement standards for equal sign and equality, and efforts have been made to examine teaching methods and student understanding of relational understanding of equal sign. In this context, this study conducted a lesson that emphasized relational understanding in an introduction to equal sign, and compared and analyzed the understanding of equal sign between the experimental group, which participated in the lesson emphasizing relational understanding and the control group, which participated in the standard lesson. For this purpose, two classes of students participated in this study, and the results were analyzed by administering pre- and post-tests on the understanding of equal sign. The results showed that students in the experimental group had significantly higher average scores than students in the control group in all areas of equation-structure, equal sign-definition, and equation-solving. In addition, when comparing the means of students by item, we found that there was a significant difference between the means of the control group and the experimental group in the items dealing with equal sign in the structure of 'a=b' and 'a+b=c+d', and that most of the students in the experimental group correctly answered 'sameness' as the meaning of equal sign, but there were still many responses that interpreted the equal sign as 'answer'. Based on these results, we discussed the implications for instruction that emphasizes relational understanding in equal sign introduction lessons.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : equal sign, relational understanding, equation-structure, equation-solving