The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 24, No. 1, pp.37-42, Feb. 29, 2024. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2024.24.1.37
JIIBC 2024-1-6

절단 폭 최소화 문제의 최대차수 정점 분할 알고리즘

Algorithm for Maximum Degree Vertex Partition of Cutwidth Minimization Problem

이상운*

Sang-Un Lee*

요 약 본 논문은 NP-완전으로 최적 해를 구하는 다항시간 알고리즘이 알려져 있지 않은 절단 폭 최소화 문제에 대해 다항시간 알고리즘을 제안하였다. 주어진 그래프 $G=(V,E), m=|V|, n=|E|$에 대한 최소 절단 폭 $CW_f(G)=\max_{v\in V}CW_f(v)$를 찾기 위해 제안된 알고리즘은 첫 번째로, 최대차수 정점 v_i를 기준으로 $N_G[v_i]$ 정점들을 v_i를 통과하는 간선수가 최소가 되도록 양분하는 열 절단면을 찾고, 좌우의 $N_G[v_i]$들 간의 통과 간선수가 최소가 되는 행 절단면으로 분할하였다. 두 번째로, 각 부 그래프 내부의 정점들을 선형으로 연결하고, 부 그래프들 간 간선을 연결하여 하나의 선형 배열을 만들었다. 마지막으로, 정점을 이동시켜 최소 절단폭을 갖는 최적화 과정을 수행하였다. 다양한 그래프들을 대상으로 실험한 결과, 수행 복잡도가 $O(n^2)$인 제안된 알고리즘을 모든 데이터들에 대해 최적 해를 찾을 수 있었다.

Abstract This paper suggests polynomial time algorithm for cutwidth minimization problem that classified as NP-complete because the polynomial time algorithm to find the optimal solution has been unknown yet. To find the minimum cutwidth $CW_f(G)=\max_{v\in V}CW_f(v)$for given graph $G=(V,E), m=|V|$, $n=|E|$, the proposed algorithm divides neighborhood $N_G[v_i]$ of the maximum degree vertex v_i in graph G into left and right and decides the vertical cut plane with minimum number of edges pass through the vertex v_i firstly. Then, we split the left and right $N_G[v_i]$ into horizontal sections with minimum pass through edges. Secondly, the inner-section vertices are connected into line graph and the inter-section lines are connected by one line layout. Finally, we perform the optimization process in order to obtain the minimum cutwidth using vertex moving method. Though the proposed algorithm requires $O(n^2)$ time complexity, that can be obtains the optimal solutions for all of various experimental data

Key Words : Linear layout, Cutwidth, Maximum degree, Vertical partition, Horizontal section

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 2023년 10월 21일, 수정완료 2024년 1월 8일
게재확정일자 2024년 2월 9일

Received: 21 October, 2023 / Revised: 8 January, 2024 /
Accepted: 9 February, 2024
*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University, Korea

Ⅰ. 서 론

절단 폭 최소화 문제(cutwidth minimization problem, CMP)는 주어진 그래프 $G=(V,E), n=|V|$, $m=|E|, e=(v_i,v_j)\in E$의 n개 정점들에 $[1,n]$ 범위의 서로 다른 (distinct) 번호 $f(v)$를 부여하여 일렬로 배치할 경우, 최대 절단 폭(간선 수)을 갖는 정점의 절단 폭 $CW_f(G)=\max_{v\in V}CW_f(v)$이 최소가 되는 배치도(layout)를 찾는 문제이다.[1]

CMP는 대규모 전력전송시스템, 하이퍼텍스트 배치, 화학 반응속도, 수치화된 지구물리학, 데이터저장소, VLSI 설계와 망 생존성 등에 적용된다.[1]

CMP는 NP-완전(NP-complete)으로 분류되어 있어 최적 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘이 제안되지 않고 있다.[2,3]

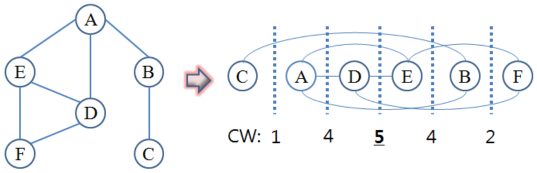
CMP의 근사 해를 구하는 메타휴리스틱 알고리즘으로, Pardo et al.[4]은 가변공식 탐색 법(variable formulation search, VFS)을, Marti et al.[5]은 분기한정 법(branch-and-bound, BB)을, Pantrigo et al.[6]은 산점 탐색 법(scatter search, SS)을, Pardo et al.[7]은 가변 이웃 탐색법(variable neighborhood search, VNS)을, Bansal et al.[8]은 하이브리드 진화 알고리즘(hybrid evolutionary algorithm, HEA)을, Pardo[9]은 휴리스틱 알고리즘(heuristic algorithm, HA)을, López-Locés et al.[10]은 정수선형계획법(integer linear programming, ILP)을, Andrade와 Resende[11]은 GRASP(greedy randomized adaptive search)+PR(Path-Relinking) 방법을, Andrade와 Resende[12]은 GRASP+EPR(evolutionary PR)을, Cohoon과 Sahni[13]은 담금질기법(simulated annealing, SA)을, Palubeckis와 Rubliauskas[14]는 TS(tabu search)+BB를 제안하였다.

본 논문에서는 CMP의 해를 $O(n)$의 선형시간으로 얻을 수 있는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 CMP의 개념을 고찰한다. 3장에서는 CMP에 대해 $O(n)$ 복잡도로 해를 찾는 규칙을 제시한 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 실제 데이터에 적용하여 알고리즘 적합성을 평가해 본다.

Ⅱ. 절단 폭 최소화 문제 고찰

그림 1과 같이 $G=(V,E)$ 그래프가 주어졌다고 가정하여 보자. G_1은 Marti et al.[1]에서 인용되었다. 여기서 $n=6, m=7$이다.

그림 1은 G_1에 대해 Marti et al.[1]이 임의의 순서로 배열한 경우의 절단 폭을 나타내고 있으며, C-A-D-E-B-F 배열의 $CW_f(G)=5$임을 알 수 있다.



(a) Graph G_1 (b) Cutwidth for possible layout

그림 1. 절단 폭 최소화 문제
Fig. 1. Cutwidth minimization problem

그림 2는 G_1에 대해 C-B-E-A-D-F로 배열시 최소 절단 폭 $CW_f(G)=3$으로 감소시킬 수 있음을 보였다.

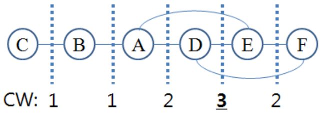


그림 2. G_1의 최소 절단 폭
Fig. 2. Minimum cutwidth for G_1

그림 1과 같이 $n=6, m=7$의 단순한 그래프인 경우 $CW_f(G)$는 비교적 쉽게 구할 수 있다. 그러나 VLSI (대규모 집적회로)와 같이 수많은 부품 (정점)간에 복잡한 배선 연결 (간선)이 존재하는 경우, 최소 절단 폭을 갖도록 부품을 최적으로 배치하는 것은 쉽지 않다. 따라서 3장에서는 최소 절단 폭을 다항시간으로 찾아갈 수 있는 규칙을 제시한 알고리즘을 제안한다.

Ⅲ. 최대차수 정점 분할 알고리즘

본 장에서는 최소 절단 폭을 갖는 선형 배치도는 “최대 차수를 가진 정점이 결정한다.”는 가정에 기반한 알고리즘을 제안한다.

위 가정에 기반하여, $G=(V,E), n=|V|$의 n개 정점들 중 첫 번째로, 최대 차수 정점 $d_G(v_i)=\Delta(G)=k$, $N_G[v_i]=k$인 v_i를 결정하고, v_i의 차수 k에 대해 $L(v_i)=\lceil k/2 \rceil$개의 좌측과 $R(v_i)=\lfloor k/2 \rfloor$개의 우측으로 간선들을 양분한 열 절단면을 찾는다. 이 절단면은 v_i를 통과

The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 24, No. 1, pp.37-42, Feb. 29, 2024. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

하는 $\{L(v_i), R(v_i)\}$의 간선 수가 최소가 되는 면이다.

일단 v_i를 기준으로 좌우로 양분되면, $L(v_i)$와 $R(v_i)$를 $N_G[v_i]$ 정점들을 기준으로 이웃하는 $N_G[v_i]$의 부 그래프 간 간선(inter-edges)이 최소가 되는 행 절단면을 찾는다.

다음으로, 각 부 그래프 내부 간선 (intra-edges)들로 정점들을 연결하고, 부 그래프 간 간선을 연결한 선형배열을 결정한다.

마지막으로, 선형 배열된 정점들을 대상으로 식 (1)의 이동 전략을 적용한다.

- L: v_i와의 거리 $d \ge 2$인 간선이 존재하는 좌측에 위치한 정점 수
- R:v_i와의 거리 $d \ge 2$인 간선이 존재하는 우측에 위치한 정점 수
- N: v_i와의 거리 $d=1$인 간선이 존재하는 좌우측 정점 수

$(L-R)-N>0$: v_i를 L 정점들 중 중앙으로 이동 (1)
$(R-L)-N>0$: v_i를 R 정점들 중 중앙으로 이동

제안된 알고리즘을 최대차수 정점 분할 알고리즘 (maximum degree vertex partition algorithm, MDVPAA)라 하며, 다음과 같이 수행된다.

$G=(V,E), n=|V|$
번호 : $p=1,2,\cdots,n$
Step 1. 열 분할(열 절단면)
최대 차수 정점 $d_G(v_i)=\Delta(G)$인 v_i 선택.
v_i의 인접 (이웃) 정점 $v_j = N_G[v_i]=k$에 대해 v_i를 통과하는 $\{L(v_i), R(v_i)\}$의 간선 수가 최소가 되는 면으로 $L(v_i)=\lceil k/2 \rceil$ 와 $R(v_i)=\lfloor k/2 \rfloor$의 열 절단면을 긋는다.
Step 2. 행 분할(행 절단면)
$L(v_i)=\lceil k/2 \rceil$ 와 $R(v_i)=\lfloor k/2 \rfloor$ 에 대해 좌우측 $N_G[v_i]$들 간의 간선 수가 최소가 되도록 행 절단면을 긋는다.
Step 3. 선형 배열
(1) 각 부 그래프 내의 정점들을 v_i로부터 가장 멀리 떨어진 최소 차수 정점부터 연결하는 내부 간선으로 연결.(Intra-line graph)
(2) 부 그래프들 간 간선으로 연결(inter-line graph)한 선형 배열 작도.
Step 4. 절단 폭 최소화 정점 이동
for $i=1$ to n
if $(L-R)-N>0$then v_i를 L 정점들의 중앙으로 이동
else if $(R-L)-N>0$then v_i를 R 정점들의 중앙으로 이동
end

G_1 그래프에 대해 제안된 MDVPAA을 적용한 결과는 그림 3에 제시되어 있다.

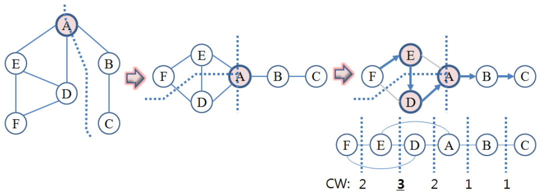
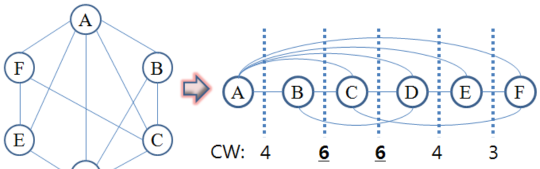


그림 3. G_1의 최대차수 정점 분할 알고리즘
Fig. 3. MDVPAA for G_1

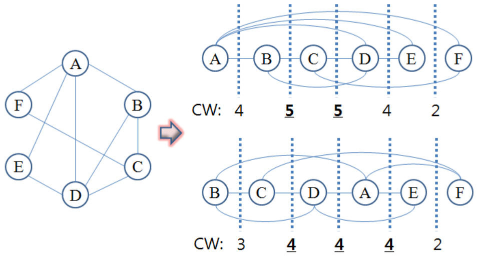
G_1에서의 최대차수 정점 A, D, E 중에서 A로 결정하고, A를 통과하는 간선이 최소가 되는 열 절단면을 그리면 $L(v_i)=\{D,E\}, R(v_i)=\{B\}$로 $d_G(A)=3$이 2:1 분할된다. $R(v_i)$는 1개 정점만 존재하여 더 이상 행 절단면으로 분할되지 않으며, $L(v_i)=\{D,E\}$에 대해 행 절단면을 찾으면 $\{E,F\},\{D\}$의 행 절단면을 찾아 분할과정은 종료되었다. 다음으로 내부 간선들을 연결하면 F-E, D, A, B-C를 얻으며, 부그래프간 간선들을 연결하면 F-E-D-A-B-C의 선형 배열을 얻는다. 이 선형 배열은 $(L-R)-N>0$과 $(R-L)-N>0$을 충족시키는 정점이 존재하지 않아 Step 4의 정점이동 과정을 수행하지 않고 알고리즘이 종료된다. 이 경우 $CW_f(G)$ 는 $\max_{v \in V} CW_f(v)$는 E-D에서 발생하며 $CW_f(G)=3$을 얻는다.

Ⅳ. 알고리즘 적용 및 결과 분석

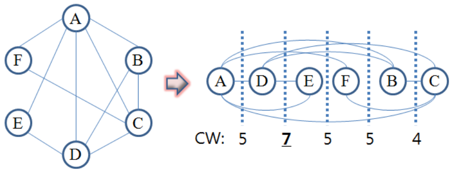
본 장에서는 그림 4의 다양한 그래프들에 대해 제안된 MDVPAA를 적용하여 본다.



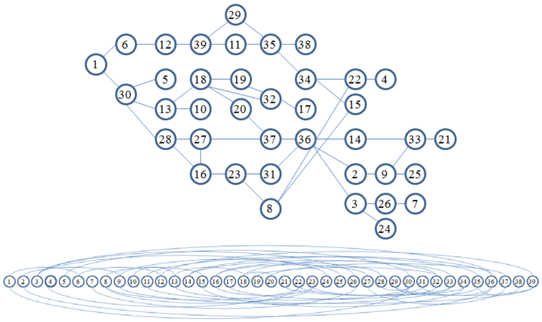
(a) G_2



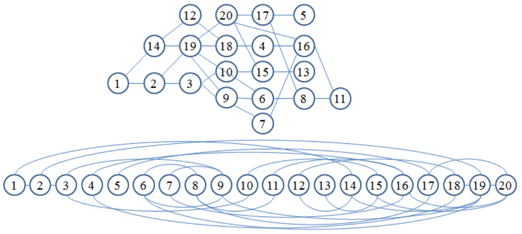
(b) G_3



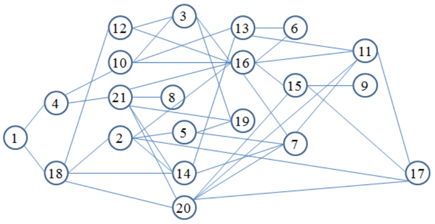
(c) G_4

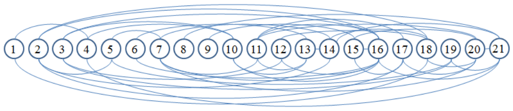


(d) G_5 (bcspwr01)

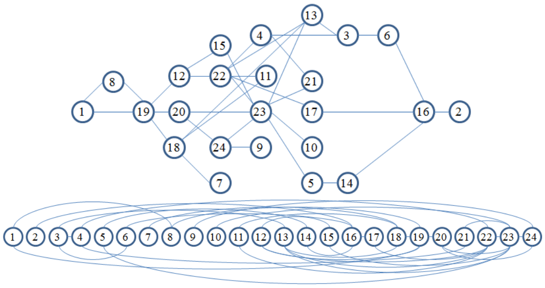


(e) G_6 (p51_20_28)





(f) G_7(p63_21_42)

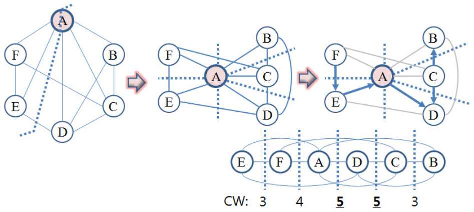


(g) G_8(p100_24_34)

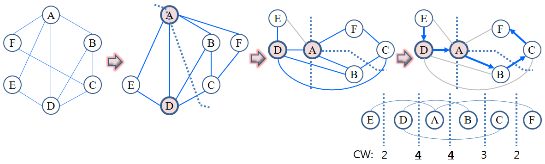
그림 4. 실험 데이터
Fig. 4. Experimental data

G_2는 Pardo[9]에서, G_3은 Pardo et al.[7]과 Pardo[9]에서, G_4는 Marti et al.[5]에서, G_5, G_6, G_7, G_8은 Marti et al.[1]에서 인용되었다.

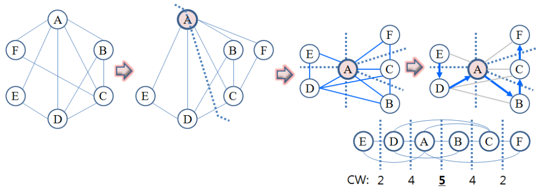
그림 4의 다양한 그래프들에 대해 제안된 MDVPAA를 적용한 결과는 그림 5에 제시되어 있다.



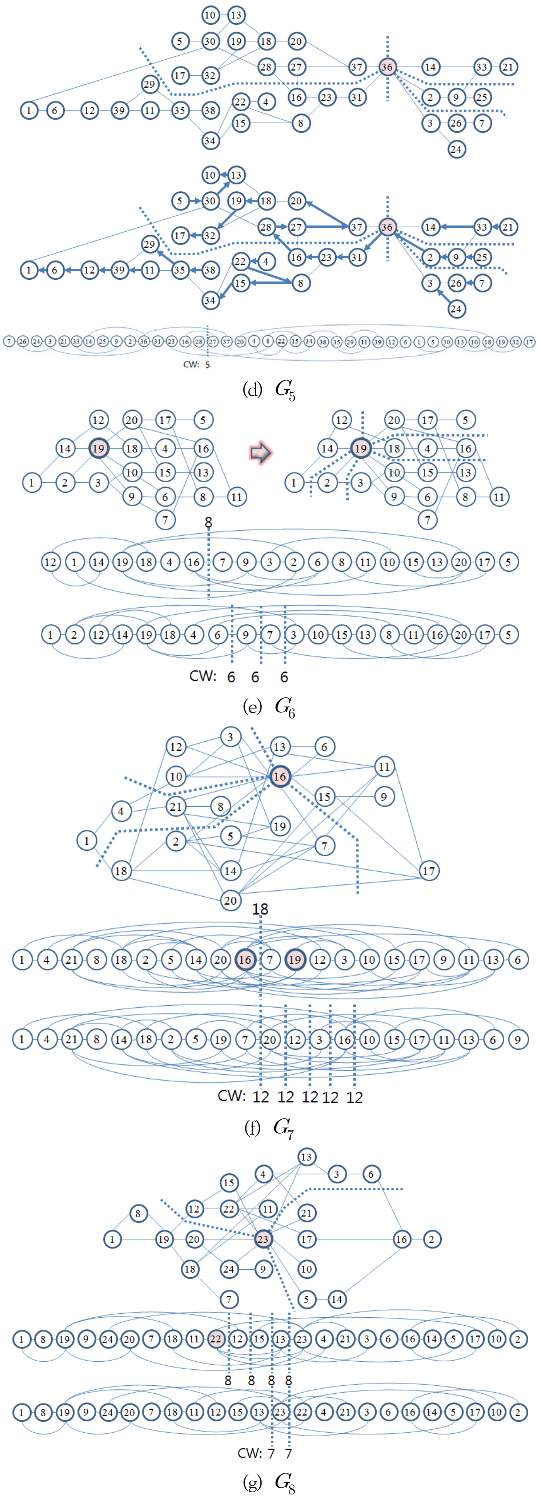
(a) G_2



(b) G_3



(c) G_4



(d) G_5

(e) G_6

(f) G_7

(g) G_8

그림 5. 실험 데이터에 대한 MDVPAA
Fig. 5. MDVPAA for experimental data

본 논문에서 거론된 다양한 실험 그래프들에 대해 제안된 MDVPAA로 해를 구한 결과를 기존에 알려진 해와 비교하여 표 1에 제시하였다. 표에서, 8개 그래프들 모두에서 제안된 MDVPAA로 최적 해를 얻었음을 알 수 있다.

표 1. 알고리즘 성능 비교
Table 1. Compare with Algorithm Performance

그래프	절단 폭 $CW_f(G)$	
	알려진 해	MDVPAA
G_1	5	3
G_2	6	5
G_3	4	4
G_4	7	5
G_5	5	5
G_6	6	6
G_7	12	12
G_8	7	7

V. 결 론

본 논문은 NP-완전으로 분류되어 있어 최적 해를 다항시간으로 구하는 알고리즘이 제안되지 않고 있는 절단 폭 최소화 문제에 대해 $O(n^2)$의 다항시간 알고리즘을 제안하였다.

제안된 알고리즘은 $G=(V,E), m=|V|, n=|E|$에서 첫 번째로, 최대 차수를 가진 정점 v_i를 기준으로 좌우로 양분한 최소의 통과 간선수를 갖는 열 절단면을 결정하였다. 두 번째로, 좌측과 우측의 $N_G[v_i]$ 정점들을 대상으로 통과 간선수가 최소가 되는 행 절단면을 결정하였다. 이와 같이 분할된 각 부 그래프들에 대해, 부 그래프 내부의 간선들을 연결하고, 부 그래프들 간 간선을 연결하여 완전한 선형 배열 그래프를 얻었다. 마지막으로, 절단 폭이 최소화되도록 정점을 이동하는 최적화 과정을 수행하였다.

제안된 알고리즘은 $O(n^2)$으로 수행되는 다항시간 알고리즘임에도 불구하고, 다양한 실험 데이터에 적용한 결과 모든 데이터에서 최적 해를 얻을 수 있었다.

따라서 최소 절단폭을 찾고자 하는 대규모 전력전송시스템, 하이퍼텍스트 배치, 화학 반응속도, 수치화된 지구물리학, 데이터저장소, VLSI 설계와 망 생존성 등의 분야에서 제안된 알고리즘을 적용하면 난제를 해결하는데 많은 도움이 될 수 있을 것이다.

References

[1] R. Marti, J. J. Pantrigo, A. Duarte, and E. G. Pardo, "Cutwidth Minimization Problem," Optsicom Project, University of Valencia, Spain, https://grafo.etsii.urjc.es/optsicom/cutwidth.html, 2010.

[2] M. R. Garey, D. S. Johnson, and L. Stockmeyer, "Some Simplified NP-complete Graph Problems," Theoretical Computer Science, Vol. 1, No. 3, pp. 237-267, Feb. 1976, https://doi.org/10.1016/ 0304-3975(76)90059-1

[3] F. Garvril, "Some NP-complete Problems on Graphs," Proceedings of the 11th Conference on Information Science and Systems, pp. 91-95, 1977.

[4] E. G. Pardo, N. Mladenović, J. J. Pantrigo, and A. Duarte, "Variable Formulation Search for the Cutwidth Minimization Problem," Applied Software Computing, Vol. 13, No. 5, pp. 2242–2252, May 2013, https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.01.016

[5] R. Martí, J. J. Pantrigo, A. Duarte, and E. G. Pardo, "Branch and Bound for the Cutwidth Minimization Problem," Computers & Operations Research, Vol. 40, No. 1, pp. 137-149, Jan. 2013, https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.05.016

[6] J. J. Pantrigo, R. Martí, A. Duarte, and E. G. Pardo, "Scatter Search for the Cutwidth Minimization Problem," Annals of Operations Research, Vol. 199, No. 1, pp. 285-304, Oct. 2012, https://doi.org/10.1007/s10479-011-0907-2

[7] E. G. Pardo, N. Mladenović, J. J. Pantrigo, and A. Duarte, "A Variable Neighbourhood Search Approach to the Cutwidth Minimization Problem," Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. 39, No. 1, pp. 67-74, Dec. 2012, https://doi.org/10.1016/j.endm.2012.10.010

[8] R. Bansal, K. Sricastava, and S. Srivastava, "A Hybrid Evolutionary Algorithm for the Cutwidth Minimization Problem," IEEE World Congress on Computational Intelligence, pp. 1-8, Jun. 2012, https://doi.org/10.1109/CEC. 2012.6256549

[9] E. G. Pardo, "E1 Problema de la Minimización de la Anchura de Corte en Ordenaciones Lineales: Resolución Exacta y Heuristica," Universidad Rey Juan Carlos, Doctorial Thesis, 2011.

[10] M. C. López-Locés, N. Castillo-García, H. J. F. Huacuja, P. Bouvry, J. E. Pecero, R. A. P. Rangel, J. J. G. Barbosa, and F. Valdez, "A New Integer Linear Programming Model for the Cutwidth Minimization Problem of a Connected Undirected Graph," Recent Advances on Hybrid Approaches for Designing Intelligent Systems, Studies in Computational Intelligence, Vol. 547, pp 509-517, Mar. 2014, https://doi.org/10.1007/978-3-319-05170-3_35

[11] D. V. Andrade and M. G. C. Resende, "GRASP with Path-Relinking for Network Migration Scheduling," Proceedings of International Network Optimization Conference, pp. 1-6, Apr. 2007.

[12] D. V. Andrade and M. G. C. Resende, "GRASP with Evolutionary Path-Relinking," Proceedings of 7th Metaheuristics International Conference, pp. 1-4, Jun. 2007.

[13] J. Cohoon and S. Sahni, "Heuristics for the Board Permutation Problem," Journal of VLSI and Computer Systems, Vol. 2, No. 1-2, pp. 37- 61, Dec. 1987.

[14] G. Palubeckis and D. Rubliauskas, "A Branch-and-Bound Algorithm for the Minimum Cut Linear Arrangement Problem," Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 24, No. 4, pp. 540-563, Nov. 2012, https://doi.org/10.1007/s10878- 011-9406-2

저 자 소 개

이 상 운(정회원)

• 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
• 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
• 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
• 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
• 2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
• 2007.3 ~ 2015.3 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
• 2015.4 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
• 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 인공지능과 빅데이터분석, 최적화 알고리즘
• e-mail : sulee@gwnu.ac.kr