

두 직사각형 넓이의 합 또는 차로의 변형을 통한 삼각형 넓이 구하기에 관한 예비 초등교사의 도형 조작 능력 분석

이 호 수 (제주대학교, 교수)

최 근 배 (제주대학교, 교수)[†]

이 연구에서는 고정된 직사각형을 기준으로 내접 삼각형과 비-내접 삼각형의 넓이를 두 직사각형의 넓이의 합 또는 차를 이용한 등적변형 문제를 통해 예비 초등교사들의 응답 유형과 정답률 등을 비교 분석하였다. 먼저, 내접 삼각형의 넓이 변형 문항에 대한 학생반응 결과는 다음과 같다. 학년이 다른 두 집단을 비교한 결과, 배적변형, 추론, 카발리에리 원리 사용률 및 정답률에 유의미한 차이가 없었다. 반면, 학년이 같은 두 집단 간 비교에서는 문제 해결을 돕기 위해 제시된 예시의 유형에 따라 응답 유형 비율과 정답률에서 유의미한 차이가 나타났다. 둘째, 비-내접 삼각형의 넓이 변형 문항에 대한 학생반응 결과는 내접 삼각형의 변형과 유사한 패턴을 보였다. 셋째, 특수한 예시가 제공된 집단에서는 학생들이 직각삼각형의 배적변형 개념을 도출해 조작 활동을 수행할 것으로 예상되었다. 그러나 많은 학생이 배적변형 대신 자신이 이미 내재화한 카발리에리 원리를 사용해 문제를 해결했다는 점이 확인되었다. 넷째, 문항 간 비교에 대한 학생반응 결과는 다음과 같다. 학년은 다르지만 동일한 예시를 받은 두 집단에서는 내접 삼각형 변형 문항이 비-내접 삼각형 변형 문항보다 성공적으로 해결되는 경향이 있었으며, 두 문항 간에는 강한 양의 상관관계가 확인되었다. 반면, 특수 예시가 제공된 집단에서는 두 문항 간 성공률의 통계적 차이는 없었으나, 여전히 두 문항 간 강한 연관성이 나타났다. 끝으로, 배적변형과 카발리에리 원리를 활용한 변형에서 학생들의 접근 방식은 다양하지 못했다. 이러한 결과로부터 예비 초등교사의 도형과 관련된 조작활동의 경험이 중요하다는 교육적 시사점을 얻었다.

I. 서론

초등학교에서 평면도형의 넓이를 구하는 방법은 주어진 도형을 이전에 배운 도형의 모양으로 변형하는 조작 활동으로 시작된다. 그 후 수학적 형식화를 하게 된다. 여기서 사용되는 변형에는 ‘등적변형’, ‘배적변형’ 등이 있다. 일반적으로 초등학교 교육과정에서는 평면도형의 넓이는 직사각형의 넓이로부터 시작되며, 그 후 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 순서로 넓이를 구하는 방법을 학습한다(교육부, 2022). 예를 들어, 삼각형의 넓이는 직사각형으로의 ‘등적변형’ 조작 또는 평행사변형으로의 ‘배적변형’ 조작 활동을 통하여 구하게 된다. 정영우(2015)은 예비 초등 교사를 대상으로 사다리꼴의 넓이 공식에 대한 대수적 동치 식을 먼저 구성하고 그 식에 맞는 기하적인 조작 활동을 구현하고 분석하는 사례연구를 통하여, 도형 교육의 두 관점인 추상적·형식적 관점과 맥락적·과정적 관점의 조화로운 학습 경험을 강조하였다. 이러한 관점의 강조는 초등 교사 임용 시험에도 잘 드러난다(한국교육과정평가원, 2012, 2016).

* 접수일(2024년 11월 5일), 심사(수정)일(2024년 11월 29일), 게재확정일(2024년 12월 5일)

* MSC2020분류 : 97C70, 97D99, 97G30

* 주제어 : 배적변형, 등적변형, 카발리에리의 원리, 조작활동 중심의 수학교육

* 이 논문은 2024년도 제주대학교 교원성과지원사업에 의하여 연구되었음.

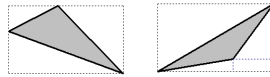
[†] 교신저자 : kbchoe@jejunu.ac.kr

한편, 직각삼각형이 아닌 모든 삼각형의 넓이는 두 개의 직사각형의 넓이로부터 구할 수 있다. 예를 들어, [그림 I-1]은 단지 '직각삼각형의 배적변형'을 이용하여 두 개의 직사각형의 넓이의 합 또는 차로 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있음을 보여준다.

$$\begin{aligned} \text{[그림 I-1] 왼쪽 도형} &= \frac{1}{2} \left(\text{[그림 I-1] 오른쪽 도형 1} + \text{[그림 I-1] 오른쪽 도형 2} \right) \\ \text{[그림 I-1] 왼쪽 도형} &= \frac{1}{2} \left(\text{[그림 I-1] 오른쪽 도형 3} - \text{[그림 I-1] 오른쪽 도형 4} \right) \end{aligned}$$

[그림 I-1] 직각삼각형의 배적 변형을 이용한 삼각형 넓이 구하기 (Jennings, 1994, p. 25 그림 1.35 참조)

이를 일반화하여, [그림 I-2]와 같이 점선으로 표시된 고정된 직사각형 안에 위치한 삼각형의 넓이도 '두 개의 직사각형의 넓이를 이용하여 구할 수 있을까?' 결론적으로 가능하다. 이러한 고찰은 삼각형 세 꼭짓점의 좌표를 아는 경우에 넓이를 구하는 공식을 유도하는 기하적인 방법([그림 II-1] 참조)에서 시작되었다.



[그림 I-2] 고정된 직사각형 안에 위치한 삼각형¹⁾

초등학교 수학과 교육과정에서는 도형의 넓이를 구할 때 조작활동을 강조하고 있으며, 조작활동에는 주로 등적변형, 배적변형 등이 사용된다. 또한 주어진 도형의 넓이를 구하기 위한 변형 조작은 교수자의 교수학적 의도에 따라 다양하게 나타날 수 있다. 즉, 초등학생의 도형의 조작활동 능력은 교수자의 능력에 따라 달라질 수 있다. 따라서 예비 초등교사의 도형의 조작활동 능력을 고찰해 볼 필요성이 있다.

조미경(2022)의 연구는 수학수업설계에 초점을 두었다면, 본 연구는 예비 초등교사의 도형의 조작활동 능력을 분석하기 위하여, [그림 I-2]와 같은 고정된 직사각형(점선 직사각형)의 내부 삼각형의 넓이를 두 개의 직사각형의 넓이를 사용하여 구하는 문제를 제시하고, 문제 해결과정에 나타나는 삼각형 넓이의 변형과 관련된 예비 초등교사의 응답 반응을 분석하였다. 이러한 분석을 통하여, 도형의 넓이와 관련된 조작활동을 중심으로 한 교육적 시사점을 얻고자 한다.

II. 연구의 배경

1. 이론적 배경

이 연구의 출발점이 된 배경은 Blasjo(2005)의 논문²⁾에 있는 [그림 II-1]이며, 이는 평면에 놓인 세 꼭짓점의 좌표를 사용한 삼각형의 넓이를 구하는 식을 유도하는 기하적인 변형이다. 이 절에서 사용된 이론적 배경은 삼각형의 넓이를 '두 직사각형의 넓이의 합 또는 차'로 구하는 도형의 변형과 관련된 '직각삼각형의 (직사각형으로의) 배적변형' 또는 '카발리에리 원리' 등이다²⁾. 이 절에서는 이러한 이론적 배경을 우리 연구의 목적에 맞게 좀 더

1) [그림 I-2]의 왼쪽 도형은 직사각형과 삼각형이 3점에서 만난다. 반면, [그림 I-1]의 왼쪽 도형과 [그림 I-2]의 오른쪽 도형은 각각 직사각형과 삼각형이 무한히 많은 점과 2점에서 만나고 있다. 이 논문에서는 이러한 관점에서 주어진 사각형의 '내점 삼각형'과 '외점 삼각형'을 구분한다.

상세히 논의한다.

가. 직각삼각형의 배적변형을 이용한 넓이 변형

1) 직사각형에 내접하는 삼각형의 넓이

주어진 직사각형에 내접하는 삼각형을 편의상 ‘내접 삼각형’이라고 부르자. 여기서, 삼각형이 주어진 직사각형에 내접한다는 정의(definition)는 ‘주어진 직사각형 내에서 삼각형의 외부가 삼각형의 각 변을 빗변으로 가지는 직각삼각형 3개로 구성된 것’을 의미하는 것으로 약속한다³⁾. 실제로, 이 경우에 직사각형의 변의 개수는 4개이기 때문에 삼각형의 어느 한 꼭짓점은 반드시 [그림 II-1]에서와 같이 큰 점으로 표시된 직사각형의 꼭짓점에서 만나게 된다. 편의상, 이 꼭짓점을 ‘기본 꼭짓점’이라고 부르자.

$$\begin{aligned}
 \text{[그림 II-1]} &= \text{[직사각형]} - \text{[외부 삼각형]} \\
 &= \text{[직사각형]} - \frac{1}{2} (\text{[외부 삼각형 1]} + \text{[외부 삼각형 2]} + \text{[외부 삼각형 3]}) \\
 &= \text{[직사각형]} - \frac{1}{2} (\text{[외부 삼각형 1]} + \text{[외부 삼각형 2]}) \\
 &= \frac{1}{2} (\text{[직사각형]} - \text{[외부 삼각형 3]})
 \end{aligned}$$

[그림 II-1] 내접 삼각형의 직각삼각형의 배적 변형을 이용한 넓이 구하기 (Blasio, 2005, p. 531)

또한, [그림 II-1]과 다른 형태의 내접 삼각형의 넓이 변형은, [그림 II-1]과 같은 유사한 조작 또는 평면상의 직교변환(orthogonal transformation)을 통해서, [그림 II-2]와 같은 기본 꼭짓점을 중심으로 한 넓이 변형을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{[그림 II-2]} &= \frac{1}{2} (\text{[직사각형]} - \text{[외부 삼각형]}) \\
 &= \frac{1}{2} (\text{[직사각형]} - \text{[외부 삼각형]}) \\
 &= \frac{1}{2} (\text{[직사각형]} - \text{[외부 삼각형]})
 \end{aligned}$$

[그림 II-2] 내접 삼각형의 기본 꼭짓점을 중심으로 한 조작

한편, [그림 II-1]과 [그림 II-2]의 내접 삼각형의 각 넓이 변형은 <표 II-1>에서와 같은 넓이 변형으로 세분할 수 있다. 이 표에서 분류를 위한 코드는 기본 꼭짓점 위치를 나타낸다. 예를 들어, LD는 기본 꼭짓점이 L(왼쪽), D(아래)에 위치하고 있음을 나타내며, RD는 오른쪽 아래, LU는 왼쪽 위에 그리고 RU는 오른쪽 위에 기본 꼭짓점 위치하고 있음을 나타낸다. <표 II-1>에서 기본 꼭짓점을 중심으로 한 넓이 변형을 제외한 넓이 변형의 형태에서는 두 직사각형의 넓이 합으로 표현되고, 또한 기본 꼭짓점이 아닌 삼각형의 꼭짓점을 중심으로 두 직사각형이 만들어진(LD-1, LD-2, LU-1, LU-2, RD-1 및 RD-2).

2) 우리의 연구와 관련된 선행연구를 찾지 못했음을 밝혀둔다.
3) 사각형의 내접 삼각형과 관련된 수학적인 정의를 찾을 수가 없었음을 밝혀둔다.

2) 직사각형에 내접하지 않는 삼각형의 넓이 변형

주어진 직사각형에 내접하지 않는 삼각형을 편의상 ‘비-내접 삼각형’이라고 부르자. 즉, 주어진 직사각형의 비-내접 삼각형이란 ‘주어진 직사각형 내에서 삼각형의 외부가 삼각형의 각 변을 빗변으로 가지는 직각 삼각형 3개로 구성되지 못한 삼각형’을 의미한다. [그림 II-3]은 비-내접 삼각형의 넓이를, [그림 II-1]의 아이디어(직각삼각형의 배적 변형)를 적절히 사용하여, 두 직사각형의 넓이로부터 구할 수 있음을 보여 주고 있다. 조작의 이해를 돕기 위하여 [그림 II-3]에서는 큰 점으로 표시된 삼각형의 꼭짓점을 ‘기본 꼭짓점’이라고 하자⁴⁾. 또한 기본 꼭짓점의 선택에 따라서 [그림 II-4]와 같은 대칭적인 삼각형의 기본 꼭짓점이 결정된다.

$$\begin{aligned}
 & \triangle = \triangle - \triangle \\
 & = \triangle - \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) - \triangle \\
 & = \triangle - \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \\
 & = \triangle - \frac{1}{2}(\triangle + \triangle - \triangle) \\
 & = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)
 \end{aligned}$$

[그림 II-3] 비-내접 삼각형의 직각삼각형의 배적 변형을 이용한 넓이 구하기1

<표 II-1> 직각삼각형의 배적변형: 내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

LD	$\triangle = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)$	RD	$\triangle = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)$
LD-1	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$	RD-1	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$
LD-2	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$	RD-2	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$
LU	$\triangle = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)$	RU	$\triangle = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)$
LU-1	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$	RU-1	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$
LU-2	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$	RU-2	$= \frac{1}{2}(\triangle + \triangle)$

또한, [그림 II-3]과 다른 형태의 비-내접 삼각형의 넓이 변형은, [그림 II-3]과 같은 유사한 조작 또는 평면상의 직교변환(orthogonal transformation)을 통해서, [그림 II-4]와 같은 기본 꼭짓점을 중심으로 한 넓이 변형을 얻을 수 있다.

4) 기본 꼭짓점을 삼각형의 오른쪽 위에 있는 꼭짓점을 선택 할 수도 있다. 이 경우에는 이 삼각형과 대칭적인 삼각형의 기본 꼭짓점은 [그림 II-4]와 다르게 결정된다.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 1]} - \text{[Diagram 2]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 5]} - \text{[Diagram 6]} \right) \end{aligned}$$

[그림 II-4] 비-내접 삼각형의 기본 꼭짓점을 중심으로 한 조작

[그림 II-3]과 [그림 II-4]의 비-내접 삼각형의 각 변형은 <표 II-2>에서와 같은 변형으로 세분할 수 있다.

<표 II-2> 직각삼각형의 배적변형: 비-내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

LD	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 1]} - \text{[Diagram 2]} \right)$	RD	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]} \right)$
LD-1	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 5]} - \text{[Diagram 6]} \right)$	RD-1	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 7]} - \text{[Diagram 8]} \right)$
LD-2	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 9]} - \text{[Diagram 10]} \right)$	RD-2	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 11]} - \text{[Diagram 12]} \right)$
LU	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 13]} - \text{[Diagram 14]} \right)$	RU	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 15]} - \text{[Diagram 16]} \right)$
LU-1	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 17]} - \text{[Diagram 18]} \right)$	RU-1	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 19]} - \text{[Diagram 20]} \right)$
LU-2	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 21]} - \text{[Diagram 22]} \right)$	RU-2	$= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 23]} - \text{[Diagram 24]} \right)$

한편, 직각삼각형 1개 또는 2개로 직사각형을 형성할 수 있는 경우는 <표 II-1>과 <표 II-2>에 있는 조작의 특수한 경우로 생각하면 된다. 예를 들어, LD와 관련된 조작을 중심으로 변형은 [그림 II-5]와 [그림 II-6]과 같다.

$$\text{[Diagram 25]} = \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 26]} \right)$$

[그림 II-5] 비-내접 삼각형의 직각삼각형의 배적변형을 이용한 넓이 구하기2

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 27]} + \text{[Diagram 28]} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\text{[Diagram 29]} - \text{[Diagram 30]} \right) \end{aligned}$$

[그림 II-6] 비-내접 삼각형의 직각삼각형의 배적변형을 이용한 넓이 구하기3

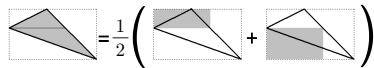
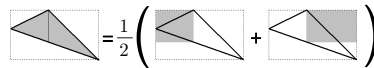
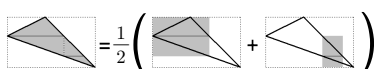
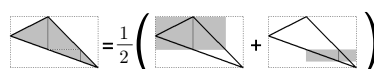
나. 카발리에리의 원리에 따른 삼각형 넓이 변형

주어진 직사각형의 내부에서 삼각형의 적당한 부분을 카발리에리의 원리(Cavalieri's principle)를 사용하여 등적변형으로 직각삼각형을 만들고, 그 후 배적변형으로 직사각형을 만드는 조작이 있는 변형을 '카발리에리의 원

리에 따른 삼각형 넓이 변형'이라고 하자. 편의상, 주어진(고정된) 직사각형의 가로와 수평인, 카발리에리의 원리를 사용하는 기준이 되는 삼각형 내부의 선을 수평선, 세로와 수평인 선을 수직선이라고 하자. <표 II-3>, <표 II-4>, <표 II-5>, <표 II-6>에 사용된 분류를 위한 코드에서 C 는 Cavalieri의 첫 알파벳이고, h 는 수평선, v 는 수직선이 사용되었다는 의미이고 또한 +와 -는 두 직사각형의 넓이의 합과 차가 사용되었음을 나타낸다. 예를 들어, C_{hv}^+ 는 카발리에리의 원리를 수평선과 수직선을 중심으로 각각 한번씩 사용하여 삼각형의 넓이를 두 개의 직사각형의 넓이의 합으로 변형했다는 의미이다.

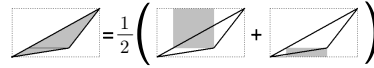
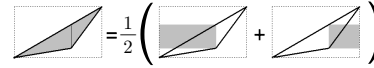
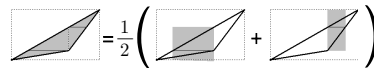
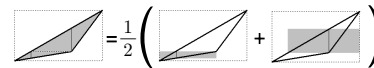
- 1) 수평선 또는 수직선 사용
- 가) 내접 삼각형

<표 II-3> 카발리에리의 원리: 내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

C_h^+		C_v^+	
C_h^-	$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$	C_v^-	$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$
C_{hh}^+		C_{vv}^+	

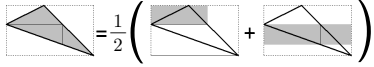
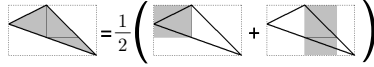
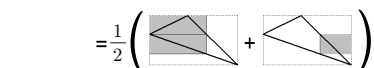
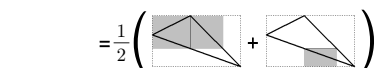


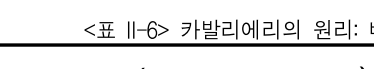
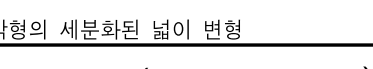
- 나) 비-내접 삼각형

<표 II-4> 카발리에리의 원리: 비-내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

C_h^+		C_v^+	
C_h^-	$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$	C_v^-	$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$
	$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$		$= \frac{1}{2} \left(\text{rectangle} - \text{rectangle} \right)$
C_{hh}^+		C_{vv}^+	


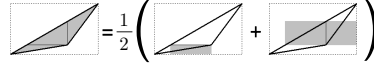
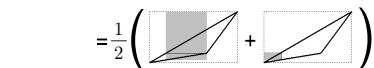
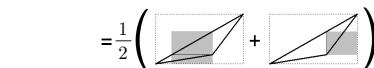




- 1) 수평선과 수직선 동시 사용
- 가) 내접 삼각형

<표 II-5> 카발리에리의 원리: 내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

C_{hv}^+		
		
		
		

나) 비-내접 삼각형

<표 II-6> 카발리에리의 원리: 비-내접 삼각형의 세분화된 넓이 변형

C_{hv}^+		
		
		
		

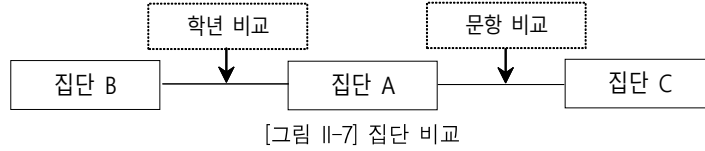
2. 연구방법 및 절차

가. 연구대상 및 검사 도구

연구대상은 3개의 집단이다. 집단 A와 C는 ○○대학교 교육대학에서 ‘초등수학과 교육1’ 과목을 이수한 3학년 학생으로 구성된 두 집단이고, 집단 B는 같은 대학교 교육대학에서 ‘교양수학’을 이수한 1학년 학생으로 구성되어 있다⁵⁾.

분석을 위한 검사 도구는 학생의 도형과 관련된 등적변형 능력을 알아보기 위한 지필시험 두 문항으로 구성되어 있으며, 집단 별 제시되는 문제의 형태가 조금 다르다. 집단에 제시되는 문항은 예시의 보기의 형태에 따라 집단이 나누어지고(집단 A, B; 집단 C), 문항 2는 문항 1보다 약간 진보된 문제로 모든 집단의 공통 문제로 제시되었다. 집단 A와 B는 학년에 따른 차이를 비교하기 위한 두 집단이며, 문제 해결에 도움을 주는 예시의 형태에 따른 문항 비교를 위한 두 집단은 집단 A와 집단 C이다(그림 II-7 참조).

5) ‘초등수학과 교육1’에서는 형태심리학의 관점에서 평면도형의 넓이를 구하기 위한 변형(등적, 배적, 반적 등)을 배우며, ‘교양수학’에서는 주로 기초적인 수학개념(수학적사고, 수학적 언어, 관계 등)과 관련된 내용을 배우며, 평면도형의 넓이와 관련된 내용은 없다.

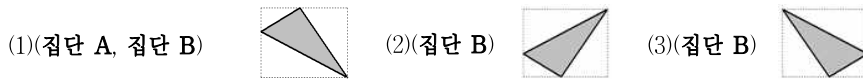


문항 1(집단 A, 집단 B). 다음은 삼각형의 넓이를 두 개의 직사각형의 넓이로 표현하는 과정을 설명한 예시이다.

< 예 시 >

$$\begin{aligned}
 &= \text{[Rectangle]} - \text{[Triangle]} \\
 &= \text{[Rectangle]} - \frac{1}{2}(\text{[Triangle 1]} + \text{[Triangle 2]} + \text{[Triangle 3]}) \\
 &= \text{[Rectangle]} - \frac{1}{2}(\text{[Rectangle]} + \text{[Triangle]}) \\
 &= \frac{1}{2}(\text{[Rectangle]} - \text{[Triangle]})
 \end{aligned}$$

문제: 다음에 주어진 삼각형은 위에 주어진 삼각형과 대칭들이다. 이 삼각형의 넓이를 직사각형 2개의 넓이를 사용하여 구하는 변형을 다양하게 그려라. (단, 점선 직사각형은 고정되어 있음)



문항 1(집단 C). 다음은 삼각형의 넓이를 직사각형의 넓이를 사용하여 구하는 ‘배적 변형’의 예시이다.

< 예 시 >

- (1) $\text{[Triangle]} = \frac{1}{2}(\text{[Rectangle]} - \text{[Triangle]})$
- (2) $\text{[Triangle]} = \frac{1}{2}(\text{[Rectangle]} + \text{[Triangle]})$
- (3) $\text{[Triangle]} = \frac{1}{2}(\text{[Rectangle]} - \text{[Triangle]})$

문제: 아래와 같은 모양의 삼각형의 넓이를 직사각형 2개의 넓이를 사용하여 구하는 변형을 다양하게 그려라. (단, 점선 직사각형은 고정되어 있음)



문항 2(모든 집단). 아래와 같은 모양의 삼각형의 넓이를 직사각형 2개의 넓이를 사용하여 구하는 변형을 다양하게 그려라. (단, 점선 직사각형은 고정되어 있음)



나. 분석 방법

먼저, 각 문항에 대하여 학생들의 반응 유형을 배적변형, 추론([그림 III-2] 참조), 카발리에리의 원리 등으로 분류하고 ‘집단별 학생 반응 유형에 유의미한 차이가 있는가?’를 분석한다.

그 후, ‘집단별 정답률에 유의미한 차이가 있는가?’를 분석한다.

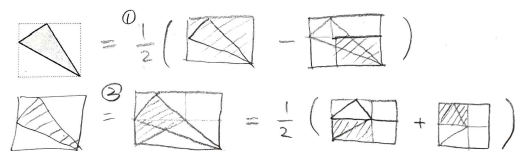
끝으로, 각 집단에서 ‘문항간 문제 해결 성공에 유의미한 차이가 있는가?’와 두 문항간 연관성 관계를 분석한다.

이러한 분석을 위해서, 카이제곱 검정, Fisher의 정확확률 검정, 비율 차이 검정, 이항검정 및 감마(gamma) 통계를 사용하였다. 집단별 반응 유형과 정답률 차이 분석에는 주로 ‘카이제곱 검정’이 사용되었다. 또한 교차표의 사례수에 따라 통계적인 오류를 줄이기 위해서 ‘Fisher의 정확확률 검정’도 사용하였다. 각 집단별 문항간 정답률 차이 분석에는 ‘비율 차이 검정’을 사용하였다. 두 문항간 연관성 관계 분석에는 ‘이항검정’과 ‘감마 통계’를 사용하였다.

III. 연구 결과 및 논의

1. 문항 1

문항 1의 학생 반응 분류는 주어진 삼각형의 등적변형 없이 문항 1의 예시처럼 직각삼각형의 배적변형을 사용한 경우는 ‘배적변형’([그림 III-2] 참조), 문항 1의 예시의 과정과 결과를 분석하여 추론하는 경우는 ‘추론’으로([그림 III-1]의 ①과 [그림 III-2] 참조), 카발리에리의 원리를 사용한 삼각형의 등적변형을 사용한 후 배적변형을 사용한 경우는 ‘카발리에리의 원리’(예를 들어 [그림 III-1]의 ② 참조)로 범주화하였다.



[그림 III-1] 학생 반응: 추론(RD)과 카발리에리의 원리(C_k^+)

가. 학년이 다른 두 집단

집단 A와 집단 B는 학년이 다른 두 집단이며, 두 집단에 제시된 문항 1은 예시가 같고 주어진 문제가 같다. 다만, 51명으로 구성된 집단 B는 2개의 부집단으로 구분하여 문제를 제시하였다. 그 중 21명으로 구성된 1개 반은 추론의 의미가 잘 드러나지 않게 제시(변형 조작 과정을 묻는 조건 제시)되어, 21명을 추론분석에서 배제하였다.

1) 응답 유형

<표 III-1>은 학년이 다른 두 집단 A와 B의 문항 1에 대한 응답 유형에 따른 반응 비율이다.

<표 III-1> 문항 1: 두 집단 A와 B의 학생 반응(중복반응)

문항 1			
	배적변형	추론	카발리에리의 원리
집단 A	55%(24/44)	11%(5/44)	9%(4/44)
집단 B	61%(31/51)	20%(6/30 ⁶⁾)	4%(2/51)

두 집단 A와 B의 응답 유형에 따른 사용 비율이 같은지를 여부를 알아보기 위하여 Fisher의 정확 확률 검정⁷⁾을 시행하였다. 여기서, 집단 B는 집단 A와 같은 문항 및 같은 문제로 구성된 30명의 반응을 사용하였다. 또한 무반응 또는 의미없는 반응의 사례는 제외하였다. 교차표는 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 문항 1: 집단과 반응유형 교차표

		유형			합계
		배적변형	추론	카발리에리	
집단	A	24	5	4	33
	B	16	6	0	22
합계		40	11	4	55

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.1893^* > 0.05$ (양측)

검정 결과는 p 값이 0.1893*(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 크다. 따라서 두 집단 A와 B는 사용 유형에 따른 비율의 차이가 없음을 나타내고 있다.

한편, 각 유형별 두 집단간 비율에 차이가 없음을 지지하는 정도를 알아보기 위하여 두 집단과 각 유형의 교차 분석을 시행하였다. 결과는 다음과 같다. 이 경우에는 무응답인 경우도 포함한다⁸⁾.

<표 III-1>에 따르면 배적변형은 집단 A는 55%, 집단 B는 61%로 집단 B가 6%p 높게 나타났지만, 통계적으로는 두 집단간 유의미한 차이가 없다(<표 III-3> 참조, p 값이 0.6849*이고 유의수준 0.05보다 크다).

<표 III-3> 문항 1: 집단과 배적변형 교차표

		배적변형		합계
		사용	미사용	
집단	A	24	20	44
	B	31	20	51
합계		55	40	95

카이제곱 $p = 0.6849^* > 0.05$ (양측)

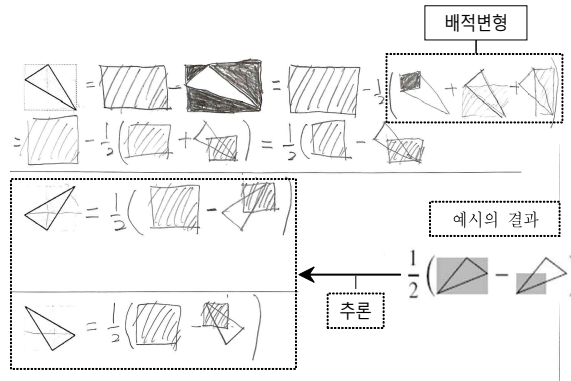
추론은 집단 A는 11%, 집단 B는 20%로 집단 B가 9%p 높게 나타났다. 집단 B의 추론 사용률이 집단 A의

6) 집단 B의 51명 중 21명을 추론분석에서 배제하고 남은 학생 수이다.

7) 카이제곱 검정은 셀의 최소 80%가 기대 빈도가 5 이상이며, 어떤 셀도 기대 빈도가 1보다 작은 경우가 없을 때만 수행된다. Fisher의 정확확률 검정의 Freeman-Halton 확장은 두 개의 행과 세 개의 열로 이루어진 교차표(contingency table)에 대해 수행하며, 데이터 세트의 전체 크기가 $N=300$ 을 넘지 않는 경우에만 적용된다 (<http://vassarstats.net/fisher2x3.html>, Freeman & Halton, 1951).

8) 각 유형의 사용 여부는 이진논리이다.

사용률 경우보다 높게 나타난 이유는 [그림 III-2]처럼 주어진 예시 보기의 삼각형과 대칭이 되는 문제를 세 개를 제시했기 때문으로 생각되었다.



[그림 III-2] 배적 변형과 추론

그러나 통계적으로 유의미한 차이가 없다. 실제로, <표 III-4>의 교차표에서 p 값은 0.4885*이고, 유의수준 0.05보다 크다.

<표 III-4> 문항 1: 집단과 추론 교차표

		추론		합계
		사용	미사용	
집단	A	5	39	44
	B	6	24	30
합계		11	63	74

카이제곱 $p = 0.4885^* > 0.05$ (양측)

그리고 카발리에리의 원리는 집단 A는 9%, 집단 B는 4%로 두 집단간 사용률에 5%p 차이가 나타났지만, <표 III-5>에 따르면 통계적으로는 두 집단간 유의미한 차이가 없다 (p 값 > 유의수준 0.05).

<표 III-5> 문항 1: 집단과 카발리에리 교차표

		카발리에리		합계
		사용	미사용	
집단	A	4	40	44
	B	2	49	51
합계		6	89	95

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.4106^* > 0.05$ (양측)

<표 III-3>, <표 III-4>와 <표 III-5>의 p 값을 비교해보면, 배적변형, 추론, 카발리에리의 순서로 두 집단간 비율의 차이가 없음을 지지하는 정도가 강함을 알 수 있다.

두 집단 모두에서 배적 변형이 가장 많이 나타나고 또한 통계적으로 두 집단간 비율의 차이가 없음을 지지는 정도가 가장 큰 이유는, 문제로 주어진 삼각형이 예시로 주어진 삼각형과 대칭적인 형태로 제시되었기 때문으로 생각된다. 카발리에리의 원리의 사용이 두 집단 모두에서 매우 낮은 이유는 예시로 주어진 삼각형의 변형이 카발리에리의 원리와는 크게 상관이 없기 때문으로 생각된다. 또한 대칭성과 주어진 예시의 마지막 결과를 이용하면 쉽게 변형 결과를 알아낼 수 있음에도 불구하고, 추론의 사용률이 낮은 이유는 공간시각화(spatial visualization)와 관련된 학습 경험이 많이 없었기 때문이라고 여겨진다(정영옥, 2017).

주어진 문제의 삼각형이 예시의 삼각형과 대칭이고 또한 예시의 결과가 LD 형태이기 때문에, 두 집단 모두 주어진 문제의 삼각형 변형은 대부분은 RD의 형태이고, 집단 A에서 1명의 학생만이 RD, RD-1, RD-2의 형태의 결과를 보였다. 카발리에리의 원리를 사용한 학생의 변형 결과 형태는 집단 A인 경우는 C_h^+ (4명), C_h^- (1명), C_v^+ (2명) 그리고 C_v^- (2명), 집단 B는 C_v^+ (2명)으로 나타났다([그림 III-3] 참조).

$$\begin{aligned}
 & \triangle = \triangle + \triangle = \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \\
 & \therefore = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \\
 & \therefore = \triangle + \triangle = \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \\
 & = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)
 \end{aligned}$$

[그림 III-3] 카발리에리의 원리를 사용한 학생 반응: C_v^+ , C_v^- , C_h^+ , C_h^-

2) 정답률

문항 1에 대한 정답률은 집단 A는 70%(44명 중 31명), 집단 B는 69%(51명 중 35명)로 나타났다. 두 집단의 비율차이가 거의 없음을 알 수 있다. 통계적으로도 p 값이 0.9756*로 유의수준 0.05보다 훨씬 크다. 두 집단 모두에서 오류 반응을 보인 학생 29명(집단 A: 13명, 집단 B: 16명) 중 17명의 학생(집단 A: 10명, 집단 B: 7명)은 주로 [그림 III-4]처럼 배적 변형의 이해부족 또는 조작 미숙으로 나타났으며, 그 나머지는 주로 미응답으로 나타났다.

$$\begin{aligned}
 & \triangle = \triangle - \triangle \\
 & = \triangle - \frac{1}{2}(\triangle + \triangle + \triangle) \\
 & = \triangle - \frac{1}{2}(\triangle + \triangle) \\
 & \left(\begin{array}{l} 1) = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \\ 2) = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \\ 3) = \frac{1}{2}(\triangle - \triangle) \end{array} \right) \quad 4) \frac{1}{2}(\triangle - \triangle)
 \end{aligned}$$

[그림 III-4] 학생 오류 반응: 배적 변형 이해 부족

나. 학년이 같은 두 집단

집단 A와 집단 C는 학년이 같은 두 집단이고, 문항 1은 두 집단에 보기로 주어진 예시가 다르고 문제는 같은 문항으로 제시되었다. 집단 A에 대한 문항 1의 분석은 이전 절에서 제시되었다. 여기서는 먼저, 집단 C의 학생 반응을 분석하고, 그 후 집단 A와 집단 C의 교차분석을 시행하고자 한다.

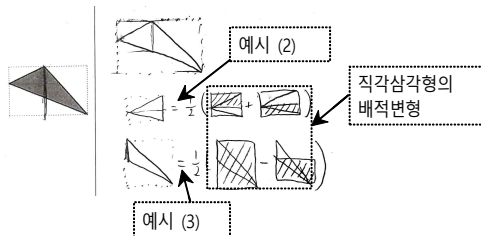
1) 응답 유형

집단 C에서의 문항 1에 대한 학생 반응 분류에서 ‘배적변형과 추론’을 같은 범주로 분류하였다. 그 이유는 문항 1에 주어진 삼각형의 변형을 ‘예시로 주어진 보기로부터 배적변형과 관련된 사고 없이 단순히 형식적인 모양을 보고 유추’했는지 아니면 ‘배적변형의 개념을 사용하여 변형’했는지 구분이 힘들었기 때문이다([그림 III-5] 참조). <표 III-6>은 집단 C에 주어진 문항 1의 학생 반응 유형과 사용률을 나타내고 있다.

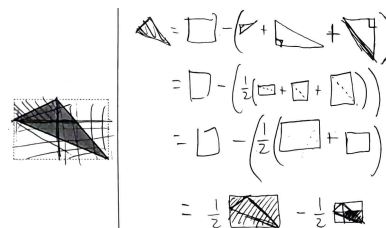
<표 III-6> 문항 1: 집단 C의 학생 반응(중복반응)

문항 1		
배적변형 또는 추론	카발리에리의 원리	대수적 계산
15%(10/66)	36%(24/66)	3%(2/66)

배적변형을 사용한 10명 중 8명의 학생은 [그림 III-5]와 같은 아이디어를 사용하였다. 이 경우 변형 결과는, 좀 더 조작활동을 하면, 카발리에리의 원리를 사용한 변형에서 흔히 나타나는 C_v^+ 또는 C_h^+ 형태로 쉽게 나타낼 수 있다. 3명의 학생(나머지 2명, 중복 반응 1명)은 [그림 III-6]과 같은 변형을 사용하였으며, 변형 결과는 집단 A의 문항 1에서 주로 나타나는 RD형이다.

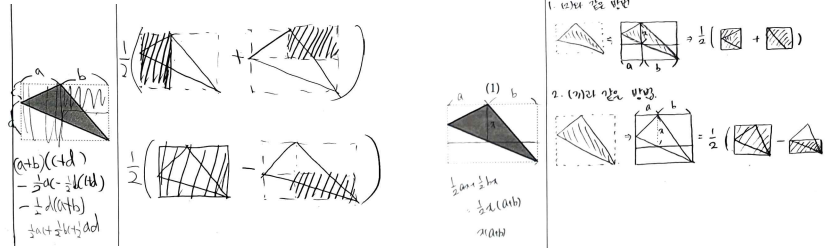


[그림 III-5] 보기를 활용한 추론 또는 배적변형



[그림 III-6] 배적 변형: RD

<표 III-6>의 대수적 계산 후 그림을 그린 2명의 학생 반응은 [그림 III-7]과 같다. 결과의 형태는 1명은 RD-2와 RD, 그 나머지 1명은 C_v^+ , C_v^- 형태를 보이고 있다.



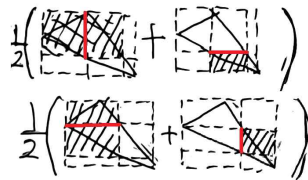
[그림 III-7] 대수적 계산 후 그림: RD-2, RD; C_v^+ , C_v^-

한편, 카발리에리의 원리를 사용한 학생반응 결과를 요약하면 <표 III-7>과 같다.

<표 III-7> 문항 1: 변형 결과 형태(중복반응)

변형 결과 형태								
RD	RD-2	C_h^+	C_h^-	C_v^+	C_v^-	C_{hh}^+	C_{vv}^+	C_{hv}^+
3	1	18	7	21	7	0	0	1

<표 III-7>에 따르면, [그림 III-8]과 같은 C_{hv}^+ 형태는 1명으로 나타났으며, C_{hh}^+ 와 C_{vv}^+ 의 형태는 전혀 나타나지 않았다. 또한, [그림 III-6]과 같은 순수한 직각삼각형의 배적변형을 통하여 RD의 형태의 결과를 얻은 학생은 2명에 불과하였다.



[그림 III-8] 학생 반응: C_{hv}^+

<표 III-8>은 두 집단 A와 C의 반응 유형에 따른 교차표이다. 두 집단 A와 C의 유형(배적변형 또는 추론과 카발리에리의 원리)에 따른 사용 비율이 같은지를 여부를 통계적으로 알아보기 위하여 카이제곱 검정을 시행하였다. 여기서, 무반응 또는 의미없는 반응의 사례는 제외하였다.

<표 III-8> 문항 1: 집단과 반응 유형 교차표

집단	A	유형		합계
		배적변형 또는 추론	카발리에리	
	C	29 ⁹⁾	4	33
		10	24	34
합계		39	28	67

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.0000 * < 0.05$ (양측)

9) <표 III-2>에서 배적변형 24명과 추론 5명을 합한 학생수이다.

검정 결과는 p 값이 0.0000*(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 작다. 따라서 두 집단 A와 C는 사용 유형에 따른 비율의 차이가 있음을 나타내고 있다. 즉, 문제는 같지만 주어진 예시가 배적변형의 과정을 조작의 방식으로 제공된 경우와 배적변형의 특수한 예제로 주어진 경우에 응답 유형별 비율에 차이가 있음을 보여준다.

한편, 통계적 검정 없이 직관적으로 보더라도, 배적변형 또는 추론의 사용률이 집단 A는 66%(44명 중 29명), 집단 C는 15%(66명 중 10명)로 51%p 차이를 보여준다. 또한 카발리에리의 원리의 사용률은 집단 A는 9%(44명 중 4명), 집단 C는 36%(66명 중 24명) 정도로 27%p 차이를 보여준다. 즉, 두 집단이 사용하는 유형에 상당한 차이가 있음을 보여주며, 특히, 배적변형 또는 추론의 사용률의 차이가 카발리에리의 원리의 경우보다 더 큼을 알 수 있다. 이것은 문항 1에서는 두 집단의 사용률 차이에 있어서, 배적변형 또는 추론의 영향이 카발리에리의 영향이 보다 크다는 사실을 보여준다¹⁰⁾.

2) 정답률

집단 C의 문항 1의 정답률은 47%(66명 중 31명)로 나타났으며, 이는 집단 A보다 23%p 낮았다. 오류 반응을 보인 학생 35명 중 18명의 학생은 배적 변형의 이해부족 또는 조작 미숙으로, 3명의 학생은 카발리에리의 원리 사용 오류를 보였다. 또한 응답이 없는 학생이 14명이나 되었다. <표 III-9>는 두 집단 A와 C의 문항 1에 따른 맞은 반응(1)과 틀린 반응(0)을 보인 학생의 수를 나타내는 교차표이다.

<표 III-9> 집단과 문항 1 교차표

		문항 1		합계
		1	0	
집단	A	31	13	44
	C	31	35	66
합계		62	48	110

카이제곱 $p = 0.0252 * < 0.05$ (양측)

카이 제곱 검정 결과 p 값이 0.0252*로 유의수준 0.05보다 작다. 따라서 집단 A와 집단 C의 문항 1의 정답률에는 차이가 있다. 이것은 문제는 같지만 주어진 예시가 배적변형의 과정을 조작의 방식으로 제공된 경우와 배적변형의 특수한 예제로 주어진 경우의 정답률에 차이가 있음을 보여준다.

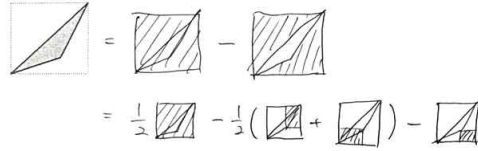
2. 문항 2

가. 학년이 다른 두 집단

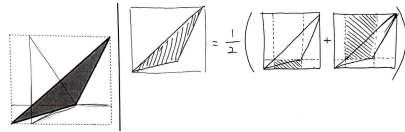
학년이 다른 두 집단은 집단 A와 집단 B를 의미한다. 문항 2는 두 집단 모두 같은 문제로 제시되었으며, 문제의 특성상 문항 1과는 달리 추론이 힘들다. 따라서 학생 반응을 분류하는 범주에서 추론은 배제하였다. 문항 2의 학생 반응 분류는 주어진 삼각형의 등적변형 없이 [그림 III-9]처럼 직각삼각형의 배적변형을 사용한 경우와 [그림 III-11]과 같은 경우¹¹⁾를 ‘배적변형’으로, 카발리에리의 원리를 사용해서 삼각형의 등적변형을 사용하고 그 후 배적변형을 사용한 경우는 ‘카발리에리의 원리’(예를 들어, [그림 III-10])로 범주화하였다.

10) 통계적인 검정에서는 두 집단과 사용 유형에 따른 교차분석에서 배적변형 또는 추론 유형인 경우는 p 값이 0.000000*, 카발리에리의 유형인 경우에는 p 값이 0.0027*이다.

11) 카발리에리의 원리를 사용하고 있는 범주로 분류할 수도 있지만 여기서는 배적변형으로 분류하였다.



[그림 III-9] 배적변형-1



[그림 III-10] 카발리에리의 원리

1) 응답 유형

두 집단 A와 B의 문항 2에 대한 응답 유형에 따른 반응 비율은 <표 III-10>과 같다.

<표 III-10> 문항 2: 두 집단 A와 B의 학생 반응(중복반응)

문항 2		
	배적변형	카발리에리의 원리
집단 A	32%(14/44)	5%(2/44)
집단 B	45%(23/51)	6%(3/51)

두 집단 A와 B의 응답 유형에 따른 사용 비율이 같은지를 여부를 알아보기 위하여 Fisher의 정확 확률 검정을 시행하였다. 여기서, 무반응 또는 의미없는 반응의 사례는 제외하였다. 교차표는 <표 III-11>과 같다.

<표 III-11> 문항 2: 집단과 반응유형 교차표

		유형		합계
		배적변형	카발리에리	
집단	A	14	2	16
	B	23	3	26
합계		37	5	42

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 1.000 > 0.05$ (양측)

검정 결과는 p 값이 1.000(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 크다. 따라서 두 집단 A와 B는 사용 유형에 따른 비율의 차이가 없음을 나타내고 있다.

한편, <표 III-10>에 따르면, 문항 2에 대한 집단 A와 B의 학생 반응 비율은 다음과 같다. 배적 변형을 사용한 학생 활동이 집단 A에서는 32%, 집단 B에서는 45%로, 집단 B가 집단 A보다 13%p 높게 나타났지만, 통계적으로는 두 집단간 유의미한 차이가 없다(<표 III-12> 참고, p 값이 유의수준 0.05보다 크다).

<표 III-12> 문항 2: 집단과 배적변형 교차표

		배적변형		합계
		사용	미사용	
집단	A	14	30	44
	B	23	28	51
합계		35	60	95

카이제곱 $p = 0.2658 > 0.05$ (양측)

그리고 카발리에리의 원리를 사용한 경우가 집단 A에서는 5%, 집단 B에서는 6%로 집단간 차이가 없는 비율을 보여준다. 통계적으로는 두 집단간 유의미한 차이가 없다(<표 III-13> 참고, p 값이 유의수준 0.05보다 크다).

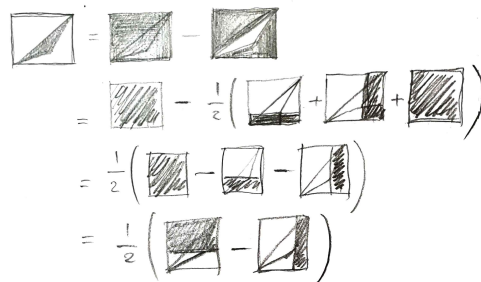
<표 III-13> 문항 2: 집단과 카발리에리 교차표

		카발리에리		합계
		사용	미사용	
집단	A	2	42	44
	B	3	48	51
합계		5	90	95

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 1.000 > 0.05$ (양측)

배적변형을 사용하는 학생 반응은 ‘직각삼각형의 배적변형과 무관한 부분’의 처리에 따라 두 가지로 반응이 나타났다. 집단 A에서는 배적변형을 사용한 학생 13명 중 9명은 [그림 III-9]와 같은 반응을, 그 나머지 4명은 [그림 III-11]과 같은 응답을 나타냈으며, 집단 B에서는 배적변형을 사용한 학생 22명 중 14명은 [그림 III-9]와 같은 반응을, 그 나머지 8명은 [그림 III-11]과 같은 응답을 나타냈다. 배적변형과 관련하여, 두 집단 모두 문항 1에 보다 학생 반응의 비율이 낮은 이유가 직각삼각형의 배적 변형과 무관한 부분의 처리가 원인이라고 볼 수 있다.

배적변형에 관련된 학생 반응의 결과 형태를 분석해보면 집단 A인 경우 LD-1이 7명, LD가 2명 그리고 LD-2가 1명이었으며, 집단 B인 경우는 LD-1이 13명, LD가 1명 그리고 LD-2가 2명으로, 두 집단 모두 변형 결과가 LD-1 형태가 가장 많이 나타났다.



[그림 III-11] 배적변형-2

2) 정답률

두 집단간 문항 2의 정답률에는 차이가 있음을 보여주고 있다. 실제로, 문항 1에서는 두 집단의 정답률간의 차이가 거의 없었지만, 문항 2에서는 집단 A가 집단 B보다 15%p 정도 낮음을 보여주고 있다. 그러나 통계적으로는, p 값이 0.1096*로 유의 수준 0.05보다 크기 때문에 두 집단간 정답률에는 차이가 없다(<표 III-14> 참조).

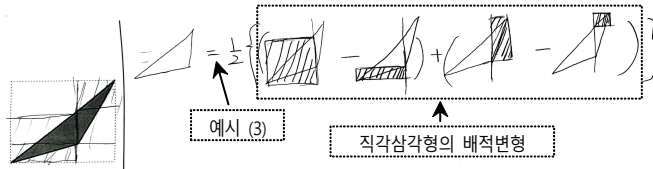
<표 III-14> 집단과 문항 2 교차표

		문항 2		합계
		1	0	
집단	A	6	38	44
	B	15	36	51
합계		21	74	95

카이제곱 $p = 0.1096 * > 0.05$ (양측)

나. 학년이 같은 두 집단

집단 A와 집단 C는 학년이 같은 두 집단이고, 문항 2는 집단 A인 경우에는 주어진 예시의 조작 활동으로부터 결과를 바로 추론하기가 힘들다. 반면, 집단 C인 경우는 [그림 III-12]와 같이 예시에 주어진 보기 (3)으로부터 조작을 추론할 수 있다.



[그림 III-12] 예시의 보기를 활용한 추론 또는 배적변형

이러한 이유로 집단 A와 집단 C의 집단간 비교를 할 때, 집단 C의 ‘배적변형 또는 추론’을 ‘배적변형’의 범주로 다룬다.

집단 A에 대한 문항 2의 분석은 이전 절에서 제시되었다. 여기서는 먼저, 집단 C의 학생 반응을 분석하고, 그 후 집단 A와 집단 C의 교차분석을 시행하고자 한다.

1) 응답 유형

<표 III-15>은 집단 C에 주어진 문항 2의 학생 반응 유형과 사용률을 나타내고 있다.

<표 III-15> 문항 2: 집단 C의 학생 반응(중복반응)

문항 2		
배적변형 또는 추론	카발리에리의 원리	대수적 계산
12%(8/66)	30%(20/66)	3%(2/66)

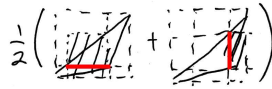
배적 변형을 사용한 8명 중 7명의 학생은 [그림 III-12]와 같은 아이디어를 사용하였다. 이 경우 변형 결과는, 좀 더 조작활동을 하면, 카발리에리의 원리를 사용한 변형에서 흔히 나타나는 C_b^+ 또는 C_h^+ 형태로 쉽게 나타

낼 수 있다. 대수적 계산 후 그림을 그린 2명의 학생 반응은 [그림 III-15]와 같다. 결과의 형태는 1명은 LD-1와 LD, 그 나머지 1명은 C_v^+ 형태를 보이고 있다. 학생반응의 결과를 요약하면 <표 III-16>과 같다.

<표 III-16> 변형 결과 형태(중복반응)

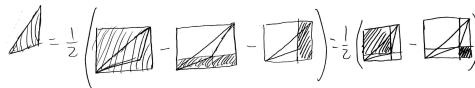
문항 2								
LD	LD-1	C_h^+	C_h^-	C_v^+	C_v^-	C_{hh}^+	C_{vv}^+	C_{hv}^+
1	2	19	3	21	3	0	0	3

<표 III-16>에 따르면, [그림 III-13]과 같은 C_{hv}^+ 형태는 3명으로 나타났으며, C_{hh}^+ 와 C_{vv}^+ 의 형태는 전혀 나타나지 않았다.

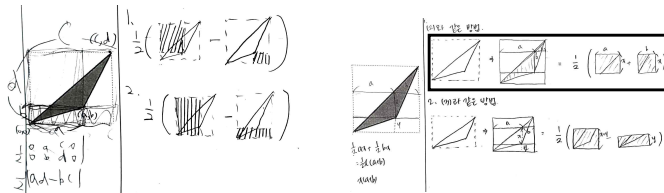


[그림 III-13] 학생 반응: C_{hv}^+

또한, [그림 III-14]와 같은 순수한 배적변형을 사용한 변형 결과인 LD-1의 형태는 2명에 불과하였으며, 1명만이 [그림 III-15]에서와 같이 대수적 계산을 사용해서 LD의 형태를 유도하였다.



[그림 III-14] 배적변형: LD-1



[그림 III-15] 대수적 계산 후 그림: LD-1, LD; C_v^+

<표 III-17>은 두 집단 A와 C의 반응 유형에 따른 교차표이다. 두 집단 A와 C의 유형에 따른 사용 비율이 같은지를 여부를 통계적으로 알아보기 위하여 Fisher의 정확 확률 검정을 시행하였다. 여기서, 무응답인 경우는 유형에서 배제하였다.

검정 결과는 p 값이 0.000*(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 작다. 따라서 두 집단 A와 C는 사용 유형에 따른 비율의 차이가 있음을 나타내고 있다. 즉, 문제는 같지만 주어진 예시가 배적변형의 과정을 조작의 방식으로 제공된 경우와 배적변형의 특수한 예제로 주어진 경우에 응유형의 비율에 차이가 있음을 보여준다.

<표 III-17> 문항 2: 집단과 반응 유형 교차표

		유형			합계
		배적변형	카발리에리	대수적 계산	
집단	A	14	2	0	16
	C	8	20	2	30
합계		22	22	2	46

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.000 * < 0.05$ (양측)

한편, 배적변형의 사용률이 집단 A는 32%(44명 중 14명), 집단 C는 12%(66명 중 8명)로 20%p 정도의 차이를 보여준다. 또한 카발리에리의 원리의 사용률은 집단 A는 5%(44명 중 2명), 집단 C는 30%(66명 중 20명) 정도로 25%p 차이를 보여준다. 즉, 각 유형에 따른 두 집단간 사용하는 유형에 상당한 차이가 있음을 보여준다. 두 집단과 대수적 계산의 교차 검정에서는 카이제곱(Fisher의 정확검정)의 p 값이 0.516(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 크다. 따라서 대수적 계산에 따른 두 집단의 차이는 없다(<표 III-18> 참조).

<표 III-18> 문항 2: 집단과 대수적 계산 교차표

		대수적 계산		합계
		사용	미사용	
집단	A	0	44	44
	C	2	64	66
합계		2	108	110

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.516 > 0.05$ (양측)

반면, 두 집단과 배적변형의 교차 검정에서는 p 값이 0.0222*(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 작고(<표 III-19> 참고), 또한 카발리에리의 경우의 교차 검정에서 p 값이 0.001*(양측검정)로 유의 수준 0.05보다 작다(<표 III-20> 참고).

<표 III-19> 문항 2: 집단과 배적변형 교차표

		배적변형		합계
		사용	미사용	
집단	A	14	30	44
	C	8	58	66
합계		22	88	110

카이제곱 $p = 0.0222 * < 0.05$ (양측)

<표 III-20> 문항 2: 집단과 교차표

		카발리에리		합계
		사용	미사용	
집단	A	2	42	44
	C	20	46	66
합계		22	88	110

카이제곱(Fisher의 정확검정) $p = 0.001 * < 0.05$ (양측)

따라서 이 두 경우에는 두 집단의 각 유형의 사용률에 차이가 있으며, 문항 1과는 달리 카발리에리 원리의 사용률의 차이가 배적변형의 사용률의 차이보다 더 큼을 지지한다(p 값: $0.001^* < 0.0222^*$). 즉, 문항 2에서는 두 집단의 사용률 차이에 있어서, 카발리에리의 영향이 배적변형의 영향보다 크다.

2) 정답률

집단 C의 문항 2의 정답률은 36%(66명 중 24명)으로 나타났으며, 이는 집단 A의 정답률 14%(44명 중 6명)보다 22%p 높게 나타났다.

<표 III-21>은 두 집단 A와 C의 문항 2에 따른 맞은 반응(1)과 틀린 반응(0)을 보인 학생의 수를 나타내는 교차 표이다.

<표 III-21> 집단과 문항 2 교차표

		문항 2		합계
		1	0	
집단	A	6	38	44
	C	24	42	66
합계		30	80	110

카이제곱 $p = 0.0162^* < 0.05$ (양측)

카이 제곱 검정 결과 p 값이 0.0162*로 유의수준 0.05보다 작다. 따라서 집단 A와 집단 C의 문항 2의 정답률에는 차이가 있다. 이것은 문제는 같지만 주어진 예시가 배적변형의 과정을 조작의 방식으로 제공된 경우와 배적변형의 특수한 예제로 주어진 경우에 정답률에 차이가 있음을 보여준다.

3. 집단별 문항 비교

가. 두 문항 정답률

각 집단에서 문항 1과 문항 2의 정답률은 <표 III-22>와 같다.

<표 III-22> 집단별 문항 1과 문항 2의 정답률

	문항 1	문항 2
집단 A	76%(31/44)	14%(6/44)
집단 B	69%(35/51)	29%(15/51)
집단 C	47%(31/66)	36%(24/66)

문항 1과 문항 2의 비율의 차이 검정(정강모 외, 2001, p.209-211)에서, 집단 A에서의 p 값은 0.0000000*, 집단 B에서의 p 값은 0.0000*로, 유의수준 0.05보다 작다. 따라서 두 집단 A와 B에서는 문항 1과 문항 2의 정답률에는 차이가 있음을 알 수 있다. 반면, 집단 C에서는 p 값이 0.2165*로 유의수준 0.05보다 크게 나타나 문항 1과 문항 2의 정답률에는 차이가 없음을 알 수 있다. 이러한 결과는 집단 C인 경우에는 문항 1과 문항 2의 해결에 주어진 보기의 예시보다 기존에 알고 있는 지식(카발리에리의 원리)이 좀 더 큰 영향을 준 것으로 보인다.

나. 두 문항의 교차분석

<표 III-23>, <표 III-24> 및 <표 III-25>에 따르면, 문항 1의 해결에 성공하고 문항 2의 해결에 실패한 학생 수가 그 반대의 경우보다 많음을 보여준다(문제 해결에 방향성이 있음). 따라서 ‘문항 2보다 문항 1을 먼저 해결할 수 있는 학생들이 더 많다’고 볼 수 있다. 이러한 학생 수의 차이가 통계적으로 의미가 있는지를 알아보기 위해 두 값(대각선 두 값)에 대한 이항검정을 실시하였다¹²⁾. 검정 결과 집단 A와 집단 B에서는, 방향성의 관점에서, 문항 1과 문항 2의 성공에는 유의미한 차이가 있음($p < 0.05$)을 보여 주었지만, 집단 C의 경우는 문항 1과 문항 2의 성공에는 유의미한 차이가 없음($p > 0.05$)을 보여 주었다. 즉, 집단 C에서는 문항 1과 문항 2의 성공에 방향성이 없다. 이러한 결과는 집단 C에서는, 앞선 문항 1과 문항 2의 정답률 차이 검정에서와 마찬가지로, 집단 C인 경우에는 문항 1과 문항 2의 해결에 주어진 보기의 예시보다 기존에 알고 있는 지식인 카발리에리의 원리가 영향을 준 것으로 보인다. 또한 두 문항의 연관성 측도 G (gamma)¹³⁾ (홍두승, 2011, p.201-213)가 거의 1에 가깝(집단 A와 집단 B: $G=1.00$; 집단 C: $G=0.959$)기 때문에, 문항 1과 문항 2는 완전한 양의 관계를 가진다.

<표 III-23> 집단 A에서 문항 1과 문항 2의 성공

		문항 2		합계
		0	1	
문항 1	0	13	0	13
	1	25	6	31
합계		38	6	44

이항검정 $p = 0.000 * < 0.05$ (양측); $G = 1.00, p < 0.05$

<표 III-24> 집단 B에서 문항 1과 문항 2의 성공

		문항 2		합계
		0	1	
문항 1	0	16	0	16
	1	20	15	35
합계		36	15	51

이항검정 $p = 0.000 * < 0.05$ (양측); $G = 1.00, p < 0.05$

<표 III-25> 집단 C에서 문항 1과 문항 2의 성공

		문항 2		합계
		0	1	
문항 1	0	33	2	35
	1	8	23	31
합계		41	25	66

이항검정 $p = 0.109 > 0.05$ (양측); $G = 0.959, p < 0.05$

12) 대각선 두 값이 나타날 확률을 0.5로 두고, ‘두 경우에는 통계적으로 유의미한 차이가 없다’라는 영가설을 세웠다.

13) $G = \frac{C-D}{C+D}$, 여기서 C 는 교차표에서 일치 쌍(concordant pairs), D 는 불일치 쌍(discordant pairs)의 수를 의미한다.

IV. 결론 및 제언

이 연구에서는 고정된 직사각형의 내접 삼각형과 비-내접 삼각형의 넓이를 두 개의 직사각형의 넓이의 합 또는 차로의 등적변형과 관련된 문제에 대하여, 삼각형 넓이의 변형 또는 그 과정에 나타나는 학생의 응답 유형 및 정답률 등과 관련된 사항을 중심으로 세 집단을 비교 분석하였다. 분석 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 내접 삼각형의 넓이 변형과 관련된 문항(문항 1)의 집단간 비교 분석 결과를 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 학년이 다른 두 집단의 비교에서, 배적 변형, 추론 및 카발리에리 원리의 사용률에 차이가 없음을 알 수 있었다(<표 III-2>참조). 또한 집단간 정답률에도 차이가 없었다. 한편, 학년이 같은 두 집단의 비교에서는, 집단 비교를 위해서 문제는 같지만 문제 해결에 도움을 주는 예시가 다른 문항을 제시하였다. 구체적으로, 한 집단에는 예시가 '배적변형의 과정을 조작 활동의 방식'으로 제공되었고 또 다른 집단에는 '배적변형의 특수한 예시'로 제공되었다. 이 경우에 두 집단간 응답 유형별 비율 및 응답 유형별 집단간 비율에 차이가 있음을 보여주었으며 (<표 III-8> 참조), 또한 정답률에도 차이가 있었다.

둘째, 비-내접 삼각형의 넓이 변형과 관련된 문항(문항 2)의 집단간 비교 분석 결과도 응답 유형 및 정답률에서 앞선 문항(내접 삼각형의 넓이 변형)과 유사한 결과를 보였다(<표 III-10>, <표 III-11>, <표 III-12> 및 <표 III-15> 참조).

셋째, 배적변형의 특수한 예시가 제공된 문항이 제시된 집단(집단 C)의 경우, 원래 학생들에게 원했던 예측된 반응은 예시의 보기를 통하여 '직각삼각형의 배적변형'이라는 개념을 도출한 후, [그림 III-6]과 [그림 III-11]같은 배적 변형을 사용하는 조작활동이었다. 그러나 직각삼각형의 배적변형을 사용한 학생 수보다, 통계적으로 의미가 있는, 더 많은 수의 학생이 이미 자신의 지식 속에 내재화되어 있는 수학적 지식인 카발리에리 원리를 사용하여 문제를 해결하고 있음을 나타내었다(<표 III-6>과 <표 III-13> 참조).

넷째, 집단별 문항간 비교를 살펴보면 다음과 같다. 학년이 다르지만 같은 예시(배적변형의 조작 활동)를 가지는 문항이 제시된 두 집단 각각에서 내접하는 삼각형의 변형 문항과 비-내접하는 삼각형의 변형 문항의 성공에는 유의미한 차이가 있음을 보였다. 또한 비-내접하는 삼각형의 변형 문항의 해결에 성공한 학생 중 내접하는 삼각형의 변형 문항의 해결에 실패한 학생이 한 명도 없었다($G=1.00$). 즉, 내접하는 삼각형의 변형 문항에 성공이 비-내접의 경우보다 선행하며, 두 문항은 완전한 양의 상관관계를 가진다. 한편, 배적변형의 특수한 예시가 제시된 집단에서는 내접하는 삼각형의 변형 문항과 비-내접하는 삼각형의 변형 문항의 성공에는 통계적으로 유의미한 차이가 없음을 보였다(<표 III-19>). 그러나 두 문항의 연관성은 매우 강함을 보였다($G=0.959$).

끝으로, 학생들의 변형 결과의 형태에 있어 배적변형, 카발리에리 원리를 이용한 변형 모두에서 다양하지 못하였다.

이러한 분석 결과로부터 얻을 수 있는 교육학적 시사점과 이에 따른 제언은 다음과 같다.

첫째, 도형의 변형에 관한 조작능력은 대학생의 학년과는 큰 상관이 없으며, 이는 특수 목적대학교인 교육대학에서 수학과 교육과정상의 문제를 야기한다. 실제로, 우리가 비교분석한 두 집단 중에서, 한 집단은 '초등 수학과 교육 1'을 이수한 교육대학 3학년생이고 또 다른 한 집단은 '교양수학'을 이수한 교육대학 1학년 학생이다. 현행 수학과교육 교육과정에서 강조하고 있는 '조작활동 중심의 수학교육'의 관점에서 생각해보면, 조작활동이 중심인 '배적변형'에서 두 집단간 차이가 없다는 결과는, 제한적이기는 하지만, 교육대학에서 학년별 수학과 교육과정 구성과 관련된 교육학적 시사점을 보여준다(각주 5 참고). 실제로, 저자가 속한 교육대학교 수학교육과에서의 수학과목은 1학년 교양수학(선택), 3학년 초등수학과 교육 1, 2로 편제되어 있으며, 심화과정(수학교육 전공)이 아닌 2학년과 4학년 학생들에게는 수학교육과 관련된 과목의 개설이 없다. 따라서 예비 초등교사의 조작활동의 경험을 줄 수 있는 교과목이 필요하다.

둘째, 도형의 조작활동과 관련된 일반화에 염두를 두고 문항을 제시할 때, 예시의 보기를 제공하는 방식에 유의를 해야 한다. 실제로, 우리의 문항 분석에 따르면, 문제는 같지만 예시로 제시되는 방식에 따라 분류된 두 집단의 유형별 응답 비율과 정답률에 차이가 있음을 보여주고 있다. 이로부터 예시를 모방¹⁴⁾하는 방식과 귀납적 방식으로 제공되는 경우에 차이가 있다는 교육적 시사점을 얻는다.

끝으로, 아동과 성인의 학습방식에 차이가 있음을 인지해야한다. 실제로, 배적변형의 특수한 예시를 제공받은 문항으로 제시된 집단의 분석에 따르면, 학생들의 비형식 조작활동보다 이미 형식화 되어 있는 수학적 또는 원리가 선행된다는 것을 보여주며, 아동과 성인의 학습방식에 차이가 있음을 시사하고 있다. 따라서 예비 초등교사의 조작활동의 경험이 매우 중요하다.

이 연구는 실험 참가자들의 배경 조건(문과, 이과, 학과 등)을 통제하지 못했다는 점과 또한 사례수가 작다는 연구의 제한점이 있다.

참 고 문 헌

- 교육부. (2022). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8].
- Ministry of Education (2022). *Mathematics Curriculum*. Ministry of Education Notice No. 2022-33 [Supplement 8].
- 남승인, 류성림, 권성룡, 김남균, 신준식, 박성선, 박만구, 최근배, 권점례, 이종학. (2017). **2015 개정교육과정에 의한 초등수학 교육론**. 경문사.
- Nam, S., Ryu, S., Kwon, S., Kim, N., Park, S., Park, M., Choi, K., Kwon, J. & Lee, J. (2017). *The theory of elementary mathematics education based on the 2015 revised curriculum*. Kyung Moon Sa.
- 정강모, 김현철, 오종철, 윤병인, 박용성. (2001). **SPSS를 이용한 정보통계학**. 경문사.
- Jung K., Kim H., Oh J., Yoon B. & Park Y. (2001). *Information statistics using SPSS*. Kyung Moon Sa.
- 정영욱. (2017). 초등학교 수학에서 공간 방향에 대한 교육과정과 교과서 비교. **학교수학**, 19(4), 663-690.
- Chong, Y. O. (2017). A comparative study on mathematics curriculums and textbooks of spatial orientation in elementary school mathematics. *School Mathematics*, 19(4), 663-690.
- 정영욱. (2015). 사다리꼴 넓이 공식의 변환에 관한 연구. **East Asian Math. Journal**, 31(2), 167-188.
- Chung, Y. W. (2015). A study on the conversion of the formula for the area of a trapezoid. *East Asian Math. Journal*, 31(2), 167-188. <https://doi.org/10.7858/eamj.2015.016>
- 조미경. (2022). 느리게 배우는 학습자를 위한 초등예비교사의 수학수업 설계. **수학교육논집**, 36(2), 287-311. <https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.2.287>
- Jo, M. (2022). A study on the pre-service elementary teachers' lesson plans for math underachievers with hypothetical learning trajectories and universal design for learning. *Communications of Mathematical Education*, 36(2), 287-311. <https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.2.287>
- 한국교육과정평가원. (2012). **2012학년도 공립 초등학교 교사 임용후보자 선정경쟁시험 <수학>**.
- Korea Institute for Curriculum and Evaluation (2012). *2012 public elementary school teacher selection competitive examination <Mathematics>*.
- 한국교육과정평가원. (2016). **2016학년도 공립 초등학교 교사 임용후보자 선정경쟁시험 초등학교 교육과정 A <수학>**.

14) 비고츠키 이론에 따르면, 수학교육에서 학생들은 교사의 시범의 모방화를 통해서 고차적 정신기능을 배운다(남승인 외, 2017).

- Korea Institute for Curriculum and Evaluation (2016). *2016 public elementary school teacher selection competitive examination Elementary school curriculum A <Mathematics>*.
- 홍두승. (2011). **사회조사분석(제3판)**. 다산출판사.
- Hong, D. S. (2011). *Social survey analysis (3rd Edition)*, Dasan Publishing.
- Blasjo, V. (2005). The isoperimetric problem. *The American Mathematical Monthly*, *112*(6), 526-566.
<https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920227>
- Freeman, G. H., & Halton, J. H. (1951). Note on an exact treatment of contingency, goodness of fit and other problems of significance. *Biometrika*, *38*(1-2), 141-149. <https://doi.org/10.1093/biomet/38.1-2.141>
- Jennings, G. A. (1994). *Modern geometry with applications*. Springer-Verlag New York, Inc.

Analysis of pre-service elementary teachers' geometric manipulation skills in calculating the area of a triangle through transformations involving the sum or difference of two rectangles' areas

Lee, Hosoo

Jeju National University
E-mail : Hosoo@jejunu.ac.kr

Choi, Keunbae[†]

Jeju National University
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr

This study analyzed the response types and accuracy rates of pre-service elementary teachers in solving problems involving the areas of inscribed and non-inscribed triangles within a fixed rectangle. These problems were based on equiareal transformations using the sum or difference of two rectangles' areas. The findings are as follows: First, the analysis of student responses to questions about the area transformation of inscribed triangles revealed that there was no significant difference in the use of double-area transformations, reasoning, the Cavalieri principle, or accuracy rates between two groups of different grade levels. In contrast, when comparing two groups of the same grade level, significant differences in response types and accuracy rates were observed depending on the type of examples provided to assist problem-solving. Second, student responses to questions about the area transformation of non-inscribed triangles exhibited patterns similar to those for the transformation of inscribed triangles. Third, in the group provided with specific examples, it was expected that students would derive the concept of double-area transformations for right triangles and engage in manipulative activities. However, it was found that a significant number of students relied on the Cavalieri principle, which they had already internalized, rather than using double-area transformations. Fourth, the analysis of student responses to comparisons between questions revealed that groups of different grade levels but provided with the same examples showed a tendency to solve the inscribed triangle transformation questions more successfully than the non-inscribed triangle questions. A strong positive correlation was found between the two types of questions. On the other hand, in the group provided with specific examples, there was no statistically significant difference in success rates between the two question types, though a strong correlation between them was still evident. Finally, students' approaches to transformations using double-area methods and the Cavalieri principle lacked diversity. These findings suggest important educational implications, emphasizing the need for pre-service elementary teachers to gain experience in manipulative activities related to geometric education.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D99, 97G30

* Key words : double area transformation, equiareal transformation, Cavalieri's principle, manipulation-based mathematics education

* This work was supported by the research grant of Jeju National University in 2024

[†] corresponding author