

알 카시의 첨두아치 작도와 티무르조 건축의 곡면구조

Al-Kāshī's Pointed Arch Drawing and Curved Structure of the Timurid Architecture

최 남 섭*

Choi, Nam-sub

(서울대학교 건설환경종합연구소 선임연구원, 공학박사)

Abstract

The study aims to analyze the geometric characteristics of the pointed arches proposed by Al-Kāshī in his book "*Miṭāḥ al-Ḥisāb*" (Key of Arithmetic) and investigate their planning principles, architectural application, and typological characteristics. Al-Kāshī completed this significant work in 1427 and dedicated it to Ulugh Beg, a Timurid Sultan in Samarkand. In the ninth chapter, titled "*Al-ʿImārāt wa al-Abniya*" (Amir's Mansion and Building), Al-Kāshī sought to measure the surface areas and volumes of barrel vaults (*Azaʿ*) and domes (*Qubba*). To achieve this, he proposed five kinds of pointed arches (*Ṭāq*) and analyzed their drawing methods and composition principles. The *Īwān* and *Qubba* structures, which are curved architectural elements, hold significant importance in Islamic architecture. However, previous research has predominantly focused on comparing the drawings in Al-Kāshī's book with historical buildings, neglecting the inherent characteristics of the drawings themselves. This study intends to contribute to a deeper understanding of Al-Kāshī's remarkable work and shed light on the geometric aspects of monumental structures in the Timurid Period.

주제어 : 알 카시, 수학의 열쇠, 티무르조 건축, 첨두아치, 곡면구조, 유형적 특성

Keywords : Al-Kāshī, *Miṭāḥ al-Ḥisāb*, Timurid Architecture, Pointed Arch, Curved Structure, Typological Characteristics

1. 서론

티무르조 말기에 알 카시(Al-Kāshī)¹⁾는 『수리학의 열쇠(*Miṭāḥ al-Ḥisāb*)』(1427)라는 수학과 기하학 이론서를 저술했다. 여기에 수록된 다섯 개의 논문(*Maqālat*) 중에 「면적 측정(*Misāḥat*)」은 ‘군주의 기념비 건축(*Al-ʿImārāt wa al-Abniya*)²⁾’에 사용하는 배럴볼트(*Azaʿ*)와 돔(*Qubba*)의 표면적과 부피 측정법을 설명한다. 여기에서 알 카시가 원호와 직선을 조합해 만든 다

섯 첨두아치(*Ṭāq*)의 작도법 설명과 삼도는 티무르조 기념비 건축의 곡면구조가 가졌던 기하학적 특성을 이해할 수 있는 단서를 제공한다는 점에서 건축사적으로 가치가 크다(그림 1).

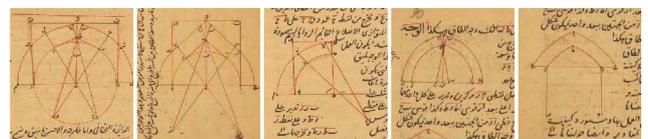


그림 1. 『수리학의 열쇠』의 첨두아치 작도법 설명과 삼도 (Al-Kāshī, *Al-Kāshī's Miṭāḥ al-Ḥisāb*, Volume II: Geometry, N. Aydin, L. Hammoudi, & Gh. Bakbouk Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2021, pp. 152, 154, 156, 158)

하지만 그의 저술은 수학자와 천문학자의 주목을 먼저 받았다. 1947년에 케네디(E. S. Kennedy)가 수록된 천문주기표를 조명한 이후, 두 분야의 연구자들은 그가 지구와 태양 사이의 거리를 계산하기 위해 처음으로 $\sin 1^\circ$ 를 정의한 것 외에도, 『수리학의 열쇠』에 수록된 내용을 다각적으로 다루었다³⁾. 하지만 건축 분야에서

* Corresponding Author : choi.namsub@gmail.com

이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행했으며(No. RS-2023-00244493), 2022년 한국건축역사학회 추계학술발표대회에서 발표한 내용을 보완한 연구이다.

1) 본명은 Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd al-Kāshī(Kāshānī)이다. 현재 이란의 카산(Kāshān) 출신이며 티무르조의 사마르칸드 군주였던 울루크(Ulugh Beg, 1394-1449 CE)의 후원을 받으며 수학, 천문학, 기하학 등 다양한 분야를 연구한 무슬림학자이다.

2) *ʿImārāt*와 *Abniya*는 저택, 모스크, 마드라사처럼 지배층과 관련된 큰 규모의 건물을 포괄적으로 가리키는 용어이다. 이런 의미를 고려해 여기서는 두 단어를 '군주의 기념비 건축'이라고 줄여서 번역했다.

는 상대적으로 늦게 관심을 가졌고 그림과 실물 대조에 집중한 단조로운 접근으로 일관했다. 블라토프(M. S. Bulatov)의 『9-15세기 중앙아시아 건축의 기하학적 조직』(1988)이 가장 이른 시도였다고 보인다⁴⁾. 곧이어 골롬벡(L. Golombek)과 윌버(D. Wilber)도 현지 조사한 자료를 더해 티무르조 건축에서 다섯 첨두아치의 실례를 확인하고자 했다⁵⁾. 비슷한 시기에 제즈비('A. Zedhbi)는 실물 찾기에 몰두하는 대신, '군주의 기념비 건축'을 페르시아어로 번역하고, 이란, 아랍, 인도 등지의 다양한 첨두아치를 집대성하는 성과를 내기도 했지만⁶⁾, 그 역시도 작도법 소개와 형태 중심의 유형 분류 이상을 탐구한 것은 아니었다.

이후 2000년대부터 다시 등장한 연구자들도 앞선 경향을 크게 바꾸지는 않았다. 타헤리(J. Taheri)가 울루백 천문대에서 알 카시의 첨두아치 확인을 시도하거나⁷⁾, 아쉬칸(M. Ashkan)과 아흐마드(Y. Ahmad)가 다섯 아치를 티무르조의 전형으로 단정하고 앞뒤 시대의 아치와 비교한 것도 이런 상황을 대변한다⁸⁾. 물론, 템첸코(I. Demchenko)처럼 1920-91년 사마르칸드에서 역사적 건물의 복원모델로 활용된 첨두아치의 의미를 조명한 접근도 있었지만⁹⁾, 그의 관심은 첨두아치가 아니라 당시의 정치적 상황에 맞춰져 있었다.

이처럼 알 카시의 첨두아치에 대해 면밀한 건축연구가 진행되지 못한 배경에는 아랍어로 저술된 『수리학의 열쇠』를 다룰 수 있는 연구자와 첨두아치의 미세한 차이를 비교할 수 있는 도구 활용의 부족이 있었다고 생각한다. 하지만 최근 아이딘(N. Aydin)과 동료 수학

자들이 세 번으로 나누어서 이 책을 영문으로 완역했으며¹⁰⁾, 컴퓨터를 이용한 작도 프로그램도 대중화되어, 그 어느 때보다 그의 첨두아치를 세밀하게 연구할 수 있는 조건이 마련되었다.

이에 연구자는 『수리학의 열쇠』의 '군주의 기념비 건축'에서 알 카시가 배럴볼트와 돔의 면적 측정을 위해 제시한 다섯 가지 첨두아치의 기하학적 특성과 건축적 의미를 살폈고, 이를 통해 티무르조와 이슬람 세계의 건축에서 기념비 장치로 사용된 곡면구조의 계획 원리, 활용 방법, 유형적 특성을 확인하고자 했다.

이를 위해, 『수리학의 열쇠』의 영어 번역본을 중심으로 아랍어본과 페르시아어본을 검토해 책의 구성과 저자의 서술 태도를 살폈으며, 이슬람권의 학술 전통에서 그의 아치 작도가 가지는 실용적 특성도 확인했다. 이어서 다섯 개의 첨두아치를 성격별로 나누어, 작도법과 크기, 높이, 곡률 등의 기하학적 특성을 비교했고, 평면적인 아치를 곡면구조로 변환해 기념비 장치로 사용하는 방법과 건물의 단면 계획에서 가지는 의미를 분석했으며, 여기에 더해 알 카시가 규정한 첨두아치가 특정 유형에 속하게 된 배경과 이유를 검토했다.

2. 알 카시의 첨두아치 작도와 실용적 접근

2-1. 『수리학의 열쇠』의 구성과 일관된 서술 방식

『수리학의 열쇠』는 각각 정수, 분수, 천문학의 산술법, 면적 측정, 대수학을 주제로 가지는 다섯 논문으로 구성된다(표 1). 여기에서 알 카시는 각기 다른 주제를 다루면서도 내용을 구성하고 서술하는 방법에서 일관된 태도를 나타내었다.

예를 들면, 첫 번째 논문 「정수의 산술」에서 알 카시는 정수의 형태와 순서를 정의한 뒤에 사칙연산법을 설명하고 마지막 장에서 정수 계산의 검증법을 다루었다. 두 번째 논문 「분수의 산술」에서도 그는 분수의 정의, 구성요소, 표기법을 설명한 뒤에 공통인수, 서로소, 등식, 대분수, 가분수의 기본 개념을 정의하고 사칙연산법을 설명했으며, 마지막 12장에서 다니크(*Dāniq*)라고 부르는 은화의 무게(*Tasujs*) 계산법을 다루었다. 이는 티무르조 시기에 은화의 가치를 무게로 평가하던 시대적 요구의 반영이었다¹¹⁾. 다음 논문인 「천문학의

3) E. S. Kennedy, *Al-Kāshī's "Plate of Conjunctions"*, Isis, Vol. 38, No. 1/2, Nov. 1947

4) M. S. Bulatov, *Геометрическая организация в архитектуре Средней Азии IX-XV веков*, Moscow, Наука, 1988

5) L. Golombek, & D. Wilber, *The Timurid Architecture of Iran and Turan*, vol. 1, Princeton and New Jersey, Princeton University Press, 1988

6) Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī, *Miftāḥ al-Hisāb: Risālah-i Tāq wa Azaj*, Saīd 'Alirezā Jeżbī Per. tr. & ed., Tehran, Soroush, 1987/8

7) Jafar Taheri, *Mathematical Knowledge of Architecture in the Works of Kāshānī*, Nexus Network Journal, Vol. 11, No. 1, 2009

8) Maryam Ashkan, & Yahaya Ahmad, *Discontinuous Double-shell Domes through Islamic eras in the Middle East and Central Asia: History, Morphology, Typologies, Geometry, and Construction*, Nexus Network Journal, Vol. 12, No. 2, 2010

9) Igor Demchenko, *Heritage of the Red Orient: Theories and Practices of Architectural Restoration in Soviet Central Asia 1920-1991*, Ph. D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Sep. 2015

10) Al-Kāshī, *Al-Kāshī's Miftāḥ al-Hisab*, Volume I: Arithmetic, N. Aydin, & L. Hammoudi Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2019; Al-Kāshī, *op. cit.*, 2021; Al-Kāshī, *Al-Kāshī's Miftāḥ al-Hisab*, Volume III: Geometry, N. Aydin, L. Hammoudi, & Gh. Bakbouk Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2022

산술」에서도 알 카시는 천체의 공전주기와 위치 관계를 설명한 뒤에 마지막 6장에서 천문학자들이 사용하는 60진법을 10진법으로 변환하는 방법을 소개했다. 이 부분은 60진법이 약수가 많아 천문주기 계산에는 편리하지만 지나치게 복잡해 실생활에서 사용하기 어려운 문제를 풀이하기 위한 목적에서 서술되었다.

표 1. 『수리학의 열쇠』의 다섯 논문과 주제 구성

논문	장
1. 정수 산술	1) 정수의 형태와 순서
	2) 두 배 곱하기, 절반 나누기, 더하기, 빼기
	3) 곱하기
	4) 나누기
	5) 지수근 풀이
	6) 계산 검증(*)
2. 분수 산술	1) 분수의 정의와 구성
	2) 분수의 표기방법
	3) 나누어 떨어짐, 공통인수, 서로소, 등식
	4) 대분수와 가분수
	5) 공통분모 찾기
	6) 복합분수의 단일화
	7) 두 배 곱하기, 절반 나누기, 더하기, 빼기
	8) 곱하기
	9) 나누기
	10) 지수근 풀이
	11) 공통분모에서 다른 분모로 바꾸기
	12) 은화(Dāniq)와 무게(Tasuj)의 곱셈과 나눗셈(*)
3. 천문학자의 산술	1) 천문표의 숫자 인식과 위치 정하기
	2) 두 배 곱하기, 절반 나누기, 더하기, 빼기
	3) 곱하기
	4) 나누기
	5) 지수근 풀이
	6) 60진법을 인도 숫자(10진법)로 변환하기(*)
4. 면적 측정	1) 삼각형의 면적
	2) 사각형의 면적
	3) 다각형의 면적
	4) 원의 면적
	5) 다른 평면 도형의 면적
	6) 원통, 원뿔, 구 등 입체도형의 표면적
	7) 입체도형의 부피
	8) 입체도형의 부피와 무게 비율
	9) 균주의 기념비 건축(*)
i. 첨두아치의 배럴볼트(Tāq wa Azaj)의 측정 ii. 돔(Qubba)의 측정 iii. 무카르나스(Muqarnas)의 표면적	
5. 알자브르와 무카발라로 미지수 찾기	1) 대수학
	2) 이중가정법으로 미지수 찾기
	3) 미지수를 찾기 위한 50가지 중요한 규칙
	4) 예시(*)

네 번째 논문인 「면적 측정」에서도 알 카시는 삼각형, 사각형, 다각형, 원형, 이형의 평면도형을 정의하고 각각의 면적 측정법을 설명한 뒤에, 원통, 원뿔, 구 등의 입체도형을 정의하고 표면적과 부피 계산법을 서술했다. 이 논문의 마지막 9장인 ‘균주의 기념비 건축’도

11) 티무르조 시기에는 은화의 무게로 가치를 측정했으며, 이를 판단하기 위한 기준으로 대형은화인 디나르(Dīnār)를 주조해 사용했다(이주연, 「티무르조의 화폐 제도 재고(再考)」, 『아시아리뷰』, 제11권 제1호, 통권 21호, 2021, 쪽. 225).

볼트(Azaj), 돔(Qubba), 무카르나스(Muqarnas)¹²⁾처럼 실제 건물에 사용되는 입체 구조와 장식의 표면적과 부피 측정법을 다루며 끝을 맺었다. 이런 태도는 「알자브르(Alzabr)와 무카발라(Muqaballa)를 이용한 미지수 찾기」에서 대수학의 여러 사례로 해당 논문이 마무리되는 것에서도 확인된다. 이처럼 알 카시는 주제가 달랐지만, 공통적으로 기본 개념부터 시작해 점차 복잡한 계산법을 다룬 뒤에 실생활에 적용할 수 있는 대상을 풀이하는 순서로 논문을 작성했다.

2-2. 이슬람권 학술 전통과 현안 해결의 추구

알 카시의 서술 방식은 저자 개인이 가진 독창성보다는 이슬람 세계의 학술 전통이 반영된 결과였다고 보인다. 이슬람은 예언자 무함마드의 활동기부터 정통 칼리프조, 우마이야와 압바스를 비롯한 양대 칼리프조를 거치며 세계적으로 확장했다. 그중에 압바스조의 칼리프였던 알 마아문(Al-Mā'mūn, 786-833 CE)은 정치적 목적을 위해, 그리스, 사산조 페르시아, 인도 고전의 아랍어 번역 운동과 다양한 학문을 적극적으로 후원했다¹³⁾. 이런 상황에서 다방면에 능통한 무슬림학자들은 후원의 대가로 현실적인 문제 해결에 유용한 논리학, 수리학, 산술, 기하학 등에 매달렸고, 그 결과로 실용적 학술 전통이 확립될 수 있었다.

이맘 알 마아문의 과학에 대한 애착, 지식인들에게 보여준 친절과 겸손, 난제를 설명하고 어려움을 제거하는 지식인들을 보호하고 후원하는 결단력은 내가 ... 간략한 수학책을 쓸 수 있게 격려했다. 이 책은 수리학에서 가장 쉽고 실용적인 것에 한하며, 사람들이 계속해서 요구하는 상속, 유산, 분할, 소송, 거래의 경우나, 대지 측량, 운하 굴착, 기하학 계산 외에 다양한 종류의 여러 목적과도 관련된다. ...¹⁴⁾

알 호레즈미(Muḥammad ibn Mūsā al-Khwarizmī, 780-? CE)가 언급한 것처럼, 무슬림학자들이 해결해야 하는 과제는 다양했으며, 그중에는 건축장인들이 계산하기 어려운 복잡한 기하학(Handassa)도 포함되었다.

12) 건축구조에서 돌출된 가장자리를 장식하고 연결부를 가리기 위해서 사용하는 코니스와 같은 입체장식이다. 무카르나스는 돔의 전실(천장 부분)과 밀접하게 관계되어, 전이 장치로 사용된다(C. E. Bosworth, & et al., *The Encyclopaedia of Islam (New Edition)*, Vol. VII, Leiden and New York, E. J. Brill, 1993, p. 502).

13) 디미트리 구타스 지음, 정영목 옮김, 『그리스 사상과 아랍 문명』(과주, 글항아리, 2013), 쪽. 161

14) Abu Abdallah Mohammed ben Musa of Khwarezm, *The Algebra of Mohammed ben Musa* (Frederic Rosen ed. & Eng. tr., London, The Oriental Translation Fund, 1831), p. 3

외즈두랄(A. Özdural)은 기하학자들과 장인들이 모여서 소통했던 마잘리스(Majalis)라고 부르던 회의가 이슬람 세계의 기하학을 발전시킨 원동력이라고 주장했다¹⁵⁾. 이 회의에서 기하학자들은 군주 외에도 장인들의 요구와 문제를 확인하고 그들이 참고할 수 있는 개설서를 구상했다. 알 파라비(Al-Farabi, 870-950/1 CE)가 장인들이 눈대중으로 도형을 나누던 작태를 지적한 뒤에 저술한 『기하학 형태의 세부에서 영적인 기술과 자연의 신비를 담은 책(A Book of Spiritual Crafts and Natural Secrets in the Details of Geometrical Figures)』¹⁶⁾과 아불 와파 알 부즈자니(Abū al-Wafā' al-Buzjāni, 940-98 CE)의 『장인들의 소용을 위한 기하학적 구성에 관한 책(Kitab fima yahtaju ilayhi al-sani' min 'ilm al-handasa)』¹⁷⁾, 그리고 오마르 하이얌(Omar Khayyam, 1048-1131 CE)의 제목을 확인할 수 없는 기하학 서적들은 모두 이런 전통에서 저술된 실무자용 개설서였다¹⁸⁾.

... 나는 회계원(Muḥāsib)에게 필요한 모든 것을 정리해 불필요한 수사와 완전하지 않은 요약물 피해서 이 책을 쓰고 편집했다. 대부분의 작업에서 나는 기술자들(Muhandisi)이 쉽게 이해할 수 있도록 규칙들을 표로 작성했다. ... 나는 이 책을 위대한 술탄, ... 고르간의 울룩백(U'lugh Beg Gorgan)에게 바쳤다¹⁹⁾.

당연히 알 카시도 이런 분위기 속에서 활동했다. 그가 부친에게 쓴 편지를 보면, 알 카시가 울룩백 친문대(Falak al-Burūj)²⁰⁾의 건설을 위한 마잘리스에서 울룩백, 학자들, 장인들과 함께 수차례 논쟁했던 모습을 확인할 수 있다²¹⁾. 『수리학의 열쇠』도 서문에서 회계원, 건축장인, 기술자가 이해하기 쉬운 책을 울룩백에게 바친다고 밝힌 것처럼²²⁾, 그의 저술은 실용적 전통을 따

15) Alpay Özdural, *Omar Khayyam, Mathematicians, and "Conversazioni" with Artisans*, Journal of the Society of Architectural Historians, Vol. 54, No. 1 (Mar. 1995), p. 55

16) <http://new.math.uiuc.edu/im2008/rogers/geometry.html>

17) Alpay Özdural, *op. cit.* (Mar. 1995), p. 54

18) Alpay Özdural, *op. cit.* (Mar. 1995), p. 56

19) Al-Kāshī, *op. cit.* (2019), pp. 20-3

20) 1420년대 티무르조의 사마르칸드 군주였던 울룩백(Ulugh Beg, 1394-1449 CE)이 건설한 친문대이다. 알 카시는 부친에게 편지에서 페르시아어로 친문 타워라고 표현했다.

21) Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī, *Az Samarqad be Kāshān: Nāmeḥā-i Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī be Pedaresh* (Bagheri M. ed., Tehran, Scientific & Cultural Publications, 1996), pp. 39-40

22) 당시 무슬림학자들은 새로운 이론을 검증하는 논문과 실무자들

르던 저자 개인의 학술적 성취이자, 후원자와 장인들의 요구를 반영한 공동의 지적 성과였다. 이를 고려하면, 그가 면적 측정을 위해 첨두아치의 구성 원리를 풀이하는 부분은 곡면구조의 계획과 공사에 필요한 자재 수량, 투여 인력, 공사 기간 등의 산정처럼 현실적인 상황과 무관하다고 보기 어렵다²³⁾.

3. 첨두아치의 규모 분류와 기하학적 특성

알 카시는 『수리학의 열쇠』에서 다섯 개의 첨두아치를 제시하고 각각의 작도법을 삼도와 함께 설명했다²⁴⁾. 그중에 먼저 다루는 세 첨두아치는 사용 건물의 내폭을 구분하지만, 이어서 다루는 두 아치 설명에서는 건물 규모와 용도에 대해 어떠한 정보도 알려주지 않았다. 이와 같은 첨두아치를 규모의 특정 여부로 중심으로 나누어 보면, 각 그룹은 사용하는 중심점의 개수, 원호와 직선의 조합방식에도 차이를 보였다(표 2).

3-1. 세 첨두아치의 규모별 높이비와 곡률 차이

알 카시가 규모를 특정한 아치 중에 가장 먼저 언급한 ①아치는 내폭이 5다르(Dhar)²⁵⁾ 이내인 건물에 사용하며, 아치 폭이 약 2.5m 이내가 되어 규모가 가장 작다. 이 아치의 작도는 H점을 중심으로 그린 원을 6등분한 뒤에 수평선과 60°를 이루는 B와 C점까지 안쪽면의 원호를 그리며 시작한다. 이어서 두 점에서 반지름을 두 배로 늘린 뒤에 서로 교차하는 I점까지 원호를 그린다. 바깥면의 원호도 같은 방법으로 그리지만, U와 S점에서 원호의 접선을 그려서 최상부를 직선으로 마무리하는 점이 다르다²⁶⁾. 이 첨두아치의 안쪽과 바깥쪽의 간격은 임의로 설정할 수 있다.

다음으로, ②아치는 내폭이 5다르(Dhar)에서부터

위한 교과서 형식으로 연구성과를 발표했다고 알려져 있다(이주연, 「15세기 티무르조의 수학자 알 카시와 이슬람 수학의 전통」, 『2022년 한국건축역사학회 추계학술발표대회 논문집』, 2022. 11, 쪽. 255).

23) 중세 이탈리아에서 건물의 표면적과 부피에 따라 장인들의 임금을 책정했는데, 이 관행이 전근대 이슬람 세계에서도 적용되었을 가능성이 제기되기도 했다(Yvonne Dold-Samplonius, *Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kāshī*, Centaurus, Vol. 35, 1992, pp. 193-4).

24) 알 카시는 각 첨두아치의 이름을 특정하지 않았다. 이 연구에서는 편의상 언급 순서에 맞추어 각각 ①, ②, ③, ④, ⑤라고 부른다.

25) 알 카시는 첫 번째 논문에서 길이 측정의 척도로 다르(Dhar), 카사바(Qaşaba), 아샬(Ashal), 카담(Qadam), 아사바아(Aşaba)를 언급하는데, 그중에 '다르'는 팔꿈치에서부터 중지까지의 길이를 가리키는 큐빗(Cubit)이다(Al-Kāshī, *op. cit.*, 2021, pp. 14-5).

26) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 152-3 요약

표 2. 알 카시가 제시한 첨두아치의 작도법, 규모, 구성요소

구분	①	②	③	④	⑤
중심	3개	3개	3개	2개	1개
내폭	5다르(Dhar) 이내 : 약 2.5m 이내	5-10(혹은 15)다르 사이 : 약 2.5-7m 사이	15바아(Bā) 이상 : 약 27m 이상	(불특정)	(불특정)
원호	안쪽 2개, 바깥쪽 2개	안쪽 2개, 바깥쪽 2개	안쪽 2개, 바깥쪽 2개	안쪽 1개, 바깥쪽 1개	안쪽 1개, 바깥쪽 1개
접선	바깥쪽 1개	바깥쪽 1개	바깥쪽 1개	바깥쪽 1개	-
규모	소	중	대	-	-

10, 혹은 15다르 이내의 건물에 사용한다(표 2). 길이가 약 2.5m에서부터 7.5m 사이에 이르는 중간 규모의 ② 아치의 작도는 H점을 중심으로 그린 안쪽의 원을 넷으로 등분한 뒤에 수평선과 45°를 이루는 B와 C점까지 원호를 그리며 시작한다. 이어서 두 점에서부터 H점을 잇는 직선을 각각 A와 D점에서 아래쪽으로 그린 직선과 교차하는 E와 R점까지 연장해 그린다. 이렇게 반지름을 확장해 B와 C점의 위쪽에서 교차하는 I점까지 원호를 그린다. 이 아치에서도 바깥면의 U와 S점에서 원호의 접선을 그려서 뾰족한 상부를 만든다²⁷⁾. 이 경우에도 안팎의 간격은 특정되지 않는다.

마지막으로, ③아치는 내폭이 15바아(Bā)²⁸⁾ 이상인 건물에 사용한다(표 2). 이 아치는 내폭이 27m 이상에 이를 정도로 세 아치 중에 규모가 가장 크다. ③아치의 작도는 H점을 중심으로 그린 원의 반지름을 8등분한 뒤에 9/8길이를 반지름으로 하는 원호를 그리며 시작한다. 이어서 H점을 중심으로 그린 원의 수평과 수직 방향의 반지름 끝점에 해당하는 V와 A점을 이은 직선의 길이만큼 B점에서 연장해 만든 반지름(C-E)을 이용하여 C와 L점에서부터 중심선 I점까지 원호를 그린다. 여기에서도 안쪽면은 두 개의 원호만으로 작도하고, 바깥쪽은 U점에서 접선을 하나 더 그려서 마무리한다. 반대편도 같은 방법으로 그려서 좌우가 대칭인 첨두아치를 만든다²⁹⁾. 여기서도 아치의 안팎 간격은 정해져 있지 않아 임의로 설정할 수 있다.

27) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 154-5 요약

28) 양팔을 벌린 길이를 의미하고, 약 1.8m 정도이며, 아랍인들이 주로 사용하는 척도라고 알려져 있다(Mahmūd Fakhūrī, *Maūsūʿat wa Ḥadāt al-Qiās al-ʿArabīyat wa al-ʾIslāmīyat wa Māyuaʿādhā Bālimqādir al-Ḥadīshat*, Beirut, Maktab Lubnān Nashirūn, 2002, pp. 94-5).

29) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 156-7 요약

표 3. 규모 특정 첨두아치의 높이비와 변곡점 경사각

구분	①			②			③		
높이비	1			1.10			1.16		
바깥 높이비	1 : 0.529			1 : 0.586			1 : 0.618		
변곡점 경사각	최저 90°	중간 30°	최고 13°	최저 90°	중간 45°	최고 24°	최저 90°	중간 45°	최고 26°

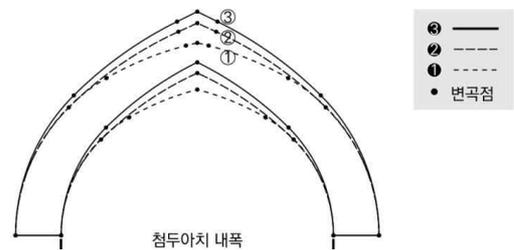


그림 2. 규모 특정 첨두아치의 높이비 비교

세 첨두아치의 내폭이 같다고 가정하면, ①아치의 높이가 가장 낮고, ②와 ③아치 순으로 높아진다(그림 2). 이런 차이는 두 번째 원호를 그리는 반지름 길이와 작도를 시작하는 높이에 따라 달라지는 곡률과 접선 경사각에서 발생했다. ①아치는 H점을 중심으로 60° 지점까지 첫 번째 원호를 그리기 때문에, 45°까지 그리는 ②와 ③아치보다 곡률이 큰 원호를 더 많이 사용한다. 두 번째 원호를 그릴 때는 ②아치가 상대적으로 곡률이 커지는 짧은 반지름을 사용하므로 높이가 ③아치보다 낮아진다. 이런 곡률 차이 때문에 첨두아치의 바깥면 최상부에 그리는 접선 경사각도 13°, 24°, 26°로 달라졌다(표 3).

알 카시는 규모를 구분해서 첨두아치의 높이비와 곡률을 다르게 적용한 이유를 직접 설명하지는 않았다. 하지만 그는 건물의 구조적 측면도 고려했던 것으로 보인다. 상부가 뾰족한 첨두아치가 반원을 사용하는 둥근 아치에 비해 바깥으로 벌어지려는 횡하중을 적게

받는다. 이는 이미 알려져 있다. 이런 특성은 곡률이 다른 첨두아치에도 적용되어 상대적으로 더 뾰족한 아치가 좌우로 벌어지려는 하중을 덜 받는다³⁰⁾. 이에 따라 상대적으로 규모가 큰 건물이 더 높고 뾰족한 첨두아치를 가지게 되었고, 결과적으로 규모가 다른 건물 사이에 시각적 위상 차이도 발생했다(그림 3).

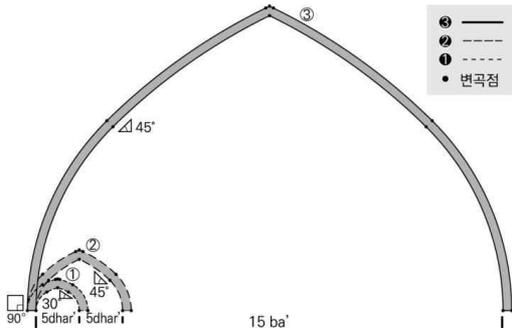


그림 3. 규모 특정 첨두아치의 규모 비교

3-2. 규모 불특정 첨두아치의 상호 연관성 부재

알 카시는 세 가지 첨두아치를 설명한 뒤에 규모를 특정하지 않은 두 아치도 다루었다(표 2). ④와 ⑤아치는 앞서 검토한 아치에 비해 선의 개수도 적고 작도법도 간단하며 형태도 더 단순하다. 그중에 ④아치를 그리기 위해서는 먼저 H점에서 좌우로 같은 거리에 위치하는 A와 D점까지 수평선을 그리고, 양방향의 직선을 3등분한 뒤에 길이가 4/3에 해당하는 직선을 반지름으로 원호를 그린다. 이어서 안쪽면은 서로 교차하는 I점까지 그려서 작도를 끝내고, 바깥면은 E와 Y점까지 원호를 그리고 나서 두 점의 접선을 그려서 첨두를 만든다³¹⁾. 여기서도 안팎의 간격은 특정되지 않는다.

⑤아치의 작도는 더욱 간단해서 안쪽과 바깥면을 동일한 곡률의 원호로 그린다. 먼저 A와 D점을 잇는 수평선을 그린 뒤에 각 점에서 아래쪽으로 같은 거리에 있는 C와 R점까지 직선을 그린다. 이렇게 만든 정사각형의 대각선을 반지름으로 이용해 원호를 그린다. 바깥면도 임의로 설정한 두께만큼 반지름을 늘려서 원호를 그린다³²⁾. 이 아치는 유일하게 수평선 아래에 중심점을 두고 작도를 시작하기 때문에 원호의 최하단부가 수평선과 직교하지 않고 내외부의 접선 경사각도 달라졌으며, 직선을 사용하지 않는 차별성을 가진다.

30) S. Ghannam, & H. Najm, *Structural Performance of Two-Hinged Islamic Arches*, Journal of Engineering and Architecture, Vol. 3, No. 1 (June 2015), p. 50

31) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 156-9 요약

32) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 158-9 요약

표 4. 규모 불특정 첨두아치의 높이비와 변곡점 경사각

구분	④				⑤			
높이비	1				0.57			
바깥 높이비	1 : 0.613				1 : 0.359			
변곡점 경사각	바깥쪽		안쪽		바깥쪽		안쪽	
	최저	최고	최저	최고	최저	최고	최저	최고
	90°	14°	90°	14°	51°	18°	45°	21°

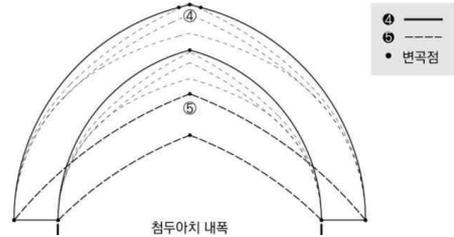


그림 4. 규모 불특정 첨두아치의 높이비 비교

④와 ⑤아치는 다섯 아치 중에 각각 최고와 최저 높이비를 가진다(그림 4). 하지만 두 아치에서 상호 연관성을 확인할 수 없으며, 앞서 설명한 세 아치와도 비교할 만한 단서를 찾기 어렵다. 그런데 알 카시는 ④아치를 신자르(Sinjar)³³⁾에서 만들어봤다고 말했다³⁴⁾. 이곳은 사마르칸드에서 직선거리로 2,000km 이상 떨어져 있어, ④아치는 다른 문화권이나 티무르조 영토의 외곽에서 사용한 아치일 가능성이 크다. 마지막에 소략하게 설명하는 ⑤아치에 대해서도 별다른 정보가 확인되지 않지만, 작도법도 간단하고 높이도 낮아 상대적으로 중요도가 떨어지는 시설에 사용되었을 것으로 보인다.

4. 첨두아치의 건축 활용과 유형적 특성 공유

4-1. 곡면구조 변환과 기념비적 건축 장치 적용

알 카시는 평면도형인 첨두아치를 이용해 입체적인 곡면구조의 표면적과 부피 계산법을 제시했다(그림 5). 이를 위해, 그는 안쪽과 바깥면으로 구성되는 첨두아치를 한쪽으로 연장해 터널 구조의 배럴볼트로 바꾸었으며, 첨두아치를 무한히 회전시켜서 돔을 만들었는데 아치가 일곱 개에서 여덟 개만 있어도 표면적과 부피 계산이 가능하다고 말했다³⁵⁾.

이렇게 만든 배럴볼트와 돔은 군주가 사용하는 치소(Diwānkhāna, Dōlatkhāna), 군주의 일가가 거주하는 궁전(Qaṣr, Kakh), 그들이 사후에 묻히는 묘소(Mazar,

33) 이라크의 쿠르디스탄 지역(KR)에 위치하는 도시이다.

34) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 175-7

35) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), pp. 174-5 알 호레즈미, 알 파라비, 알 부즈자니, 오마르 하이얌 등과 다르게, 알 카시는 평면도형을 입체도형으로 변환해 건축 장치로 적용하는 방법을 설명했다.

Ārāmgāh, Ziāratgāh), 금요일마다 예배를 개최해 통치권자의 이름을 확인하는 모스크(*Masjid*), 이슬람 율법을 가르치는 마드라사(*Madrassa*)처럼 티무르조와 이슬람 세계의 기념비 건축 상부에 설치된다. 알 카시가 활동한 사마르칸드에서도 울룩백의 재임기부터 건립된 레기스탄 광장³⁶⁾의 울룩백 마드라사(1417-20 CE), 세르도르 마드라사(1619-36 CE), 틸라코리 마드라사(1646-60 CE)에서 용례를 확인할 수 있다(그림 6).

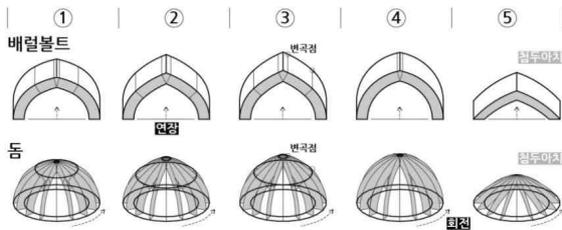


그림 5. 알 카시가 제시한 배럴볼트와 돔 전환법



그림 6. 레기스탄 광장 전경(필자 촬영, 2018. 12. 8)

그중에 배럴볼트는 이완(*Īwān*)이라고 부르는 공간의 상부에 설치된다. 일반적으로 이완은 방형 평면의 네 면 중에 하나, 혹은 두 벽체를 설치하지 않아 반외부를 이루며³⁷⁾, 이곳의 상부는 내부 천장에 배럴볼트를 놓고 그 위에 평평한 지붕을 얹어서 만든다. 이와 같은 이완이 깊은 공간을 가지면 접객, 예배, 교육처럼 공적인 공간으로 이용되고, 얕은 공간을 가지면 종유석 형태의 무카르나스와 함께 건물의 주출입구를 강조하는 상징적 장치로 사용된다.

돔은 아랍어로 쿵바(*Qubba*)나 쿵바트(*Qubbat*)로 부르며, 페르시아어로는 군바드(*Gunbad*)처럼 다르게 부르기도 한다. 이완과 다르게, 쿵바는 내부 천장면과 외부 지붕면에 모두 돔을 사용한다³⁸⁾. 그리고 바깥면에 청금석으로 색을 입힌 푸른 타일이나 금장 타일을 붙여서 주변 건물과 구별되는 외관을 만들고, 안쪽에는

36) 페르시아어로 모래(*Reg*)와 지역(*Stan*)이 합쳐져 '사막'을 의미하는 광장이다. 여기에 건립자의 이름으로 명명한 세 마드라사가 있다.

37) K. A. C. Creswell, *The Muslim Architecture of Egypt*, Vol. II (New York, Hacker Art Books, 1958/1978), p. 105

38) A. Godard, *The Art of Iran* (M. Heron Eng. tr., New York and Washington, Feredrick A. Praeger, 1965), p. 261

기하학적 패턴으로 치장해 화려한 내부공간을 조성하기도 한다. 이처럼 건물 안팎을 도드라지게 만드는 쿵바는 이슬람 세계에서 가장 중요한 기념비 장치였다.

4-2. 곡면구조의 단면선 규정과 조합 가능성 고려
알 카시가 이런 곡면구조의 면적을 계산하기 위해 사용한 첨두아치는 몇 가지 공통점을 가진다. 모두 좌우 대칭이며 원호와 직선을 조합해서 만든다. 또한, 그의 아치는 모두 곡률을 바꾸기 위해 원의 반지름을 두 배로 늘리거나 정사각형의 대각선을 반지름으로 이용했으며, 곡률이 달라지는 지점을 특정하기 위해 30°, 45°, 60°, 90°처럼 계산하기 수월한 각도를 사용했다.

돔(Qubba)은 속이 비어있는 반구나 구, 혹은 다각뿔처럼 보인다. 또는 그것은 첨두아치(Tāq)의 면을 회전시켜서 만든 상상의 결과이다. ... 처음 두 유형의 면적측정에 대해 앞서 구와 구의 부분 면적측정법을 설명했다. 세 번째 유형은 (이미) 원뿔 측정법에서 설명했다...³⁹⁾

여기서 알 카시는 두 점에서 거리의 합이 일정한 점을 이어서 만드는 타원을 언급하지 않았다. 그는 반구와 원뿔처럼 원호와 직선만으로 단면이 구성되는 도형도 다루지 않았다. 이에 대해 골롬벡과 윌버는 알 카시의 오류라고 지적하며 그가 당대에 성행한 첨두아치 중에 일부만을 다루었다고 평가했다⁴⁰⁾. 하지만 이는 두 연구자의 오해다. 알 카시는 여러 차례 언급한 것처럼 앞서 설명한 입체도형을 반복하지 않았을 뿐이다. 그는 앞서 풀이한 원뿔이나 반구처럼 기본적인 입체도형도 건물에 사용하는 구조로 고려하고 있었다.

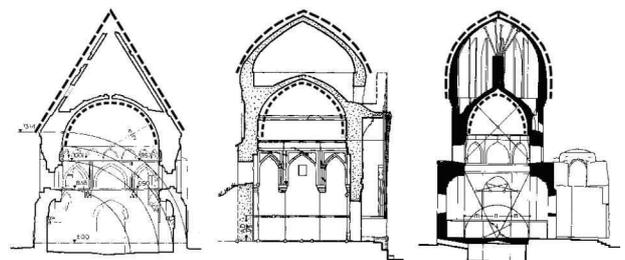


그림 7. 무자파르 타케쉬, 시린벡 아가, 티무르의 묘소 단면도(M. S. Bulatov, *op. cit.*, 1988, Fig. 72, 93, 109 편집)

또한 알 카시는 바깥쪽과 안쪽의 곡률이 다른 이중 돔은 언급조차 하지 않았다. 하지만 당시 사마르칸드에는 이전 왕조인 호레즘조 시기에 건립된 무자파르 테케쉬(Muzaffar Tekesh, ?-1200 CE)⁴¹⁾의 묘소가 있었

39) Al-Kāshī, *op. cit.* (2021), p. 175

40) L. Golombek, & D. Wilber, *op. cit.* (1988), p. 152

으며, 11세기부터 무슬림 지도자, 순교자, 티무르조 왕실의 공동묘소로 이용되던 샤히진다(Shah-i Zinda)의 시린벱 아가(Shīrīnbeḡ Āghā, ?-1385/6 CE)⁴²⁾ 묘소와 티무르조를 창립한 아미르 티무르(1335-1405 CE)의 묘소(Gūr-i Amīr)처럼 이미 이중 돔을 가진 건축이 다수 존재했다(그림 7). 알 카시가 생활권에 있던 이 건물들을 접하지 못했을 리는 만무하다.

알 카시가 이중 돔을 다루지 않은 이유는 『수리학의 열쇠』가 삼각형, 반원, 첨두아치를 조합해서 만들 수 있는 모든 경우의 단면 계획을 보여주는 사례 모음집이나, 전수조사한 이중 돔 건물의 목록을 나열하는 보고서가 아니었기 때문이다. 실제로 그는 장인들이 기념비 건축의 곡면구조를 계획하거나 공사할 때 적용할 수 있는 기하학적 지식을 전달하고자 했으며, 그가 제안한 첨두아치는 건물 상부의 구조체에서 두께를 가진 한 커의 단면선이었던 것으로 보인다. 특정되지 않은 아치 안팎의 간격을 조절하면, 건물 규모와 재료, 돔과 배럴볼트처럼 구조방식에 따라 달라지는 구조체 두께에 맞추어 유연하게 적용할 수 있다⁴³⁾. 알 카시의 저술이 특정 건물에 적용되었다는 기록은 확인되지 않지만, 기본도형과 조합해 사용할 수 있는 그의 아치 작도법은 곡면구조의 단면을 계획하는 건축가나, 공사를 준비하는 장인들에게 중요한 참고자료가 되었을 것이다.

4-3. 세 아치의 클로버형 수용과 울룩벱의 선택

알 카시의 첨두아치는 시대와 지역을 초월해 이슬람 세계 전역에서 통용되던 모든 곡면구조를 포괄하지 않았다. 제즈비가 형태와 작도법을 중심으로 분류한 아치 유형을 보면⁴⁴⁾, 그의 첨두아치는 크게 두 가지 유형으로 나눌 수 있다(표 5). 그중에 규모를 특정한 세 아치는 이란계(Īrānī) 중에서도 염소뿔형(*Shakh-i Bozī*), 5-7분형(*Panj wa Haft*), 왕관형(*Kallī*)처럼 원의 중심에서 먼 지점에서 짧은 반지름을 이용해 원호 작도를 시작하거나, 타원을 사용하는 타원형(*Biz*)과 다르게, 유일하게 원의 중심 근처에서 상대적으로 긴 반지름으로 작도를 시작하는 클로버형(*Shabdārī*)에 속하고 있어 다른 유형과 구별된 형태를 가진다(그림 8).

41) 펀드주위농양으로 사망한 호레즘조의 왕(Shah)이었다.

42) 아미르 티무르의 막내 여동생이다.

43) 돔은 배럴볼트의 1/10 두께로 동일 반경의 구조물을 만들 수 있다(박인석 지음, 『건축 생산 역사1』, 서울, 마티, 2022, 쪽. 101).

44) 제즈비는 알 카시 외에도 근래의 교수, 연구자, 건축가, 장인들이 조사한 첨두아치 작도법과 도면을 번역서에 수록했다고 밝혔다(Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kashānī, *op. cit.*, 1987/8, p. 52).

표 5. 제즈비의 아치 유형 분류

(Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kashānī, *op. cit.*, 1987/8, pp. 52-73 편집)

클로버형	이란계 아치				외래계 아치
	염소뿔형	5-7분형	왕관형	타원형	

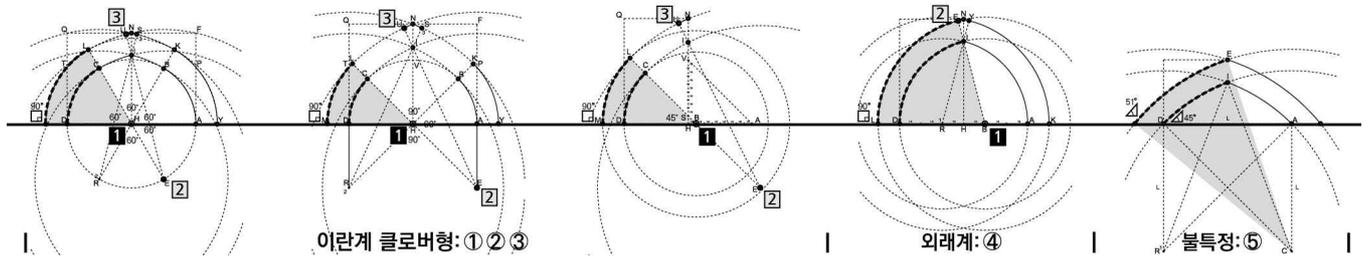


그림 8. 알 카시의 다섯 가지 첨두아치와 유형 분포

된다. ④아치는 최상부에 직선을 사용하지 않는 점을 제외하면 4/3길이를 반지름으로 이용해 두 원호로 그리는 외래계 아치의 한 유형과 같다(표. 5). 하지만 ⑤아치는 유사사례도 확인되지 않는다. 외래계 중에서 수평선 아래에 중심점을 두고 작도하는 아치가 있긴 하지만, 이 경우는 원호 하나만을 사용해 뾰족한 상부를 가지지 않기 때문에 다른 유형이다.

다섯 아치 중에서 ④와 ⑤아치는 상대적으로 덜 중요했던 것 같다. 알 카시가 ④아치를 만들어냈다는 신자르는 사마르칸드에서 멀 뿐만 아니라, 험준한 산간이었으며, 이슬람보다는 야지디교의 영향이 강한 지역이었다⁴⁵⁾. 또한 이곳은 알 카시의 저술을 제외하고, 야즈디(Sharaf al-Din 'Alī Yazdī, 1370?-1454 CE)가 아미르 티무르의 공적을 기리기 위해 저술한 방대한 분량의 『승전기』(1425)⁴⁶⁾에서도 확인되지 않을 만큼 당시 격오지였다. 알 카시와 울루백이 영토 가장자리의 이교도 건축에 큰 관심을 가졌다고 보기 어렵다.

이와 다르게, ①, ②, ③아치는 설명한 순서와 분량을 보더라도 많은 관심을 받았던 것 같다. 여기서 세 아치가 규모별로 조금씩 다른 곡률을 가지기는 하지만, 클로버형에 속해 다른 이란계 유형과 구별된 형태를 공유한다는 점이 주목된다. 이 의미는 당시의 분위기, 저자의 경험, 후원자의 의지를 복합적으로 고려해 이해해야 할 것이다. 고마즈 히사오(小松久男)에 따르면, 저술 당시는 ‘티무르조의 르네상스’라고 부를 만큼 안정기였고, 군주들이 페르시아 문학과 예술을 장려하던 문화의 부흥기였다⁴⁷⁾. 이런 시대적 상황과 실용적 학술 전통을 고려하면, 그의 세 아치는 유년기를 보낸 카산, 학술 활동에 매진한 사마르칸드, 그리고 기록에 전하지 않는 방문지의 경험을 바탕으로 구상되었으며, 마잘리

스를 거친 뒤에 울루백에 의해 최종 채택되었다고 볼 수 있다. 비록 직접 관련된 문헌은 확인되지 않지만, 특정 유형의 형태를 공유하는 세 아치는 티무르조 영토를 상징하는 기념비 건축의 통일성을 위해 울루백이 선택한 이상적 건축 아젠다였을 가능성이 크다.

5. 결론

이 연구에서는 15세기 초 알 카시가 저술한 『수리학의 열쇠』의 「면적 측정」 논문에서 수록된 다섯 가지 첨두아치의 기하학적 특성과 함께 곡면구조의 변환 방법과 기념비적 건축 장치의 활용법을 살폈고, 그의 아치가 건물의 상부구조 계획에서 가지는 의미와 함께 특정 유형에 속하게 된 배경을 검토했다.

알 카시는 네 번째 논문의 9장 ‘군주의 기념비 건축’에서 배럴볼트와 돔의 표면적과 부피 측정을 위해 다섯 개의 첨두아치를 제시했다. 그중에 규모를 특정한 ①, ②, ③아치는 두 개의 원호와 하나의 직선을 사용해 작도하며 규모가 클수록 높고 뾰족한 상부를 가졌다. 하지만 ④와 ⑤아치는 규모도 특정되지 않고, 다른 아치와의 연관성도 확인되지 않았다. 알 카시는 이 아치들을 연장하거나 회전시켜 각각 배럴볼트와 돔으로 변환했다. 여기서 그의 첨두아치는 건물 상부의 곡면구조에서 구조체의 단위를 이루는 한 켠의 단면선으로서 기본도형과 함께 건물 규모와 사용 재료에 맞추어 조합해서 사용되었을 것이다.

알 카시가 제안한 다섯 아치 중에 ①, ②, ③아치는 조금씩 다른 곡률을 가졌지만, 이란계 클로버형의 특성을 공유했다. 이는 당시 페르시아 문화를 선호하던 티무르조의 사회 분위기에서 알 카시가 자라고 활동한 지역의 경험과 후원자 울루백의 선택이 종합된 결과로 보이며, 일관된 형태의 기념비 건축을 세워서 균질한 티무르조 영토를 구축하려던 울루백의 의지가 투영된 표상이 아니었을까 생각된다.

이 연구에서는 알 카시의 첨두아치가 가지는 여러

45) 야지디교도는 하늘의 신과 땅의 인간의 매개체로 말렉타우스(Melek Tāūs)라는 공작새를 섬겨서 악마송배자로 여겨지기도 했다.

46) Sharaf al-Din 'Alī Yazdī, *Zafarnāma* (Sharaf al-Din 'Alī Yazdī, *Zafarnāma-i Sharaf al-Din 'Alī Yazdī*, Sayyid S'aid Mir Muhammad Šadiq ed., Tehran, Markaz-i Asnād Majlis, 2008/9)

47) 고마즈 히사오 외 씀, 이평래 역, 『중앙유라시아의 역사』(고양, 소나무, 2005), 쪽. 255-6

특성을 살렸지만, 부가적 문헌 부재와 당시 건물의 변형 때문에 첨두아치의 형성 배경과 그의 저술이 실제 건물에 미친 영향까지는 밝히지 못했다. 이를 보완하기 위해 앞으로 현지에 전하는 문헌과 다른 무슬림학자의 저술을 검토하고, 이슬람 세계의 다른 지역이나 유럽 건축과의 다각적 관계도 살펴야 할 것으로 생각한다.

참고문헌

1. 고마즈 히사오 외 씀, 이평래 역, 『중앙유라시아의 역사』, 고양, 소나무, 2005
2. 디미트리 구타스 지음, 정영목 옮김, 『그리스 사상과 아랍 문명』, 파주, 글항아리, 2013
3. 박인석 지음, 『건축 생산 역사1』, 서울, 마티, 2022
4. 이주연, 「15세기 티무르조의 수학자 알 카시와 이슬람 수학의 전통」, 『2022년 한국건축역사학회 추계학술발표대회 논문집』, 2022. 11
5. ———, 「티무르조의 화폐 제도 재고(再考)」, 『아시아리뷰』, 제11권 제1호, 통권 21호, 2021
6. Abu Abdallah Mohammed ben Musa of Khowarezm, *The Alegebra of Mohammed ben Musa*, Frederic Rosen ed. & Eng. tr., London, The Oriental Translation Fund, 1831
7. A. Godard, *The Art of Iran*, M. Heron Eng. tr., New York and Washington, Feredrick A. Praeger, 1965
8. Al-Kāshī, *Al-Kāshī's Miṭāḥ al-Ḥisab, Volume I: Arithmetic*, N. Aydin, & L. Hammoudi Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2019
9. ———, *Al-Kāshī's Miṭāḥ al-Ḥisab, Volume II: Geometry*, N. Aydin, L. Hammoudi, & Gh. Bakboug Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2021
10. ———, *Al-Kāshī's Miṭāḥ al-Ḥisab, Volume III: Geometry*, N. Aydin, L. Hammoudi, & Gh. Bakboug Eng. tr., Switzerland, Birkhäuser, 2022
11. Alpay Özdural, *Omar Khayyam, Mathematicians, and "Conversazioni" with Artisans*, Journal of the Society of Architectural Historians, Vol. 54, No. 1, Mar. 1995
12. A. N. Ebrahimi, & M. Tooranpoor, *Wākāwī-i Hendese be Kār rafte dar Madrassa-i Ghāiṭhiye-i Khargerd bā Tākīd bar Hendese-i 'Amallī-i Abū al-ʿUfā Būzjānī*, Journal of Architecture and Urban Planning, Vol. 13, Issue 31, Summer 2021
13. A. U. Pope ed., *A Survey of Persian Art*. Vol. 3, London and New York, 1938-9, Tehran, Manafzadeh Group, reissue 1964/5
14. C. E. Bosworth, & et al., *The Encyclopaedia of Islam (New Edition)*, Vol. VII, Leiden and New York, E. J. Brill, 1993
15. E. S. Kennedy, *Al-Kāshī's "Plate of Conjunctions"*, Isis, Vol. 38, No. 1/2, Nov. 1947
16. Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī, *Az Samarqand be Kāshān: Nāmeḥā-i Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī be Pedaresh*, M. Bagheri ed., Tehran, Scientific & Cultural Publications, 1996
17. ———, *Miṭāḥ al-Ḥisāb: Risāleh-i Tāq wa Azaj*, Saīd 'Alīrezā Jeżbī Per. tr. & ed., Tehran, Soroush, 1987/8
18. Igor Demchenko, *Heritage of the Red Orient: Theories and Practices of Architectural Restoration in Soviet Central Asia 1920-1991*, Ph. D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Sep. 2015
19. Jafar Taheri, *Mathematical Knowledge of Architecture in the Works of Kāshānī*, Nexus Network Journal, Vol. 11, No. 1, 2009
20. K. A. C. Creswell, *The Muslim Architecture of Egypt*, Vol. II, New York, Hacker Art Books, 1958/1978
21. L. Golombek, & D. Wilber, *The Timurid Architecture of Iran and Turan*, vol. 1, Princeton and New Jersey, Princeton University Press, 1988
22. Maḥmūd Fākhūrī, *Maūsū'a't wa Hadāt al-Qiās al-'Arabīyat wa al-Īslāmīyat wa Māyua'ādihā Bālimqādir al-Hadīshat*, Beirut, Maktab Lubnān Nāshirūn, 2002
23. Maryam Ashkan, & Yahaya Ahmad, *Discontinuous Double-shell Domes through Islamic eras in the Middle East and Central Asia: History, Morphology, Typologies, Geometry, and Construction*, Nexus Network Journal, Vol. 12, No. 2, 2010
24. M. S. Bulatov, *Геометрическая организация в архитектуре Средней Азии IX-XV веков*, Moscow, Наука. 1988
25. Raymond Tennant, *Islamic Constructions: The Geometry Needed by Craftsmen*, BRIDGEs - Mathematical Connections in Art, Music, and Science, 2003
26. S. Ghannam, & H. Najm, *Structural Performance of Two-Hinged Islamic Arches*, Journal of Engineering and Architecture, Vol. 3, No. 1, June 2015
27. Sharaf al-Dīn 'Alī Yazdī, *Zafarnāma* (Sharaf al-Dīn 'Alī Yazdī, *Zafarnāma-i Sharaf al-Dīn 'Alī Yazdī*, Sayyīd S'aid Mīr Muḥammad Šādīq ed., Tehran, Markaz-i Asnād Majlis, 2008/9)
28. Yvonne Dold-Samplonius, *Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kāshī*, Centaurus, Vol. 35, 1992

접수(2023.06.09.)

수정(2023.08.25.)

게재 확정(2023.09.04.)