

다중 크랙을 갖는 신장 보의 수리 모델링

A Mathematical Model of the Extensible beam with Multiple Cracks



손 수 덕*
Shon, Sudeok



하 준 홍**
Ha, Junhong

1. 서론

다양한 공학 분야에서 오일러-베르누이 보(Eular-Bernoulli beam, EB beam) 이론은 비교적 단순하지만, 티모셴코 보(Timoshenko beam) 이론과 더불어 보의 해석 모델로 매우 유용하게 적용된다. 이러한 EB beam을 바탕으로 여러 연구자는 다중 크랙 보(multi-cracked beam)의 닫힌 해(closed-form solution)에 관해서 관심을 가지기 시작하였고, 주로 가상의 스프링 모델(spring model)을 도입하여 크랙 부분의 모델을 표현하려 하였다. 이 경우, 스프링은 가상의 등가 강성도(stiffness)나 등가 유연도(flexibility)를 이용해 표현하여 지배방정식을 유도하였다. 이들의 크랙에서의 조건은 연속성을 가진 처짐과 불연속인 처짐각이

되며, 크랙의 위치에서 부여되는 경계조건을 구간별 중첩한 패치 조건(patch condition)을 이용해 고유함수를 유도한다.

그러나 이러한 연구에서 부재의 축 방향에 대한 영향의 고려는 일반적인 휨(bending)에 대한 퍼텐셜 에너지(potential energy)와 더불어 처짐으로 인한 축 방향 변형에너지가 함께 고려되어야 한다. 이것은 처짐(deflection)의 영향으로 축력이 발생하며, 따라서 큰 처짐이 발생하는 보의 고유진동수(natural frequency)는 이 영향을 받아서 일반적인 EB beam과는 달라진다. 즉, 크랙 보(cracked beam) 모델에서 축방향력이 고려된 보 모델은 축 방향 변형에너지와 함께 크랙에 의한 영향을 동시에 고려하여야 한다.

축 방향에 대한 힘을 고려한 보의 첫 이론은 Woinowsky-Krieger (1950)¹⁾의 문헌에서 도입되었으며, 초기 응력(Initial stress)과 처짐에 의한 축 방향 변형이 고려되었다. 이러한 보는 Bell의 문헌²⁾에서 신장 보(extensible beam)로 표현되었고, 비선형 항이 포함된 방정식으로 제안되고 다루어졌다. 이후 여러

* 한국기술교육대학교 건축공학과
Department of Architectural Engineering, Korea University of Technology and Education

** 한국기술교육대학교 교양학부
School of Liberal Arts, Korea University of Technology and Education

연구자의 연구로 다양한 모델이 선보였으며, 일반화된 형태의 적분형 계수를 갖는 미분 방정식의 표현과 더 확대된 수학적 배경을 마련하였다.³⁾

크랙 보의 경우는 크랙에 대한 가상의 회전 스프링 (rotational spring)을 이용하여 등가의 강성도 또는 유연도를 정의하여 수리모형에 적용하는 경우가 많았고, 다른 방법에 비해서 쉽게 모형화할 수 있었다. 그러나 수학적 이론과 지배방정식 및 닫힌-해(closed-form solution)에 관한 연구는 쉽지 않았으며, 최근 많은 연구자의 노력으로 공학적인 문제의 수리모형의 정당성과 이론이 제시되기 시작하였다.^{4,5)} 이후 변분 원리를 이용한 크랙의 에너지 모델이 연구되었고, 유도된 비선형 시스템의 정해에 관한 동적 거동이 연구되었다.⁶⁻⁸⁾ 본 기사에서는 이러한 다중 크랙 신장 보의 크랙에 대한 에너지 모델과 지배방정식 및 고유함수(eigen-function)에 관한 내용을 설명하고자 한다.

2. 다중 크랙 신장 보 모델

EB beam의 크랙에 대한 수학적 모형의 이론을 문헌 [4]~[7]에 잘 소개되어 있다. 우선, 크랙의 에너지 함수에 대해서 문헌 [4]에서 표현된 모델로 간략히 설명하면 다음과 같다.

양단에 힌지(hinge)를 가진 탄성(elastic) 보의 구간 $[-1, 1]$ 에 열린 크랙(open crack) $x = x_0$ 가 있는 시스템의 휨 강성을 $b_h(x)$ 라 할 때, 휨 변형에 대한 퍼텐셜 에너지 U_{b_h} 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} U_{b_h}(v) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 b_h(x) v''^2 dx & (1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 v''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v''^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \{v'(0^+) - v'(0^-)\}^2 \end{aligned}$$

여기서, v 는 수직 변위이며 연속이고, v' 은 크랙 위치에서 불연속이며, 좌우 극한이 다르다. 이와 유사하게 축강성이 $a_h(x)$ 로 정의된 모델에서 변형에 대한 퍼텐셜 에너지 U_{a_h} 는 다음과 같이 정의된다.

$$U_{a_h}(\epsilon_{0_h}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_h(x) \left(u_h' + \frac{1}{2} v_h'^2 \right)^2 dx \quad (2)$$

여기서 u_h 는 축방향 변위함수이며, u 가 연속이라는 가정에서 U_{a_h} 는 크랙에 대한 에너지 함수로는 나타나지 않고 축력에 의한 영향만 고려된다. 이러한 까닭에 에너지 함수의 모형은 다음과 같은 형태를 보이게 된다.

$$\frac{1}{2} k_b \{v'(0^+) - v'(0^-)\}^2 \quad (3)$$

여기서, k_b 는 탄성 회전 스프링의 등가한 강성에 해당되고, 유연도 모델의 경우는 이 값의 역수인 유연도 파라미터가 사용되어 경계조건으로 나타난다.

이와 같은 크랙의 에너지 모델을 일반적인 파라미터를 가진 신장 보 모델의 변형에너지 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L EA \epsilon_0^2 dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \int_0^{x_0} EI v_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^L EI v_{,xx}^2 dx & (5) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_b \mathcal{J}[v_{,x}](x_0)^2 \end{aligned}$$

여기서, $\mathcal{J}[f](x)$ 는 점프함수(jump function)이다. 식(4)-(5)를 해밀턴 원리(Hamilton's principle)를 이용하여 축력이 고려된 상하 진동(transverse vibration)의 운동 방정식(motion equation)을 유도하면 다음과 같은 유효한 식을 얻을 수 있다.

$$\rho A \ddot{v} + (EI v_{,xx})_{,xx} - (N v_{,x})_{,x} + c \dot{v} = p \quad (6)$$

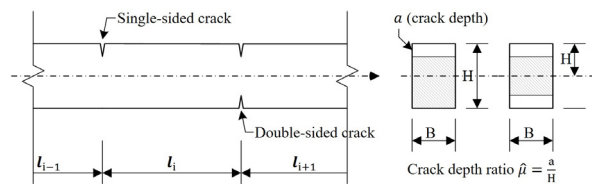
여기서, $x \in (0, x_0) \cup (x_0, L)$ 이고, N 은 처임에 의한 축력이다. 그러나 위의 방정식은 크랙의 위치 x_0 에 대한 에너지 함수로부터 경계조건이 부여되며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}[v](x_0) &= \mathcal{J}[v,_{xx}](x_0) = 0 \\
 k_b \mathcal{J}[v,_{,x}](x_0) &= EI v,_{,xx}(x_0^-) \\
 N \mathcal{J}[v,_{,x}](x_0) &= EI \mathcal{J}[v,_{,xxx}](x_0^-) \\
 v(0) &= v(L) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 스프링 강성 k_b 는 문헌 [9]에 잘 요약되어 있으며, 다음과 같이 표현된다.

$$k_b = \frac{EI}{h} \frac{1}{C(\hat{\mu})} \tag{8}$$

위의 식은 다음 <Fig. 1>의 파라미터로 표현할 수 있으며, $C(\hat{\mu})$ 의 함수는 연구자에 따라 조금씩 차이는 있다.



<Fig. 1> Crack and crack Parameters⁶⁾

식(7)의 조건에서 N 의 값은 크랙에 따라 비율적으로 표현할 수 있고, 이것은 축력이 크랙의 크기에 따라 비례하는 값으로 표현된다.

3. 고유치와 고유함수

식(6)과 식(7) 시스템의 선형 부분에 대한 다음의 고유치 문제를 생각해 보자.

$$w_i'''' = \lambda^4 w_i, \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \tag{1}$$

여기서, $i = 1, 2, \dots, k+1$. 모델의 경계조건은 한지인 경우는

$$\begin{aligned}
 w_1(0) &= w_1''(0) = 0 \\
 w_{k+1}(1) &= w_{k+1}''(1) = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

적합 조건에 의해서 크랙 포인트에서의 일반적인 패치 조건은 다음과 같다.¹⁰⁾

$$\begin{aligned}
 w_i(x_i) &= w_{i+1}(x_i) \\
 w_i''(x_i) &= w_{i+1}''(x_i) \\
 w_i'''(x_i) &= w_{i+1}'''(x_i) \\
 \theta_i w_{i+1}''(x_i) &= w_{i+1}'(x_i) - w_i'(x_i)
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, θ_i 는 i -번째 크랙의 유연도이며, 각 구간에 대한 일반 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 w_i^\lambda(x) &= A_i \sin \lambda(x - x_{i-1}) \\
 &+ B_i \cos \lambda(x - x_{i-1}) \\
 &+ C_i \sinh \lambda(x - x_{i-1}) \\
 &+ D_i \cosh \lambda(x - x_{i-1})
 \end{aligned} \tag{8}$$

$l_i = x_{i+1} - x_i$ 및 $\vec{A}_i = [A_i, B_i, C_i, D_i]^T$ 라 두고 패치 조건을 이용해 이에 등가한 표현의 행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\vec{A}_{i+1} = \Lambda_i^{-1} P_i \vec{A}_i \tag{9}$$

식(9)의 재귀적 시퀀스(recursive sequence)에 따라서 변환행렬로 표현하면,

$$\vec{A}_{i+1} = T \vec{A}_1, \quad T = T_i T_{i-1} \dots T_1 \tag{10}$$

식(10)은 전체 구간에 대해서 다음과 같은 자명하지 않은 해를 갖을 조건을 얻게 된다.

$$(BT) \vec{A}_1 = R[A_1, 0, C_1, 0]^T = \vec{0} \tag{11}$$

위의 조건을 통해 각 구간의 계수들을 역으로 구할 수 있으며, 이것을 만족하는 각각의 고유치 λ_j , $j = 1, 2, \dots$ 에 대응하는 고유함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \phi_j &= \phi(\lambda_j, x) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \{H(\beta_{i-1}) - H(\beta_i)\} w_i^{\lambda_j}(x)
 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서, $\beta_i = x - x_i$, $H()$ 는 헤비사이드 함수(Heaviside function)이다.

이상과 같이 시스템(6)과 경계조건(7)을 이용한 시스템의 고유 기저를 식(12)와 같이 표현하여 크랙을 가진 상하 진동 신장 보의 해석적 정해를 얻어 구조물을 해석한다.

4. 결론

크랙을 갖는 보의 에너지 함수와 이것을 적용한 시스템의 지배방정식에 대해서 다루었다. 에너지 함수의 수학적 모델의 의미와 해밀톤 원리를 이용한 방정식의 유도 및 크랙이 고려된 시스템의 고유함수를 유도하고 이것을 이용해 주파수 영역을 고려하는 상미분 지배방정식을 유도할 수 있다. 크랙의 함수에 따라 다소간의 차이를 보일 수 있지만 구하여진 고유치를 바탕으로 시스템의 안정성을 연구할 수 있는 유용한 방법이며, 해석적 정해를 통해서 시스템을 관찰할 수 있으므로 보다 다양한 시스템에 적용하여 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

감사의 글

이 원고는 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2020R1I1A1A01065032)

References

1. S. Woinowsky-Krieger, "The effect of an axial force on the vibration of hinged bars, *Journal of applied Mechanics*", Vol.17, pp.35-36, 1950, doi: 10.1115/1.4010053
2. J.M. Ball., "Initial-boundary value problems for an extensible beam", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.42, No.1, pp.61-90, 1973.
3. Emmrich, Etienne, and Mechthild Thalhammer, "A class of integro-differential equations incorporating nonlinear and nonlocal damping with applications in nonlinear

- elastodynamics: Existence via time discretization." *Nonlinearity* 24.9, 2011, doi: 10.1088/0951-7715/24/9/008
4. Caddemi, S., & Morassi, A., "Multi-cracked Euler-Bernoulli beams: Mathematical modeling and exact solutions", *International journal of solids and structures*, Vol.50, No.6, pp. 944-956, 2013, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.11.018
5. W.M. Ostachowicz & M. Krawczuk., "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.150(2), pp.191-201
6. Ostachowicz, W. M., & Krawczuk, M., "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam", *Journal of sound and vibration*, 150(2), 191-201, 1991, doi: 10.1016/0022-460X(91)90615-Q
7. Gutman, S., Ha, J., & Shon, S., "Variational setting for cracked beams and shallow arches", *Archive of Applied Mechanics*, Vol.92, No.7, pp.2225-2236, 2022, doi: 10.1007/s00419-022-02174-6
8. S. Gutman, J. Ha, S. Shon, "Dynamic behavior of cracked beams and shallow arches", *Journal of the Korean Mathematical Society*, Vol.59, No.5, pp.869-890, 2022, doi: 10.4134/JKMS.j210650
9. Caddemi, S., & Calio, I., "Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.327, No.3-5, pp.473-489, doi: 10.1016/j.jsv.2009.07.008
10. Lin, H. P., Chang, S. C., & Wu, J. D., "Beam vibrations with an arbitrary number of cracks. *Journal of Sound Vibration*", Vol.258, No.5, pp.987-999, 2002, doi: 10.1006/jsvi.2002.5184