



## Research Article

# Analyzing an elementary school teacher's difficulties and mathematical modeling knowledge improvement in the process of modifying a mathematics textbook task to a mathematical modeling task: Focused on an experienced teacher

Jung, Hye-Yun

Assistant Research Fellow, Korea Institute for Curriculum and Evaluation

\*Corresponding Author: Hye-Yun Jung (hy0501@kice.re.kr)

## ABSTRACT

This study analyzed the difficulties and mathematical modeling knowledge improvement that an elementary school teacher experienced in modifying a mathematics textbook task to a mathematical modeling task. To this end, an elementary school teacher with 10 years of experience participated in teacher-researcher community's repeated discussions and modified the average task in the data and pattern domain of the 5th grade. The results are as followings. First, in the process of task modification, the teacher had difficulties in reflecting reality, setting the appropriate cognitive level of mathematical modeling tasks, and presenting detailed tasks according to the mathematical modeling process. Second, through repeated task modifications, the teacher was able to develop realistic tasks considering the mathematical content knowledge and students' cognitive level, set the cognitive level of the task by adjusting the complexity and openness of the task, and present detailed tasks through thought experiments on students' task-solving process, which shows that teachers' mathematical modeling knowledge, including the concept of mathematical modeling and the characteristics of the mathematical modeling task, has improved. The findings of this study suggest that, in terms of the mathematical modeling teacher education, it is necessary to provide teachers with opportunities to improve their mathematical modeling task development competency through textbook task modification rather than direct provision of mathematical modeling tasks, experience mathematical modeling theory and practice together, and participate in teacher-researcher communities.

**Key words:** elementary school teacher, mathematical modeling, textbook task, task modification, teacher knowledge, mathematical modeling task development competency

## 수학 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 과정에서 겪는 초등학교 교사의 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화: 한 경력 교사의 사례를 중심으로

정혜윤

한국교육과정평가원 부연구위원

\*교신저자: 정혜윤 (hy0501@kice.re.kr)

Received August 09, 2023

Revised August 16, 2023

Accepted August 24, 2023

2000 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97M99

Copyright © 2023 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## 초록

본 연구의 목적은 초등학교 교사가 수학 교과서 과제를 수학적 모델링 과제로 변형하는 과정에서 경험하는 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식 변화의 사례를 분석하는 것이다. 이를 위해 10년 경력의 초등교사가 교사연구공동체의 반복적인 논의에 참여하면서 초등학교 5학년 수학의 자료와 규칙성 영역 중 평균 지도를 위한 과제를 수학적 모델링 과제로 변형하였다. 연구결과, 첫째, 교사는 과제 변형 과정에서 현실성의 반영, 수학적 모델링 과제의 적절한 인지적 수준 설정, 수학적 모델링 과정에 따른 세부 과제의 제시에 어려움을 겪었다. 둘째, 반복된 과제 변형을 통해, 교사는 학습 내용과 학생의 인지적 수준을 고려한 현실성 있는 과제의 개발, 과제의 복잡성 및 개방성 조정을 통한 과제의 인지적 수준 조정, 학생의 과제 해결 과정에 대한 사고실험을 통한 수학적 모델링 과정에 따른 세부 과제의 제시를 수행할 수 있었으며, 이는 수학적 모델링의 개념과 과제의 특징 등 수학적 모델링 과제 개발을 위해 요구되는 교사 지식이 향상되었음을 보여준다. 본 연구결과는 향후 수학적 모델링 교사교육과 관련하여, 교과서 과제 변형을 통한 수학적 모델링 과제 개발 역량 향상의 기회를 제공하는 교사교육, 수학적 모델링의 이론 및 실제를 결합한 교사교육, 교사연구공동체에의 참여를 통한 교사교육이 필요함을 보여준다.

**주요어:** 초등교사, 수학적 모델링, 교과서 과제, 과제 변형, 교사 지식, 수학적 모델링 과제 개발 역량

## 서론

학교수학에서 4차 산업혁명으로 대표되는 미래 사회를 준비하기 위한 방안으로 수학적 모델링에 대한 관심이 증가하고 있음은 잘 알려진 사실이다(Gravemeijer et al., 2017; Na et al., 2018). 실제로, 미국, 싱가포르, 영국 등 세계 여러 나라에서 수학적 모델링 역량을 강화할 것을 강조하고 있으며, 이는 우리나라 역시 마찬가지이다(Chan et al., 2015; Ministry of Education, 2022; Palsdottir & Sriraman, 2017). 나아가, 선행연구(Chamberlin et al., 2022; English & Watson, 2018; Kim, 2010)에서도 수학적 모델링의 효과를 제시함으로써 학생의 수학적 모델링 역량 함양의 중요성을 언급하고 있는데, 특히, 초등학생 때부터 수학적 모델링을 경험하고 수학적 모델링 역량을 기르는 것이 중요하다는 점에 주목(Asempapa, 2015; Chan, 2010; Mousoulides et al., 2008)하여, 초등학생 때부터 수학적 모델링 활동을 시작해야 할 뿐 아니라 초등학생이 수학적 모델링 활동을 할 수 있음을 강조한 바 있다.

하지만, 초등학생의 수학적 모델링 활동 경험에 대한 이와 같은 중요성에도 불구하고, 실제로 초등학생을 대상으로 한 모델링 연구는 찾아보기 힘들다(Chang et al., 2019). 이는 초등학교 수학 수업 시간에 수학적 모델링 활동을 실행하는 데 어려움이 존재함을 보여주는 것으로, 몇몇 선행연구(Oh & Park, 2019; Yun & Chang, 2023)에서는 그에 대한 다양한 원인 중 하나로 초등학생을 위한 수학적 모델링 과제의 부족을 언급한다. 초등학교에서 적용 가능한 수학적 모델링 과제의 부족이 초등학교 수학 수업에서의 수학적 모델링 활동을 저해하며(Yun & Chang, 2023), 교사가 수업에 적용하기 위한 과제를 접할 수 있는 주된 교재인 초등학교 수학 교과서에 수학적 모델링 과제가 적절하게 제시되지 못하고 있다는 것이다(Oh & Park, 2019). 특히, Jung 외 (2020)에 따르면, 우리나라 초등학교 6학년 교과서에 제시된 약 42%의 실생활 맥락 과제 중 대부분이 수학적 문제해결과 해석하기를 요구할 뿐, 과제 해결을 위해 필요한 요인을 맥락에서 직접 추출하거나 수학적 모델을 탐색하는 활동과 같이 다른 과제와 구별되는 수학적 모델링 과제의 특징이 반영된 과제를 찾기 힘들다.

이처럼 수학적 모델링 과제의 부족으로 인해 초래되는 문제점을 개선하고 초등학생의 수학적 모델링 활동 기회를 높이기 위해, 선행연구(Blum, 2015; Choi, 2017; Kim, 2020)에서는 수학적 모델링 과제를 직접 제공하거나 교사의 수학적 모델링 과제 개발 역량을 강화하는 등의 여러 가지 방안을 제시하고 있다. 이 중 본 연구에서는 교사의 수학적 모델링 과제 개발 역량, 특히 교과서 과제를 수학적 모델링 과제로 변형할 수 있는 역량의 강화에 주목하고자 하며, 이를 위해 수학적 모델링 과제 개발에 필요한 교사 지식을 강화할 것을 제안하고자 한다. Kim과 Lee (2016)에 따르면, 수학 교사들이 수업에 필요한 과제를 개발하는 주요 방식 중 하나가 교과서를 비롯하여 기존의 과제를 참조하고 변형하는 것으로 알려져 있다. 실제로, 이와 관련하여 Park과 Han (2018)은 수학적 모델링을 반영하여 교과서 과제를 재구성하고 실제 수업에 적용한 바 있다. 교사의 과제 변형이 교사의 교수학적 지식의 향상에 기여함과 동시에 교사가 의도하는 학습기회를 제공하여 학생의 학습을 지원할 수 있다는 점은 잘 알려진 바(Lee & Kim, 2013; Stein et al., 2009;

Zaslavsky, 1995), 초등교사가 교과서 과제의 변형을 통해 수학적 모델링 과제를 개발하는 경험은 수학적 모델링 과제에 대한 교사 지식과 과제 개발 역량을 높이고, 궁극적으로 초등학교 수학 수업에서 수학적 모델링 활동의 경험을 확장시켜 줄 수 있을 것이다.

지금까지의 논의를 종합하여, 본 연구에서는 초등교사의 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 사례를 분석하고자 한다. 특히, 수학적 모델링에 대한 지식과 경험이 부족한 한 초등 경력교사가 교과서 과제를 수학적 모델링 과제로 변형하는 과정에서 경험하는 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위해 필요한 지식이 어떻게 변화하는지 살펴보고, 이를 통해 향후 교사교육에 필요함 시사점을 얻고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

수학 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 과정에서 초등교사는 어떤 어려움을 겪으며, 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사 지식은 어떻게 변화하는가?

## 이론적 배경

### 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사 지식

교사에게는 교과 지도를 위한 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge: PCK)이 요구된다(Ball et al., 2008). PCK는 교사가 지도하고자 하는 내용 영역과 역량에 따라 구별되는데, 일반 과제와 구별되는 수학적 모델링 과제의 현실성, 개방성과 같은 특징은 교사로 하여금 수학적 모델링 지도를 위한 별도의 지식을 요구한다(Chan et al., 2015). 또한, 과제 개발을 위해서는 개발하고자 하는 과제에 대한 이해가 우선되어야 하는 바, 수학적 모델링 과제 개발을 위해서는 수학적 모델링 과제의 특징에 대한 이해가 필요하다(Borromeo Ferri, 2018). 이에 따라, 이 절에서는 수학적 모델링 과제 개발을 위해 필요한 교사의 지식을 수학적 모델링 개념과 수학적 모델링 과제의 특징 등의 측면에서 살펴보고자 한다.

수학적 모델링에 대한 정의는 연구자마다 조금씩 차이가 있지만, 실세계 문제 상황에서 시작하여 이를 해결하기 위한 수학적 모델을 도출한 뒤, 도출한 모델을 이용하여 문제를 해결하는 일련의 과정이라는 데에 의견을 같이 한다(Galbraith & Stillman, 2006; Kaiser & Stender, 2013). 이 과정은 실세계와 수학의 순환 과정으로, 실세계 문제 상황 이해, 실세계 모델 도출, 수학적 모델 도출, 수학적 문제 해결, 해석하기와 같이 여러 단계로 구성되어 있으며, 각 단계는 순환, 반복된다(Figure 1 참고).

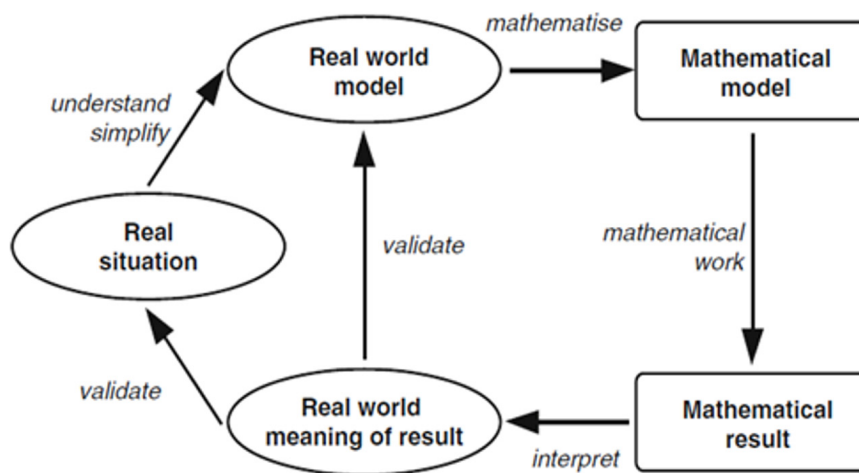


Figure 1. Mathematical modeling cycle (Kaiser & Stender, 2013)

수학적 모델링 활동이 여러 단계에 기반한 순환성과 반복성을 특징으로 한다면, 수학적 모델링 활동의 바탕이 되는 수학적 모델링 과제는 현실성(reality), 복잡성(complexity), 개방성(openness)을 대표적인 특징으로 갖는다(Mousoulides et al., 2008). 현실성이란 과제에 반영된 맥락이 학생들에게 의미 있는 실생활 속 상황, 즉, 학습자의 수준과 나이에 적합한 실세계 맥락이어야 함을 의미하는 것으로, 수학적 모델링 과제의 대표적인 특징이라고 할 수 있다(Årleback et al., 2013; Galbraith, 2007). 복잡성은 과제의 맥락이 정제되지 않은 혼잡한 상황이며 이로 인해 과제 해결을 위해 앞서 살펴본 수학적 모델링 과정과 같은 복잡한 사고 과정이 이루어져야 함을, 개방성은 과제 해결의 과정과 그 결과가 다양하게 존재해야 함을 의미한다(Maaß, 2010). 수학적 모델링 과제의 이와 같은 특징은 서로 연결되는데, 현실성은 실세계의 복잡성을 반영함으로써 학생들이 과제의 맥락을 이해하고 해결하는데 복잡한 과정을 거치게 하며, 이러한 복잡성은 학생들로 하여금 과제의 다양한 해결 과정과 답을 유도한다. 나아가, 학생들은 이와 같은 특징의 수학적 모델링 과제를 해결하기 위해 Figure 1의 각 단계를 순환, 반복하게 된다(Caron, 2019).

수학적 모델링 과제의 또다른 특징으로 높은 인지적 수준을 들 수 있다(Asempapa, 2015). 수학적 모델링 과제의 복잡성 등으로 인해 과제 해결을 위해 높은 인지적 수준이 필요한데, Blum (2015), Galbraith와 Stillman (2006)에 따르면 수학적 모델링 과제의 높은 인지적 수준은 학생이 수학적 모델링 활동을 어려워하는 원인이 되기도 한다. 이와 같은 상황은 교사로 하여금 학생이 수학적 모델링 활동에서 갖는 인지적 어려움과 오류 등 학생의 인지적 수준에 대한 예측과 함께 수학적 모델링 과제의 인지적 수준을 분석할 수 있는 능력을 갖출 것을 요구한다(Kwon et al., 2022; Stender & Kaiser, 2015). Borromeo Ferri (2018) 역시 교사는 수학적 모델링 교수를 위해 학생이 갖는 어려움, 오류와 같은 학생의 인지적 수준을 진단할 수 있어야 함과 동시에 수학적 모델링 과제의 인지적 수준을 분석할 수 있어야 함을 주장하였다. 나아가, 교사는 사고실험을 통해 학생의 사고 과정을 예상할 수 있어야 하고(Simon & Tzur, 2004), 과제에 학생이 어떻게 반응할지에 대한 지식을 가져야 한다(Sullivan et al., 2013). 특히, 학생이 과제를 해결하는 과정에서 경험할 수 있는 여러 가지 어려움을 미리 인지하고 과제 개발에 적용할 수 있어야 한다(Hill et al., 2008).

마지막으로, 수학 교사의 과제 개발은 과제에 반영된 수학적 내용 지식에 대한 이해에 바탕한다(Lee et al., 2019). 이는 수학적 모델링 과제 개발에서도 마찬가지로, Chang 외 (2019)는 수학적 모델링 과제가 학생에게 의미가 있으면서 수학적으로도 적절하고 가치가 있어야 함을, Lee (2010)는 수학적 모델링 과제가 수학의 구조와 본질에 주목해야 함을 강조하였다. Palsdottir와 Sriraman (2017) 역시 수학적 모델링 과제가 실세계 문제 상황에 기반함으로써 과제 해결 과정이 수학 외적인 상황에 치중되는 상황을 염려하면서, 수학적 모델링 활동에서 수학적 내용에 대한 논의가 이루어져야 함을 강조하였다. 이와 같은 선행연구의 논의는 수학적 모델링 과제를 개발하고 해결하는 과정이 수학 내용 영역에 기반해야 함을 주장하는 것으로, 특히 수학적 모델링 과제를 개발하는 교사에게는 과제에 반영되는 수학 내용에 대한 지식을 갖출 것이 요구된다.

위의 내용을 종합하여, 수학적 모델링 과제 개발을 위해 필요한 교사 지식은 수학적 모델링 과정과 수학적 모델링 과제의 특징인 현실성, 개방성, 복잡성에 대한 이해, 수학적 모델링 과제와 학생의 인지적 수준, 수학적 내용 지식으로 제시할 수 있다. 교사의 수학적 모델링 과제 개발 역량 향상을 위해선 이들에 대한 교사 지식이 강화되어야 하며, 이들 지식이 강화되는 과정에서 교사의 수학적 모델링 과제 개발 역량 역시 강화될 수 있을 것이다.

### 과제 변형과 교사교육

수학 과제는 그 구조와 특징에 따라 학생들에게 특정 영역 혹은 특정 역량에 해당하는 학습기회를 제공하기도 하고 제약하기도 한다(Remillard et al., 2014). 이에 따라 특정 지식 혹은 역량을 기르기 위해서는 그에 해당하는 과제가 요구되는데, 과제의 인지적 수준, 과제의 복잡성, 추론 과제의 유형과 같은 다양한 과제 분석틀과 이들 과제 분석틀에 근거한 과제 분석 결과는 과제에 따라 제공하는 학습기회의 수준과 특징이 달라질 수 있음을 보여준다(Kwon & Kim, 2013; Thompson et al., 2012).

과제가 학습기회를 내포하고 있다면, 교사는 학습 목표와 학생 수준에 맞는 과제를 설계, 수정 및 적용하는 주체로서 과제에 내포된 학습기회를 실제로 학생에게 제공하는 역할을 한다(Sullivan & Mornane, 2014; Watson & Sullivan, 2008). 그렇기에 교과서의 수학 과제가 교사 본인이 생각하는 학습 목표와 학생 수준, 그리고 교사가 제공하고자 하는 학습기회에 적절한 과제라면 교사가 해당 과제를 그대로 사용하는 것이 문제가 되지 않지만, 그렇지 않을 경우에는 해당 과제를 그대로 사용하는 것이 학습 목표에서 의도하는



특정 영역 혹은 특정 역량에 대한 학습기회를 제한하는 문제로 이어질 수 있다(Lee & Kim, 2013). 이에 따라 교사는 수업 목표 등을 충족시키기에 적합하지 않은 과제를 알맞게 변형하여 학생에게 제공할 수 있어야 하는데, 이와 관련하여 Stein 외 (2009)는 교사가 교과서 등의 교육과정 자료에 제시된 과제를 변형하여 제시함으로써 학생의 학습을 지원할 수 있다고 하였다. 예컨대, 과제를 구체화, 간략화, 단계화 함으로써 과제의 현실성, 개방성, 난도를 각각 혹은 동시에 높이거나 줄이는 방식으로 과제를 변형하는 것이 가능하다(Stein et al., 2009; Stender & Kaiser, 2015).

과제가 교사에 의해 재구성될 때 다양한 변수가 영향을 미치게 되는데, 여기에는 교사의 수업 목표 및 수업 주제에 대한 지식 등이 있다(Kang & Choi, 2021; Lee & Kim, 2013). 또한 가르칠 내용에 대한 교사의 경험과 가치관, 학생의 이전 학습 내용에 관한 교사의 지식 수준 역시 중요한 변수로 작용하게 된다(Lee et al., 2019; Stein & Kaufman, 2010). 말하자면, 변형된 과제는 과제를 변형한 교사의 지식을 보여주며, 그렇기에 수학 과제를 변형하는 활동은 수학 교사의 지식 향상에 기여할 수 있다(Zaslavsky, 1995). 실제로, Lee 외 (2019)는 수학 과제의 변형 과정에서 교사의 교육과정 지식과 수학 내용 지식 등이 향상되는 과정을 제시한 바 있다.

한편, 최근 수학교육에서는 교사 개인이 아닌 공동체를 통한 과제의 설계 및 반성 과정이 연구되고 있다(Slavit & Nelson, 2010; Sullivan et al., 2013). 교사와 연구자가 함께 하는 교사연구공동체를 통한 과제의 설계 및 반성은 집단 내 과제에 대한 다양한 의견이 공유되고 비판적 관점이 제기되도록 함으로써, 교사로 하여금 과제에 반영된 학습기회와 제약을 다양한 관점에서 분석하고 더 적절한 형태로 개선할 수 있게 한다(Boston & Smith, 2011; Goodchild et al., 2013). 또한, 학생의 어려움과 오류를 예측하거나 과제 해결 과정을 예측해보는 기회를 통해 학생에 대한 지식을 향상시키는 기회를 갖게 된다(Lee, 2018). 종합하면, 교사연구공동체를 통한 과제 수정은 교사의 과제 개발 전문성 향상에 기여할 수 있으며, 이와 같은 측면에서 과제 개발을 위한 교사교육의 방법으로 자리매김 하였다고 볼 수 있다.

지금까지의 논의를 종합하면, 교사는 과제를 수학적 모델링 과제로 변형함으로써 학생에게 수학적 모델링 학습기회를 제공함과 동시에 스스로의 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식을 향상시킬 수 있으며, 교사연구공동체는 이를 지원할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 이와 같은 논의에 기반하여, 실제로 교사연구공동체에 참여한 교사가 과제를 수학적 모델링 과제로 변형하는 과정에서 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식이 어떻게 변화하는지 살펴보고자 한다.

## 연구방법

사례연구는 특정한 사례에 대한 심층적인 이해를 얻기 위한 연구로, 관찰한 사례에 대한 일반화가 아닌, 연구의 과정과 맥락, 그리고 사례에 담긴 주요 논점에 대한 발견에 초점을 둔다(Creswell, 2014).


본 연구는 관찰한 사례에 대한 일반화를 목표로 하지 않으며, 수학적 모델링 지도 경험과 학습 경험이 부족한 경력 교사가 수학 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 과정에서 경험하는 과제 변형의 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화를 살펴보려는 것으로, 이를 위해 교사의 과제 변형 과정과 그 맥락을 자세히 기술하고 사례 속에 담긴 주요 특징을 분석하는 과정이 필요하다. 이에 따라, 본 연구는 연구참여자의 선정과 자료의 이용 및 분석 방법에 있어서 사례연구가 적절하다고 판단하였다(Yin, 2003).

### 연구 참여자 및 연구 맥락

본 연구의 참여자는 10년 4개월의 경력을 가진 교사(이하 김교사)로, 연구 참여 당시 수학적 모델링 수업을 실생활 맥락의 과제를 이용한 수업, 학생 주도의 매우 이상적인 수업이지만 학생들에게 어려운 수업이라고 인식하고 있었다. 또한, 수학적 모델링 수업을 이상적인 수업이라고 생각하는 만큼 평소 수학적 모델링 수업을 해보고 싶다는 생각을 갖고 있었으나, 적절한 과제를 찾거나 준비하는 과정이 어렵다고 생각되어 실제로 수학적 모델링 과제를 개발하거나 수업을 진행한 경험은 없었다. 김교사는 본 연구에 자발적인 참여 의사를 보였으며, 본 연구에의 참여를 통해 수학적 모델링 과제 개발을 경험하고, 수학적 모델링 과제 개발 역량을 높여려는 의지를 가지고 있었다.

변형 대상이 되는 과제와 해당 과제가 속한 영역은 김교사가 직접 선정하였다. 김교사는 본인이 수학적 모델링 과제를 개발한 경험이 없다는 점을 우려하면서, 수학의 영역 중 실생활 맥락이 가장 높다고 생각되는 영역을 선정하고자 하였으며, 지도 경험이 가장 많은 5학년년을 대상으로 하고자 하였다. 그 결과, 초등학교 5학년 수학의 자료와 규칙성 영역 중 평균 지도에 관한 내용을 선정하였으며, 본인이 사용하는 교과서에 제시된 과제 중 '평균의 필요성'과 '평균 구하기' 과제를 결합하여 수학적 모델링 과제로의 변형을 시도하였다(Figure 2 참고).

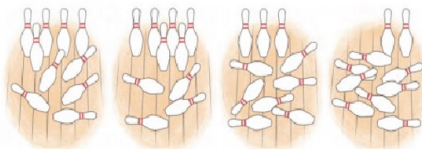
**1** 승기와 연수가 클럽 10쌍에 들어 있는 클럽의 수를 세어 보았습니다. 클럽 한 쌍당 들어 있는 클럽의 수를 정해 봅시다.




- 대표적으로 한 쌍에 클럽이 몇 개 들어 있다고 말할 수 있나요?
- 한 쌍당 들어 있는 클럽의 수를 어떻게 정하면 좋을까요?
- 왜 그렇게 생각하는지 친구들과 이야기해 보세요.

**평균을 구해 볼까요(1)**

**1** 지혜네 모둠이 볼링 핀 쓰러뜨리기를 했습니다. 지혜네 모둠이 쓰러뜨린 볼링 핀 수의 평균을 구해 봅시다.



- 지혜네 모둠 친구들이 쓰러뜨린 볼링 핀 수를 모형으로 각각 나타내어 보세요.
- 모형을 옮겨 모형의 수를 고르게 나타내어 보세요.
- 모형을 어떻게 옮겼는지 이야기해 보세요.
- 지혜네 모둠이 쓰러뜨린 볼링 핀 수의 평균은 얼마인가요?




**2** 평균을 구해 볼까요(2)

**1** 준기의 과녁 맞히기 점수를 나타낸 표입니다. 준기 점수의 평균을 구해 봅시다.

준기의 과녁 맞히기 점수

회	1회	2회	3회	4회	5회
점수(점)	2	0	5	3	5



**방법 1**

- 준기 점수의 평균을 예상해 보세요.
- 예상한 평균을 기준으로 ○를 옮겨 준기 점수의 평균을 구해 보세요.

1회	2회	3회	4회	5회	

- 준기 점수의 평균은 얼마인가요?

**방법 2**

- 준기 점수의 합계는 얼마인가요?
- 준기가 과녁 맞히기를 몇 번 했나요?
- 준기 점수의 평균을 구해 보세요.
- 준기 점수의 평균을 구하는 여러 가지 방법을 비교해 보세요.

**Figure 2.** Tasks that will be modified: 'What does average mean?' and 'Let's find the average.' (Ministry of Education, 2021)

교사와 연구자가 함께 참여하는 교사연구공동체 구성을 통한 과제 변형이 교사의 전문성 신장에 기여한다는 여러 선행연구 (Boston & Smith, 2011; Goodchild et al., 2013; Lee, 2018)의 제언에 따라, 김교사의 과제 변형은 수학적 모델링 연구를 다수 수행한 경험이 있는 수학교육연구자 3명과 논의 거쳐 진행되었다. 김교사가 과제 변형을 한 뒤 수학교육연구자 3명(Table 1 참고)이 이를 검토하였으며, 김교사는 검토 결과를 토대로 과제를 수정하였다. 김교사와 3명의 수학교육연구자(이하 교사연구공동체)가 함께 한 논의 과정에서 김교사는 과제 변형의 초점과 어려움을 직접 언급하였고, 연구자는 김교사가 어려움을 극복하고 과제를 변형할 수 있는 방안과 수학적 모델링 과제로서 개선이 필요한 부분을 언급하였다. 이에 따라 교사연구공동체 논의는 김교사가 과제를 변형하는 과정에서 경험하는 어려움과 지식의 변화를 내포하게 된다. 교사연구공동체의 논의는 4회에 걸쳐 진행되었으며, 교사는 총 5 회에 걸쳐 과제를 변형하였다(Figure 3 참고).

**Table 1.** Researchers participated in the teacher-researcher community

Researcher	Career	Mathematical modeling research activity
R1	11 years of teaching experience, doctoral degree	10 papers, multiple conference presentations, mathematical modeling teaching program development
R2	8 years of teaching experience, master's completion	3 papers, multiple conference presentations, mathematical modeling teaching program development
R3	10 years of teaching experience, Ph.D. completion	4 papers, multiple conference presentations

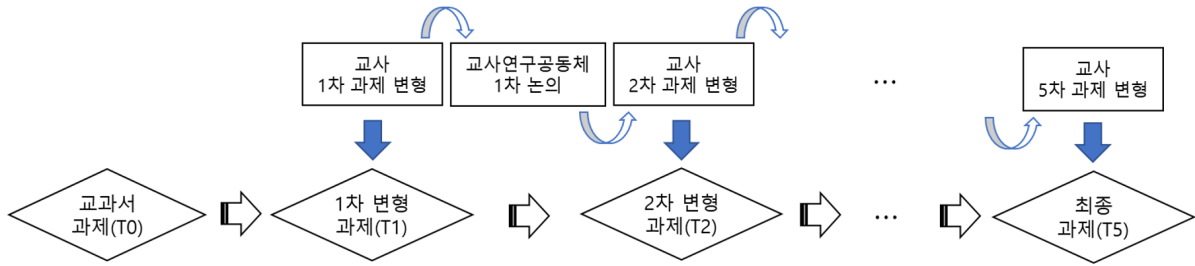


Figure 3. The process of a teacher's task modification and a research community's discussion

### 자료 수집

본 연구는 사례연구를 수행하고자 하였으며, 이에 대한 타당성과 신뢰성을 높이기 위해 본 연구의 주제와 관련한 다양한 출처의 자료를 풍부하게 수집하였다(Creswell, 2014; Tracy, 2010). 첫째, 김교사의 사전, 사후 인터뷰 자료 및 연구 수행 과정에서 이루어진 교사연구공동체의 모든 논의 과정을 녹화, 녹음한 뒤 전사하였다. 이때, 김교사는 T, 연구자는 각각 R1, R2, R3로 표기하였다. 교사연구공동체 논의는 줌(zoom)을 이용하여 온라인으로 진행되었으며, 녹화된 자료에 전체 회의 시간과 발화자, 교사연구공동체의 논의 과정에서 공유된 모든 자료가 정확하게 기록되었다. 둘째, 초기 교과서 과제 및 최종 과제를 포함하여 김교사가 변형한 모든 과제를 수합하였다. 교과서 과제와 김교사의 변형 과제는 모두 컴퓨터 파일로 수합되어 교사연구공동체 내에서 공유되었다. 셋째, 김교사와 연구자가 과제를 개발하거나 검토, 논의하는 과정에서 각각 메모로 남긴 내용을 수합하였다. 김교사가 작성한 메모에는 과제를 개발하면서 느끼는 어려움과 교사연구공동체에게 질문할 내용이 포함되어 있었으며, 연구자가 작성한 메모에는 김교사가 변형한 과제를 검토하는 과정에서 갖게 된 의문점과 교사에게 질문할 내용이 포함되어 있었다. 메모는 컴퓨터 파일로 작성되어 교사연구공동체 구성원에게 공유되었다. 넷째, 김교사와의 논의 과정에서 공유된 초등학교 교과서 자료와 수학적 모델링 관련 논문을 수합하였다.

### 자료 분석

사례연구는 질적 연구의 하나로, 질적 연구에서는 주로 귀납적 자료분석을 수행하게 된다. 귀납적 자료분석은 수집한 자료로부터 사례에 대한 이해와 의미를 형성해 가는 것으로, 귀납적인 과정에서 연구자들은 의미를 구축할 때까지 주제와 자료 사이를 오가는 작업을 반복적으로 수행하게 된다(Creswell, 2014). 사례연구를 수행하고자 하는 본 연구 역시 다양하게 수합한 자료를 귀납적 자료분석에 기반하여 Figure 4와 같은 절차로 분석하였으며, 각 단계는 순환, 반복되었다.

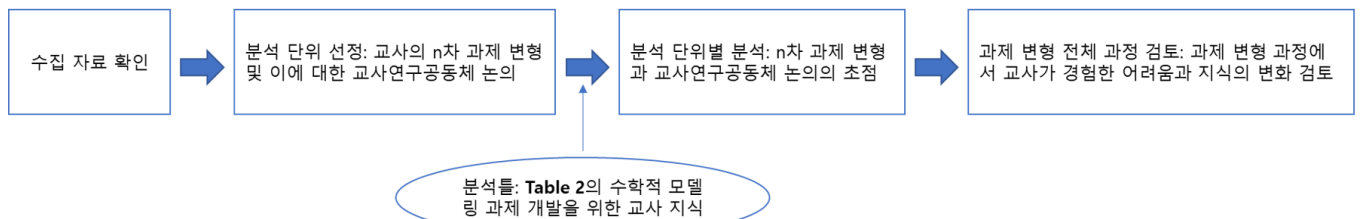


Figure 4. Data analysis process

첫째, 수집된 모든 자료를 읽고 상황을 파악하였다. 본 연구의 목적에 맞추어 교과서 과제 변형 과정에서 교사가 경험하는 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화를 확인하고자 하였으며, 이를 위해 수집한 모든 자료를 분석 대상으로 삼았다. 둘째, 분석 대상을 교사의 과제 변형 단계에 맞추어 구별한 뒤, 이를 분석 단위로 선정하였다. 본 연구에서는 교사가 5회에 걸쳐 과제

를 변형하였는데, 교사의 n차 과제 변형 및 n차 변형 과제에 대한 교사연구공동체 논의를 분석 단위로 선정하였다. 셋째, 분석 단위 별로 수집된 자료에 드러난 과제 변형과 교사연구공동체 논의의 초점을 분석하였다. 과제 변형과 교사연구공동체 논의 과정에는 교사의 과제 변형의 초점과 과제 변형 과정에서 경험한 어려움, 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화가 반영되어 있는 바, 이를 확인하기 위하여 이론적 배경에서 살펴본 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사 지식을 분석틀(Table 2 참고)로 하였다. 이후, 교사연구공동체 내 모든 발언을 문장 단위로 분해한 뒤, 각 문장에 반영된 모든 지식을 코딩하였다. 문장 단위로 분해된 n차 교사연구공동체 내의 각 발언에 소요된 시간을 측정하였으며, 한 문장에 두 개 이상의 논점이 코딩된 경우에는 논점별로 문장을 재분해한 뒤 각 문장에 소요된 시간을 측정하는 과정을 반복하여 수행하였다(Figure 5 참고). 본 연구는 교사의 과제 변형 사례를 일반화하려는 것이 아닌 과제 변형 사례의 특징을 이해하고자 한 것으로, 코딩 결과를 토대로 각 분석 단위에 드러난 주요 논점을 파악하는데 주목하였다(Yin, 2003). 넷째, 과제 변형 전체 과정을 반복적으로 검토함으로써, 각 분석 단위에서 파악된 논점을 중심으로 과제 변형 과정에서 교사가 경험한 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화를 분석하였다. n차 교사연구공동체 논의의 전체 시간 대비 특정 논점에 소요된 시간을 확인하여 n차 교사연구공동체 논의에서 각 논점이 차지하는 비율을 확인함과 동시에 각 논점이 차지하는 비율이 1차에서 4차로 진행됨에 따라 어떻게 변화하는지 살펴보았다. 예컨대, 아래의 Figure 5는 총 55분 36초 간 진행된 3차 교사연구공동체 논의의 일부로, 수학적 모델링 과정(MC) 논의에 소요되는 시간은 2분 58초, 개방성(O) 논의에 소요된 시간은 33초이며, 전체 논의에서 각각 5.3%, 1.0%를 차지한다. 각 논점이 차지하는 비율의 변화는 반복적인 과제 변형 과정에서 교사의 과제 변형에 대한 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식이 어떻게 변화하는지 보여주며, 특히, 변형된 과제는 교사의 변형된 지식을 나타낸다(Chan et al., 2015; Zaslavsky, 1995).

**Table 2.** Teacher’s knowledge needed for developing mathematical modeling tasks

Teacher’s knowledge		Code
Mathematical content knowledge		MCK
Modeling cycle		MC
Characteristics of modeling tasks	Reality	R
	Complexity	C
	Openness	O
Mathematical modeling tasks’ cognitive level		TC
Students’ cognitive level		SC

발화자	시간	발언 내용	Code
R1	16:35	정보 수집하기가 사실 지금 여기 1번이잖아요?	MC
	16:38	그래서 정보를 모두, 수집 정보를 이렇게 필요한 거를 어떻게 할까 한 다음에 제일 중요하다고 생각 되는 기준이 뭐냐, 두 개만 뽑으라고 한 다음에 그럼 그 두 개에 대해서 너희(학생)가 지금 상추도 사고 뭐도 사고 뭐도 산다고 했는데 그 정보를 수집해봐라.	MC
	16:50	그다음에 그럼 그거에 대해서 정보를 수집해서 제일 중요하다고 생각되는 기준 한, 두 개를 뽑아서 가격 면에서는 어떤 게 제일 이렇게 어떤지 확인해 보고 무게 면에서는 어떤지 한번 살펴보고.	MC
T	17:15	그게 2번 다음에 들어가면 되는 거죠?	MC
	17:17	그러니까 제가 생각했을 때는 이게 순서를 좀 바꾸세요.	MC
	17:21	그러니까 애들이 처음에 1번은 그대로 두고, 그러면 2번 자리에 아까 말한 것처럼 이거 이 부분, 정보 수집하는 거, 통계, 수, 가격 생각해 보고 이거에 대해서 조사하는 거를 2번에 넣고요.	MC
	17:40	(중략)	
R3	19:13	그러니까 예를 들어, 여기 지금 2)에서 어떤 기준으로 공평하게 나눌 수 있을지 한 다음에 바로 이제 평균을 구하게 하니까 지금 여기가 이제 그 중간 과정이 생략이 된 거죠.	MC
	19:28	그래서 여기서 지금 고민하고 있는 부분이 사실 모델링이 되게 개방적인 과제이기 때문에 어쨌든 우리가 끌고 가자 하는 그런 수업의 방향이 있는데 너무 오픈해버리면..	O
T	20:05	어려워지고.	TC

**Figure 5.** Coding and time measurement sample

자료 분석과 해석의 타당성을 높이기 위해, 본 연구에서는 연구 참여자에 의한 검토를 거쳤으며, 다양한 출처의 자료를 이용하여 연구 결과를 자세하고 투명하게 서술하였다(Andersson et al., 2022; Tracy, 2010).



## 연구결과

연구결과, 1차부터 4차까지 이어진 교사연구공동체의 논의에서 확인된 논의의 초점과 그 비율은 아래의 Table 3과 같다. Table 3에서 알 수 있듯이, 주된 논점은 1차 교사연구공동체 논의에서 수학적 모델링 과제의 현실성, 2차 교사연구공동체 논의에서 수학적 모델링 과제의 인지적 수준, 3차와 4차 교사연구공동체 논의에서 수학적 모델링 과정으로 옮겨가는 양상을 보였다.

**Table 3.** The focus of teacher-researcher community's discussion (unit: %)

The focus of teacher-researcher community's discussion	Sequence			
	1st	2nd	3rd	4th
Mathematical content knowledge(MCK)	20	9	5	2
Modeling cycle(MC)	17	18	61	78
Reality(R)	30	13	8	6
Complexity(C)	1	8	3	5
Openness(O)	1	8	10	3
Mathematical modeling tasks' cognitive level(TC)	19	30	9	3
Students' cognitive level(SC)	8	10	3	2
etc	4	4	1	1
Sum	100	100	100	100

교사연구공동체의 논의가 주로 교사가 과제 변형 과정에서 겪은 어려움과 교사 지식 측면에 관한 것임을 염두에 두면서, 이 장에서는 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 과정에서 교사가 경험한 어려움과 지식의 변화를 크게 수학적 모델링 과제의 현실성, 수학적 모델링 과제의 인지적 수준, 수학적 모델링 과정의 세 가지 측면으로 나누어 살펴보고자 한다. 다만, 아래에서는 각 논점에 대한 교사 지식의 변화와 과제 변형의 어려움을 자세히 살펴보고자 논점별로 절을 분리하여 기술하나, 과제의 변형은 여러 가지 측면의 교사 지식의 변화를 내포하는 바(Lee & Kim, 2019; Stein & Kaufman, 2010), 각 절의 서술 과정에서 다른 논점이 추가로 언급될 수도 있음을 미리 밝힌다.

### 현실성 반영 과정에서 교사 경험한 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화

초기 교사연구공동체 논의의 초점은 수학적 모델링 과제의 현실성에 있었다. 이는 첫째, 교사의 초기 지식이 수학적 모델링의 현실성에 치중되어 있었던 점, 둘째, 교사가 이러한 지식에 바탕하여 교과서 과제를 수학적 모델링 과제로 변형하는 과정에서 과제에 반영되어야 하는 수학 내용과 학생의 인지적 수준에<sup>1)</sup> 적절한 실세계 맥락을 찾는 데 어려움을 겪었던 점과 연결된다.

먼저, 교사가 사전 인터뷰에서 수학적 모델링 개념에 대한 질문에 답한 내용은 다음과 같다.

수학적 모델링은 학생의 실제 생활 속 경험과 연관 지어 학생들이 문제 해결에 더 적극적으로 참여하게 되는 방식 (중략) 수학적 모델링 수업은 매우 이상적이지만, 초등학교 저학년은 실생활 경험 자체가 많이 부족하고, 고학년도 학습한 내용을 일상 생활에서 사용하는 경우가 많지 않아 적절한 과제 찾기가 쉽지 않다고 생각합니다.

사전 인터뷰를 살펴보면, 김교사는 수학적 모델링의 여러 특징 중 현실성에 주목하였으며, 그 외의 특징은 언급하지 않았다. 이는 수학적 모델링에 대한 김교사의 지식이 현실성에 제한되어 있음을 보여준다. 이와 같은 지식은 과제 변형에 반영(Stein & Kaufman, 2010)되었는데, 김교사는 교과서 과제의 맥락이 학생의 실생활과 밀접한 연결을 갖지 않다고 판단하고, 이후 적절한 소재의 과제가 완성되기 전까지 과제 변형의 초점을 현실성 반영에 두었다. 이러한 맥락에서 개발된 1차 변형 과제는 '미세먼지'를 소재로 한 '다음 주의 미세 먼지와 초미세먼지 수준 예측하기'였는데(Table 4의 T1 참고), 이와 관련하여 김교사는 1차 교사연구공동체 논의에서 '미세먼지는 마스크 착용, 운동장 수업 여부와 같이 직접적으로 영향을 받는, 실생활과 연관된 의미 있는 문제'라고 언급하였다.

하지만, 1차 교사연구공동체 논의 과정에서 1차 변형 과제가 기존 과제(Figure 2 참고)에 반영된 수학 학습 내용, 즉, 평균의 필요성과 평균 구하는 방법을 지도하는데 적절한지에 대한 논의와 학생 인지적 수준에 적절한 과제인지에 대한 논의가 있었다. 김교사 역

**Table 4.** Task modification due to the material change

Sequence	Modified task
The initial task (T0)	Figure 2
The first task modification (T1)	Let's predict the level of fine dust and ultrafine dust for the next week.
The second task modification (T2)	Let's share the ingredients for the sandwiches we will make in the 'practical arts' class fairly.

시 이에 동의하며 과제의 수정이 필요하다는 데 동의하였다. 이 과정에서 교사는 평균의 필요성과 평균 구하는 방법의 지도를 위해 학생의 일상 생활과 밀접한 관련이 있는 실세계 맥락을 선정하는데 어려움을 겪었음을 다음과 같이 밝혔다. 결과적으로 수학적 모델링 과제의 현실성에 치중한 과제 변형이 지도하려는 수학 학습 내용과 학생의 인지적 수준에 적절하지 못한 과제로의 변형에 이른 것으로 볼 수 있다.

<1차 교사연구공동체 논의>

T: 수학적 모델링은 최대한 실생활이 문제에 자연스럽게 잘 녹아들면서 학생들이 나름대로 수학적 개념을 잘 끌어올 수 있어야 하는 것 같아요. 그런데 어떤 소재를 골라야 될지 잘 모르겠어요. 저는 미세먼지가 아이들 생활에 굉장히 밀접하다고 생각해서..

이후, 교사연구공동체의 연구자들은 본인의 수학적 모델링 과제 개발 시 경험한 실세계 맥락의 소재 선정 과정에 대한 경험과 선행연구(Doerr & English, 2003; English, 2006)를 공유하였다. 이를 토대로, 김교사는 평균의 필요성과 평균 구하는 방법을 지도하는데 적절한 상황이어야 함을 염두에 두면서, 본인의 경험을 돌이켜 보았을 때 5학년 학생들이 가장 흥미를 갖고 참여했던 학교 활동 중 하나가 실과 교과의 '건강한 음식 만들기'였다는 점과 학생들이 음식 만들기를 위한 자료를 나누어 준비하는 과정에서 불균등한 재료 분배로 학생 간 충돌이 있었던 점을 떠올리고, 2차 변형 과제로 '샌드위치(건강한 음식)를 만들기 위한 재료 공평하게 분배하기'를 제시하였다(Table 4의 T2 참고). 2차 변형 과제는 학습 내용인 평균의 필요성과 평균 구하는 방법을 지도하기에 적절한 상황임과 동시에 학생에게 의미 있는 실생활 속 상황이라는 점에서 현실성이 적절하게 반영되었다고 볼 수 있다. 특히, 학생이 실제 자료를 직접 수집하고 분석한다는 측면에서, 가공된 자료가 제공되는 교과서 과제에 비해 현실성이 더욱 강화(Ärleböck et al., 2013)되었다고 볼 수 있다.

<2차 교사연구공동체 논의>

T: 예전에 건강한 음식 만들기 실습을 하면서 재료를 공평하게 나누지 못했던 기억이 있고, 이 상황을 이용하면 자연스럽게 평균의 도입 부분을 지도할 수 있을 거라고 생각했어요. (중략) 수학 교과서에는 주어진 자료의 평균을 구한다면, 이 과제에서는 학생들이 샌드위치를 만들기 위해 필요한 재료의 양과 값을 직접 조사할 수 있기 때문에 더 현실적이라 생각했고요.

결과적으로, 김교사의 2차 교사연구공동체 논의에서의 발언과 변형된 과제는 현실성 측면에 집중되었던 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사 지식이 현실성이 반영된 소재를 찾는 과정에서 학습 내용과 학생의 인지적 수준을 함께 고려하는 측면으로 확장되었음을 보여준다. 현실성에 대한 논의는 이후에도 미세하게 지속되었으나, 그 비중은 2차 과제 변형 후 크게 줄어들었다(Table 3 참고). 한편, 수학적 모델링 과제의 현실성이 과제의 개방성 및 복잡성과 연결됨에 따라 과제의 인지적 수준이 향상되고, 향상된 과제의 인지적 수준을 학생의 인지적 수준과의 비교, 분석하여 적절하게 유지하는 데 어려움이 나타났는데, 이와 관련한 논의는 다음 절에서 제시한다.

**수학적 모델링 과제의 인지적 수준 조정 과정에서 교사가 경험한 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화**

수학적 모델링 과제의 인지적 수준에 대한 논의는 1차 교사연구공동체 논의부터 이루어졌으며, 2차 과제 변형에서 수학적 모델링 과제의 현실성 반영이 어느 정도 해결된 후 2차 교사연구공동체 논의의 주된 논점 중 하나로 다루어졌다. 이는 첫째, 교사가 설정한 과제의 인지적 수준과 학생의 인지적 수준 사이에 격차가 존재하였던 점, 둘째, 현실성이 반영된 과제의 높아진 개방성과 복잡성이 수학적 모델링 과제의 인지적 수준을 높이는 데 영향을 주었다는 점과 연결된다. 먼저, 앞 절에서 1차 교사연구공동체 논의 중 1

차 변형 과제(Table 4의 T1 참고)의 인지적 수준에 대한 논의가 있었음을 밝혔는데, 이를 좀 더 살펴보면 다음과 같다.

#### <1차 교사연구공동체 논의>

R2: 미세먼지 수치 예상이 초등학교 5학년 수준에서는 힘들 것 같아요. 현재 교육과정에는 가능성을  $0, \frac{1}{2}, 1$ 로 직관적으로 파악되는 경우만 다루는데, 지금 변형된 과제는 이런 직관적인 표현이 아니라 어떤 값을 요구하잖아요? 그 값을 평균으로 나타낸다고 할 수도 있겠지만, 시계열 분석 논문이나 실제 수치의 추이를 봤을 때 평균을 구하는 건 의미가 없을 것 같아요.

R3: 데이터를 비교하는 선행연구를 살펴보면, 해당 과제(T1)가 평균의 필요성보다 자료의 퍼짐 혹은 시계열 자료를 분석하기에 적절한 과제인 것 같고, 시계열 자료 분석은 대부분의 연구가 주로 중학생 이상을 대상으로 하거든요. 초등학교 일반 학생에 비해 과제 수준이 높은 거예요.

#### (중략)

R1: 지금 과제에 학생의 수준이 크게 고려되지 않은 것 같다는 생각이 들고, 그 이면에는 교사의 수학적 모델링에 대한 (어렵다는) 생각이 반영된 것 같아요.

실제로, 교사는 사전 인터뷰에서 수학적 모델링 활동이 이상적인 수업이지만 과제의 인지적 수준이 높아서 학생이 수행하기에 어려움이 있다고 하였는데, 교사연구공동체의 연구자는 이와 같은 교사의 인식이 교사로 하여금 일반 학급 학생의 수준에 맞는 과제를 개발하는 데 어려움을 부여했다고 보았다. 교사의 어려움을 개선하기 위해 연구자는 초등학생을 대상으로 하는 여러 수학적 모델링 연구(Chang et al., 2019; Kim et al., 2009)를 공유하였으며, 과제 해결 과정에 대한 세밀한 사고실험을 통해 과제와 학생의 인지적 수준을 분석하고 학생의 인지적 수준에 맞추어 과제의 인지적 수준을 조정할 것을 제안하였다. 특히, 학생의 이전 학습 내용과 사고력 수준 등 과제 해결 과정에서 갖는 인지적 어려움을 고려할 것을 강조하였다.

적절한 인지적 수준의 수학적 모델링 과제 개발에 대해 교사가 겪는 어려움은 수학적 모델링 과제의 개방성과 복잡성을 논의하는 과정에서 함께 나타나기도 하였다. 2차 교사연구공동체 논의에서는 2차 변형 과제(Table 4의 T2 참고)의 개방성으로 인해 학생이 과제 해결을 위해 고려해야 할 요소가 많으며, 공평하게 나누는 방법도 다양하게 제시될 수 있어 과제 해결 과정의 복잡성이 높아지고, 이로 인해 과제가 의도한 수학적 활동을 학생이 이해하지 못한 채 수행에 어려움을 느낄 수 있다는 의견이 제시되었다. 교사 역시 이에 동의하면서, 수학적 모델링 과제의 현실성을 반영하는 과정에서 개방성과 복잡성이 높아져 어려워졌다고 언급함과 동시에 과제의 현실성을 고려할 때 개방성과 복잡성이 없는 과제를 제시할 수는 없기 때문에 과제의 인지적 수준 조정에 있어서 어려움이 있음을 토로하였다.

위와 같은 교사의 어려움은 Choi (2017)에서도 언급하고 있는 것으로, 교사연구공동체의 연구자는 이에 대한 대응으로 세밀한 사고실험의 필요성을 반복적으로 강조하고, 세부 과제를 통한 과제의 개방성에 대한 적절한 제한의 필요성을 안내하였다. 실제로 선행연구(Barquero et al., 2018; Jung & Lee, 2021)에서는 개방성과 복잡성을 지니는 수학적 모델링 과제의 해결을 위해 세부 과제를 구체적으로 제공함으로써 학생의 과제 해결을 지원하는 것이 필요함을 제안한다. Sullivan 외 (2013) 역시 학생의 수준에 대응하여 과제를 구체화하거나 단계적으로 제공함으로써 과제의 개방성을 적절히 제한하고, 나아가 과제의 인지적 수준과 학생 인지적 수준 사이의 간격을 메울 수 있다고 하였다. 결과적으로, 교사는 3차 변형 과제에서 수학적 모델링 과제를 해결하기 위한 세부 과제를 함께 제시하였다(Table 5의 T3 참고).

#### <2차 교사연구공동체 논의>

T: 과제가 개방성을 갖게 되니까 복잡성이 생기는데 그건 괜찮을까요? 학생이 풀기에 좀 어려울 것 같기도 하고..

R2: 수학적 모델링 과제가 개방형 과제라고 할 수 있지만, 개방형 과제를 해결해 나가는 세부 과정을 좀 더 단계적으로 제공할 수 있을 것 같아요. 학생이 어떻게 답할지 생각해 보면서 좀 더 세부 단계를 제공해야 할 것 같아요.

R1: 이 질문에 대한 학생의 반응을 꼭 예상해보면 이 과제가 어느 정도의 개방성과 복잡성을 갖고, 그로 인해 과제 수준이 얼마나 높은 지 혹은 낮은 지 알 수 있을 것 같아요. 그리고 과제가 개방된 과제라 할지라도 여러 가지 조건이나 가정을 제공하여 과제 해결 과정을 제한하고 인지적 수준을 완화할 수 있을 것 같아요.

<3차 교사연구공동체 논의>

T: 발문(세부 과제)을 좀 더 구체적으로 넣을까 생각도 사실 했는데, 이게 좀 고민되긴 했어요. 그냥 두려니 너무.. (복잡해서 어려울 것 같고) 그렇다고 넣자니.. (현실성, 개방성이 제한되고)

R2: 결국 학생 수준에 어느 정도 맞추는 게 필요할 것 같아요.

(중략)

R3: 사고실험을 통해 예상 상황과 그때 제공할 수 있는 도움을 세밀하게 제시하는 거죠.

결과적으로, 2차 교사연구공동체 논의 이후 제시된 변형 과제와 교사연구공동체 논의에서 언급된 세부 과제에 대한 김교사의 학생 반응 사고 실험 결과는, 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사 지식이 과제의 인지적 수준을 조정하는 과정에서 학생의 인지적 수준을 파악하고 세부 과제의 복잡성과 개방성을 함께 조정하는 측면으로 확장되었음을 보여준다.

**수학적 모델링 과정 반영 과정에서 교사가 경험한 어려움과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 변화**

Table 3에서 알 수 있듯이, 3차 교사연구공동체 논의부터 대부분의 논의가 수학적 모델링 과정 중심으로 이루어졌다. 이는 첫째, 앞 절에서 논의한 수학적 모델링 과제의 인지적 수준 조정을 위해 제공된 세부 과제가 수학적 모델링 과정에 따라 제공된 점, 둘째, 수학적 모델링 과정에 대한 교사 지식의 부족으로 인해 김교사가 수학적 모델링 과정을 반영하는데 어려움을 겪게 된 점과 연결된다.

먼저, 앞 절에서는 과제의 개방성과 복잡성이 야기한 과제의 인지적 수준과 학생의 인지적 수준 사이의 불일치를 조정하고 학생의 과제 해결을 지원하기 위하여 세부 과제가 제공되었음을 확인하였다. 이때, 수학적 모델링 활동이 수학적 모델링 과정에 따라 진행된다는 점(Blum, 2015; Kaiser & Stender, 2013)을 고려하여, 세부 과제가 수학적 모델링 과정에 맞추어 제공되었다. 다만, 김교사는 연구 참여 초기에 수학적 모델링 과정에 대한 인식이 부족하였는데, 이는 사전 인터뷰에서 수학적 모델링 과정이 일반 문제해결 과정과 다르다는 것을 인지하지 못했던 점과 첫 번째와 두 번째 변형 과제의 해결 과정을 일반적인 문제해결 과정에 따라 제시한 것에서 확인할 수 있었다. Figure 2를 비롯하여 교과서에 제시된 과제의 대부분이 수학적 모델링 과정을 반영하지 않은 점(Jung et al., 2020)도 김교사의 수학적 모델링 과정 반영에 대한 어려움으로 이어졌다.

2차와 3차 교사연구공동체 논의에서는 수학적 모델링 과정에 대한 김교사의 어려움을 지원하고자 연구자들이 수학적 모델링 과정 모델(Figure 1 참고)을 공유하고 각 단계의 의미와 이전 단계에서 다음 단계로의 이행을 위해 필요한 활동을 구체적으로 안내하였다. 더불어, 선행연구(Galbraith & Stillman, 2006; Kim, 2010)를 소개하거나 연구자가 수학적 모델링 과정에 근거하여 과제를 개발한 경험을 공유하였으며, 수학적 모델링 과정에 따른 사고실험을 수행하면서 세부 과제를 배치하는 것이 필요함을 강조하였다.

<3차 교사연구공동체 논의>

R3: 세부 과제를 수학적 모델링 과정에 맞추어 제시하면 기존의 수학 교과서 과제와 다른 방식으로 과제에 접근할 수 있을 것 같아요.

(중략)

R1: (Figure 1의 수학적 모델링 과정을 함께 보면서) 수학적 모델링 과제가 일반적인 실세계 맥락 과제와 다른 건 가정하기, 정보 수집하기, 필요한 요소 추출하기와 같이 실제 상황에서 실세계 모델로 나아가는 과정이 추가된다는 거거든요.

(중략)

R3: 세부 과제를 수학적 모델링 과정에 맞춰서 제시하자는 거죠. 수학적 모델링 과정에 맞춰서 작성하다 보면, 사고실험이 그 과정에 따라가기 때문에 세부 과제의 순서가 재배치 되니까..

수학적 모델링 과정이 반영된 세부 과제는 3차 변형 과제부터 제시되었다(Table 5 참고). 3차 변형 과제에는 수학적 모델링 과정 중 단순화하기가 반영되지 않았는데, 이와 관련하여 연구자는 3차 교사연구공동체 논의에서 단순화하기가 일반 과제 해결 과정과



**Table 5.** Task modification according to the reflection of the mathematical modeling process

Sequence	Modified sub-task
The third task modification (T3)	Let's share the ingredients for the sandwiches we will make in the 'practical arts' class fairly according to the following process. 1) Investigate the ingredients needed to make the sandwich you want to make 2) Find out how to fairly divide the ingredients needed to make the sandwiches 3) Collect information about the ingredients needed to make the sandwiches 4) Divide the ingredients based on how to divide them fairly 5) Evaluate whether the ingredients were divided fairly and, if not, find a new way to do so
The fourth task modification (T4)	Let's share the ingredients for the sandwiches we will make in the 'practical arts' class fairly according to the following process. 1) Investigate the ingredients needed to make the sandwich you want to make 2) Collect information about the ingredients needed to make the sandwiches and organise them using mathematical representations 3) Select two criteria that should be considered to divide the ingredients needed to make the sandwich fairly and provide reasons for their selection 4) Order the ingredients according to the each selected criteria 5) Divide the ingredients fairly 6) Evaluate whether the ingredients were divided fairly and, if not, find a new way to do so
The final task modification (T5)	Let's share the ingredients for the sandwiches we will make in the 'practical arts' class fairly according to the following process. 1) Investigate the ingredients needed to make the sandwich you want to make 2) Select 3 kinds of information about the ingredients needed to make the sandwich 3) Collect data according to the selected 3 kinds of information and organise them using mathematical representations 4) Decide what fairness means and discuss whether it is reasonable 5) Select 2 kinds of information about the ingredients to consider for a fair division of sandwich ingredients and justify their choice 6) Check data for each of the 2 kinds of information about the ingredients to make the sandwich, e.g. how much each ingredient costs 7) Considering 6), divide the ingredients fairly amongst the group and discuss how you arrived at the fair values 8) Evaluate whether the ingredients were divided fairly and if not, find a new way to do so

차별화되는 수학적 모델링 과정임을 언급하면서, 단순화하기를 반영하는 것이 필요함을 강조하였다. 단순화하기는 Figure 1의 실세계 맥락에서 실세계 모델로 이행하기 위해 필요한 과정으로, 과제 이해를 위해 수집한 정보 중 가장 핵심이 되는 정보를 선별하는 과정이다(Maaß, 2010). 특히, 단순화하기는 실세계 맥락을 단순화함으로써 수학적 모델링 과제의 복잡성을 완화시키기도 하므로 수학적 모델링 과제의 복잡성으로 인해 과제 해결에 어려움을 갖는 학생에게 도움을 줄 수도 있다(Jung & Lee, 2021). 이후 교사는 단순화하기의 필요성을 이해하고 세부 과제를 구성하였다(Table 5의 T4의 세부 과제 3) 참고).

4차 교사연구공동체 논의에서는 세부 과제가 수학적 모델링 과정의 어느 단계에 해당하는 과제인지 구체적으로 평가함으로써, 수학적 모델링 과정에 대한 교사의 어려움 개선과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식 확장에 도움을 주고자 하였다. 김교사 역시 '(세부) 과제 순서 좀 봐주세요,' 이렇게 배치하면 순서가 (수학적 모델링 과정에) 맞을까요?'와 같이 수학적 모델링 과정에 맞추어 세부 과제가 구성되었는지 반복적으로 확인하고자 하였다. 또한, 타당화가 추가되어야 함을 확인하고, 최종 변형 과제의 세부 과제에 타당화 활동을 반영하였다(Table 5의 T5의 세부 과제 4), 5), 7) 참고).

한편, 최종 변형 과제에는 학습하려는 내용인 평균의 필요성과 평균 구하기를 위한 세부 과제가 제시되었다(Table 5의 T5의 세부 과제 4)와 7) 참고). 이는 변형 과제가 교사가 의도한 학습 내용을 적절히 안내해야 한다는 교사연구공동체 논의를 반영한 것으로, 수학적 모델링 과제가 수학 외적인 내용에만 치우치지 않고 수학적으로 적절하고 가치 있는 활동을 제공해야 한다는 여러 선행연구(Doerr & English, 2003; Lee, 2010; Palsdottir & Sriraman, 2017)의 제언과도 맥을 같이 한다. 최종 변형 과제의 세부 과제 4)는 공평성의 의미를 스스로 결정하도록 함으로써 평균의 필요성에 대한 학습을 유도한다. 또한 최종 변형 과제의 세부 과제 7)은 수학적 모델 도출하기에 해당하는 과제로, 교과서에서 평균을 구하는 방법을 안내(Figure 2 참고)하는 데에 비해 개방된 형태를 지니며, 평균을 구

하는 다양한 방법을 학생 스스로 발견할 수 있는 기회를 제공한다. 다만, 교과서 과제가 평균의 필요성을 대푯값의 관점에서 도입 (Figure 2 참고)하였다면, 교사의 최종 변형 과제는 공평성의 관점에서 도입하고 있다. 이와 관련하여 김교사는 평균이 다양한 의미를 갖지만, 평균을 구하는 방법과 연결하여 제시하기 위해 공평성의 관점을 도입했다고 밝혔다. Yim (2022) 역시 평균의 의미 중 공평한 값의 의미는 현재 평균을 구하는 방법 중 하나로 소개되는 균등 재분배 상황에서 자연스럽게 함께 다룰 수 있음을 언급하였는데, 본 연구에 참여한 김교사는 Yim (2022)의 관점에서 수학적 모델링 과제를 제시한 것으로 볼 수 있다.

결과적으로, 교사는 교사연구공동체에서 다양한 과제를 확인하고 과제를 변형하는 경험을 통해 수학적 모델링 과정이 반영된 세부 과제 개발의 어려움을 개선하고, 수학적 모델링 과정에 대한 지식과 수학적 모델링 과정에 맞춘 과제 개발 역량을 향상시키는 모습을 보였다. 과제 변형과 교사연구공동체 논의의 종료 후 진행된 사후 인터뷰에서, 교사는 일반적인 수학 과제 해결 과정과 다른 수학적 모델링 과정을 이해하고 그 과정에 맞추어 과제를 제시하는 것이 어려웠지만, 다양한 방식으로 피드백을 받으면서 수학적 모델링 과정을 이해할 수 있었다고 밝혔다.

## 논의 및 결론

본 연구는 초등학교 일반 학급 수업에서 수학적 모델링 수업을 수행하기 위한 방안으로 교사의 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형을 제안하고, 과제 변형 과정에서 교사가 경험한 어려움 및 지식 확장의 과정을 살펴보았다. 그 결과, 교사는 지도하려는 수학적 내용을 포함하면서 학생에게 의미 있는 현실성을 반영하는 데 어려움을 가지고 있으며, 수학적 모델링 과제의 인지적 수준을 조정하고 수학적 모델링 과정을 반영하는 데 어려움을 갖고 있었다. 이후, 반복적인 수학적 모델링 과제 변형 과정에서 마주한 이와 같은 어려움을 극복하는 과정에서, 교사는 지도하려는 수학적 내용과 학생의 인지적 수준 및 경험을 고려한 현실성 있는 과제를 개발하고, 과제의 복잡성과 개방성을 적절히 제한하는 구체화된 세부 과제를 수학적 모델링 과정에 기반하여 개발하였다. 개발된 과제의 결과물은 수학적 모델링 과제 개발을 위한 교사의 지식이 서로 연결되고 확장되었음을 보여준다.

교과서 과제 변형은 학습 목표와 학생 수준에 적절한 과제를 제공하기 위해 필요한 교수활동임에도 불구하고, 그동안 실제 과제 변형 시 경험하게 되는 어려움에 대한 논의는 부족하였다(Park, 2019). 본 연구는 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 과정에서 교사가 경험하는 어려움을 확인하고 이를 지식의 확장 및 연결시켰다는 점에서 기존 연구와 차별화되는 의의를 갖는다. 또한, 연구 결과에서 드러난 교사의 과제 변형의 특징으로부터 다음을 확인할 수 있었다.

첫째, 중등수학의 수학적 모델링 과제와 차별화되는 초등수학의 수학적 모델링 과제로, 여러 교과가 융합된 수학적 모델링 과제가 가능함을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 교사에 의해 변형된 최종 수학적 모델링 과제는 5학년 실과 시간에 진행되는 교육활동과 평균 학습이 결합된 연결한 것으로, 간학문적 과제의 특징을 지닌다. 초등학교의 경우 교사가 수학 외에 다른 과목도 지도한다는 점에서, 중등에 비해 수학과 다른 과목이 결합된 수학적 모델링 과제를 개발할 수 있는 다양한 소재를 보다 적극적으로 생각해볼 수 있을 것이다. 수학적 모델링 과제가 갖는 현실성은 간학문적 교수를 필요로 하기도 하는데(Caron, 2019; Williams et al., 2016), 이를 위해 수학 교사와 타 교과 교사가 협업해야 하는 중등과 달리, 여러 교과를 동시에 지도하는 초등 교사의 경우 수학과 타 교과를 결합한 수학적 모델링 과제를 개발할 수 있는 역량을 기르는 데 유리한 측면을 갖는다. 초등교사의 이러한 역량에 주목한다면, 초등수학에서 융합 교과의 특징을 갖는 수학적 모델링 과제를 다양하게 개발할 수 있을 것이다.

둘째, 수학적 모델링 과제 변형에 교사의 경력과 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식이 복합적으로 영향을 미친다. 본 연구에서 김교사는 학생의 상황에 적절한 소재를 본인의 오랜 교사 경험에서 찾아낼 수 있었던 반면, 수학적 모델링 과정이 반영된 세부 과제를 개발하는데 어려움을 겪었다. 이는 김교사의 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 부족에서 기인하는 것으로, 이와 관련하여 Kim (2010)은 수학적 모델링이 초등수학에 적용되기 위해 초등 교사의 수학적 모델링에 대한 직접적인 경험을 확대하고 개념적 이해를 높이기 위한 교사교육이 필요함을 주장하였다. 수학적 모델링 과제의 개발과 적용은 경력이 높아짐에 따라 저절로 체득되는 것이 아니며, 수학적 모델링에 대한 전문적인 교사교육을 필요로 하는 것이다.

셋째, 수학적 모델링 과제 개발을 위한 지식의 경우 Table 2에 제시된 여러 유형의 지식이 서로 연결됨을 확인할 수 있었다. 현실성

반영의 어려움은 학생의 인지적 수준, 수학적 내용 지식과 연결되었으며, 수학적 모델링 과제의 인지적 수준 조정의 어려움은 학생의 인지적 수준, 현실성에서 초래된 복잡성 및 개방성과 연결되었다. 또한 수학적 모델링 과정 반영의 어려움은 수학적 모델링 과제 및 학생의 인지적 수준과 연결되는 등 수학적 모델링 과제 개발 과정에서 교사가 경험하는 어려움에는 여러 지식이 동시에 작용하였으며, 또한 동시에 향상되었다. 이와 같은 연구 결과는 교사가 수학적 모델링 과정 혹은 수학적 모델링 과제의 특징 등에 대한 단편적인 이해에서 나아가, 이들이 서로 연결됨을 이해하고 결합된 구조로서 이해해야 함을 보여준다.

본 연구결과는 수학적 모델링 교수 역량 향상을 위한 초등교사교육에 다음과 같은 시사점을 제시한다. 첫째, 초등교사에게 수학적 모델링 과제를 제공하기보다, 교과서 과제를 본인의 수업에 맞추어 적절한 수학적 모델링 과제로 변형할 수 있는 방안을 안내하여 과제 변형에 요구되는 지식과 역량을 높일 수 있는 기회를 제공해야 한다. 수학적 모델링 과제는 과제를 적용하는 교실, 교사, 학생의 맥락에 기반하여 설계되어야 하는 바(Barquero et al., 2018), 한 가지 모범적인 형태로 제시되기에는 어려움이 있다(Oh & Park, 2019). 이로 인해 수학적 모델링에 대한 교사 지식과 학생의 특성에 맞는 과제 설계 역량을 향상시켜 과제를 적용하는 맥락에 합치하는 수학적 모델링 과제를 개발할 것을 안내하는 것이 필요하다. 특히, 교육과정에 기반하여 개발된 교과서 과제를 변형할 수 있도록 함으로써 교육과정 내에서의 수학적 모델링 지도가 일반 학급에서 가능하도록 지원하는 것이 필요하다.

둘째, 수학적 모델링에 대한 이론 및 실제 사례에 기반한 교육이 필요하다. 이는 여러 연구(Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Borromeo Ferri, 2018; Jung & Lee, 2021)에서 언급하고 있는 수학적 모델링에 대한 이론 기반 교사교육과 실제 사례 기반 교사교육의 필요성과 맥락을 같이 하는 것으로, 본 연구의 결과는 이들 연구를 뒷받침한다. 수학적 모델링 과제의 설계는 수학적 모델링 과정에 기반한 과제 해결 과정에 대한 사고실험을 요구하며, 사고실험에서는 수학적 모델링에 대한 이론적 지식 외에 수업 환경, 학생 수준 등 여러 가지 측면에 대한 고려를 함께 필요로 한다(Simon & Tzur, 2004). 이를 위해서는 다양한 수학적 모델링 사례를 접함으로써 수학적 모델링 활동에 대한 스펙트럼을 확장하는 것이 필요하다.

셋째, 교사연구공동체와의 참여를 통한 수학적 모델링 교사교육이 필요하다. 교사는 경력의 증가와 함께 경험에 기반한 지식과 교수, 학습에 대한 통찰을 갖게 되지만, 동료 교사나 연구자와의 공동 연구 혹은 공동 학습 활동이 없다면 개인의 불완전한 경험에만 의존하게 된다는 한계가 있고, 교수학적 경험을 의식화하는 데 있어서도 어려움을 겪는다(Jaworski, 2008; Slavit & Holmlund, 2010). 본 연구에서 교사연구공동체 논의의 초점은 교사가 겪은 어려움과 이를 극복하기 위한 지식의 확장에 있었으며, 이와 동시에 제시된 과제를 평가함으로써 이후의 과제 개발 시 초점이 되어야 하는 부분을 안내하기도 하였다. 이 과정에서 연구자가 직접 경험하거나 선행 연구에서 확인한 과제 개발 사례와 과제 적용 시의 문제점, 과제 개발 시 고려해야 할 점을 공유하였으며, 이는 교사의 과제 개발에 효과적인 도움을 제공하였다. 이는 선행연구(Boston & Smith, 2011; Goodchild et al., 2013)에서 언급한 교사연구공동체 구성이 교사의 과제 개발 전문성 향상에 기여한다는 주장과 맥락을 같이 하는 것으로, 본 연구는 교사연구공동체를 통한 교사교육의 필요성을 지지한다.

한편, 본 연구는 10년 경력의 교사를 대상으로 한 바, 다양한 경력과 수학적 모델링에 대한 다양한 지식 수준의 교사를 대상으로 한 연구가 지속적으로 이루어져야 할 것이다. 특히, 예비교사교육에서 수학적 모델링을 학습한 교사를 대상으로 한 연구를 통해, 예비교사교육의 필요성과 개선 사항 등을 찾고 적용하는 것이 필요하다. 또한, 본 연구에서 교사가 변형한 과제는 평균을 공평한 값의 관점에서 도입하고 있다. 평균의 의미에 대한 논의는 본 연구의 범위를 벗어나므로 추가적인 논의를 하지는 않았으나, 이와 관련하여 Yim (2022)이 제언한 바와 같이 초등학교에서 평균의 도입과 지도에 대한 논의가 필요하다. 이와 같은 한계점에도 불구하고, 본 연구는 초등교사를 대상으로 한 수학적 모델링 과제 변형 연구를 통해 연구의 다양성을 확장하고 초등수학에서 수학적 모델링 교사교육의 방향을 제시하였다는 의의를 갖는다. 본 연구에서 제시한 교과서 과제의 수학적 모델링 과제로의 변형 및 그에 따른 교사의 수학적 모델링 지식 강화 사례가 향후 초등학교에서 수학적 모델링 수업의 활성화에 도움이 되길 기대한다.

## Endnote

- 1) 학생 인지적 수준에 적절한 과제인지에 대한 논의는 다음 절에서 자세히 살펴본다.

## References

- Andersson, A., Ryan, U., Herbel-Eisenmann, B., Huru, H. L., & Wagner, D. (2022). Storylines in public news media about mathematics education and minoritized students. *Educational Studies in Mathematics*, *111*(2), 323-343. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10161-5>
- Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.834405>
- Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 16-29.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *ZDM*, *50*(1-2), 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work: Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM*, *38*(2), 163-177. <https://doi.org/10.1007/BF02655887>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer International Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling: In school and teacher education*. Springer.
- Boston, M. D., & Smith, M. S. (2011). A 'task-centric approach' to professional development: Enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 965-977. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0353-2>
- Caron, F. (2019). Approaches to investigating complex dynamical systems. In G. A. Stillman, & J. P. Brown (Eds.), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education* (pp. 83-103). Springer Nature Switzerland AG. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_5)
- Chamberlin, S., Payne, A. M., & Kettler, T. (2022). Mathematical modeling: A positive learning approach to facilitate student sense making in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(4), 858-871. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1788185>
- Chan, E. C. M. (2010). Tracing primary 6 students' model development within the mathematical modelling process. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 40-57.
- Chan, E. C. M., Ng, D. K. E., Widjaja, W., & Seto, C. (2015). A case study on developing a teacher's capacity in mathematical modelling. *The Mathematics Educator*, *16*(1), 45-74. [http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16\\_1/TME16\\_3.pdf](http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV16_1/TME16_3.pdf)
- Chang, H. W., Choi, H. Y., Kang, Y. J., & Kim, E. H. (2019). Development and application of mathematical modeling task for the lower grade elementary school students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, *23*(1), 93-117.
- Choi, J. S. (2017). Prospective teachers' perception of mathematical modeling in elementary class. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *27*(2), 313-328.
- Creswell, J. W. (2014). *Qualitative inquiry and research design (2nd ed.): Choosing among five approaches*. Sage publications.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110-136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 303-323. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>
- English, L. D., & Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM*, *50*, 103-115. <https://doi.org/10.1007/S11858-017-0896-Y>
- Galbraith, P. (2007). Dreaming a 'possible dream': More windmills to conquer. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 44-62). Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.2.43>
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 143-162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 393-412.



- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 105-123. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In K. Krainer, & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Volume 3* (pp. 309-330). Brill Sense.
- Jung, H. Y., & Lee, K. H. (2021). Promoting in-service teacher's mathematical modeling teaching competencies by implementing and modifying mathematical modeling tasks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 31(1), 35-62. <https://doi.org/10.29275/jerm.2021.02.31.1.35>
- Jung, H. Y., Lee, K. H., & Jung, J. H. (2020). Analyzing real world tasks of 6th grade textbook from a mathematical modeling perspective: Focused on the curriculum for revised 2011 and 2015. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 20(18), 1313-1340. <http://doi.org/10.22251/jlcci.2020.20.18.1313>
- Kaiser, G., & Stender, P. (2013) Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 277-293). Springer.
- Kang, H., & Choi, E. (2021). Pre-service teachers' errors and difficulties in task modification focusing on cognitive demand. *The Mathematical Education*, 60(1), 61-76. <http://doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.61>
- Kim, H. L., & Lee, K. H. (2016). Pre-service secondary mathematics teachers' modification of derivative tasks. *School Mathematics*, 18(3), 711-731.
- Kim, M., Hong, J., & Kim, E. (2009). Exploration of teaching method through analysis of cases of mathematical modeling in elementary mathematics. *The Mathematical Education*, 48(4), 365-385.
- Kim, M. K. (2010). *Mathematical modeling in the elementary school curriculum*. Kyowoosa.
- Kim, Y. (2020). Teacher education for mathematical modeling: A case study. *East Asian Mathematical Journal*, 36(2), 173-201. <https://doi.org/10.7858/eamj.2020.014>
- Kwon, H. Y., Jang, Y. J., Cho, A. R., & Kwon, O. N. (2022). Investigating the specific application of pedagogical architecture to mathematical modeling instruction design in high school mathematics class. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 22(21), 609-629. <http://doi.org/10.22251/jlcci.2022.22.21.609>
- Kwon, J., & Kim, G. (2013). An analysis of mathematical tasks in the middle school geometry. *The Mathematical Education*, 52(1), 111-128.
- Lee, H., & Kim, G. (2013). Pre-service secondary mathematics teachers' understanding and modification of tasks in mathematics textbooks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 23(3), 353-371.
- Lee, K. H. (2010). Searching for Korean perspective on mathematics education through discussion on mathematical modeling. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 20(3), 221-239.
- Lee, K. H. (2018). Changes in attitude toward textbook task modification using confrontation of complexity in a collaborative inquiry: Two case studies. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer.
- Lee, K., Seo, M., Lee, E., Park, M., & Song, C. (2019). Learning of teacher community through designing of mathematical induction tasks: A case of a co-learning inquiry community. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 29(3), 425-452. <http://doi.org/10.29275/jerm.2019.8.29.3.425>
- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285-311. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2>
- Ministry of Education (2021). *Mathematics 5-2*. Sejong.
- Ministry of Education (2022). *2022 revised mathematics curriculum*. Ministry of Education Notice 2023-33 [supplement 8]. Sejong.
- Mousoulides, N., Christou, C., & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 293-304. <https://doi.org/10.1080/10986060802218132>
- Na, G. S., Park, M. M., Kim, D. W., Kim, Y., & Lee, S. J. (2018). Exploring the direction of mathematics education in the future age. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(4), 437-478. <http://doi.org/10.29275/jerm.2018.11.28.4.437>
- Oh, Y. Y., & Park, J. K. (2019). Exploring the task types of mathematical modeling applied to elementary school. *Korean Journal of Elementary Education*, 30(1), 87-99. <http://doi.org/10.20972/kjee.30.1.201903.87>

- Palsdottir, G., & Sriraman, B. (2017). Teacher's views on modeling as a creative mathematical activity. In R. Leikin, & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness* (pp. 47-55). Springer.
- Park, J. (2019). Prospective elementary mathematics teachers' difficulties on textbook task modification: Focusing on fraction tasks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 29(4), 551-575. <http://doi.org/10.29275/jerm.2019.11.29.4.551>
- Park, S., & Han, S. (2018). Reconstruction and application of reforming textbook problems for mathematical modeling process. *The Mathematical Education*, 57(3), 289-309. <http://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.3.289>
- Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM*, 46(5), 735-749. <https://doi.org/10.1007/S11858-014-0585-Z>
- Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2)
- Slavit, D., & Nelson, T. H. (2010). Collaborative teacher inquiry as a tool for building theory on the development and use of rich mathematical tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(3), 201-221.
- Stein, M. K., & Kaufman, J. H. (2010). Selecting and supporting the use of mathematics curricula at scale. *American Educational Research Journal*, 47(3), 663-693 <https://doi.org/10.3102/0002831209361210>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. S. (2009). *Implementing standards-based mathematical instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM*, 47(7), 1255-1267. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0741-0>
- Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media.
- Sullivan, P., & Mornane, A. (2014). Exploring teachers' use of, and students' reactions to, challenging mathematics tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 193-213. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0089-0>
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.3.0253>
- Tracy, S. J. (2010). Qualitative quality: Eight "big-tent" criteria for excellent qualitative research. *Qualitative Inquiry*, 16(10), 837-851. <https://doi.org/10.1177/1077800410383121>
- Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In S. Llinares, & O. Chapman (Eds.), *The Handbook of mathematics teacher education*, 2 (pp. 107-134). Brill Sense.
- Williams, J., Roth, W. M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo Ferri, R., & Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary mathematics education*. Springer Nature.
- Yim, J. (2022). Various meanings of average and implications for teaching in elementary school. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 26(3), 155-173. <http://doi.org/10.54340/kseme.2022.26.3.1>
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Sage Publications.
- Yun, S., & Chang, H. (2023). An analysis of metacognition of elementary math gifted students in mathematical modeling using the task 'Floor Decorating.' *Communications of Mathematical Education*, 37(2), 257-276. <http://doi.org/10.7468/jksmee.2023.37.2.257>
- Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 15-20.

## Authors' Information

Hye-Yun Jung, Korean Institute for Curriculum and Evaluation, Assistant Research Follower, 1st Author. Corresponding Author.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7465-0482>