The Mathematical Education. Vol. 62, No. 3, 341-362
https://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.3.341

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

Analysis of student noticing in a lesson that emphasizing relational understanding of equals sign

Lee, Yujin
Teacher, Daejeon Heungryong Elementary School

*Corresponding Author: Yujin Lee (kjyjl4231@naver.com)

ABSTRACT

This study analyzed student noticing in a lesson that emphasized relational understanding of equal signs for first graders from four aspects: *centers of focus, focusing interactions, mathematical tasks,* and *nature of the mathematical activity*. Specifically, the instructional factors that emphasize the relational understanding of equal signs derived from previous research were applied to a first-grade addition and subtraction unit, and then lessons emphasizing the relational understanding of equal signs were conducted. Students' noticing in this lesson was comprehensively analyzed using the *focusing framework* proposed in the previous study. The results showed that in real classroom contexts *centers of focus* is affected by the structure of the equation and the form of the task, teacher-student interactions, and normed practices. In particular, we found specific teacher-student interactions, such as emphasizing the meaning of the equals sign or using examples, that helped students recognize the equals sign relationally. We also found that students' noticing of the equation affects reasoning about equation, such as being able to reason about the equation relationally if they focuse on two quantities of the same size or the relationship between both sides. These findings have implications for teaching methods of equal sign.

Key words: student noticing, equal sign, relational understanding, equation-structure

등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 학생의 노티싱[1] 분석

이유진
대전흥룡초등학교 교사

*교신저자: 이유진 (kjyjl4231@naver.com)

초록

본 연구는 초등학교 1학년 학생을 대상으로 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 학생의 노티싱을 초점의 중심, 집중하는 상호작용, 수학 과제, 수학 활동의 본질의 네 가지 측면에서 분석하였다. 구체적으로 선행연구에서 도출한 지도방안을 등호를 처음 도입하는 1학년 덧셈과 뺄셈 단원에 적용하여 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 실행하고, 이 과정에서 나타난 학생의 노티싱을 종합적으로 분석하였다. 그 결과 실제 수업 맥락에서 초점의 중심은 등식의 구조와 과제 형태, 교사와 학생의 상호작용, 교실 관행 등에 영향을 받았으며, 특히 학생이 등호를 관계적으로 인식할 수 있도록 돕는 특정한 교사와 학생의 상호작용을 발견할 수 있었다. 또한 크기가 같은 두 양에 주목하는 경우와 양변의 관계에 주목하는 경우 등식을 관계적으로 추론할 수 있었던 것과 같이 등식에 대한 학생의 노티싱은 등식을 추론하는 방식에 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다. 이러한 연구 결과를 통해 등호의 지도 방안에 대한 시사점을 제시하였다.

주요어: 학생 노티싱, 등호, 관계적 이해, 등식 구조

1 국내에서 노티싱(noticing)은 '주목하기'로 직역하여 사용하거나(예, Lee & Lee, 2019) 원어의 의미를 그대로 살려 '노티싱'으로 사용되기도 한다(예, Pang et al., 2017). 본 연구에서는 Lobato 외 (2013) 연구의 '학생의 수학적 노티싱(students' mathematical noticing)'을 원어의 의미를 그대로 살려 '학생 노티싱'으로 정의하였으며, 이와 구분하여 구체적인 학생 또는 교사의 행동을 서술할 때는 집중하기, 인식하기, 주목하기 등과 같은 용어로 분리하여 사용하였다.

Received July 19, 2023 **Revised** August 03, 2023 **Accepted** August 28, 2023
2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

서론

노티싱은 학자마다 정의하는 방식이 조금씩 다르지만 전체론적인 측면에서 주의를 기울이는 것에 초점을 맞추기도 하고(Cowie et al., 2018; Mason, 2015), 주의를 기울인 것에 대해 어떻게 해석하고 반응하는 것까지 포함하기도 한다(Jacobs et al., 2010; Kaiser et al., 2015). 노티싱 연구의 동향을 분석한 결과 국외에서는 2013년부터 노티싱 관련 연구가 크게 증가했으며, 특히 수학교육과 일반교육학 관련 연구의 비중이 높다는 것을 알 수 있다(König et al., 2022). 국내에서도 노티싱에 대한 관심이 증가하고 있는 추세이지만 Pang 외 (2017)에서 밝힌 바와 같이 국외에 비해 국내 연구는 부족한 실정이며 예비 교사나 현직 교사를 대상으로 수학 수업에 대한 비디오를 활용한 연구가 주로 이루어졌다는 점에서 아쉬움이 있다. 특히 교사의 노티싱은 연구가 활발히 이루어져 왔지만(예, Jacobs et al., 2010; van Es & Sherin, 2006) 학생의 노티싱을 다룬 연구는 국외에도 많지 않으며, 특히 국내에서는 더욱 찾아보기 힘들다.

하지만 최근 학생의 노티싱을 다룬 연구를 살펴보면 학생의 노티싱을 분석하는 것은 학생들이 보다 생산적으로 노티싱하기 위해 무엇이 필요한지 가령, 어떠한 교사의 지원이 필요한지 살펴보는 기초가 된다는 점에서 수학 활동을 조사하는데 중요한 요소가 된다. 구체적으로 Lobato 외 (2013)는 학생의 노티싱과 관련하여 수학 과제의 특성, 교사의 역할, 학생과 학생의 상호작용, 교실 담화 등 다양한 요소가 관계되어 있음을 발견했다. 이처럼 사회적 상호작용이 개인의 인지에 영향을 미친다는 관점에서 실제 교실 상호작용 중에 나타나는 학생의 노티싱을 분석하는 것은 학생 노티싱의 복잡성을 이해할 수 있는 기회를 제공한다. Hunter와 Miller (2022)에서도 학생의 노티싱을 분석한 결과 학생들이 증가패턴에서 수학적 구조를 어떻게 보고 일반화했는지, 이러한 구조 식별과 일반화에 도움이 되는 교수활동이 무엇인지 분석할 수 있었으며, 특히 수학 과제 및 패턴 구조가 학생의 노티싱에 영향을 미칠 가능성이 있고 학생들의 노티싱은 일반화 방식과 직접적으로 연결되어 있다고 밝혔다. 이처럼 학생의 노티싱을 다룬 연구는 학생들이 수학적으로 노티싱한 것과 이러한 노티싱이 학습과 어떻게 연관되는지에 초점을 맞춘다.

한편 등호의 관계적 이해는 학생이 등식에서 어떤 요소에 주목하는지, 등호를 연산-답의 관계로 인식하는지, 좌변과 우변의 관계를 살펴보는지, 좌변과 우변을 각각 전체로 인식하는지 등 학생의 노티싱과 밀접하게 관련되어 있다. 특히 학생의 노티싱은 추론에 영향을 미친다는 점에서 등호 수업에서 학생의 노티싱을 분석하는 것은 학생이 등식을 추론하는 방식과 등호를 관계적으로 이해하기 위해 무엇을 주목하고 무엇을 주목하지 못했는지에 대한 정보를 제공해 줄 수 있다. 이를 통해 등호를 지도하는 과정에서 학생들이 주목해야 할 것이 무엇인지에 대한 시사점을 얻을 수 있다. 이에 본 연구에서는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 학생의 노티싱을 분석함으로써 등호 지도에 대한 시사점을 얻고자 하였다. 구체적으로 선행연구 분석을 통해 도출한 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 적용하고, 이 과정에서 나타난 학생의 노티싱을 사회적 상호 작용, 물질적 자원, 교실 관행의 차원에서 종합적으로 분석하였다. 이러한 연구 결과를 통해 등호에 대한 학생 노티싱에 대한 통찰력을 제공하고 등호를 어떻게 지도할 것인지에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

이론적 배경

학생 노티싱의 연구

노티싱 연구는 주로 교사를 노티싱의 주체로 다루고 있지만(예, Jacobs et al., 2010; Son & Hwang, 2021; van Es & Sherin, 2002), 학생을 노티싱의 주체로 다룬 연구도 있다(예, Hohensee, 2016; Hunter & Miller, 2022; Jones et al., 2022; Lobato et al., 2013; Wilkie, 2022). 대표적으로 Lobato 외 (2013)는 학생 노티싱이 사회적 상호 작용 즉, 일련의 담화 관행과 수학적 과제 특징 사이의 상호 작용을 통해 나타난다고 보았다. 또한 학생들이 선형관계를 나타내는 표에서 함수적 관계보다 재귀적 관계에 주목하며, 학생이 주목한 것은 함수관계를 추론하는 방식에 영향을 미친다고 분석하였다. 이러한 Lobato 외 (2013)의 연구를 기반으로 Hunter와 Miller (2022)는 2학년 학생 29명이 패턴에서 규칙을 찾아 일반화하는 수업 활동을 이해하기 위해 교실 상호작용 중에 나타나는 학생 노티싱에 대해 분석했으며, Wilkie (2022)는 수업에서 이차방정식 과제를 해결하는 두 쌍의 10학년 학생의 노티싱을 분석하였고, Hohensee (2016)은 7,

8학년 학생 7명이 처음 이차함수를 학습하는 수업과정과 면담에서 학생 노티싱을 분석하였다. 반면 학생 노티싱을 살펴보았지만 Jacobs 외 (2010)의 연구를 기반으로 예비교사들이 새로운 수학 과제를 해결하는 과정에서 협업 관행에 대한 노티싱을 분석한 연구도 있으며(Campbell & Yeo, 2023), 기존의 교사 노티싱에 초점을 맞춘 인지적 분석틀이나 방법론이 교실에서 교사와 학생의 상호작용적이고 관계적인 상황에 적합하지 않다는 관점에서 노티싱의 상호보완적인 측면에 초점을 맞춰 교사와 학생 전체의 '상호 노티싱(Reciprocal noticing)'을 분석한 연구도 있다(Dominguez, 2019). 본 연구에서는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업 상황에서 학생의 노티싱을 분석하고자 하였기 때문에 Lobato 외 (2013)의 연구를 기반으로 학생 노티싱을 분석하였다.

학생 노티싱의 개념과 분석 방법

Lobato 외 (2013)는 노티싱을 여러 정보 중에서 특정한 수학적 특징이나 규칙성을 선택하고 해석하여 활동하는 것으로 정의했다. 구체적으로 노티싱을 반영적 추상화의 학습 과정에 근거한 것으로 보고 여러 정보가 주어졌을 때 하나의 차원이나 정보 조각을 선택하는 실행적인 주의 기울이기(excutive attention)의 개념을 확장하여 반영적 추상화의 초기 단계의 양상들로부터 노티싱을 관찰할 수 있다고 밝혔다. 예를 들어 y=3x의 선형 함수표에서 한 학생은 연속적인 y값의 차이가 6으로 일정한 것에 주목했지만, 다른 학생은 y값과 x값(예, 0, 4, 8, 12) 사이의 차이를 패턴으로 주목했으며, 또 다른 학생은 x값이 y값의 $\frac{1}{3}$ 이라는 점에 주목했다. 또한 학생이 주목한 것은 함수를 추론하는 방식에 상당한 영향을 미친다고 주장했다. 즉, 교사 노티싱이 교사의 교육학적 반응에 영향을 주는 것처럼 학생 노티싱은 후속 과제에서 학생의 수학적 추론에 영향을 미친다고 보았다. 예를 들면, 'a+b=c+d'와 같은 등식에서 'a+b=c'에만 주목하는 경우 새로운 과제에서도 등식을 표준구조에 기반하여 연산적으로 추론할 것이라고 예상할 수 있다.

이처럼 노티싱을 추론과 구별하여 다루는 이유를 Lobato 외 (2013)는 학생들의 추론이 어떻게 발전하는지에 대한 미시적 수준의 분석에서 빠질 수 있는 거시적 수준의 분석을 제공하기 위해서라고 밝혔다. 구체적으로 속도-시간 그래프를 학습하는 학생의 추론을 분석하면 학생들이 (a) 그래프를 이해하고 (b) 속도를 이해하기 위해 그래프에서 무엇을 세야 하는지 인식하고 (c) 그래프의 음수 영역이 엘리베이터의 하강 움직임을 의미한다는 것을 인식할 수 있지만 노티싱을 분석하면 교사에게 학생들은 해당 수업에서 두 번째 양(시간)에 주목하지 못했다는 정보를 추가적으로 제공할 수 있다고 보았다. 즉, 학생들이 특정 수학적 아이디어의 기초로서 중요한 수학적 상황의 특징을 선택했는지 알 수 있다고 보았다. 이때, Lobato 외 (2013)에서 설명한 노티싱은 반영적 추상화의 초기 단계의 양상으로부터 관찰될 수 있고, 지식이란 반영적 추상화의 결과이며, 추론은 노티싱과 지식보다 포괄적인 의미로 하나 또는 유기적으로 연결된 여러 지식 요소들이 주어진 문제 상황의 해결을 목적으로 작용하는 것으로 구분하여 제시하였다(Lee & Park, 2018, p. 427). 본 연구에서도 Lobato 외 (2013)의 '학생의 수학적 노티싱' 개념을 '학생 노티싱'으로 정의하였으며, Lee와 Park (2018)의 노티싱, 지식, 추론의 구분에 따라 결과를 분석하였다.

Lobato 외 (2013)는 노티싱을 개인의 인지, 사회적 상호작용, 물질적 자원 및 교실 관행(normed practices)에 걸쳐 분포되는 복잡한 현상으로 규정하고 이를 분석하기 위해 분석틀(focusing framework)을 초점의 중심(Centers of Focus, 이하 CoF), 집중하는 상호작용(Focusing Interaction, 이하 FI), 수학 과제(Mathematical Task, 이하 MT), 수학 활동의 본질(Nature of Mathematical Activity, 이하 NMA)과 같이 제시했다. 우선 '초점의 중심'은 학생들이 노티싱하는 수학적 성질, 특징, 규칙성, 개념(conceptual objects)이며, '집중하는 상호작용'에는 담화(몸짓, 다이어그램, 말 포함)와 학생들이 특정 초점의 중심에 주의를 기울이도록 돕는 교수 행위가 포함된다. '수학 과제'는 학생들의 노티싱에 영향을 미치는 과제의 특성을 말하며, '수학 활동의 본질'은 학생과 교사의 행동을 관리하고 '초점의 중심'을 생성하는데 기여하는 규범을 포함한다.

Lobato 외 (2013)의 분석틀을 활용한 연구를 살펴보면 Hunter와 Miller (2022)는 2학년 학생들이 다양한 패턴 과제에서 규칙을 찾아 일반화하는 교수·학습 활동을 이해하기 위해 교실 상호작용 중에 나타나는 학생 노티싱에 대해 분석했다. 구체적으로 학생들이 상황별 증가패턴의 수학적 구조를 보는(see) 방법과 노티싱하는 방법 및 교사가 학생의 학습을 지원하기 위해 조정하는 방법을 분석하였다. 이때 교실에서 개발된 협력적 맥락과 집단 학습을 다루기에 적합한 Lobato 외 (2013)의 분석틀을 사용하여 분석하였으며, 선행 연구에서 제시한 함수적 사고의 수준을 기반으로 주제별 접근 방식을 사용하여 과제별로 CoF와 FI를 분석하고 관련 있는 CoF와 FI을 순서에 맞게 연결지어 제시하였다. 다만 Lobato 외 (2013)에서는 중학교 1학년 학생 8~9명으로 구성된 소그룹을 대상으로 개별

학생들의 초점의 중심을 각각 분석하여 그 변화를 탐색한 것과 달리 Hunter와 Miller (2022)는 초등학교 2학년 29명으로 구성된 학급 수업에서 전체 학생들의 초점의 중심을 분석하였다. 본 연구도 등호의 관계적 이해를 강조한 초등학교 1학년의 실제 교실 수업 과정에서 나타나는 학생의 노티싱을 살펴보고자 하였으므로 교실 상호작용 중에 나타난 학생 노티싱을 분석하고자 개발된 Lobato 외 (2013)의 분석틀을 활용하였다. 더불어 실제 수업 상황을 분석대상으로 하였기 때문에 학생 개개인의 초점의 중심과 그 변화를 살펴보기보다 Hunter와 Miller (2022)와 같이 전체 학생들을 대상으로 초점의 중심과 그 변화를 분석하였다.

등호의 관계적 이해

등호의 관계적 이해(relational understanding)는 등호가 동치 관계를 표현한다는 사실을 이해하는 것이다(Blanton et al., 2011). 하지만 학생들은 다양한 관점에서 등호를 이해하며, 이를 연구마다 조금씩 다르게 분류하고 있다. 우선 등호가 관계적 기호임을 이해할 수 있는지 없는지를 기준으로 학생의 이해를 구분한 연구가 있다. Kirean (1981)은 학생이 등호를 '무엇인가를 하라는 신호(do something signal)'로 생각하거나 문제와 답을 구분하는 기호로 생각하는 등 등호를 잘못 이해하는 연산적 이해와 등호가 양변이 같은 값인 산술적 동치를 나타내거나 등가 관계를 나타내는 등 등호를 잘 이해하는 관계적 이해로 구분하였다.

두 번째로 학생이 이해할 수 있는 등식의 구조로 등호에 대한 학생의 이해 수준을 구분한 연구가 있다. 등식의 구조는 크게 표준구조인 'a+b=c'와 비표준구조인 'a=b+c', 'a=b', 'a+b=c+d'로 나눌 수 있는데 표준구조의 등식만 이해할 수 있는 확고한 연산적 사고(operational thinking) 수준, 비표준구조인 'a=b+c', 'a=b'의 등식까지 이해할 수 있는 초기 관계적 사고(emergent relational thinking) 수준, 모든 구조의 등식을 이해할 수 있는 관계적 사고(relational thinking) 수준으로 나누었다(Blanton et al., 2018).

마지막으로 양변이 같음을 추론하는 방식으로 등호에 대한 이해 수준을 구분한 연구가 있다. Stephens 외 (2013)는 관계적 이해를 양변의 같음을 양변을 계산하여 확인하는 관계-계산적 관점(relational–computational view)과 양변의 같음을 양변의 관계를 통해 확인하는 관계-구조적 관점(relational–structural view)으로 나누었다. 예를 들어 '57+22=58+21'이 주어졌을 때, '57+22=79'와 '58+21=79'를 계산하여 등식이 참이라고 판단한 경우는 관계-계산적 관점이며, 58이 57보다 1만큼 크고 21이 22보다 1만큼 작기 때문에 등식이 참이라고 판단한 경우는 관계-구조적 관점에 해당한다. 본 연구에서는 선행연구를 토대로 등호에 대한 관계적 이해를 학생이 등호가 동치 관계를 나타내는 기호임을 알고 관계-구조적 관점과 같이 양변이 같음을 비교할 때 등식의 구조를 추론하는 것으로 정의하였다.

이러한 선행연구를 바탕으로 저학년 학생들의 등호 이해를 조사한 선행연구를 살펴본 결과, 등호의 의미를 제대로 서술하지 못하고 비표준구조의 등식을 이해하기 어려워했다. 구체적으로 Matthews 외 (2012)에서 2~6학년 학생을 대상으로 1) 등식 해결(open equation solving), 2) 등식 구조, 3) 등호 정의 세 가지 유형에 관한 문항을 제시하여 검사한 결과 'a+b=c', 'a=b+c', 'a+b=c+d'의 순으로 등식을 이해하기 어려워하고, 등호의 정의를 묻는 유형의 문제를 다른 유형(등식 구조 유형, 등식 해결 유형)의 문제보다 어려워했으며, 빈칸을 사용한 등식 해결 문항보다 변수를 포함한 등식 해결 문항을 더 어려워하는 등의 특징을 발견할 수 있었다. 좀 더 어린 유치원 학생들을 대상으로 한 Blanton 외 (2018)의 연구에서도 1) 등호 정의, 2) 등식의 참 거짓 판별, 3) 등식에서 미지수 찾기의 세 가지 유형에 관한 문항을 제시하여 사전 검사한 결과 유치원 학생들은 비표준구조의 등식에 대해서는 제대로 이해하지 못했다. 구체적으로 사전 검사에서 모든 구조의 등식을 이해할 수 있는 관계적 사고 수준이 나타나지 않았으며, 이러한 결과는 학생들이 정규교육과정 이전부터 비공식적 경험과 같은 요인들로 인해 이미 등호에 대한 연산적 관점이 형성되었기 때문이라고 분석했다.

저학년 학생들을 대상으로 한 국내 연구를 살펴보면 2~6학년을 대상으로 등호 이해를 검사한 Kim 외 (2016)의 연구결과 초등학교 2학년 학생들의 등호 이해가 가장 부족했으며, 학년이 올라감에 따라 대체로 학생들의 등호 지식이 발달함을 알 수 있다. 특히 주목할만한 점은 가장 최근에 등호의 개념을 학습한 2학년 학생들이 등호 정의 유형에서 가장 낮은 정답률을 보였다는 것이다. 이러한 문제점은 1학년 학생들을 대상으로 Kim과 Pang (2023)에서도 유사하게 나타나는데, 등호를 도입하는 과정에서 다수의 학생이 등호의 의미를 '~는'으로 생각하거나 비표준구조의 등식을 제대로 읽지 못하는 등의 모습을 보였다.

연구 방법

본 연구는 1학년 1학기 덧셈과 뺄셈 단원에서 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 구현하고 그 과정에서 나타난 학생의 노티싱을 분석하였다. 실제 수업 과정에서 나타난 학생의 행동, 교사의 행동, 학급 전체 논의, 학생의 개별 활동 등을 고려하여 학생의 노티싱에 대한 심층적인 분석을 위해 Yin (2014)의 사례연구방법을 적용하였다.

연구 대상

본 연구는 학생들이 등호를 처음 학습하는 과정에서 등호를 어떻게 이해하고 등식의 구조를 어떻게 파악하는지 살펴보고자 하였기 때문에 2015 수학과 교육과정에서 등호를 처음 도입하는 1학년을 대상 학년으로 선정하였으며, 해당 학년 1개 학급의 학생(남 11명, 여 14명)과 담임교사를 대상으로 하였다. 해당 학급의 학생들은 학력 수준과 가정의 사회경제적 수준이 대부분 중위 수준에 속하며, 한글 미해득 학생이 3명 있지만 듣고 말하기에는 문제가 없는 수준으로 본 수업을 구현하기에 적합하다고 판단하였다. 더불어 수업교사의 경우 초등수학교육 석사 학위 소지자로 초등 수학 교육에 대한 전문성을 가지고 등호 지도 방안에 관심을 가진 교육 경력 8년차 1학년 담임교사를 선정하였다.

연구 설계

본 연구는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 초등학교 1학년 학생들의 노티싱을 분석하고자 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 재구성하였다. 이를 위해 우선, 등호 지도와 관련된 선행연구 중 초등학교 1학년 학생들에게 적용 가능한 지도방안을 Table 1과 같이 도출하였다. 구체적으로 국내 1학년 학생들을 대상으로 한 Kim과 Pang (2023)에서 활용한 지도방안을 토대로 선행연구에서 제시한 등호 지도방안을 정리하였으며 등호 도입단원에서 1학년 학생들의 수준을 고려하여 수정하였다. 더불어 학생들의 등호 이해 수준을 검사하기 위해 활용한 검사문항 중 등식 구조 과제와 등식 해결 과제를 참고하여 지도방안을 적용하기에 적합한 등호 과제로 ‘등식의 참·거짓 판별 과제’, ‘등식에서 □의 값을 찾는 과제’, ‘수카드를 활용한 등식 만들기 과제’, ‘활동판을 활용한 등식 만들기 과제’를 선정하여 1학년 수준에 맞게 구안하였다.

Table 1. Teaching methods that emphasize relational understanding of equals signs.

Instructional factors	Teaching methods	Rationale
Emphasize the definition of the equals sign	- Represent equations using relational words, models, etc. - Highlight two quantities that need to be compared - Utilize equations of all structure	Blanton et al., 2018 McNeil et al., 2015
Treating equations as objects of reasoning	- Reason about equations in their entirety rather than as a series of computations. - Determine whether an equation is true or false by comparing both sides of the equation.	Donovan et al., 2022 Molina & Ambrose, 2008
Using equations with unknowns	- Use structurally meaningful equations - Compare both sides of an equation and look at the relationship between the two quantities to find unknowns	McNeil et al., 2015 Stephen et al., 2013

다음으로 연구 목적에 부합하는 1학년 1학기 3단원 덧셈과 뺄셈 단원을 선정하고 지도방안을 반영하여 단원의 차시별 지도 계획을 설계하였다. 구체적으로 덧셈과 뺄셈 단원 총 15차시 중 전면 재구성한 8, 13, 15차시를 제외한 차시는 교과서에 제시된 활동을 그대로 유지하였으며 등호의 의미를 강조하기 위해 비순차적으로 등식을 읽고 쓰며, 저울 모델과 수직선을 활용하는 등의 지도방안을 기존 수업 활동에 맞춰 적용하였다. 또한 기존 8, 13, 15차시는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업으로 전면 재구성하여 13~15차시에 배열하여 적용하였으며, 13차시는 기존 8차시의 말판 놀이로 덧셈하기, 덧셈식 만들기 등의 활동을 주어진 식의 참 거짓을 판별하고, □ 의 값을 구하는 활동으로, 14차시는 기존 13차시의 덧셈식과 뺄셈식을 쓰고 이야기하는 활동에서 수카드를 활용한 식 만들기 활동으로, 15차시는 기존 15차시의 덧셈식과 뺄셈식을 만들어보는 활동을 활동판을 활용한 식 만들기 활동으로 변경하여 구성하였다. 본 연구에서는 교실 전체 논의를 통해 학생의 노티싱이 잘 드러난 13차시의 수업 사례를 중점적으로 분석하였다.

Table 2. Lesson plan for a reorganized lesson 3

Unit	Unit title	Teaching methods	Learning content
2 ~3	Let's compose and decompose	Emphasize the definition of the equals sign	- Composition and decomposition numbers up to 9
4	Let's talk	Emphasize the definition of the equals sign	- Understand the meaning of addition and subtraction by looking at pictures, talking about addition and subtraction situation, and using concrete objects to add or subtract.
5	How do we represent addition	Emphasize the definition of the equals sign	- Recognize addition situations and add with objects or fingers - Write and read addition expressions using +, = symbols in addition situations based on concrete activities
6 ~7	Let's do addition	Emphasize the definition of the equals sign	- Adding using drawing strategies, expression building strategies, and more - Adding with models (connecting cubes), go stones, and counting boards
8	How do we represent subtraction	Emphasize the definition of the equals sign	- Recognize subtraction situations and subtract with objects or fingers - Write and read subtraction expressions using -, = symbols in subtraction situations based on concrete activities
9~10	Let's do su btraction	Emphasize the definition of the equals sign	- Subtracting using drawing strategies, expression building strategies, and more - Subtracting with models (connecting cubes), go stones, and counting boards
11	What happens when you add or subtract zero?	Emphasize the definition of the equals sign	- Knowing and adding that you can add any number to zero or any number to zero - Knowing and subtracting that you can subtract zero from any number or subtract any number with the result being zero.
12	How much do you know?	-	- Summarize what you learned in this lesson by solving problems
13	Let's do addition and su bstracion	Full Reorganization (Original unit 8)	- Deciding whether equations are true or false - Solving open equation
14	Let's play with addition and substraction	Full Reorganization (Original unit 13)	- Find two quantities of the same size (number cards) to create equations of different structures - Deciding whether equations are true or false
15	Let's create addition and sub straction	Full Reorganization	- Create addition and subtraction expressions with different structures - Deciding whether an expression created is true or false

13차시 수업 과제는 크게 두 가지로 등식 구조 과제와 등식 해결 과제이다. 이는 선행연구(예, Kim et al., 2016; Matthews et al., 2012)에서 학생의 등호에 대한 이해를 확인하기 위해 사용된 것으로 등식 구조 과제인 '등식의 참거짓 판별 과제'는 'a+b=c'인 표준구조뿐만 아니라 'a=b+c', 'a=b', 'a+b=c+d'와 같은 비표준구조의 등식도 모두 포함하도록 설계하였으며, 학생이 주어진 등식의 구조를 어떻게 해석하는지, 등식에서 두 양을 어떻게 인식하는지, 등호의 의미를 어떻게 파악하는지에 따라 해당 등식이 참인지 거짓인지 판별할 수 있을 것이라 기대되었다. 두 번째로 등식 해결 과제인 '등식에서 □의 값을 찾는 과제'는 'a+b=c+d' 구조의 등식에 □의 위치를 다양화하여 설계하였으며, 학생이 주어진 등식의 구조를 어떻게 해석하는지, 양변을 전체로 인식할 수 있는지, 양변을 어떻게 비교하는지에 따라 □의 값을 찾을 수 있을 것이라 기대되었다.

과제를 선정한 후에는 선행연구 분석을 통해 도출한 지도방안(Table 1)을 반영하여 등호의 관계적 이해를 강조한 수업을 계획하였으며 그 중 13차시의 수업 계획은 Table 3과 같다.

Table 3. Lesson plan for unit 13 that emphasizes relational understanding of equal sign.

Steps	Activities
Introduction	- Review a definition of the equal sign - Represent addition situations as expressions
Understanding of equation structure	[Identify an equation as true or false] - Recognize and understand task (individual) - Discuss the truth of an equation (whole) - Identify if an equation is true by comparing two sides without computing (whole)
Solving open equation by comparing two sides	[Find the missing value in an open equation] - Recognize and understand task (individual) - Find the missing value in an open equation (with teacher) - Find the missing value in 'a+b=c+d' (whole) - Find the missing value in an open equation by comparing two sides without computing (whole)

자료수집 및 분석

본 연구는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타난 학생의 노티싱을 분석하기 위해 질적 분석 방법이 사용되었다. 이를 위해 학생-교사 및 학생-학생 상호작용을 포착할 수 있도록 모든 수업 장면을 비디오로 녹화했으며, 수업 영상은 모두 전사하여 분석 자료로 활용하였다. 더불어 학생의 활동지, 활용 교구 등을 분석 자료로 활용하였다. 수집한 자료는 반복적 비교 분석법(constant comparative method)의 개방코딩(open coding), 범주화, 범주 확인의 절차를 통해 Lobato 외 (2013)의 분석틀에서 제시한 네 가지 구성 요소인 초점의 중심, 집중하는 상호작용, 수학 과제, 수학 활동의 본질을 바탕으로 각 구성요소에 대한 하위요소를 도출하였다 (Table 4, 5, 6 참조).

Table 4. Data analysis for the focusing framework with examples.

Focusing framework	Description (Lobato et al., 2013, p.814)	Examples of analysis (In this study)
Mathematical Tasks (MT)	Features of the tasks that influence students mathematical noticing and discourse	Using all of equation structures Highlighting the equal sign Placing the missing value in an open equation differently Arranging tasks to reflect student understanding
Centers of Focus (CoF)	Student noticing of properties, features, and regularities of mathematics	Understanding all structure of equations including a+b=c; a=b+c, a=b; a+b=c+d Compare two sides to identify if an expression is true or find the missing value
Focusing Interactions (FI)	Discourse and teaching actions that assist students to attend to particular centers of focus	Teacher supported move to facilitate noticing of structure of equation, relationship on both sides; or promote mathematical discussion, question posing, comparisons without counting; or highlighting the definition of equal sign
Nature of Mathematical Activity (NMA)	Participatory organization of the students and teacher contributes to students accessing and reasoning their mathematics	Whole class discussions Requiring individual students to state whether they agree or not with mathematical argumentation Check individual student consent in full chat free speech atmosphere

이때, 첫 번째 구성 요소인 초점의 중심(CoF)은 수업 전사자료를 개방코딩하여 분석하였고 추가적으로 수업 영상에서 나타난 비언어적 표현, 몸짓 등을 활용하였다. 개방코딩에서 분류된 내용은 Matthews 외 (2012)의 등호 지식에 대한 구성 지도에서 각 수준을 나누는 핵심 등식 구조와 전략을 근거로 범주화하였으며, 구성된 범주가 연구 문제와 원자료를 잘 반영하는지 확인하는 과정을 진행하였다(Ryu et al., 2018). 이때 초점의 중심(CoF) 코드는 Table 5처럼 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기, 답을 중심으로 등식 인식하기, 크기가 같은 두 양 즉, 양변을 각각 전체로 인식하기, 양변의 관계에 주목하여 서로 같음을 인식하기로 총 네 가지이며, 시간 순서에 따라 번호를 부여함으로써 각 초점의 중심에 해당하는 번호가 여러 개인 경우가 존재한다.

Table 5. Inductive code used to identify center of focus in the classroom videotaped data.

Task	CoF codes	Description of codes	Example
Task 1	CoF1, 3, 5 :Focusing on only some elements of an equation or recognizing in one direction, ope ration-answer sequence	Students find the answer to determine whether an equation is true or false, but instead of focusing on the equality of the two sides, they focus on only some elements of the equation (numbers, symbols) or perceive the equation in one direction, operation-answer sequence.	In 7=5+2, focus on the numbers 7, 5, and 2 to recognize it as 7+5=2, or explain that the order of the 7 and 5+2 is reversed.
	CoF4, 5 :Recognize equations with answers	Students find the answer of the operations presented in any order to determine whether an equation is true or false, and recognize that an expression without operations is also true in the sense that it has an answer. However, instead of focusing on the equality of the two sides, they only focus on some elements of the equation (numbers, symbols).	In 4+3=5+2, focus on the 5 on the right side, explaining that the expression is incorrect because the answer to 4+3 is not 5.
	CoF6 :Recognize equivalent amounts, each side as an entirety	Students focus on whether the two sides of the equation are the same to determine whether an equation is true or false. Instead of noticing the relationship between the two sides of the equation, they calculate both sides to see if they are equal. Recognize all elements of an equation (numbers, symbols) and focus on whether the sides are equal in any order.	They explain that 4+3=5+2 is correct because 4+3 and 5+2 are each 7. However, they fail to note the relationship between 4 and 5, 3 and 2.
	CoF2 :Recognize equality by noticing the relationship between both sides or equations	Students focus on whether the two sides of the equation are the same to determine whether an equation is true or false. They notice the relationship between the sides of the equation to see if they are equal. They can also note the relationship between the equations.	Since 5+2=7 is the correct equation, 2+5=7 is also correct. This is because we added them in a different order, 5+2=7, without having to do any calculate.
Task 2	CoF7, 9 :Focusing on only some elements of an equation or recognizing in one direction, ope ration-answer sequence	Students find the answer the given operations in the equation to find the value of □. But instead of focusing on the equality of the two sides, they focus on only some elements of the equation (numbers, symbols) or perceive the equation in one direction, operation-answer sequence.	In □+2=7+2, focus on the □, 7, and 2, to recognize it as □+2=7 and answering that the value of □ is 5.
	CoF9, 10 :Recognize equivalent amounts, each side as an entirety	Students focus on whether the two sides to find the value of □. Instead of noticing the relationship between the two sides of the equation, they calculate both sides tosee if they are equal. Recognize all elements of an equation (numbers, symbols) and focus on whether the sides are equal, in any order.	In 7+2=6+□, they answer the value of □ as 3 because 7+2 is 9.
	CoF8, 10 :Recognize equality by noticing the relationship between both sides or equations	Students focus on whether the two sides to find the value of □. They notice the relationship between the sides of the equation. They can also note the relationship between the equations.	In □+2=7+2, compare the two sides without calculating 7+2 and answer that the value of □ is 7.

다음으로 두 번째 구성요소인 집중하는 상호작용(FI)은 Lobato 외 (2013)와 선행연구로부터 도출한 지도방안(Table 1)을 근거로 수업 전사자료를 개방 코딩하여 분석하였고 추가적으로 수업 영상에서 나타난 비언어적 표현, 몸짓 등을 활용하여 집중하는 상호작용(FI) 코드를 Table 6과 같이 제시하였다. 이때 Lobato 외 (2013)에서 '강조하기(highlighting)'는 눈에 띄도록 라벨링하기, 표시하기, 주석 달기(annotating), 동작을 취하는 것을 의미하는데, 본 연구에서도 이와 유사하게 '등호의 의미 강조하기'를 등호가 두 양이 같다

Table 6. Used to identify focusing interactions in the classroom videotaped data.

FI codes	Description of codes	Example
Highlighting the meaning of equals signs	The teacher reinforce through gestures, models, and verbals that the equals sign is a relational symbol	Writing the meaning of an equal sign on the board, mimicking a scale using two arms, and making circle on each side.
Presenting equations that reflect student errors	The teacher provide specific equations that reflect students' errors so they can see how their thinking is flawed.	Presenting "4+3=7+2" to reflect the student's error that "4+3=5+2" is incorrect because the answer is not 5.
Presenting equations with quantities, not numbers	The teacher present equations with specific quantities rather than numbers so that both sides can be recognized as a whole.	Presenting a situation with two students on the right and left sides of the scale.
Transforming equations to recognize them as objects of reasoning	The teacher transform eqations that allows students to compare both sides or compare two equations to get a value of □.	In the equation 7+2=7+2, transforming the 7 on the left-hand side into a 6 to give the situation 7+2=6+□.

는 것을 나타내는 관계적 기호임을 몸짓, 모델, 말 등을 통해 강조하는 것으로 코드화하였다. 이 외에도 '학생 오류와 이해를 반영한 등식 제시하기', '수가 아닌 양을 이용한 등식 제시하기', '등식을 변형하는 활동을 통해 추론의 대상으로 인식하기'의 총 네 가지 집중하는 상호작용이 분석되었다.

세 번째 구성 요소인 수학 과제(MT)는 Matthews 외 (2012)의 검사 문항 유형을 근거로 초점의 중심과 관련된 수학 과제의 특징 즉, 학생들이 수학적으로 노티싱하는 것에 영향을 미치는 것으로 보이는 수학 과제의 특성과 제약, 수학적 과제와 학생과의 관계(affordance)를 분석했다. 예를 들어 모든 구조의 등식을 활용한 수학 과제는 표준구조의 등식만 활용할 때보다 등호를 관계적 기호로 주목할 수 있다. 반면 참·거짓을 판별하거나 □의 값을 구하는 과제에서 한 등식만 대상으로 한 제약 조건은 등식과 등식 사이의 관계를 추론하는 데 영향을 줄 수 있다.

마지막 구성 요소는 교실에서의 수학 활동의 본질(MNA)로 초점의 중심이 출현하는데 영향을 미치는 교실 규범이나 학생과 교사의 역할을 분석했다. 예를 들어 전체 논의에서 학생의 자유로운 발화를 허용하는 분위기나 전체 논의에서 제시된 의견에 대해 학생들이 동의 여부를 표시해야 하는 등의 역할을 통해 더 다양한 초점의 중심이 관찰될 수 있다.

이러한 수업의 전반적인 내용 및 초점의 중심, 집중하는 상호작용을 이해하는데 도움을 주고자 네 가지 요소 중 수학 과제를 먼저 제시하였다. 또한 초점의 중심과 집중하는 상호작용 사이의 관계를 파악하기 용이하도록 하위 코드별로 분리하여 기술하지 않고 수업 흐름에 맞춰 변화가 생길 때마다 새로운 번호를 부여하여 기술하였다.

결과 분석 및 논의

등호의 관계적 이해를 강조한 수업 전반에 걸쳐 드러나는 학생 노티싱을 분석하기 위해 우선 과제별로 각각 수학 과제(MT), 초점의 중심(CoF), 집중하는 상호작용(FI)을 제시하여 서술하고 마지막으로 수학 활동의 본질(NMA)에 대한 결과를 종합적으로 제시하였다.

수학 과제 1(MT 1): 등식의 참·거짓 판별 과제

과제 1은 의도적으로 다양한 구조의 등식을 포함하도록 설계되었다. Matthews 외 (2012)의 검사 결과 학생들은 표준구조에서 점점 더 벗어날수록 즉, 좌변에만 연산이 포함된 등식, 우변에만 연산이 포함된 등식, 양변에 연산이 모두 포함된 등식의 순으로 어려워했다. 이러한 연구 결과를 반영하여 과제 1에서 가장 먼저 'a+b=c' 구조의 등식을 3개를 먼저 제시하고 이어서 'a=b+c', 'a=b', 'a+b=c+d' 구조의 등식을 차례로 배치하였다. 구체적으로 Figure 1처럼 '4+3=7' 등식을 제시한 후에 이를 변형한 '3+4=7' 등식을 다음에 제시하고 이어서 '3+4=7'과 양변의 크기가 7로 같은 등식 '5+2=7'과 '7=5+2'를 차례로 제시한 후, 'a=b' 즉, '7=7'을 제시하고, 마지막으로 'a+b=c+d'인 '4+3=5+2'를 제시하였다. 이는 학생들이 주어진 덧셈상황을 나타낸 '4+3=7'을 기본으로 4+3 즉, 7과 같은 크기인 5+2를 제시하여 크기가 같은 양을 다루는 등식을 다양하게 제시한 후, 이를 활용한 '7=7', '4+3=5+2'라는 등식을 마지막에 제시하도록 계열을 구성한 것이다. 또한 등호의 개념을 도입하는 교과서 장면에서 사용한 것처럼 '+' 와 '=' 기호의 색을 빨간색과 파란색으로 통일하여 학생들이 등식을 인식할 때 기호를 헷갈리지 않도록 강조하였다.

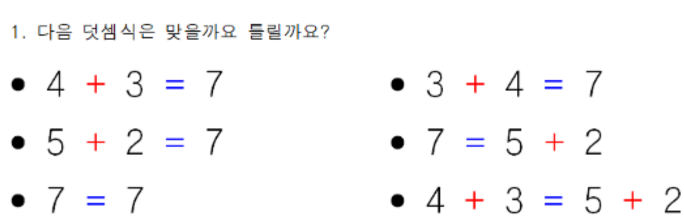


Figure 1. Mathematical task 1

초점의 중심 1(CoF 1): 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기

교사는 우선 등식의 참·거짓을 판별하는 과제를 다루기 전에 이전 시간에 배웠던 내용을 상기시키며 기호 '+', '='의 의미를 확인하고 물 밖에 위치한 오리 4마리와 물 안에 위치한 오리 3마리를 합하는 상황으로 수직선을 활용하여 '4+3=7'을 설명했다. 이후 학생들에게 등식의 참·거짓을 판별하는 문제에 대해 개별적으로 생각할 수 있는 시간을 약 3분 정도 제시한 뒤 전체 논의를 진행하였다. 전체 논의는 학생들에게 등식을 제시하고 자신이 생각하는 등식의 참·거짓에 맞게 손을 들어보도록 안내한 뒤 각각의 의견에 대해 그 이유를 발표하는 방식으로 진행되었다. 그 과정에서 학생들은 'a+b=c' 구조의 등식('4+3=7', '3+4=7', '5+2=7')은 참임을 대부분 잘 구별했다. 구체적인 학생의 반응을 살펴보면 '4+3=7'의 등식이 참임을 "4 더하기 3은 7이니깐 맞아요."와 같이 설명하는 모습이 나타났으며, 이를 통해 학생들이 좌변의 결과값을 제시하고 우변의 값과 비교하는 방식 즉, 왼쪽에서 오른쪽으로 등식을 일방향적으로 인식하는 것을 볼 수 있었다. 특히 수업 도입부에서 등호의 의미를 '같다'라고 강조해서 설명하고 등식을 비순차적으로 읽었지만 '4 더하기 3은 7과 같다' 혹은 '4와 3의 합은 7과 같다'와 같이 등호 의미에 주목하는 답변은 나오지 않았다. 이러한 학생들의 반응을 종합하여 보면 등호를 연산적으로 인식하고 있음을 알 수 있다.

초점의 중심 2(CoF 2): 식 또는 양변 사이의 관계에 주목하여 서로 같음을 인식하기

학생들은 제시된 과제에서 두 번째 등식인 '3+4=7'이 제시됐을 때, CoF 1에서 보였던 것처럼 좌에서 우로 일방향적이고 연산적으로 등식이 참임을 설명했다. 하지만 교사가 "더하지 않고 알 수 있는 방법은 없을까요?"라고 질문하자 "순서만 바꿔서 더해도 똑같아요."라고 대답하였고 '4+3=7'과 '3+4=7' 두 등식 사이의 관계에 주의를 기울이며 초점의 중심이 이동한 것을 볼 수 있었다. 이러한 CoF 2는 '5+2=7'에서도 나타났는데 '5+2=7'은 CoF 1에서 보였던 초점의 중심처럼 좌변의 답을 찾아 등식이 참임을 설명했지만 '5+2=7'로부터 과제에 제시되지도 않은 등식 '2+5=7'을 이끌어내는 모습을 볼 수 있었다. 이처럼 학생들은 주어진 'a+b=c' 등식이 참임을 설명할 때는 CoF 1이 유지되는 모습을 보였지만 'a+b=c'와 연관된 'b+a=c'가 주어졌을 땐 두 등식 사이의 관계를 주목할 수 있었다. 또한 제시된 등식을 연산-답의 관계로 인식하는 것이 아니라 계산하지 않고 참인 다른 등식을 활용하여 참 거짓을 판별했다는 점에서 등식을 자체를 추론의 대상으로 다룰 수 있음을 알 수 있다.

초점의 중심 3(CoF 3): 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기

CoF 2에서 서로 다른 등식 사이의 관계를 통해 즉, '4+3=7'과 '3+4=7'이 순서만 바꾸어 더한 것임을 알고 '3+4=7'이 옳다고 추론할 수 있었던 학생들이 '4+3=7', '3+4=7'과 '5+2=7', '2+5=7' 사이의 관계에는 주목하지 못했다. 구체적으로 '4+3=7'에서 4에 1만큼 더 더해주고 3에 1만큼 빼주면 똑같이 7이기 때문에 '5+2=7'도 맞다고 추론할 수 있기를 기대했지만 학생들은 "4+3=7만 보고 5+2=7이 옳은지 알 수 있을까요?"라는 요청에도 두 등식 사이의 관계에 주목하지 못하고 각각 4+3와 5+2의 연산에 집중하여 등식이 참임을 설명하는 CoF 1이 유지됨을 볼 수 있었다. 이처럼 제시된 등식의 특성에 따라 두 등식 사이의 관계에 주목하기도 하고 주목하지 못하기도 하는 특성을 발견할 수 있었다. 이어서 과제 1에서 처음으로 'a=b+c' 구조의 등식인 '7=5+2'가 제시되었을 때, 학생들은 대부분 해당 등식이 거짓이라고 손을 들었다. 전체 논의를 위해 교사는 우선 '7=5+2'가 왜 거짓이라고 생각하는지 발표할 수 있도록 하였고, 그 결과 Episodes 1처럼 학생들이 표준구조의 등식과의 차이를 인식하지 못한 채 '7=5+2'를 표준구조의 등식처럼 연산–답 순서로 인식하려는 모습을 보였다.

학생들은 등호의 의미, 즉, 등호가 관계적 기호라는 것에 주의를 기울이지 않고 제시된 등식을 표준구조의 등식 형태에 맞게 해석하려고 시도했다. 구체적으로 학생 A는 등호를 기준으로 좌변과 우변을 비교하지 않고 주어진 3개의 수 7, 5, 2에만 주목하여 '7=5+2'를 '7+5=2'로 잘못 해석했다. 또한 학생 B는 제시된 '7=5+2'가 순서가 거꾸로 제시되어 있어 즉 좌변과 우변이 바뀌어 있어 잘못된 식이라고 지적했다. 좌변에 연산이 나오고 우변에 그 결과값이 제시된 표준구조의 등식 형태만 옳다고 생각했기 때문에 '7=5+2'는 순서가 바뀌어 있고 결과값(답)이 제시되어 있지 않은 잘못된 식이라 생각한 것이다. 즉, 학생들은 등호를 기준으로 양변을 비교하는데 주의를 기울이지 않고 제시된 등식의 수에만 주목하여 표준구조의 등식에 맞추어 해석하거나 등식에 제시된 기호와 수에 모두

Episodes 1. Students' explanations for thinking '7=5+2' is wrong.

교사: 이 식이 왜 틀렸다고 생각해요?
학생 A: 7이랑 5랑 더했는데 12가 되었어야 했는데 2가 되었어요.
(중략)
학생 B: 순서가 틀렸어요.
교사: 어떤 순서가 틀렸다는 거예요? 그럼 뭐가 먼저 나와야 하는 거예요?
학생 B: 숫자 2개가 먼저 나와야 해요. 순서가 거꾸로.
교사: 아, 뭐 더하기 뭐가 항상 여기(좌변을 가리키며) 나와야 한다는 거예요?
학생 B: 네.

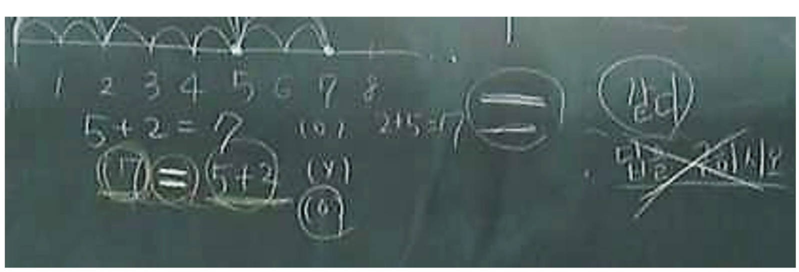
주목했지만 등호의 의미를 토대로 새로운 구조를 인식하지 못하고 등식 순서에 주목하여 제시된 식이 거꾸로 되었다고 인식한 것이다. 이러한 학생들의 발문을 종합하여 보면 학생들은 등호를 연산적으로 인식하고 있음을 알 수 있다.

집중하는 상호작용 1(FI 1): 등호의 의미 강조하기

학생들이 등호를 기준으로 양변이 같은지 살펴보지 않고 표준구조의 등식에 맞춰 비표준구조의 등식을 해석하려는 경향을 보였기 때문에, FI 1에서 교사는 등호의 의미 즉, 양변이 같다는 관계적 의미를 강조하였다. 이미 수업 도입부터 칠판에 덧셈기호와 등호를 적고 그 의미를 병기하였음에도 학생들이 이러한 의미를 충분히 이해하지 못한 모습을 보였으며, 등호의 의미보다 학생들에게 익숙한 표준구조에 맞춰 등식을 해석했기 때문에, 교사는 다시 한번 학생들이 등호의 의미에 집중할 수 있도록 개입했다. 구체적으로 Episodes 2처럼 식에 제시된 등호의 의미를 묻고, 등식의 참·거짓을 묻는 질문에 앞서 좌변과 우변이 같은지 질문하였다.

Episodes 2. Determine if two sides are equal based on the definition of an equals sign.

교사: 얘들아, 그런데 이 기호(등호를 다시 덧쓰며)가 더하기 기호라고 했어요?
전체: 같다.
교사: 맞아요. (두 팔로 양팔 저울 흉내를 내며) 둘이 똑같다는 기호였어요.
(중략)
교사: 더하기 기호는 (우변을 가리키며) 여기 있을 수가 없고, (좌변을 가리키며) 반드시 같다 기호의 왼쪽에만 있어야 하는 걸까?
전체: 네.
교사: 얘들아, 그런데 이 기호(등호를 다시 덧쓰며)가 더하기 기호라고 했어요?
전체: 같다.
교사: 맞아요. (5+2=7에서 우변을 가리키며) 여기랑 (좌변을 가리키며) 여기랑 같다. 그럼 (7=5+2에서 우변 전체를 동그라미 표시하며) 여기랑 (좌변 전체를 동그라미 표시하며) 여기는 같아요?
학생 C: 같아요. 순서를 틀려도 더하면 같아요.



처음에 교사가 등호의 의미를 다시 한번 짚어 주었음에도 학생들은 '7=5+2'의 순서가 잘못되었다고 주장하며 틀린 등식이라는 생각을 바꾸지 않았으며, 더하기 즉, 연산이 좌변에 있어야 한다고 주장했다. 이처럼 학생들은 등호의 의미와 별개로 등식의 구조는 고정되어 있다고 생각함을 알 수 있었다. 학생들이 등호의 의미를 바탕으로 등식을 해석하는 것이 아니라 계속 표준구조의 등식 형태에 비추어 등식을 인식하는 것을 전환시키기 위해 교사는 등호의 의미를 별개로 강조하던 기존의 전략을 바꾸어 등식 내에서 등호의 의미가 무엇인지 해석하고 등식의 참·거짓을 묻는 질문을 바꾸어 좌변과 우변이 같은지 질문했다.

초점의 중심 4(CoF 4): 답을 중심으로 등식 인식하기

학생들은 앞서 FI 1을 통해 Episodes 2의 마지막 부분에서 학생 C가 "순서를 틀려도 더하면 같다"라고 답하며 주어진 등식이 참이라고 제시했다. 이후 다른 학생들도 "똑같다는 뜻이라서 똑같아서 맞아요"처럼 등호의 의미에 주목하여 등식이 참임을 설명하거나 "그냥 순서만 거꾸로 된 거라서 맞아요"라고 답하며 연산이 등식의 왼쪽이 아닌 오른쪽에 위치하고 있어도 '순서만 거꾸로 된 것이지' 틀린 것이 아니라는 것을 설명했다. 즉 학생들은 CoF 3에서 제시된 등식의 수에만 주목하거나 기존의 표준구조의 등식에 맞지 않아 거꾸로 틀리게 되어 있다고 인식했던 것에서 위치에 상관없이 식과 답이 같은지 비교하고, 연산이 등호의 오른쪽에 위치해도 됨을 인식하며 초점의 중심이 재조정되었음을 발견할 수 있었다. 이처럼 학생들은 우변에 연산이 있는 등식의 구조도 참임을 인식할 수 있었으며, 이어서 제시한 '7=7' 등식도 참임을 쉽게 인식할 수 있음을 보여주었다.

초점의 중심 5(CoF 5): 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기, 답을 중심으로 등식 인식하기

과제 1의 마지막 등식인 '4+3=5+2'에 대해 전체 논의를 진행하자 학생들은 "더하기 기호가 2번 들어가서 틀렸어요."라고 답하며 앞서 제시된 등식들과 구성요소가 다름을 지적하거나 "식은 맞는데 답이 5가 아니라서 틀렸어요."라고 답하며 식에서 답이 제시되어 있지 않으면 틀린 식이라고 인식하는 것을 확인할 수 있었다. CoF 5에서 학생들은 기존에 제시된 등식과 구성요소가 다름을 받아들이지 못하거나 등호에 주목하여 등호를 기준으로 양변을 비교하지 않고, CoF 3에서 보여준 것처럼 '4+3=5+2'에 제시된 수 4, 3, 5에 주목하여 '4+3=5'와 같이 표준구조의 등식처럼 인식하려고 시도했다. 특히 식에는 답이 존재해야 한다고 생각하는 학생이 많으며 이전에 제시된 등식의 경우 7이 좌변이나 우변에 하나라도 제시되어 있던 것과 달리 앞서 제시된 등식의 구성 요소 중 답 없이 연산만 제시되어 있는 등식을 받아들이지 못하는 모습을 보였다. 이러한 학생들의 반응을 종합하여 보면 아직 학생들은 등호의 의미보다 연산과 답으로 이루어진 특정한 형태에 국한하여 등식을 인식하고 있음을 알 수 있다.

집중하는 상호작용 2(FI 2): 학생 오류를 반영한 등식 제시하기

학생들이 등식에 더하기 기호가 2번 들어가면 안 되거나 답이 있어야 한다고 생각하는 등 등식의 구성요소에 주목하여 등식을 이해하는 경향을 보였기 때문에, FI 2에서 교사는 Episodes 3처럼 등식의 의미와 연결 지어 등식의 구성요소를 살펴볼 수 있도록 유도했다. 우선 직전에 살펴본 '7=7'을 제시하며 "식에는 꼭 더하기 기호가 들어가야 하나요?"라고 질문하며 논의를 이끌었다. 학생들은 이미 살펴본 등식을 근거로 양변에 연산기호가 없어도 등식이 참이며, 앞서 살펴본 'a+b=c' 구조의 등식과 'a=b+c' 등식을 가지고 등호를 기준으로 오른쪽에 연산이 있거나 왼쪽에 연산이 있어도 상관없음을 이끌어냈다. 이어서 학생이 제시한 더하기 기호 개수와 관련하여 학생들에게 익숙한 표준구조이지만 더하기 기호가 여러 개인 새로운 등식 '1+1+1=3'을 제시하며 등식에 더하기 기호가 2개여도 괜찮은지 논의를 진행하고, 이어서 '1+1+1+1+1=5'를 제시하며 더하기 기호가 여러 개여도 상관없는지 생각해 볼 수 있도록 제시했다. 이 상호작용을 통해 학생들은 교사가 제시한 새로운 등식을 바탕으로 등식에 더하기 기호(연산 기호)의 수와 위치는 상관없음을 논의를 통해 이끌어낼 수 있었다.

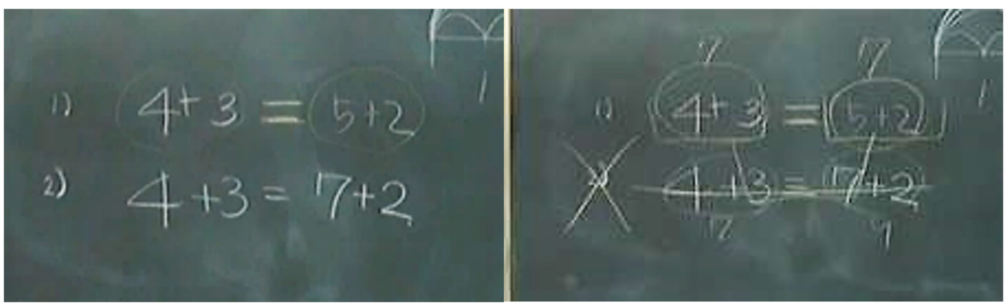
하지만 교사가 "그럼 양쪽에 모두 더하기 기호가 있어도 될까요?"라고 질문하자 한 학생이 "답은 있어야 해요."라고 답하며 등식의 구성요소에 여전히 답(연산결과)이 있어야 함을 지적했다. 이러한 반응은 앞서 "식은 맞는데 답이 5가 아니라서 틀렸어요"라고 답한 학생들의 반응과 일치하는 것으로 오류를 교정하기 위해 교사는 학생들의 오류를 반영한 등식을 명시적으로 제시하여 전체 논의가 이루어지도록 개입했다.

Episodes 3. Present equations that reflect student errors.

교사: 그럼 양쪽에 모두 더하기 기호가 있는 '4+3=5+2'는 맞을까요, 틀릴까요?
학생 D: 5 더하기 2 하면 식은 맞는데 답이 5가 아니라서 틀렸어요.
교사: ('4+3=5+2' 밑에 '4+3=7+2'라고 쓰며) 그럼 이렇게 쓰면 식이 맞을까요? 1번식, 2번식 어떤 식이 맞을까요?
전체: 1번
교사: 그럼 2번 식은 왜 틀렸을까요?
학생 E: 답에 더하기 2가 더 와서 틀렸어요.

(중략)

학생 C: 1번식은 맞아요. 4+3은 7이고, 5+2도 7이라서요.
교사: (저울을 그리며) 맞아요, 여기서 뭐랑 뭐랑 똑같다는 거예요?
학생 C: 4+3이랑 5+2
교사: 얘들아, (해당하는 부분을 가리키며) 같다는 기호를 기준으로 4+3이랑 5랑 같다는 거예요? 4+3이랑 5+2랑 같다는 거예요?
전체: 4+3이랑 5+2



학생들이 등식의 양변에 연산이 있는 'a+b=c+d' 구조의 등식에 답이 없어서 틀렸다고 인식했으며, 특히 '4+3=5+2'에서 5+2를 하면 식은 맞는데 답이 5가 아니라는 응답을 미루어 볼 때, 5의 위치에 답을 제시해야 한다고 생각함을 알 수 있었다. 즉, 학생들이 등호의 의미와 별개로 우변을 전체로 인식하지 못하고 CoF 1, 3, 5처럼 특정한 수에만 주목하여 등호의 바로 오른쪽 항을 답으로 인식한 것이다. 이러한 학생들의 등식에 대한 오류를 교정하기 위해 교사는 학생들의 주장에 맞춰 등식 '4+3=7+2'를 기존 등식과 함께 제시하고 학생들이 생각을 전환할 수 있도록 전체 논의를 이끌었다.

초점의 중심 6(CoF 6): 크기가 같은 두 양 즉, 양변을 각각 전체로 인식하기

FI 2를 통해 학생들은 4+3과 5가 아닌 5+2를 서로 비교해야 하며, '4+3=5+2'가 옳은 식이라고 답하며 학생들의 초점 중심이 재조정되었음을 발견할 수 있었다. 더불어 교사가 "답을 구하는 게 식이에요?", "= 의미가 뭐예요?", "이 기호에 답을 구하시오라는 의미도 있을까요?"라고 질문하자 학생들은 등호의 의미를 '같다'로 대답했으며, 답을 구하라는 의미는 없음을 잘 대답할 수 있었다. 이처럼 등호의 의미에 집중하여 등식을 살펴보고 등식의 구성 요소에 답이 필요 없다는 것을 인식할 수 있었다. 하지만 아직 4+3과 5+2의 관계 즉, 4가 5보다 1만큼 작고 3이 2보다 1만큼 커서 같음을 아는 것이 아니라 각각의 계산결과가 7로 같음을 알고, 이전에 살펴본 '4+3=7'과 '5+2=7'의 두 등식을 추론의 대상으로 하여 새로운 등식 '4+3=5+2'이 옳음을 인식하지는 못하며, 등호의 의미를 바탕으로 등식의 양변을 계산하여 비교할 수는 있지만 아직 기존의 제시된 등식과의 관계를 활용하거나 양변의 관계를 활용하여 양변이 같음을 인식하지는 못한 것을 알 수 있다.

수학 과제 2(MT 2): 등식에서 □의 값을 찾는 과제

과제 2는 등식 해결 문항으로 Matthews 외 (2012)의 검사 결과에 따르면 등식 해결 문항도 등식의 구조가 난이도에 영향을 미치는 주요 원인이며, 표준구조, 연산이 우변에만 있는 구조, 연산이 양변에 모두 있는 구조의 순으로 어려워한 반면 가수의 개수와 미지수가 오른쪽에 있는지 왼쪽에 있는지는 난이도에 적은 영향만 미친다고 밝혔다. 이러한 연구 결과를 반영하여 과제 1에서 이미 다룬 'a+b=c', 'a=b+c', 'a=b' 구조의 등식은 제외하고 'a+b=c+d' 구조의 등식에 집중하여 Figure 2와 같이 과제를 설계하였다. 미지수가 좌변이나 우변에 위치하는지는 큰 영향을 미치지 않는다고 보았기 때문에 빈칸의 위치는 무작위로 제시했으며, 결과값이 10 이하인 한 자리 수의 덧셈 연산으로 문항을 구성하였다. 이때 등식의 양변에 관계가 명확하게 보이는 즉, 양변에 공통 항이 존재하는 '6+4=6+□', '8-3=8-□', '□+2=7+2', '1+5=□+5'을 먼저 제시하고, 이후 '7+2=6+□'를 제시하였다. 또한 과제 1과 마찬가지로 '+'와 '=' 기호의 색을 빨간색과 파란색으로 통일하여 학생들이 등식을 인식할 때 기호를 헷갈리지 않도록 강조하였으며, '7+2=6+□' 하단에 저울모델을 제시하여 학생들이 자유롭게 활용할 수 있도록 하였다.

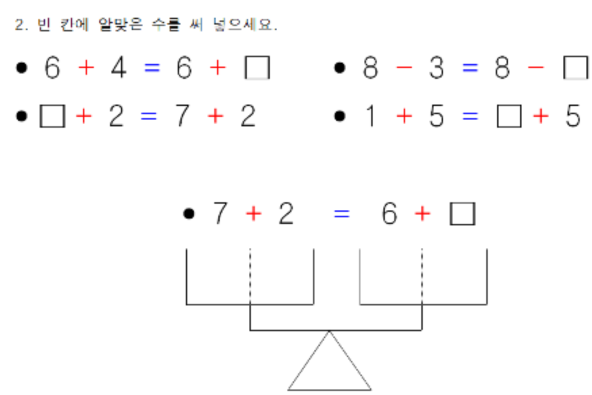


Figure 2. Mathematical task 2

초점의 중심 7(CoF 7): 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기

교사는 과제 2의 유형이 학생들에게 익숙하지 않을 수 있기 때문에 첫 번째 문항 '6+4=6+□'를 함께 해결하며 문항에 대해 이해할 수 있도록 안내했다. 이때, 저울에 등식을 덧셈 기호 없이 한쪽에는 6과 4를 다른 한쪽에는 6을 표현하고 어떤 수가 더 있어야 양쪽이 똑같을지 질문하자 학생들은 6+4를 계산하지 않고도 빈칸에 들어갈 수로 4를 제시할 수 있었다. 이어서 '6+4=6+□'와 유사하게 양변이 같은 수로 이루어진 등식 '8-3=8-□', '□+2=7+2', '1+5=□+5'와 양변이 다른 수로 이루어진 '7+2=6+□', 총 4개의 등식 해결 문항에 대해 개별적으로 생각할 수 있는 시간을 약 5분 정도 제시한 뒤 전체 논의를 진행하였다. 학생들이 개별적으로 문제를 해결하는 동안 교사는 학생들의 계산과정을 관찰하였으며, 앞서 교사와 함께 '6+4=6+□'를 성공적으로 해결했던 학생들이 등호를 연산적으로 이해하고 □의 값을 잘못 구하는 것을 발견했다. 특히 전형적인 오류를 보인 학생 F의 반응을 의도적으로 선택하여 '□+2=7+2'에 대한 논의를 진행했다. 학생 F는 처음에 □의 값을 4라고 답했으며, 어떻게 구했는지 설명하는 과정에서 "2 더해서 7이 되니깐"이라고 말하며 □의 값을 5라고 수정하였다. 이를 통해 '□+2=7+2'를 표준구조의 등식처럼 즉, '□+2=7'처럼 해석하려는 모습을 발견할 수 있었으며, 기존의 CoF1, 3, 5처럼 제시된 등식의 항 중 □, 2, 7만 주목하여 표준구조의 등식에 맞춰 해석한 것으로 보인다. 이 외에도 일부 학생들이 학생 F처럼 여전히 비표준구조의 등식을 표준구조처럼 해석하여 가장 끝 항인 '+2'를 무시하거나 주어진 기호는 무시하고 제시된 항 □, 2, 7, 2만 주목하여 □의 값을 나머지 수 2, 7, 2를 모두 합한 값인 11로 생각하는 오류도 발견하였다. 이처럼 학생들은 앞서 CoF 6에서 등호의 의미를 바탕으로 양변을 계산하여 'a+b=c+d' 구조의 등식도 참임을 알 수 있었으나 새로운 형태의 과제가 제시되자 다시 이전의 초점의 중심으로 회귀하는 특성을 발견할 수 있었다.

집중하는 상호작용 3(FI 3): 수가 아닌 양을 이용한 등식 제시하기

학생들이 초점의 중심을 전환하도록 돕기 위해 전체 논의에서 각 변의 일부 항만 인식하지 않고 좌변과 우변을 각각 전체로 인식하게 하며 계산하지 않고 비교할 수 있도록 시각적 모델과 수로 나타내지 않은 특정한 양을 도입하여 제시하였다.

교사는 우선 Episodes 4처럼 저울 양쪽에 각각 친구 두 명을 태우는 상황을 이야기 형식으로 제시함으로써 학생들이 등식의 각 변의 일부만 주목하지 않고 각 변을 각각 전체로 인식할 수 있도록 개입했다. CoF 7에서 학생들은 좌변 전체와 우변 전체를 비교하지 못하고 연산에 초점을 맞춰 특정한 항에 주목했기 때문에 연산을 약화하고 각 변을 하나의 양으로 인식할 수 있도록 수가 아닌 사람의 무게를 활용하였다. 구체적으로 큰 저울 한쪽에 ○○이와 △△를 태우는 상황을 제시함으로써 학생들이 ○○이와 △△ 무게의 합을 계산하지 못하고 다른 저울의 한쪽의 양과 비교해야 하도록 유도하였다. 그 결과 학생들은 쉽게 빈칸에 △△를 태워야 함을 파악했으며, 이후 상황을 바꾸어 저울 한쪽에 숫자 7과 2를 태우고 다른 한쪽에 숫자 2를 태웠으면 어떤 수를 더 태워야 양쪽이 똑같을지 질문하며 앞선 상황과 수식 '□+2=7+2'를 연결하여 생각할 수 있도록 안내하였다.

Episodes 4. Recognize and compare each side as a whole.

교사: 여기 큰 저울이 있어요. (저울의 왼쪽에 ○○와 △△, 오른쪽에 ○○의 이름을 쓰며) ○○랑 △△이랑 탔어요. 그리고 ○○이가 머리카락을 딱 뽑아서 후하고 불었어요. 그랬더니 (저울의 오른쪽에 ○○의 이름을 쓰며) ○○이 한 명이 더 생겼어. 그러면 여긴 누구 한 명을 더 태워야 양쪽이 똑같을까?

전체: △△이요.

교사: (저울의 오른쪽에 △△의 이름을 쓰며) 그럼 △△이도 머리카락 딱 뽑아야지 후. 똑같은 애를 여기 태워야지 저울이 움직이지 않는다. 맞나요, 여러분?

전체: 네.

(중략)

교사: (저울의 왼쪽에 7과 2를 쓰며) 그럼 이번에는 숫자 7을 태웠어요. 숫자 7, 그리고 숫자 2를 태웠어요. (저울의 오른쪽에 7을 쓰며) 그 다음에 여기에는 또 숫자 2를 태웠어요. 그러면 여기에는 누구를 태워야 저울이 움직이지 않을까요?

학생G: 숫자랑 숫자랑 같은 숫자를 해야 똑같아져요.

교사: 그럼 같은 숫자 뭐 넣어야 해요?

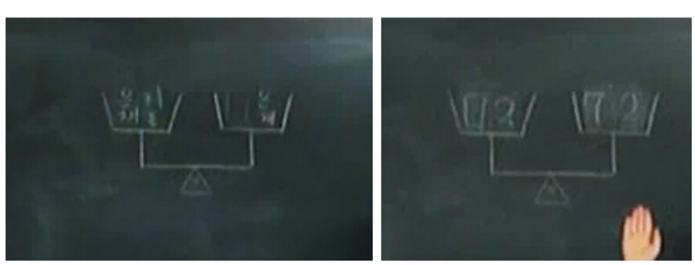
학생G: 7이요.

교사: 이거 계산할 필요가 있나요? 7 더하기 2

전체: 아니요.

교사: 왜 7 더하기 2는 더하지 않아도 되나요?

학생H: 같은 숫자라 똑같아서요.



초점의 중심 8(CoF 8): 식 또는 양변 사이의 관계에 주목하여 서로 같음을 인식하기

학생들은 FI 3에서 사람을 저울에 태우는 상황과 수식을 연결하는 교사의 설명을 통해 제시된 과제 '□+2=7+2'에서 빈칸에 들어갈 수를 7이라고 쉽게 찾을 수 있었으며, 7+2를 계산하지 않고도 양변을 비교하여 빈칸에 들어갈 수를 7이라는 것을 설명할 수 있었다. 이어서 제시한 '1+5=□+5'에서도 학생들은 쉽게 1+5를 계산하지 않고도 □의 값이 1임을 쉽게 답할 수 있었다. 이를 통해 학생들은 등호의 의미를 바탕으로 등식의 양변을 계산하지 않고도 비교할 수 있음을 알 수 있다. 이어지는 유사한 형태의 등식 '8-3=8-□'에서도 양변을 비교의 대상으로 잘 주목할 수 있었으며 양변을 계산하지 않고 양변을 비교하여 □의 값을 잘 찾을 수 있었다.

초점의 중심 9(CoF 9): 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산-답 순서의 일방향적인 등식 인식하기, 크기가 같은 두 양 즉, 양변을 각각 전체로 인식하기

학생들은 앞서 양변이 같은 수로만 이루어진 등식에서 □의 값을 잘 찾을 수 있었고 각 변을 전체로 인식하여 계산하지 않고 비교할 수 있었다. 하지만 앞선 등식은 양변이 같은 수로만 이루어졌기 때문에 직관적으로 양변을 비교하여 관계를 파악하기 용이했지만, 양변이 같은 수로 이루어지지 않은 '7+2=6+□'가 제시되자 학생들은 다시 등식을 표준구조처럼 해석하는 모습을 보여주었다. 구체적으로 Episodes 5처럼 '7+2=6+□'에서 기존의 CoF1, 3, 5, 7처럼 제시된 등식의 항 중 7, 2, □에만 주목하여 순서대로 표준구조의 등식에 맞춰 '7+2=□'처럼 인식하고, □의 값을 7+2인 9로 답하거나 □의 값을 3으로 잘 답했지만 "7 더하기 2는 9니까"라고 설명하며 양변을 계산하여 같음을 보였다.

Episodes 5. Compute and compare two sides.

교사:	7+2는 6+□와 같습니다. □에 들어갈 수를 E가 말해볼까요?
학생E:	9요
교사:	7+2는 6+9와 같습니다. 맞아요?
학생G:	7+2는 9인데, 6+9는 15라서 틀려요. □는 3이에요.
교사:	나는 3이 아니라고 생각한다? (아무도 반응하지 않자) 그럼 이유를 설명할 수 있다. 계산하지 않고도 설명할 수 있다.
학생B:	똑같이 9가 되려면 7 더하기 2는 9니까 똑같이 똑같이 9가 되려면 몇을 더해야 하는지 계산 안 하고도 알 수 있어요.
교사:	그럼 7+2가 9라는 걸 만약 몰라. 모르는데 여기에 3이 들어가는지 어떻게 알 수 있을까?
학생I:	손가락으로 하나씩 더해봐요
교사:	손가락도 안 쓰고 7+2를 계산하지 않고 할 수 없을까?
학생G:	6+3은 아니깐 할 수 있어요.

집중하는 상호작용 4(FI 4): 등식을 변형하는 활동을 통해 추론의 대상으로 인식하기

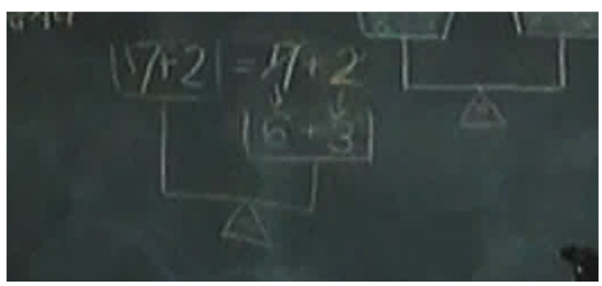
일부 학생들이 등식을 여전히 표준구조처럼 해석하거나 대부분 양변을 계산하여 같음을 보인다는 것을 알아차린 교사는 이 집중 상호작용에서 학생들이 등식을 계산하지 않고 양변을 비교하여 같음을 보일 수 있도록 유도했다. 구체적으로 CoF 9의 담화를 살펴보면 교사는 학생들이 양변을 계산해야 할 대상이 아닌 비교의 대상으로 주목할 수 있도록 돕기 위해 지속적으로 학생들에게 "계산하지 않고" 문제를 해결해 보도록 요구했다. 하지만 학생들에게 "계산하지 않고"라는 지시의 의미가 명확하지 않았기 때문에 학생들은 "손가락으로 하나씩 더해봐요", "5+4는 아니깐 (계산하지 않아도) 할 수 있어요", "머릿속으로 (계산을) 했어요"처럼 답할 뿐 양변의 관계에 주목하지 못했다.

이에 교사는 전략을 바꾸어 학생들이 앞서 쉽게 양변을 비교하여 같음을 살펴보았던 등식 '7+2=7+2'를 제시하여 변형하는 방식으로 '7+2=6+□'를 제시했다. 구체적으로 Episodes 6처럼 '7+2=7+2'의 우변 7+2에서 7을 6으로 바꾸고 2 대신에 어떤 수가 와야 할지 생각해 보도록 발문했다. 교사는 등식을 변형하는 방법을 학생들이 잘 이해했기 때문에 유사하게 손가락으로 덧셈하는 방법으로 등식의 변형을 다시 한번 설명했다. 구체적으로 교사가 손가락으로 7+2의 연산을 보여주고 이를 다시 6+3의 연산으로 변형하며 "선생

님이 여섯 개랑 똑같이 만들려고 하나를 넘겼어요. 그러면 여긴 2개가 있었으니깐 하나가 더 넘어와서 3개가 됐어요. 어때요, 똑같나요?"라고 발문하였다. 이어서 다른 방법으로도 학생들이 식을 변형해 볼 수 있도록 손가락을 7개 펴고 이어서 2개 더 펴는 방법으로 7+2의 연산을 보여준 뒤 "더 편하게 더할 수 있는 방법은 없을까?"라고 질문하며 교실 논의를 이끌어갔다. 이처럼 저학년 학생들은 다소 불분명한 지시보다 구체적인 수를 제시한 후 변형하는 방법이나 손가락과 같은 구체물을 이용하는 것이 더 효과적이었다. 이어서 교사는 학생들이 이러한 전략을 확실히 이해했는지 확인하기 위해 활동지 뒷면에 '7+2=5+□'를 적고 □의 값을 구해보도록 새로운 과제를 제시하였다.

Episodes 6. Transform an equation to draw attention to the relationship between the two sides.

교사: (7+2=7+2를 쓰며) 7+2랑 7+2랑 똑같은 건 맞죠?
전체: 맞아요
교사: (우변의 7에 /를 긋고 아래에 6을 쓰며) 그런데 여기 7 대신에 6을 써준 거예요.
그럼 여기 2는 가만히 있어도 괜찮아요?
학생B: 7이 6보다 작으니까 2는 더 커져야 해요.
교사: 조금 더 정리해보자
학생H: 6보다 7이 더 크잖아요. 그러니깐 2를 더하면 안 되잖아요. 똑같이 돼야 하니까 그래서 1 더 크게 해줘요.
교사: (우변의 2에 /를 긋고 아래에 3을 쓰며) 6이 7보다 1만큼 작으니까 2는 1만큼 더 크게 3이다.
그럼 어차피 (우변과 좌변에 차례대로 저울 모형을 그리며) 이 둘의 합은 7 더하기 2하고 똑같아요?
전체: 네



초점의 중심 10(CoF 10): 크기가 같은 두 양 즉, 양변을 각각 전체로 인식하기, 식 또는 양변 사이의 관계에 주목하여 서로 같음을 인식하기

학생들은 앞서 CoF 9에서 일부 항에만 주목하여 비표준구조의 등식을 표준구조의 등식처럼 인식하거나 양변을 계산하여 같음을 보였지만, FI 4를 통해 학생들은 7과 6의 관계 즉, 1만큼 차이남에 주목할 수 있었고 이어서 2와 □의 관계 즉, 2보다 1만큼 큰 수가 들어가야 함을 발견할 수 있었다. Figure 3을 보면 학생은 저울모델을 이용하여 식의 좌변과 우변을 나타내고 그 차이가 1임을 명확하게 인지한 것으로 보인다. 교사는 등식을 변형하는 방법을 학생들이 잘 이해했기 때문에 유사하게 손가락으로 덧셈하는 방법으로 등식의 변형을 다시 한번 설명했다. 구체적으로 교사가 손가락으로 7+2의 연산을 보여주고 이를 다시 6+3의 연산으로 변형하여 설명한 후, 7+2를 손가락으로 편하게 더할 수 있는 다른 방법을 생각해 보도록 하자 "다섯 개, 네 개"라고 이야기하며 7+2와 5+4가 같음을 발견할 수 있었다. 이를 통해 학생들이 식을 계산하지 않고 양변의 관계 즉, 7+2와 6+□의 관계에 주목하여 □의 값인 3을 구할 수 있었다. 또한 학생들이 잘 이해했는지 확인하기 위해 제시한 추가 문항 '7+2=5+□'를 "7 더하기 2는 9니까 9가 되려면 4를 더해줘야 해요."처럼 등식의 양변을 계산한 값이 같음을 알고 □의 값을 구하거나 "5보다 7이 더 크니까 2에다 2를 줬어요."처럼 양변 사이의 관계에 주목하여 □의 값을 쉽게 구할 수 있음을 볼 수 있다.

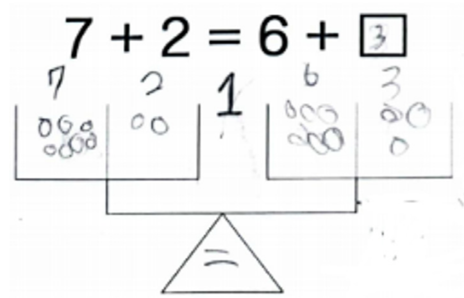


Figure 3. Response in Task 2

수학 활동의 본질(NMA)

수학적 활동의 본질은 크게 수학적 논의의 주체와 교사의 역할 측면에 대해 분석하였다. 우선 수학적 논의는 학생 중심의 자유로운 소그룹 논의 대신 교사 주도의 전체 논의로 진행했다. 구체적으로 교사가 과제를 제시하고 논의에 앞서 학생들이 개별적으로 생각해 볼 수 있는 시간을 가진 뒤에 전체 학생들의 생각을 거수로 확인했다. 이를 바탕으로 학생들의 발표를 듣고, 교사의 주도하에 의견을 종합해가며 논의를 발전시키는 방식으로 진행되었다. 본 수업은 1학년 1학기에 진행되었기 때문에 학생들의 기본학습훈련이 충분히 이루어지지 못했으며, 모둠 토의나 짝 활동에 익숙하지 않은 상태였다. 또한 학생들이 덧셈과 뺄셈 연산을 배우는 첫 단원이었기 때문에 수학적 오류가 자주 발생할 수 있다는 우려가 있어 교사의 적극적인 개입이 필요하다고 보았다. 반면 발표하기를 부끄러워하는 학생들도 참여할 수 있도록 앉아서 발표할 수 있도록 하고, 발표 기회를 충분히 제공하는 등 자유로운 발화 분위기를 조성하자 초등학교 1학년 학생의 특성상 매우 활발하게 전체 논의에 참여하고 자신의 의견을 발표했다.

특히 수학적 논의에서 교사의 역할을 살펴보면, 학생이 논의에 참여할 때 자신의 생각을 최대한 자세히 설명할 수 있도록 독려하고 잘 표현하지 못하는 경우 FI 3처럼 교사가 보조적으로 구체적인 추가 질문을 제시하거나, FI 4처럼 학생의 발표가 끝나고 난 뒤 교사가 다시 한번 정리하고 재진술하여 나머지 학생들이 모두 해당 학생의 의견을 들을 수 있도록 하였다. 또한 학생의 의견을 반영한 예를 제시하여 다른 학생들도 해당 학생의 의견을 이해할 수 있도록 명료화하였으며 이를 통해 다수의 학생이 논의에 참여하고 수학적 논의가 초점을 벗어나지 않도록 도왔다. 더불어 집중 박수로 개별 학생의 발표를 나머지 학생들이 경청할 수 있도록 도왔으며 발표한 학생의 의견에 동의 여부를 손을 들어 나타내도록 함으로써 수학적 논쟁에 많은 학생이 참여하고 학생의 이해 정도를 파악하는 데 활용했다. 또한 초등학교 1학년 학생의 수준과 흥미에 맞는 설명과 소재를 활용함으로써 학생들의 이해와 참여를 높였다. 구체적으로 FI 3에서 실제 학급 학생의 이름을 언급하며 저울에 태우는 상황을 제시하였고, FI 4에서 손가락으로 덧셈 상황을 나타내거나 저울 모델을 제시하는 등 1학년 학습자 수준과 흥미에 맞는 설명을 제시하였다.

이러한 연구 결과를 종합하여 Figure 4와 같이 학생 노티싱의 양상을 살펴볼 수 있었다.

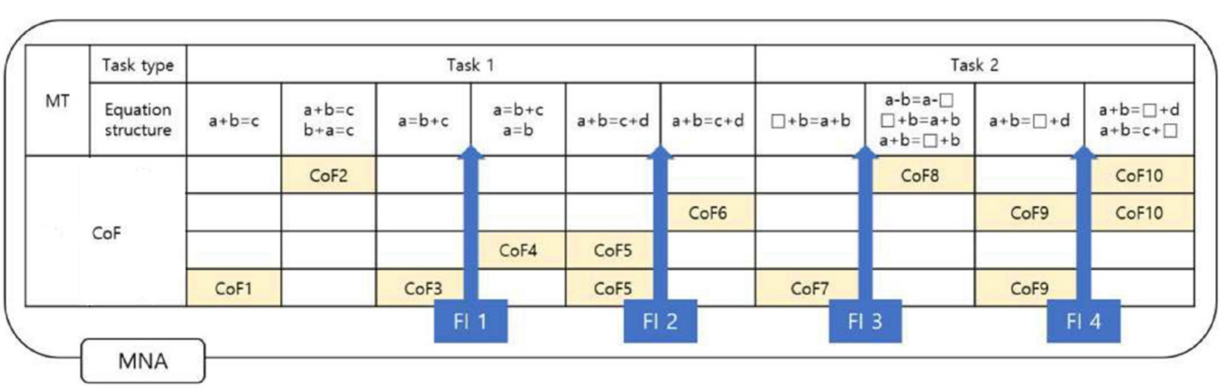


Figure 4. Changes in students noticing

결론 및 제언

본 연구에서는 실제 수업 상황에서 나타나는 학생의 노티싱을 초점의 중심, 집중하는 상호작용, 수학 과제, 수학 활동의 본질을 통해 다차원적으로 분석함으로써 수업 맥락에서 어떻게 드러나는지 살펴보았다. 연구 결과를 토대로 초등학교 저학년 학생들의 등호에 대한 노티싱과 관련된 결론을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 등식의 구조나 등식 형태, 과제 형태, 양변 사이의 관계가 얼마나 명확한지 등 과제의 특성이 초점의 중심에 영향을 미치는 것으로 나타났다. 연구 결과를 살펴보면 양변이 같다는 관점에서 'a=b+c'가 옳다는 것을 설명할 수 있었던 학생들이 'a=b'를 제시했을 땐 초점의 중심이 변하지 않았지만 'a+b=c+d'를 제시했을 때 초점의 중심이 변하는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 등호를 관계적으로 이해한 학생도 등식의 구조가 바뀌면 등식을 다르게 인식했다. 이는 다수에 선행연구(Kim et al., 2016; Matthews et al., 2012)에서 밝힌 것처럼 학생들의 정답률이 등식의 구조에 따라 달라진 것와 일맥상통한다. 특히 등식의 구조에 따라 학생들은 등호의 의미에 주목하지 않고 주어진 등식의 구조를 표준구조의 등식에 맞춰 특정 수에만 주목하거나 기호를 의도적으로 무시하는 경향을 보였다. 또한 'a+b=b+a'처럼 양변 사이의 관계가 명확한 등식은 계산하지 않고 양변의 관계를 통해 두 양이 같음을 이끌어낸 반면, 비교적 양변 사이의 관계가 명확하지 않은 등식은 계산적으로 양변이 같음을 이끌어내는 양상을 보였다. 이러한 양변의 관계에 대한 명확성에 따른 상대적인 어려움은 선행연구의 결과와 일맥상통한 결과이다(Donovan et al., 2022). 이외에도 'a+b=c'에 이어서 'c=a+b'를 제시했을 때 두 등식 사이의 관계를 쉽게 이끌어내며 초점의 중심이 이동한 것을 볼 수 있었으며, 등식을 저울 모델에 제시했을 경우와 아닌 경우처럼 등식의 제시 방법이나 등식 구조 문항인지 등식 해결 문항인지처럼 과제의 형태에 따라 초점의 중심이 달라졌다. 이처럼 등식의 구조나 등식 형태, 과제 형태 등 다양한 과제의 특성이 등이 학생의 노티싱에 영향을 미친다는 것을 유추할 수 있었다. 즉, 학생들은 등호의 의미는 바뀌지 않음에도 과제의 특성에 따라 등호를 다양하게 이해하고 등식을 다르게 주목하므로, 이러한 연구 결과를 토대로 수업에서 등식의 구조, 과제 형태 등을 다양하게 다룰 필요가 있으며, 학생의 어려움을 반영하여 계열화할 필요가 있다.

둘째, 학생들이 등호를 관계적 기호로 인식하도록 촉진하는 상호작용(FI) 특히, 교사의 상호작용을 발견할 수 있었다. 연구 결과 학생들에게 지속적으로 등식 내에서 등호의 의미를 강조하거나 등식을 저울모델로 나타내고, 학생 오류를 반영한 틀린 등식을 제시하여 논의해보도록 하며, 양변을 각각 전체로 인식시킴으로써 같음의 대상이 무엇인지 강조하는 등의 집중하는 상호작용(FI)이 등호를 관계적 기호로 인식하도록 하였다. 이는 선행연구에서 제시한 등호의 지도 방안과 일치하는 연구 결과이며(Blanton et al., 2018; McNeil et al., 2015; Molina & Ambrose, 2008; Stephen et al., 2013), 이러한 상호작용의 핵심은 학생들이 표준구조의 등식에 입각하여 등식을 해석하지 않고 등호의 의미를 바탕으로 두 양을 비교하도록 촉진하는 것이다. 특히 선행연구에서 제시되지 않은 학생의 오류 즉, 연산적 이해를 반영한 틀린 등식을 제시하여 논의해보도록 하거나, 등식을 변형하는 활동을 통해 양변의 관계에 주목하게 하거나, 비교해야 하는 두 양이 무엇인지 즉, 같음의 대상이 무엇인지 강조하는 부분을 눈여겨볼 필요가 있다. 연산적 이해를 반영한 틀린 등식과 옳은 등식을 비교하는 과정은 학생들에게 우변을 전체로 인식할 수 있는 기회를 제공했으며, 'a+b=a+b'의 등식을 변형하는 활동을 통해 양변의 관계에 주목할 수 있었고, 같음의 대상이 무엇인지 강조하기 위해 수가 아닌 학생의 무게를 저울에 놓고 비교하는 상황을 제시하여 무엇과 무엇을 비교해야 하는지 명확하게 인식할 수 있도록 하였다. 이러한 상호작용을 통해 학생들은 등식에 대해 토론하고 성찰할 수 있는 기회를 얻게 되었으며 초점의 중심을 재조정하였다. 반면 선행연구에서 학생들이 등호를 관계적으로 인식하도록 계산하지 않고 등식의 참·거짓을 살펴보게 하거나 제시된 미지수의 값을 구하도록 하는 부분(Kim et al., 2016; Pang & Lee, 2022)은 학생들에게 양변을 계산하지 않고 비교를 촉진할 것으로 예상됐지만, 실제 '계산하지 않고'라는 표현이 의미가 다소 명확하지 않기 때문에 학생들은 암산하거나 손가락을 이용하는 등 계산 방법만 달리하는 모습을 보였다.

한편, 본 연구에서는 저학년 학생들이 소그룹 논의에 익숙하지 않으며 코로나 상황을 감안하여 학생과 학생 사이의 상호작용을 강조하지 않았기 때문에 이 부분과 관련된 결과를 도출하지 못했으며, 학생 개인별로 초점의 중심을 분석한 것이 아니라 교실 논의를 바탕으로 전체 학생의 초점의 중심을 분석하였다는 점에서 한계가 있다. 반면 선행연구에서 소그룹으로 진행되었던 개인별 초점의 중심 분석은 여러 학생이 참여하는 실제 교실 수업 상황과는 차이가 있으며, 본 연구는 실제 1학년 교실에서 진행된 담임교사와 학생 사이의 수업을 분석 대상으로 하였다는 점에서 의미가 있다.

셋째, 등식에 대한 학생의 노티싱은 등식을 추론하는 방식에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 구체적으로 초점의 중심에서 등식의 일부 요소에만 집중하거나 연산–답 순서로만 등식을 인식하고, 답을 중심으로 등식을 인식하는 경우 등식을 연산적으로 추론하는 것을 알 수 있었으며, 등식에서 크기가 같은 두 양 즉, 양변을 각각 전체로 주목하거나 양변의 관계에 주목하는 경우 등식을 관계적으로 추론하는 것을 알 수 있었다. 이는 선행연구에서 밝힌 것처럼 학생들이 노티싱하는 것이 선형함수를 추론하는 방식에 영향을 미친다는 것과 일치하는 결과이다(Lobato et al., 2013). 또한 앞선 논의에서 살펴본 것처럼 등식에 대한 학생의 노티싱이 일정하게 유지되는 것이 아니라 과제의 특성(MT)이나 집중하는 상호작용(FI) 등을 통해 변화하는 것을 알 수 있었다. 이는 선행연구에서 지적한 것처럼 학생들의 등호에 대한 이해가 다양한 경로를 통해 발전한다는 것과 일맥상통하는 결과이다(Blanton et al., 2018; Molina & Ambrose, 2008). 더불어 학생이 인식하는 등호의 의미가 반드시 등식에서 등호를 인식하는 방식과 일치하지 않는다는 것이다. 구체적으로 전시학습 상기를 통해 등식의 의미에 대해 묻고 '같다'라는 의미임을 확인한 이후 바로 이어진 활동에서 학생들은 제시된 등식에서 등호를 연산적인 의미로 인식하는 모습을 보였다(CoF1, CoF3 참조). 이처럼 학생들은 등호의 의미와 등식에서 등호의 의미를 분리하여 인식하는 경향이 있다. 주목할 만한 것은 학생들이 다양한 구조의 등식에서 크기가 같은 두 양에 집중하고 양변을 비교의 대상으로 주목함으로써 학생들은 등식을 관계적으로 추론하기 시작했으며, 이를 통해 학생들이 등호를 관계적으로 이해하기 위해 무엇에 주목해야 하는지 발견할 수 있었다. 더불어 학생들의 등호에 대한 노티싱은 과제 유형, 담화, 사회적 상호작용에 의해 변화하는 것을 확인할 수 있었다.

본 연구는 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 초등학교 1학년 학생의 노티싱을 분석한 것으로, 실제 수업 맥락에서 초점의 중심이 어떻게 변화하는지 그에 영향을 미치는 사회적 상호작용, 수학 과제, 교실 관행을 연관 지어 살펴본 것이다. 등호가 처음 학습하는 1학년 학생들을 대상으로 진행된 연구임을 감안할 때 등호 의미를 강조하여 지도할 필요가 있으며, 저학년 학생들을 대상으로 등호에 대한 관계적 이해를 지도하는 데 본 연구가 시사점을 제공하기를 기대한다.

References

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades* 3-5. NCTM.

Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(3), 167-201. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474534

Campbell, T. G., & Yeo, S. (2023). Student noticing of collaborative practices: exploring how college students notice during small group interactions in math. *Educational Studies in Mathematics*, *113*, 405-423. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10206-3

Cowie, B., Harrison, C., & Willis, J. (2018). Supporting teacher responsiveness in assessment for learning through disciplined noticing. *The Curriculum Journal, 29*(4), 464-478. https://doi.org/10.1080/09585176.2018.1481442

Dominguez, H. (2019). Theorizing reciprocal noticing with non-dominant students in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 75-89. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09896-5

Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W., & Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM–Mathematics Education, 54*(6), 1199-1213. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y

Hohensee, C. (2016). Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. *The Journal of Mathematics Behavior*, *42*, 69-91. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.002

Hunter, J., & Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalize. *ZDM–Mathematics Education, 54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jones, S. R., Long, N. E., & Becnel, J. J. (2022). Design of virtual reality modules for multivariable calculus and an examination of student noticing within them. *Research in Mathematics Education, 25*(2), 219-242. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2045625

Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König, J., & Blömeke, S. (2015). About the complexities of video-based assessments: Theoretical and methodological approaches to overcoming shortcomings of research on teachers' competence. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 369-387. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9616-7

Kim, J. S., Choi, J. Y., & Pang, J. S. (2016). How do elementary school students understand '='? Performance on various item types. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(1), 79-101.

Kim, S. H., & Pang, J. S. (2023). An analysis of lessons emphasizing the relational understanding of the equal sign in introducing addition and subtraction. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 26*(1), 63-86. https://doi.org/10.54340/kseme.2022.27.1.4

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X., & Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review, 36*, 100453. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453

Lobato, J., Hohensee, C., & Rhodehamel, B. (2013). Students' mathematical noticing. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(5), 809–850. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.5.0809

Lee, J. A., & Lee, S. J. (2019). Mathematical noticing of two prospective secondary teachers in the course of planning, implementing, and reflecting on lessons. *School Mathematics, 21*(3), 561-589. https://doi.org/10.29275/sm.2019.09.21.3.561

Lee, S. J., & Park, J. H. (2018). Mathematical noticing of prospective secondary mathematics teachers in graphing functions through analyzing the task dialogue. *School Mathematics*, *20*(3), 425-443. https://doi.org/10.29275/sm.2018.09.20.3.425

Mason, J. (2015). Responding in-the-moment: Learning to prepare for the unexpected. *Research in Mathematics Education, 17*(2), 110-127. https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1031272

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316-350. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0316

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., & Dunwiddie, A. E. (2015). Arithmetic practice can be modified to promote understanding of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology, 107*(2), 423-426. https://doi.org/10.1037/a0037687

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *30*(1), 61-80.

Pang, J. S., Kwon, M. S., & Sunwoo, J. (2017). Trends and issues in research on noticing in mathematics education. *School Mathematics, 19*(4), 795-817.

Pang, J. S., & Lee, Y. J. (2022). An analysis of teachers' knowledge on the strategies for understanding and solving equations by fourth graders. *The Mathematical Education, 61*(1), 109-126. https://doi.org/10.7468/Matheus.2022.61.1.109

Ryu, K., Jung, J. W., Kim, Y. S., & Kim, H. B. (2018). *Understanding qualitative research methods.* Park Young Sa

Son, T. K., & Hwang, S. H. (2021). Examining teachers' noticing competency on students' problem-solving strategies: Focusing on errors in fraction addition and subtraction with uncommon denominators problems. *The Mathematical Education, 60*(2), 229-247. https://doi.org/10.7468/Matheus.2021.60.2.229

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 173-182. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.001

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571–596.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2006). How different video club designs support teachers in "learning to notice". *Journal of Computing in Teacher Education, 22*(4), 125–135. https://doi.org/10.1080/10402454.2006.10784548

Wilkie, K. J. (2022). Generalization of quadratic figural patterns: Shifts in student noticing. *The Journal of Mathematical Behavior, 65*, 100917. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100917

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). Sage.

Authors' Information

Yujin Lee, Daejeon Heungryong Elementary School, Teacher, 1st Author.
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-8404-9110