한국학교수학회논문집 제 26 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 26, Number 2, 111-135, June 2023
http://doi.org/10.30807/ksms.2023.26.2.003

알지오매스를 활용한 도형의 닮음 수업에서 학생들의 의사소통 분석

김연하[1] · 신보미[2]

본 연구는 도형의 닮음 단원에서 알지오매스를 활용한 학생 중심의 탐구 수업을 진행하고, 학생들이 보이는 학습의 특징을 의사소통 관점에서 분석하여 도형의 닮음과 관련되는 교수학적 시사점을 기술하고자 하였다. 이를 위해 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음 여부를 탐색하는 교수-학습 자료를 개발하였으며, 이를 적용한 수업에서 학생들이 수행한 탐구 활동의 의사소통 양상에 비추어 학생들이 보인 닮음 학습의 특징을 '닮음비 이해', '삼각형의 닮음 조건 파악', '합동과 닮음 개념 비교'로 범주화하여 기술하였다. 학생들은 알지오매스에 기반한 탐구 활동을 통해 도형의 닮음비와 넓이의 비, 삼각형의 합동 및 닮음의 뜻과 조건 등 닮음과 관련한 주요 개념의 의미와 이들 사이의 수학적 관계를 논하였으며, 이로부터 도형의 닮음에 대한 오개념을 개선함으로써 보다 깊은 수학적 이해를 개발하였다. 이처럼 알지오매스를 활용한 도형의 닮음 교수-학습에서 의미 있는 교수학적 성과를 얻는 데는 알지오매스 환경이 갖는 특징뿐 아니라 학생의 사고를 촉진하는 교사의 조정과 중재가 주요한 역할을 하는 것으로 드러났다.

주요용어 : 알지오매스, 도형의 닮음, 수학적 의사소통

Ⅰ. 서론

유클리드 기하의 핵심 아이디어 중 하나인 닮음은 오랫동안 학교 수학에서 기하 영역의 기본 개념으로 다루어져 왔다. 닮음은 비례에 관한 통찰을 제공하고, 정수에서 유리수, 무리수로의 자연스러운 수 체계 확장을 이끄는 소재로 활용할 수 있다(최지선, 2008). 2015 개정 수학과 교육과정에서 도형의 닮음은 바로 다음 단원인 피타고라스 정리 및 중학교 3학년의 삼각비와 연계되며 고등학교 기하 학습 전반에 영향을 미치는 주요 단원이다(김지연, 2021).

그러나 도형의 닮음 지도는 개념 자체에 대한 충분한 통찰의 기회를 제공하지 못한 채 정형화된 문제 해결에 집중하거나 기하 증명을 위한 도구적 측면으로만 이루어지고 있다(김성미, 2007). 특히 도형의 닮음 단원에서 다루는 문제 대부분이 비례식을 이용하여 대응변의 길이를 구하는 데 목표를 두기 때문에 학생들은 닮음 개념에 대한 이해보다는 풀이에 접근하는 알고리즘이나 공식만을 암기하려는 경향을 보인다(이해민, 2022). 여러 연구(방혜진, 2008; 오미진, 2012; 박은지, 2013; 최은비, 2016)는

---

* MSC2010분류 : 97D40, 97G40, 97U70
1) 신용중학교 교사 (liberty617@hanmail.net), 제1저자
2) 전남대학교 교수 (bomi0210@jnu.ac.kr), 교신저자

도형의 닮음을 학습한 학생들에게 다양한 유형의 인식론적 장애와 오개념이 드러남을 지적하였다. 박은지(2013)는 도형의 닮음 학습에서 학생들이 겪는 어려움을 극복하는 교수-학습 방안으로 학습자 중심 탐구 수업을 제안하였다. 탐구 활동을 통해 학생들은 자료와 정보로부터 지식을 도출하거나 그 타당성을 확인할 수 있으므로(교육부, 2022), 학생들이 삼각형의 닮음 조건을 의미 있게 이해하려면 이를 직접 탐구해 보는 기회를 제공하는 것이 무엇보다 중요하다.

한편 공학 도구는 수학 교수-학습에서 학생들이 특정 개념을 탐구하거나 추측과 정당화를 수행하는 데 도움을 준다(정서영, 2014). 정보나, 류희찬, 조완영(2002)은 중학교 기하 교수-학습의 문제를 수학화 활동의 결여로 보고 이를 개선하는 전략으로 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 기하 교육의 필요성을 지적하였다. 그러나 허선희, 도종훈(2022)에 따르면 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하여 학생 중심 탐구 활동을 실제로 구현한 교과서 사례가 거의 없다. 이는 민간 회사가 개발한 공학 도구의 명칭을 교과용 도서에 명기하지 않도록 한 교과서 검정 기준으로 인해 교과서 본문에 공학 도구 활용 탐구 활동을 직접적으로 다루기가 어려운 수학 교수-학습상의 관례와 무관하지 않아 보인다(이환철, 2019). 그러나 알지오매스(AlgeoMath)는 한국과학창의재단이 교육부 및 17개 시・도교육청과 협력하여 개발하고 무료 보급하는 탐구형 소프트웨어로, 교육부는 알지오매스를 수학 교수-학습 및 평가에 적극적으로 활용하도록 권고하였다(교육부, 2018). 이에 여러 연구(이은실, 2021; 주민정, 2021; 김지연, 2021; 김민혜, 2020; 서유석, 2020; 이상우, 2022; 박성준, 2021)는 알지오매스를 활용하는 수학 교수-학습 자료를 개발하거나 학생들에게 이를 직접 적용하여 그 시사점을 기술한 바 있다.

이상을 종합하면 도형의 닮음은 중・고등학교 기하 학습의 핵심 개념이지만 교수-학습 과정에서 삼각형의 닮음과 그 조건에 대한 통찰의 기회가 충분히 주어지지 못하여 이에 대한 학생들의 이해에 여러 한계가 있다. 이러한 실정을 개선하는 하나의 방안으로 학생 중심 탐구 활동에 기반한 도형의 닮음 수업이 제안된 바 있으며, 이를 위한 교수학적 도구로서 알지오매스가 의미 있는 역할을 할 것으로 보인다. 실제로 김지연(2021)은 도형의 닮음 단원 지도에 알지오매스를 활용하는 교수-학습 자료를 개발하여 도형의 닮음 수업을 학생 중심의 탐구 활동으로 진행할 수 있는 여지를 마련하였다. 그러나 김지연(2021)은 개발한 교수-학습 자료를 실제 수업에 적용하지는 않아 이를 통해 알지오매스를 활용하는 닮음 수업에서 학생들이 보이는 닮음에 대한 이해의 특징이나 탐구 활동의 양상을 구체적으로 파악하는 데는 한계가 있다.

최근 들어 학생의 수학 학습 과정과 성장을 모니터하는 수단으로 수학적 의사소통이 주목받고 있다. Sfard(2001)는 수학 학습을 수학적 담론의 발전으로 개념화하고, 수학을 배우는 것은 수학적 논의를 수정하고 확장하는 방법을 배우는 것이며 공동체의 수학적 담론에 참여하는 구성원으로 변모해 가는 것이라고 역설하였다. 사고와 의사소통은 분리할 수 없는 통합 개념이므로(Sfard, 2008), 수학적 의사소통에 참여함으로써 학생들은 수학적 사고를 개발할 수 있으며, 담론 공동체의 의사소통 양상을 분석함으로써 학생들의 사고 과정에 대한 특징을 분석할 수 있다(오택근, 2014). 여러 연구(김미주, 2014; 구나영, 2014; 오택근, 박미미, 이경화, 2014; 강수영, 신보미, 2022)는 학생들의 수학적인 의사소통 양상에 비추어 수학적인 개념 발달과 사고 과정의 특징을 기술한 바 있다.

이에 본 연구는 김지연(2021)이 개발한 교수-학습 자료를 도형의 닮음에 대한 학생 중심 탐구 활동이 보다 적극적으로 일어나도록 수정 및 보완하고, 이를 정규 수업에 실제로 적용하여 도형의 닮음에 대한 탐구 활동에서 학생들이 보이는 학습 양상을 의사소통 관점에서 분석하고자 한다. 이를 통해 도형의 닮음을 알지오매스를 활용하는 탐구 수업으로 설계 및 실행하고자 하는 교사와, 도형의 닮음 교수-학습의 대안을 모색하는 연구자에게 좀 더 직접적이고 의미 있는 정보를 제공하는 데 목표를 둔다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 알지오매스를 활용한 수학 교수-학습

알지오매스(AlgeoMath)는 대수(Algebra)부터 기하(Geometry)까지 학교 수학의 주요 내용을 다룰 수 있는 탐구형 소프트웨어이다(교육부, 2018). 학생들은 알지오매스를 통해 수학적 개념과 원리를 직관적으로 이해할 수 있으며 온라인상의 소통 및 협력을 손쉽게 진행할 수 있으므로 학생 중심 탐구형 수학 수업을 구현하는 데 알지오매스가 유용한 역할을 할 수 있다(이환철, 2019). 이에 여러 연구는 알지오매스를 활용하는 교수-학습 자료를 개발하거나 이를 소수 학생에게 적용하여 그 성과를 기술하였다.

이은실(2021)은 수학적 불변성에 주목하여 사각형의 성질을 알지오매스 환경에서 다루는 교수-학습 자료를 개발하였다. 특히 드래그 기능을 이용하여 도형의 불변성을 탐색하는 데 주안점을 두어 평행사변형의 성질과 사각형 사이의 포함 관계에 대한 학생들의 이해를 개선하고자 하였다. 주민정(2021)은 알지오매스의 블록 코딩 기능을 이용하여 정다각형 그리기, 삼각수와 사각수 및 스트링아트 코딩하기 등의 주제 탐구형 교수-학습 자료를 개발하였다. 김지연(2021)은 변환 개념이 닮은 도형을 다루는 주요 단서임을 밝힌 선행연구(오미진, 2012; 박은지, 2013)에 착안하여, 알지오매스의 회전·선대칭 기능을 도형의 닮음 지도에 활용하는 교수-학습 자료를 개발하였다. 김민혜(2020)는 수평적 수학화와 수직적 수학화 과정을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 알지오매스를 활용하여 삼각형의 외심과 내심, 평행사변형의 성질 등을 다루는 교수-학습 자료를 개발하였다.

한편 서유석(2020)은 알지오매스를 활용하여 이차함수를 지도하는 교수-학습 자료를 개발하고 이를 중위권 학생 4명에게 적용하여 그 결과를 분석하였다. 학생들은 알지오매스의 슬라이더 기능에 힘입어 이차함수의 계수에 따른 그래프 개형의 변화를 쉽게 파악할 수 있었다. 이상우(2022)는 이차함수에 대해 오개념을 지닌 학생 4명을 대상으로 알지오매스를 활용하는 수업을 진행함으로써 이차함수와 관련된 학생들의 이해가 전반적으로 개선되었다고 보고하였다. 박성준(2021)은 알지오매스의 3D 기능을 이용하여 입체도형을 다루는 교수-학습 자료를 개발하고 이를 초등학생 2명에게 적용하여 학습 동기와 같은 정의적 역량이 유의미하게 향상되는 결과를 얻었다.

이상의 연구는 알지오매스를 활용하는 교수-학습 자료를 구체적인 학습 요소와 관련하여 개발하고 소규모 학생들에게 적용한 사례를 기술함으로써, 알지오매스에 기반하는 수학 교수-학습을 고려하는 데 의미 있는 시사를 주었다. 그러나 이들 연구로부터, 정규 수학 수업을 알지오매스를 활용한 학생 중심 탐구 활동으로 진행하였을 때 학생들의 학습 양상이나 제한점을 명시적으로 파악하는 데 어려움이 있다. 이에 본 연구는 알지오매스를 활용하는 학생 중심 탐구 수업을 김지연(2021)에 비추어 설계하고 이를 실제 수학 수업에 적용함으로써, 수업에 참여한 학생들이 보이는 닮음에 대한 이해 및 탐구 활동의 특징을 분석하여 알지오매스를 활용하는 탐구 수업 실행에 대한 직접적인 시사점을 얻고자 한다.

2. 도형의 닮음에 대한 학생들의 이해

닮음은 공간 직관에 의해 파악되는 기본 관념 중 하나로(최지선, 2008), 중학교 2학년에서 다루는 도형의 닮음은 피타고라스 정리, 삼각비, 원의 성질 등을 학습하는 데 기초가 되며 고등학교에서 호도법과 삼각함수, 미적분 등의 주요 개념을 이해하는 데도 주요한 역할을 한다(유재근, 박문환, 2019).

그러나 도형의 닮음 수업 대부분이 비례식을 세워 대응변의 길이를 구하는 정형화된 문제 해결에 집중함에 따라 닮은 삼각형의 조건을 추론해 보거나 삼각형의 닮음과 관련하여 가설을 설정하고 이를 정당화하는 탐구 활동은 거의 이루어지지 못하는 실정이다(김지연, 2021). 이에 여러 연구는 도형의 닮음에 대한 학생들의 이해를 분석하고 중학교 닮음 지도의 대안을 모색하였다.

방혜진(2008)에 따르면 학생들은 기하 영역 학습에서 개념이나 정의를 부정확하게 이해하여 오류를 범하는 경우가 많다. 특히 두 도형이 합동이면 닮음이 아니라고 생각하기도 하고(최지선, 2003), 삼각형의 합동 조건과 닮음 조건을 혼용하며 합동과 닮음의 수학적 의미를 명확히 설명하는 데 어려움을 보인다. 이는 두 삼각형의 닮음비가 1:1인 경우 두 삼각형이 합동이 되는 관계를 충분히 조정하지 못하여 발생하는 오류로 보이며, 삼각형의 닮음 조건을 유도하는 과정에서 삼각형의 합동 조건을 이용하는 전개 방식과도 관련이 있을 수 있다(전성림, 2009).

박은지(2013)는 학생들이 삼각형의 닮음 조건을 말할 수는 있지만 이를 닮은 삼각형을 찾는 데 활용하지 못하며, 한 쌍의 각이 같은 두 삼각형을 서로 닮음으로 판단하는 등의 오류를 범한다고 하였다. 또한 학생들은 닮음의 의미에 주목하여 문제를 해결하지 않고 타당한 이유 없이 비례식을 기계적으로 활용하려는 경향을 보인다. 박은지(2013)에 따르면 이는 도형의 닮음 단원에서 다루는 문제 대부분이 닮은 삼각형에 대해 대응변의 비를 구하는 것에만 집중하여 학생들이 닮음의 의미를 충분히 음미할 탐구의 기회를 제공하지 못하는 것과 관련이 있다.

오미진(2012)은 도형의 닮음에 대한 학생들의 오개념을 분석하여 그 유형을 분류하였다. 특히 삼각형의 닮음 조건에 관하여는 '한 쌍의 변의 비가 주어지고 그 양 끝 각의 크기가 같은 두 삼각형은 서로 닮음이다'를 ASA 닮음으로 표현하면서 ASA 합동과 유사하게 해석하거나, 두 쌍의 변의 비가 같고 끼인각이 아닌 한 각의 크기가 같거나 두 쌍의 변의 비만 같은 경우에 두 삼각형은 닮음이라고 생각하는 오개념 등이 있다(박은지, 2013; 최은비, 2016). 또한 닮은 평면도형이나 입체도형에서 두 도형의 넓이의 비나 부피의 비가 두 도형의 닮음비라고 생각하기도 한다(오미진, 2012; 방혜진, 2008; 최은비, 2016; 최지선, 2008).

이상의 선행연구를 통해 닮음 단원에서 학생들의 이해에 대한 몇 가지 특징을 확인할 수 있다. 첫째, 학생들은 서로 닮은 두 도형의 넓이의 비나 부피의 비가 두 도형의 닮음비와 같다고 생각하는 경향이 있다. 둘째, 삼각형의 닮음 조건을 주어진 삼각형의 닮음 여부를 파악하는 도구로 전혀 활용하지 않거나, 활용하더라도 두 쌍의 변의 비가 같으면 두 삼각형이 닮음이라고 판단하는 등과 같이 닮음 조건 중 일부를 누락하거나 잘못된 조건을 삼각형의 닮음 조건이라고 생각한다. 셋째, 학생들은 합동과 닮음 개념을 혼동하며, 문제 해결 과정에서 삼각형의 합동 조건과 닮음 조건을 혼용하기도 한다.

한편 최지선(2008)은 학교 현장에서 도형의 닮음을 비례식의 활용에만 주목하여 형식적으로 지도하는 문제를 지적하면서 닮음 개념 자체에 대한 탐구 활동의 필요성을 제기하였다. 최은비(2016)는 도형의 닮음 지도에서 다루어야 할 빅 아이디어로, '비례', '공형 등거리 사상', '삼각형의 닮음 조건', '닮음비와 넓이의 비 또는 부피의 비 사이의 관계'를 설정하여 교수-학습 상황에서 도형의 닮음을 개념적으로 다루는 데 의미 있는 시사를 주었다. 이에 본 연구는 알지오매스를 활용하여 학생들이 직접 도형의 닮음을 탐구하는 수업을 설계 및 실행하여 해당 수업을 통해 학생들이 보이는 학습의 양상을 '닮음비 이해', '삼각형의 닮음 조건 파악', '합동과 닮음 개념 비교' 측면에서 분석함으로써 도형의 닮음에 대한 교수-학습 방법 개선에 가치 있는 정보를 얻고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 교수-학습 자료

본 연구는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 수업으로 진행하였을 때 드러나는 학생들의 의사소통 양상을 분석함으로써 도형의 닮음 지도에 대한 교수학적 시사점을 모색하는 사례 연구이다. 이를 위해 김지연(2021)을 수정·보완하여 본 연구에서 실행할 학생 중심 탐구 수업의 교수-학습 자료로 구체화하였다.[3)]

김지연(2021)은 학생들이 주어진 삼각형의 닮음을 판단하는 수학적 도구로 삼각형의 닮음 조건을 이용할 수 있도록, 대응점과 대응변을 찾는 추상적인 활동을 알지오매스를 통해 시각적으로 구현한 교수-학습 자료를 개발하였다. 이 교수-학습 자료로부터 학생들은 서로 닮아 보이는 두 삼각형의 대응변을 알지오매스 환경에서 나란히 놓아 닮은 삼각형의 대응점과 대응변을 손쉽게 찾음으로써, 이미 학습한 삼각형의 닮음 조건을 적용하여 두 삼각형이 닮은 이유를 논리적으로 설명하는 활동을 수행한다. 즉, 김지연(2021)의 교수-학습 자료는 삼각형의 닮음 조건을 명시적으로 학습한 다음, 이를 이용하여 관련 문제를 해결하는 맥락을 전제로 한다.

그러나 본 연구는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생들이 직접 탐구하고 삼각형의 닮음 조건도 학생들 스스로 구성해보는 경험을 제공하여 도형의 닮음에 대한 학생들의 이해를 깊게 하는 교수-학습 방안을 모색하는 데 목표를 두었다. 즉, "한 평면도형 또는 입체도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 다른 한 도형과 모양과 크기가 같을 때, 이들 두 도형은 서로 닮았다고 한다"(이준열 외, 2019, p. 192)는 교과서의 정의에 기반하여 알지오매스 환경에서 학생들이 직접 주어진 두 삼각형을 확대 또는 축소하여 겹쳐봄으로써 삼각형의 닮음을 시각적으로 탐구하고 그 닮음 조건도 추측해 보는 활동 위주의 수업을 실행하고자 한다. 이에 본 연구에서 구체화한 교수-학습 자료는 교과서에 제시된 닮음의 뜻에 비추어 삼각형의 닮음 조건을 비롯한 닮음의 성질을 학생들 스스로 찾아내는 탐구 활동을 위한 것이다.

이러한 이유로 본 연구는 김지연(2021)에서 삼각형의 닮음 여부에 대해 탐구한 결과를 이미 학습한 삼각형의 닮음 조건과 관련하여 확인하는 부분을 제외하였다. 또한 학생들이 두 삼각형의 닮음을 닮음의 뜻에 비추어 탐구하는 활동을 촉진하기 위해 김지연(2021)의 교수-학습 자료에 "알지오매스를 사용해서 닮음의 뜻에 맞는지 알아보면 좋을 것 같아"라는 문구를 추가하였다. 더불어 각 문제에서 다루는 삼각형에는 서로 다른 방향의 빗금을 넣어 여러 삼각형을 이동하여 확대하거나 축소한 후 겹쳐보았을 때 그 포개짐 여부가 명확히 드러나도록 하였다.

이상과 같은 교수학적 의도에 따라 본 연구는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 수업으로 진행하기 위한 교수-학습 자료를 김지연(2021)에서 발췌한 세 문제와 본 연구에서 개발한 한 문제로 구성하였다. 문제 1에는 세 변의 길이가 주어진 닮은 두 삼각형을 제시하여 학생들이 SSS 닮음 조건을 발견할 수 있도록 하였다. 본 연구에서 개발한 문제 2에서는 세 변의 길이가 모두 주어졌지만 두 쌍의 변에 대해서만 길이의 비가 같은 두 삼각형을 제시하고 그 닮음 여부를 탐구하도록 함으로써 '두 쌍의 변의 비가 같은 경우'를 삼각형의 닮음 조건으로 보는 오개념(오미진, 2012)을 극복하고, SAS 닮음 조건을 발견하는 계기가 되도록 하였다. 문제 3에서는 두 쌍의 대응각의 크기가 같은 닮은 삼각형에 대해 그 닮음 여부를 탐색함으로써 AA 닮음 조건을 발견할 수 있게 하였으며, 문제 4에서는 SAS 닮음 조건을 본격적으로 탐구하되, 삼각형의 닮음 조건에 대한 이제까지의 탐구 활동 전

3) 본 연구에서 개발한 교수-학습 자료의 세부 내용은 <부록>을 참조하기 바란다.

반을 아우르고 음미할 수 있도록 삼각형 3개에서 서로 닮음인 삼각형을 찾도록 하였다.

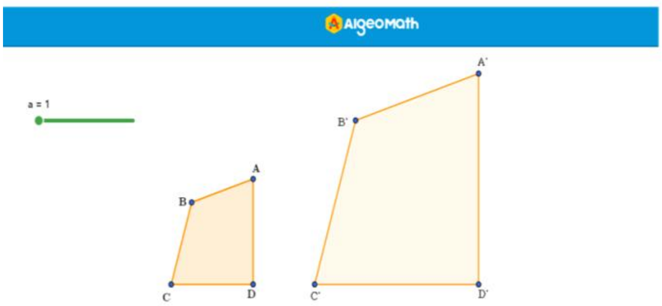
본 연구는 이와 같은 네 문제를 통해 학생들이 주어진 삼각형을 알지오매스 환경에서 확대 또는 축소하여 포개어보고 그 닮음 여부를 판단하는 활동지를 구성하였으며, 이를 삼각형의 합동 조건과 연결하여 탐구하는 국면은 학생들 스스로 만들 수 있게 하여 학생들이 직접 삼각형의 닮음 조건을 유도할 수 있는 여지를 두었다. 교사는 '알지오매스가 없다면 두 삼각형의 닮음 여부를 어떻게 확인할 수 있을까?', '포개진 두 삼각형은 어떤 합동 조건을 만족하는가?' 등과 같은 발문을 통해 학생들이 이러한 국면으로 나아갈 수 있도록 촉진할 수 있다.

2. 수업 상황 개관

본 연구는 **시 소재 중학교 2학년 1개 학급 27명을 대상으로 한다. 연구 대상은 모두 알지오매스를 사용한 경험이 없으며, 그 외 탐구형 기하 소프트웨어로는 지오지브라를 사용해 본 학생이 1명 있었다. 이에 본 연구는 학생 간 의사소통을 원활히 하고 공학 도구 사용 환경에서 발생하는 어려움을 학생들이 서로 협력하여 해결할 수 있도록 연구 대상을 3~4명씩 7개 모둠으로 편성하여 수업을 진행하였다.

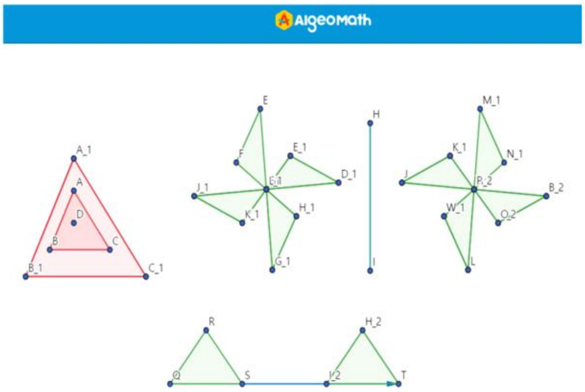
본 연구에서는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 활동으로 진행하는 수업을 매주 1회씩 총 5차시 진행하였다. 1, 2차시에는 연구 대상 중 알지오매스를 사용해 본 학생이 전혀 없는 점을 감안하여 알지오매스의 기본 기능을 다루는 수업을 진행하였으며, 3, 4, 5차시에는 앞 절에서 설명한 교수-학습 자료를 활용하여 알지오매스 환경에서 도형의 닮음을 학생들이 직접 탐구하는 수업을 본격적으로 실행하였다. 이때 해당 교수-학습 자료는 모둠별 활동지로 배포됨과 동시에 연구 대상이 모두 가입한 '알지오 모둠'을 통해 온라인으로도 제공되었다.

수업에서 학생들은 1인당 1대씩의 태블릿 PC를 사용하였으며, 교실에 있는 스마트 TV를 통해 교사의 태블릿 PC 화면을 참조할 수 있었다. 1차시에서 연구 대상은 교과서에 제시된 닮음의 뜻에 비추어 [그림 Ⅲ-1]과 같이 알지오매스의 슬라이더 기능을 활용하여 사각형을 확대 또는 축소하여 포개어 봄으로써 닮음의 의미를 시각적으로 확인한 다음, 닮음비의 뜻과 닮음의 기호를 학습하였다.



[그림 Ⅲ-1] 두 도형의 닮음을 시각적으로 확인하는 알지오매스 화면

2차시에 학생들은 알지오매스로 다각형을 그리고 이를 확대 또는 변환하여 얻은 [그림 Ⅲ-2]와 같은 조작 활동 결과를 알지오 모둠에 탑재하였다. 해당 수업에서 교사는 알지오매스를 조작하는 시범을 보이거나 교실을 순회하며 학생들이 알지오매스의 여러 기능에 숙달할 수 있도록 조언하였다.



[그림 Ⅲ-2] 알지오매스로 다각형을 조작한 학생 활동 사례

3, 4, 5차시 매 수업의 도입부에 학생들은 1차시 수업에서 사용한 [그림 Ⅲ-1]의 화면으로 도형의 닮음 정의를 복습하였으며, 3차시 수업에서는 문제 1, 2를, 4차시 수업에서는 문제 3을, 5차시 수업에서는 문제 4를 다루었다. 교사는 해당 차시에 해결할 문제를 전체 학생이 함께 읽도록 하여 문제에 대한 이해를 도왔으며, 수업 시작 5~10분 이내에 모둠 활동을 시작할 수 있게 하였다. 일부 학생들은 문제의 의도를 이해하지 못한 채 활동지의 그림만 보고 삼각형의 닮음 여부를 판단하려고 하였으나, [발췌문 Ⅲ-1]과 같은 모둠 내 의사소통을 통해 탐구 활동의 의도를 어렵지 않게 파악하였다.

[발췌문 Ⅲ-1] 탐구 활동의 의도에 대한 모둠 내 논의(문제 1)

12 학생 27 : (활동지의 문제 1을 보면서) 안 닮았는데? 닮지 않았네.

13 학생 3 : 아니, 안 닮았다가 아니라 어떻게 안 닮았는지 확인하는 게 중요하잖아.

14 학생 13 : 내 생각에는 180° 회전시키고 두 배를 키워보면 될 것 같아.

학생들은 해당 차시에서 탐구할 내용에 대해 [발췌문 Ⅲ-1]처럼 충분한 논의를 거친 다음, 실제 알지오매스를 조작하여 삼각형의 닮음 여부를 닮음의 뜻에 비추어 확인하는 탐구 활동을 진행하였다. 교사는 모둠별 탐구 활동이 거의 마무리되는 시점에서 학생들이 삼각형의 닮음을 확인하기 위해 발견한 전략을 학급 전체와 공유하도록 안내하고, 이를 바탕으로 삼각형의 합동 조건에 비추어 삼각형의 닮음 조건을 탐색하는 모둠별 논의가 진행되도록 유도하였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 수업으로 진행하기 위해 개발한 교수-학습 자료를 바탕으로 연구자 중 1명이 교사로서 수업을 실행하였으며, 수업 및 모둠 활동 과정과 각 모둠의 태블릿 PC 화면을 녹화하였다. 교사는 수업을 진행하면서 도형의 닮음 학습 및 의사소통에서 드러나는 특징을 관찰 일지에 기록하였으며, 학생들에게는 탐구 활동 과정을 가능한 모둠 활동지에 쓰게 하였고 과제 수행 결과는 알지오 모둠에 탑재하도록 하여 도형의 닮음 학습과 의사소통 양상이 간접적으로 드러나도록 하였다.

본 연구는 수업 및 모둠 활동과 태블릿 PC 화면을 녹화한 영상 자료, 영상 자료에 대한 전사 자료, 교사가 작성한 관찰 일지, 학생들이 작성한 모둠 활동지와 알지오 모둠에 탑재한 과제 수행 결과 등

을 분석 자료로 삼아, 알지오매스를 활용하는 도형의 닮음 수업에서 학생들이 보이는 닮음 학습의 특징을 의사소통의 양상에 비추어 분석하고자 한다. 이를 위해 관련 연구를 토대로 구체화한 분석 틀은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

Sfard(2008)에 따르면 사고와 의사소통은 분리할 수 없는 통합 개념이므로, 학생들의 의사소통 양상을 통해 수학적인 개념 발달과 사고 과정의 특징을 설명할 수 있다(오택근, 2014). 또한 교육부(2022)는 2007 개정 교육과정 이후 지속적으로 수학 교수-학습을 통해 길러야 할 핵심 역량 중 하나로 수학적 의사소통을 강조하고 있다. 이러한 맥락에서 유상휘, 송상헌(2013)은 수학 교육과정이 제시한 의사소통 능력에 따라 수학적 의사소통의 하위 영역을 분류하고, 각 영역별로 의사 표출유형 및 해석을 추가하여 수학 수업 담론 공동체에서 구성원들이 주고받는 의사소통의 특징을 살피기 위한 분석 틀을 개발하였다. 그러나 유상휘, 송상헌(2013)은 2007 개정 수학 교육과정을 기반으로 하여 최근 수학 교육과정의 내용이 반영되지 않았으며, 수학적 의사소통에서 정의적 학습 특징을 보여주는 항목을 별도로 구분하지 않아 그 양상을 명확히 다루는 데 어려움이 있다. 또한 해당 분석 틀은 내용 영역 전반을 아우르는 의사소통 과정을 다루고 있어 구체적인 학습 내용과 관련된 수학적 의사소통의 특징을 알아보는 데 한계가 있다.

이에 본 연구는 유상휘, 송상헌(2013)을 토대로 수학적 의사소통의 하위 영역을 분류하되, 유상휘, 송상헌(2013)이 하나의 항목으로 다룬 '수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 사용하는 데 중요함을 인식하기'를 '수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성하기'와 '수학적 표현의 중요성을 인식하기'로 구분한 다음, 후자에 정의적 학습 특징과 관련되는 의사 표출유형과 해석을 2022와 2015 개정 수학 교육과정, 수학적 의사소통에서 드러나는 정서적 표현에 주목한 선행연구 등에 비추어 개발 및 추가하였다.

2022 개정 수학 교육과정은 의사소통 역량의 평가에서 수학적 표현의 편리함을 인식하는지와 타인을 배려하고 의견을 존중하는지 등을 고려하도록 하였으며(교육부, 2022), 2015 개정 수학 교육과정에서는 "수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 가치를 인식하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다"(교육부, 2015, p. 5)를 중학교 수학 목표로 제시하였다. 또한 Fredricks, Wang, Linn, Hofkens, Sung, Parr, & Allerton(2016; Skilling, Bobis, Martin, Anderson, & Way, 2016; Reeve, 2013)은 수학적 의사소통을 통한 정서적 참여의 중요성을 강조하면서 그 특징으로 '수학 학습을 즐기기', '수학에 대해 흥미와 재미를 느끼기', '자신감 표현하기' 등을 제시하였다. 이에 본 연구는 '수학적 표현의 중요성을 인식하기'에 대한 의사 표출유형을 '가치(A1)', '배려(A2)', '흥미(A3)', '자신감(A4)'으로 구분하고 각각을 '수학적 표현의 편리함에 대해 언급함', '타인을 배려하고 의견을 존중하는 발언을 함', '재미나 즐거움을 표현함', '자신 있음, 할 수 있음을 언급함'으로 해석하여 그 내용을 기술하였다.

한편 수학적 의사소통에서 수학 용어의 의미를 정확히 이해하고 사용하는 것은 무엇보다 중요하다(박선화, 2000). 또한 수학적 의사소통에서 학생들이 수학 용어를 사용하는 방식은 학생들의 사고 수준을 반영한다(오택근, 2017). 박은지(2013)에 따르면 학생들은 수학 용어인 '닮음'에 대한 이해가 부족하여 도형의 닮음을 일상어로서 닮음이 갖는 의미에 따라 해석하며, 도형의 닮음을 단순히 시각적인 정보에 의존하여 판단하는 오류를 범한다. 임재훈, 박교식(2009)는 닮음이라는 용어가 일상생활에서는 생김새나 성질 따위가 서로 비슷함을 의미하지만, 학교 수학에서는 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 서로 포개어지는 두 도형을 뜻하므로, 닮음 교수-학습 상황에서는 이 둘의 차이를 의식적으로 구분하는 교수학적 노력이 필요하다고 역설하였다. 이에 본 연구는 '수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하기'의 의사 표출유형 중 하나인 '표현혼용(U2)'에 '일상용어와 수학 용어를 혼동하여 사용상 오류가 보임'이라는 해석을 추가함으로써, 학생들의 의사소통에서 드러나는 도형의 닮음에 대한 학습 양상을 살필 수 있도록 하였다.

<표 Ⅲ-1> 수학적 의사소통 분석 틀

하위 영역	의사 표출 유형(코드)	해석	출처
수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하기[4]	표현이해(U1)	수학적 용어 및 표현을 이해하고 정확히 사용함	유상휘, 송상헌(2013)
	표현혼용(U2)	수학적 용어 및 표현을 혼동하여 사용상 오류가 보임	
		일상용어와 수학 용어를 혼동하여 사용상 오류가 보임	박은지(2013), 임재훈, 박교식(2009)
자신의 생각을 수학적 언어를 사용하여 표현하기	공표(L1)	자신의 해결이나 생각을 드러내어 발표	유상휘, 송상헌(2013)
	설명(L2)	자신의 생각을 남이 알 수 있도록 밝혀 말함	
	제안(L3)	생각이나 해결 방법을 제시함	
타인의 생각과 전략을 분석 및 평가하여 효율적으로 의사소통하기	질문(J1)	모르거나 의심나는 점을 물음	
	반문(J2)	되받아 물음	
	의문(J3)	의심스럽게 생각함	
	긍정(J4)	그러하다고 생각함	
	이해(J5)	사리를 깨달아 앎	
수학에 대해 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성하기	수정(R1)	자신의 생각을 바로잡아 고침	
	반성(R2)	자신의 생각을 돌이켜 봄	
	정당화(R3)	근거를 제시하여 타당한 것으로 만듦	
	명확화(R4)	자신의 생각을 명백하고 확실하게 함	
	일반화(R5)	아이디어의 적용 범위를 확장함	
	탐구(R6)	깊이 있게 파고들어 캐냄	
수학적 표현의 중요성을 인식하기	가치(A1)	수학적 표현의 편리함에 대해 언급함	교육부(2022)
	배려(A2)	타인을 배려하고 의견을 존중하는 발언을 함	
	흥미(A3)	재미나 즐거움을 표현함	교육부(2015), Fredricks et al. (2016), Skilling et al. (2016), Reeve(2013)
	자신감(A4)	자신 있음, 할 수 있음을 언급함	

수집한 자료를 관련 선행 연구 및 <표 Ⅲ-1>에 비추어 분석하는 과정은 본 연구자들과 수학교육 전공 박사 과정에 있는 현직 교사 2명이 개별적으로 진행하였으며, 개별 분석 과정에서 분석자들 간에 차이가 발생한 부분에 대해서는 4회에 걸친 공동 논의를 통해 지속적으로 수정하고 보완하여 최종 결과를 도출하였다.

Ⅳ. 연구 결과

본 연구는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 활동으로 진행하는 수업을 학생들의 의사소통 양상에 비추어 분석함으로써 닮음 교수-학습 개선에 의미 있는 정보를 제공하는 데 목표를 두었다. 이에 본 연구는 탐구 활동의 의사소통에서 학생들이 드러낸 닮음 학습의 양상을, 도형의 닮음에 대한 학생들의 이해를 살핀 선행연구에 비추어 ‘닮음비 이해’, ‘삼각형의 닮음 조건 파악’, ‘합동과 닮음 개념 비교’로 범주화하고 <표 Ⅲ-1>에 근거하여 각 범주의 세부 특징을 분석하였다. 이하에

4) 해당 영역의 의사표출 유형인 표현 이해(U1)와 표현 혼용(U2)은 다른 하위 영역의 의사표출 유형과 함께 기술될 때 의사소통 주체의 발언 의도를 좀 더 잘 드러낼 수도 있다. 그러나 본 연구는 수학 용어인 ‘닮음’에 대해 학생들이 지닌 이해의 한계를 지적한 선행 연구(박은지, 2013; 임재훈, 박교식, 2009)에 비추어 해당 영역을 통해 ‘닮음’이라는 수학 용어에 대한 학생들의 이해 특징을 파악하는 데 좀 더 주목하였다. 이에 학생의 특정 발언이 다양한 의사표출 유형과 관련된다고 판단될 때는 표현 이해(U1), 표현 혼용(U2)뿐만 아니라 다른 경우에 대해서도 가장 특징적인 의사 표출유형 한 가지를 선택하여 이를 코드화하였다.

서는 이러한 분석 결과를 구체적으로 기술하고 이를 토대로 도형의 닮음과 관련되는 교수학적 시사점에 대해 논하고자 한다.[5)]

1. 닮음비 이해

도형의 닮음을 다룬 여러 연구는 두 도형의 닮음비를 두 도형의 넓이의 비로 생각하는 학생이 적지 않다고 지적하였다. 본 연구에서도 학생들은 닮음이라고 추측한 두 삼각형의 닮음비를 구하기 위해 두 삼각형의 넓이를 측정하는 모습을 보였다. [발췌문 Ⅳ-1]은 학생들이 문제 4의 $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$를 닮음으로 추측하고, [그림 Ⅳ-1]에서 보듯이 $\triangle EDC$를 점 C를 중심으로 95.47° 회전하여 $\triangle E'D'C$를 구하고 이를 $\overline{CD'}$에 대해 선대칭 한 $\triangle E''D'C$를 얻은 다음, $\triangle E''D'C$와 $\triangle ABC$가 완전히 포개지도록 $\triangle E''D'C$를 확대하는 방법에 대해 논의하는 대화이다.

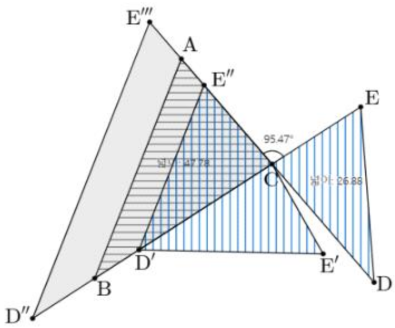
[발췌문 Ⅳ-1] $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$의 닮음비를 넓이의 비로 구하는 상황(문제 4)

154 학생 4 : 애 넓이를 재고 싶은데. ($\triangle ABC$와 $\triangle EDC$의 넓이를 측정한다.) (L1)

156 학생 20 : ($\triangle ABC$의 넓이인) 47.78 나누기 ($\triangle EDC$의 넓이인) 26.88 해 볼 사람?

157 학생 14 : 1.777529야. ($\triangle E''D'C$를) 1.8(배) 정도 (확대) 해볼까? (L3)

160 학생 4 : ([그림 Ⅳ-1]의 $\triangle E'''D''C$를 보면서) 어? 당황스러운데? (J3)



[그림 Ⅳ-1] 알지오매스로 $\triangle E''D'C$를 1.8배 확대하여 $\triangle E'''D''C$를 얻은 화면

[발췌문 Ⅳ-1]에서 학생 4는 $\triangle E''D'C$와 $\triangle ABC$가 완전히 포개지도록 $\triangle E''D'C$를 확대하려면 우선 삼각형의 넓이를 재보아야 한다는 자신의 생각을 공표하였다(154, L1). 이에 학생 20은 알지오매스의 넓이 측정 기능을 이용하여 $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$의 넓이를 각각 47.78과 26.88로 구한 다음 이들의 비를 구해보자고 하였으며(156), 학생 14는 $\triangle ABC$의 넓이를 $\triangle EDC$의 넓이로 나누어 얻은 근삿값 1.8을 $\triangle E''D'C$의 확대 비율로 제시하였다(157, L3).

1차시에서 연구 대상은 서로 닮은 두 도형의 닮음비를 '대응변의 길이의 비'로 학습하였지만, [발췌문 Ⅳ-1]의 학생들은 $\triangle E''D'C$를 $\triangle ABC$와 완전히 포개기 위한 확대 비율로 두 삼각형의 넓이의 비를 사용하였다. 이는 서로 닮은 두 도형에 대하여 한 도형을 다른 도형과 완전히 포개고자 할 때 확대 또는 축소하는 비율로서의 닮음비의 의미를 학생들이 충분히 파악하지 못했음을 보여준다. 실제로 교과서에 제시된 닮음비인 '대응변의 길이의 비'는 닮음비의 의미를 담은 뜻이라기보다 닮음비를 구하는 방법에 더 가까운바, 이를 통해 학생들이 닮음비를 '확대 또는 축소하는 비율'로 파악하기는 쉽지 않다. 2015 개정 중학교 2학년 교과서 10종 모두는 닮음비를 '대응변의 길이의 비'로 기술하고

5) 이하에서는 지면상의 제약을 감안하여 교수-학습 자료의 모든 문제에 대한 탐구 활동 과정을 낱낱이 기술하는 대신, '닮음비 이해', '삼각형의 닮음 조건 파악', '합동과 닮음 개념 비교'의 범주별 특징을 구체적으로 드러내는 탐구 활동에 중점을 두어 설명하고자 한다.

있으며, 닮음인 두 도형을 완전히 포갤 때 '확대 또는 축소하는 비율'로서의 닮음비의 내적 의미는 명시적으로 설명하지 않는다.

[발췌문 Ⅳ-1]은 이처럼 닮음비를 '대응변의 길이의 비'로 학습한 학생들이 닮은 두 도형을 실제로 포개기 위해 확대 또는 축소하는 상황이 되면 직관적으로 두 도형의 넓이의 비를 그 확대 또는 축소 비율로 사용함을 보여준다. 여러 연구(오미진, 2012; 방혜진, 2008; 최은비, 2016; 최지선, 2008)에 따르면 많은 학생이 두 도형의 닮음비가 넓이를 구한 경우에도 보존된다는 오개념을 지니고 있는바, 이는 '대응변의 길이의 비'라는 교과서의 닮음비 정의와 '확대 또는 축소하는 비율'을 넓이의 비로 추측하려는 학생들의 직관이 조정되지 않아 발생한 오개념으로 추론해 볼 수 있다. Pratt(2005)에 따르면 새로운 지식은 예전 지식과 더불어 존재하며 수학 학습에서 발생하는 오개념은 옳은 개념을 그대로 알려주는 것으로 사라지지 않는다. 그러므로 좋은 교수-학습은 학생의 직관에서 출발하여 학생 스스로 그 한계를 인식하고 이를 개선하는 기회를 준다(Batanero, & Sanchez, 2005). 즉, 도형의 닮음비를 넓이의 비로 보는 오개념을 교정하기 위해서는 학생들이 해당 도형을 넓이의 비로 확대함으로써 드러나는 허점을 직접 확인하고 이를 수정하는 구체적인 경험이 필요하다.

실제로 [발췌문 Ⅳ-1]에서 학생들은 알지오매스를 활용하여 점 C를 중심으로 $\triangle E''D'C$를 1.8배 확대한 $\triangle E'''D''C$가 [그림 Ⅳ-1]처럼 $\triangle ABC$와 완전히 포개지지 않자 몹시 당황하였으며, 학생 4는 자신들이 찾은 해결 방법에 적극적으로 의문을 제기하는 모습을 보였다(160, J3). 이는 알지오매스를 활용하여 도형을 조작해보는 탐구 활동을 통해 학생들이 자신들의 추측을 시각적으로 확인하여 이에 대한 개선의 필요성을 인지하는 의사소통 양상을 보여준다.

한편 교사는 모둠을 순회하다가 [발췌문 Ⅳ-1]의 상황을 보고 [발췌문 Ⅳ-2]와 같이 변의 비를 생각해보도록 제안하였다(166). 이에 따라 학생 15와 학생 20은 알지오매스로 $\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$을 측정하여 그 값들의 비율인 1.33배로 $\triangle E''D'C$를 확대함으로써 얻은 $\triangle E''''D'''C$가 [그림 Ⅳ-2]처럼 $\triangle ABC$와 완전히 포개짐을 확인하였다(169, 172). 이를 통해 학생들은 $\triangle ABC$와 완전히 포개기 위한 $\triangle E''D'C$의 확대 비율로 두 도형의 넓이의 비인 1.8을 정했던 자신들의 추측을 수정하여 대응변인 $\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$의 비 1.33을 확대 비율로 활용할 수 있음을 인지하게 되었다.

[발췌문 Ⅳ-2] $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$의 닮음비를 변의 길이의 비로 구하는 상황(문제 4)

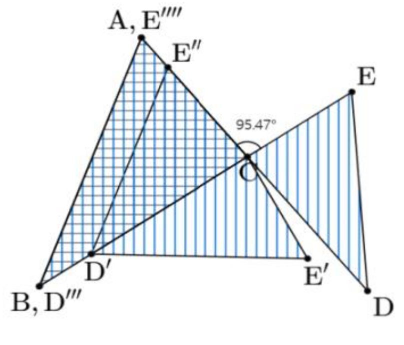
164 교사 : 넓이를 잰 이유는 뭐야?

165 학생 20 : 몇 배인지 보고 싶어서요.

166 교사 : 변의 길이를 잴 수도 있어요.

169 학생 15 : ($\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$을 측정하여 각각 13.77과 10.33을 얻은 다음) 이 둘을 나눠볼까? 1.3330106486이 나오는데?

172 학생 20 : 1.33(배)로 (확대)해볼까? ([그림 Ⅳ-2]을 보며) 이 정도면 된 거 아냐?



[그림 Ⅳ-2] 알지오매스로 $\triangle E''D'C$를 1.33배 확대하여 $\triangle E''''D'''C$를 얻은 화면

그러나 학생들은 문제 4에 대한 모둠별 탐구 활동 이후에도 [발췌문 Ⅳ-3]과 같이 수학적 토론을 진행하여 문제 4를 해결한 자신들의 사고 과정을 반성하고(R2) 수학적 표현의 가치를 언급하는(A1)

의사소통을 하였으며 이를 통해 대응변의 비를 편리하게 구하는 수학적인 방법을 발견하였다.

[발췌문 Ⅳ-3] 사고 과정을 반성하고 수학적 표현의 가치를 언급하는 의사소통 상황(문제 4)

227 학생 4 : 근데 4하고 3을 나누면 어떻게 되지?

228 학생 20 : 4하고 3을 나누면 3분의 4지.

229 학생 4 : 봐봐. 1.333 이렇게 나오잖아. 여기 4하고 3을 나눴어도 됐었어. … ([그림 Ⅳ-2]의 $\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$을 가리키며) 우리는 이것과 이것을 재서 나눴잖아. 근데 ($\overline{AC}$와 $\overline{EC}$를 가리키며) 이것과 이것은 8, 6으로 문제에 나와 있잖아. 이것으로 나눠도 돼. (R2)

232 학생 20 : 아! 어차피 얘네 비율이 같으니까? (J5)

233 학생 4 : 그니까 ($\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$을 가리키며) 길이를 안 재고 편하게 할 수도 있었단 말이지. (A1)

[발췌문 Ⅳ-3]에서 학생 4는 문제 4를 해결하는 데 필요한 $\triangle E''D'C$의 확대 비율을 $\overline{AB}$와 $\overline{E''D'}$의 측정 결과로 복잡하게 구하지 않아도 된다고 언급하였으며(229), 이는 학생들이 직접 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 탐구하는 활동이 학생들 스스로 자신들의 사고 과정을 반성하는 의사소통(R2)으로 자연스럽게 이어짐을 보여준다. 또한 학생 4는 문제에 주어진 $\overline{AC}$와 $\overline{EC}$의 길이인 8과 6을 이용하면 좀 더 쉽게 닮음비를 구할 수 있다고 그 편리함을 언급하면서(233) 수학적 표현의 가치에 대해 인식하는 모습을 보여주었다(A1). [발췌문 Ⅳ-3]에서 학생들은 문제에 주어진 변의 길이의 비로 닮음비를 구하는 수학적인 방법을 발견하였으며, 이는 길이가 주어지지 않은 대응변의 길이를 알지오매스로 직접 측정하여 닮음비를 구하던 [발췌문 Ⅳ-2]의 상황과는 대조를 이룬다.

이상에 따르면 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구하는 과정의 의사소통을 통해 학생들은 닮음비를 넓이의 비로 추측한 직관의 부적절성을 시각적으로 확인하였으며([발췌문 Ⅳ-1]), 이로부터 닮은 도형을 완전히 포개기 위해 '확대 또는 축소하는 비율'은 '대응변의 길이의 비'인 닮음비가 됨을 명시적으로 파악하였다([발췌문 Ⅳ-2]). 또한 학생들은 알지오매스를 활용한 자신들의 탐구 활동을 스스로 되돌아보는 반성적 의사소통을 통해 알지오매스로 변의 길이를 재보지 않고도 문제에 주어진 수학적 표현을 이용하면 닮음비를 손쉽게 구할 수 있다는 수학적 전략을 발견하였다([발췌문 Ⅳ-3]).

2. 삼각형의 닮음 조건 파악

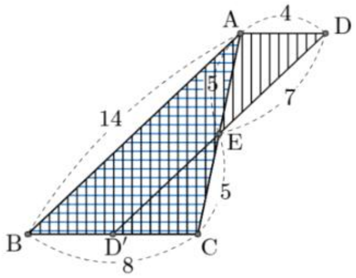
이하에서는 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음 여부를 탐구하는 과정에서 삼각형의 3가지 닮음 조건과 관련하여 학생들이 보인 학습의 특징을 의사소통 양상에 비추어 살펴본다.

1) SSS 닮음

연구 대상은 문제 1에서 $\triangle AED$와 $\triangle CAB$가 닮은 삼각형이라고 추측한 다음, 알지오매스를 활용하여 이를 확인하는 모둠별 탐구 활동을 진행하였다. 학생들은 $\triangle AED$을 점 E를 중심으로 180° 회전하여 얻은 $\triangle CED'$을 다시 점 C를 중심으로 2배 확대하여 얻은 삼각형이 [그림 Ⅳ-3]과 같이 $\triangle CAB$와 정확하게 포개짐에 따라 $\triangle AED$와 $\triangle CAB$가 서로 닮았다는 결론을 내렸다. 이에 교사는 모둠 활동 결과를 전체 학급을 대상으로 공유하면서 학생들에게 알지오매스가 없다면 삼각형의 닮음 여부를 어떻게 확인할 수 있는지 발문하였으며, 이에 대해 학생들은 [발췌문 Ⅳ-4]와 같이 수학적인 논의를 진행하였다.

[발췌문 Ⅳ-4] SSS 닮음에 대하여 탐구하는 상황 1(문제 1)

305 교사 : 알지오매스가 없다면, 주어진 삼각형이 닮음인지 어떻게 확인할 수 있을까?
318 학생 27 : 길이가 맞아요, 2배.
320 학생 2 : 비율! 비율!
321 교사 : 볼까 우리? ([그림 Ⅳ-3]을 가리키며) 여기($\overline{AD}$의 길이)가 4잖아, 여기($\overline{AB}$의 길이)는 14잖아. 2배 아닌데?
324 학생 3 : <u>대응하는 변끼리.</u> (U1)
325 교사 : 대응하는 변? 대응하는 변은 어떻게 알 수 있을까?
326 학생 3, 학생 6 : <u>2배가 되는 변이 대응하는 변이에요.</u> (R3)
349 학생 20 : 평행하게 해요.
351 학생 8 : 각이 같은 것끼리.



[그림 Ⅳ-3] 알지오매스로 △AED와 △CAB가 닮음임을 탐구한 화면

[발췌문 Ⅳ-4]에서 학생들은 알지오매스를 사용하지 않고 주어진 삼각형이 닮음인지 어떻게 알 수 있느냐는 교사의 발문(305)에 변의 길이가 2배라거나 비율이 같아서라고 답하였다(318, 320). 이에 교사가 △AED의 $\overline{AD}$와 △CAB의 $\overline{AB}$는 각각 4와 14로 길이의 비가 2배가 아니라고 의문을 제기하자(321), 학생 3은 대응하는 변끼리의 비를 보아야 한다고 하면서(324) 닮은 두 삼각형과 관련하여 대응하는 변이라는 수학적 용어를 정확히 사용하였다(U1). 또한 대응하는 변을 어떻게 알 수 있느냐는 교사의 발문(325)에 대해, 학생 3과 학생 6은 2배가 되는 변이 대응하는 변이라고 근거를 제시하여 자신의 생각을 정당화하였다(326, R3). 오미진(2012)에 따르면 학생들은 닮은 두 삼각형에서 대응변을 찾는 데 어려움을 보이며 대응변의 비와 닮음비 사이의 관계를 명확하게 이해하지 못한다. 그러나 [발췌문 Ⅳ-4]에서 학생들은 주어진 삼각형의 닮음 여부를 판단하기 위해서는 대응하는 변의 비를 보아야 하며 문제 1에서는 길이의 비가 2배인 변이 대응변이라고 수학적 용어를 사용하여 자신의 사고 과정을 표현하는 의사소통 양상을 보였다. 이는 [발췌문 Ⅳ-4]와 같은 수학적 논의에 앞서 학생들이 직접 알지오매스를 활용하여 △AED를 180° 회전한 다음 2배 확대하여 얻은 삼각형을 △CAB과 겹쳐보는 탐구 활동을 실행해 봄에 따라, 닮은 두 삼각형의 대응변의 비가 2배임을 쉽게 의식할 수 있었음을 보여준다. 이를 통해 학생들은 닮은 두 삼각형을 완전히 포개기 위해 '확대 또는 축소하는 비율'을 '대응하는 변의 길이의 비'인 닮음비의 의미와 연결하여 파악하게 되었다고 볼 수 있다.

그러나 [발췌문 Ⅳ-4]의 학생들 중에는 대응하는 변을 찾기 위해서는 변을 평행하게 만들어야 한다거나(349), 각이 같은 것을 살펴야 한다(351)는 등으로 모호하게 답한 경우가 있었다. 이에 교사는 [발췌문 Ⅳ-5]와 같이 대응변을 찾는 수학적인 방법에 대해 직접적으로 논의하는 상황을 만들어 학생들이 SSS 닮음 조건을 찾는 계기를 마련하였다.

[발췌문 Ⅳ-5] SSS 닮음에 대하여 탐구하는 상황 2(문제 1)

352 교사 : ([그림 Ⅳ-3]을 가리키며) 두 삼각형에서 제일 작은 변끼리의 길이 비율이 얼마예요?
353 학생들 : 4대 8! 1대 2요!
354 교사 : 4와 8이니까 2배가 되네요. 그 다음 어떻게 해야 할까? 또? (△AED에서) $\overline{AE}$의 길이는?
356 학생 8 : <u>아! 길이가 제일 긴 건, 제일 긴 변에 대응하고. 제일 짧은 건, 제일 짧은 변에 대응을 하고. 나머지 변은 나머지 변에 대응을 해요.</u> (R1)
369 학생들 : <u>대응하는 변의 비를 봐요.</u> (R5)

[발췌문 Ⅳ-5]에서 교사가 가장 짧은 변의 길이의 비를 묻고 이에 대해 설명해 주자(352, 354), 학생

8은 길이가 제일 긴 것은 제일 긴 변에, 제일 짧은 것은 제일 짧은 변에, 그리고 나머지 변은 나머지 변에 대응하면 된다고 대응변을 찾는 방법을 바르게 답하였다(356). [발췌문 Ⅳ-4]에서 학생 8은 대응변을 찾으려면 각이 같은 것끼리 대응시켜야 한다고 하였으나(351), [발췌문 Ⅳ-5]의 논의를 통해 자신의 생각을 바로 잡아 수정하였다(R1). 또한 다른 학생들은 세 변의 길이가 주어진 두 삼각형이 닮음인지 판단하기 위해서는 대응변의 길이의 비를 확인하면 된다고 말함으로써(369), 학생 8의 아이디어(356)가 적용되는 범위를 확장하여 SSS 닮음 조건으로 일반화하였다(R5).

박은지(2013)는 학생들이 삼각형의 닮음을 확인할 때 시각에 의존하여 직관적으로 판단하며 닮음 조건을 이용하지 않기 때문에 그 효용성을 전혀 인지하지 못한다고 하면서, 삼각형의 닮음 조건의 유용성을 학생들이 경험할 수 있도록 주어진 삼각형의 닮음을 직접 탐구하는 활동 중심 수업을 진행할 필요가 있다고 하였다. 이상에서 학생들은 알지오매스를 활용하여 삼각형을 직접 조작하는 탐구 활동을 통해 '대응변의 비'인 닮음비를, 닮은 두 삼각형을 완전히 포개기 위해 '확대 또는 축소하는 비율'과 연관시켜 닮은 두 삼각형의 대응변을 옳게 파악하였다([발췌문 Ⅳ-4]). 그러나 일부 학생들은 알지오매스를 활용한 탐구 활동에도 불구하고 서로 닮은 삼각형의 대응변을 구하는 데 어려움을 보였다. 이에 교사는 대응변을 찾는 수학적인 탐구 상황을 마련하여 학생들이 SSS 닮음 조건을 찾을 수 있도록 하였다([발췌문 Ⅳ-5]). 이는 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 탐구하는 학생들끼리의 모둠 활동은 교사와의 수학적인 음미 과정을 통해 닮음과 관련된 학습 성과로 의미 있게 정돈될 수 있음을 보여준다. 이경화, 장혜윤, 강완, 안병곤, 백도형(2017)에 따르면 수학 학습은 공학 도구를 활용한 경험 자체가 아니라 이에 대한 사고 활동에 의해 일어나며, 수학 수업에서 학생들은 공학 도구를 활용한 경험을 통해 무엇을 알게 되었으며 알아낸 것을 어떻게 표현할 수 있는지, 그 표현이 뜻하는 바가 무엇이며 어떻게 일반화할 수 있는지를 긴밀하게 탐구함으로써 수학적 개념과 원리를 의미 있게 발견할 수 있다.

2) AA 닮음

연구 대상은 문제 3에서 $\triangle ABC$와 $\triangle EBD$가 닮은 삼각형이라고 추측한 다음, 알지오매스를 활용하여 $\triangle ABC$을 점 B를 중심으로 2배 확대한 $\triangle A'BC'$을 다시 점 B를 중심으로 180° 회전함으로써 $\triangle EBD$와 완벽하게 포개지는 것을 [그림 Ⅳ-4]와 같이 확인하였다. 학생들은 알지오매스를 활용하여 문제 1을 해결한 경험에 비추어 $\triangle ABC$와 $\triangle EBD$도 서로 닮았다는 결론을 내렸으며, 이에 교사는 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$가 어떤 합동 조건을 만족하는지 발문함으로써 [발췌문 Ⅳ-6]과 같이 AA 닮음 조건을 찾는 탐구 상황으로 이끌었다.

[발췌문 Ⅳ-6] AA 닮음에 대하여 탐구하는 상황 1(문제 3)

58 교사 : ([그림 Ⅳ-4]의 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$를 가리키며) 두 삼각형은 무슨 합동일까?

59 학생들 : SAS요.

62 교사 : 왜 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$가 SAS 합동이지?

63 학생 18 : ($\angle B$를 가리키며) 이 각이 맞꼭지각이고요, 이 ($\overline{BE}$을 가리키며) 길이가…. (U2)

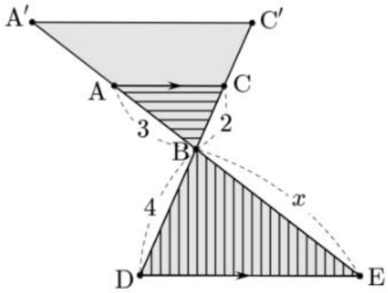
64 교사 : 그 길이는 모르는데. $\overline{BE}$의 길이는 x야.

65 학생 18 : 그럼 ASA?

68 학생 22 : 왜 ASA야?

69 학생 18 : ($\overline{BD}$와 $\overline{BC'}$을 가리키며) 여기와 여기가 같고. $\angle B$가 맞꼭지각으로 같고, 평행하니까 엇각($\angle BDE$와 $\angle BC'A'$을 가리키며)이 같아서. (L2)

70 학생 25 : 아! 그러네, 맞네. (J5) 이거를 알았으면 SAS라고 안 했을 텐데. (R2)



[그림 Ⅳ-4] 알지오매스로 $\triangle ABC$를 2배 확대하여 $\triangle A'BC'$을 얻은 화면

[발췌문 Ⅳ-6]에서 학생들은 $\triangle A'BC'$이 $\triangle EBD$와 무슨 합동인지 묻는 교사의 발문(58)에 SAS 합동이라고 답하였으며(59), 학생 18은 그 이유를 $\angle B$의 크기와 $\overline{BE}$의 길이에 주목하여 설명하려고 하였다(63). 이는 학생 18이 미지수를 의미하는 수학적 표현 x를 $\overline{BE}$의 실제 길이로 혼동하여(U2), $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$의 합동을 두 변과 끼인각이 주어진 경우로 해석하였음을 보여준다. 학생 18 외에도 학생들 대부분이 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$의 합동을 SAS라고 말한 것을 볼 때(59), 미지의 값을 나타내는 x를 주어진 값과 혼동하는 표현혼용이 삼각형의 닮음을 다루는 의사소통에서 적지 않게 발생함을 알 수 있다. 김남희(2009)에 따르면 수학에서 문자 표현을 본격적으로 배우게 되는 중학생에게 그 수학적 의미를 명확히 다루도록 지도하기가 상당히 어려우며, 많은 학생이 문자를 구체적인 값으로 간주하려는 경향을 보인다. 특히 연구 대상은 [발췌문 Ⅳ-6]에 앞서 알지오매스를 통해 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$를 직접 포개보는 조작 활동을 수행한바, 알지오매스를 활용한 조작 활동이 정확한 길이를 아는 $\overline{BA'}$과 완벽하게 포개지는 $\overline{BE}$의 길이를 주어진 값으로 간주하게 하는 데 암묵적으로 영향을 미쳤을 가능성을 배제하기 어렵다. 알지오매스를 활용한 학생 중심 탐구 활동에 기반하여 도형의 닮음을 다루고자 하는 교사는 문자 표현 이해와 관련된 이상과 같은 혼란의 발생 가능성에 교수학적 경각심을 지닐 필요가 있으며 이에 대처하는 구체적인 전략도 사전에 준비할 필요가 있다.

한편 [발췌문 Ⅳ-6]에서 교사는 학생 18에게 $\overline{BE}$의 길이는 모르는 값이라고 명시적으로 언급하여(64), 학생 18이 $\triangle A'BC'$과 $\triangle EBD$의 합동을 ASA로 설명하는 데 실마리를 제공하였다. 실제로 학생 18은 $\overline{BD}$와 $\overline{BC'}$의 길이가 같고 맞꼭지각과 엇각의 크기가 각각 같다는 수학적 언어를 사용하여 두 삼각형이 ASA 합동임을 설명하였으며(69, L2), 이를 통해 학생 25는 두 삼각형이 ASA 합동임을 깨닫고(70, J5), 자신의 생각을 돌이켜 반성하는 모습을 보였다(70, R2). 이상과 같은 수학적 의사소통은 미지수 x인 $\overline{BE}$의 길이를 주어진 값으로 해석한 학생 18에게 교사가 준 명시적인 실마리(64)에서 촉발되었으며, 학생들의 혼란을 조치하는 교사의 직접적인 개입은 알지오매스를 활용한 학생 중심 탐구 활동이 의미 있는 수학적 논의로 확장되는 데 주요한 역할을 하였다. Smith & Stein(2011)은 수학 수업에서 학생들 사이에 효과적인 수학적 논의가 일어나려면 교사가 교실을 순회하면서 학생들의 반응을 점검해야 하며 이는 단지 학생들을 바라보고 학생들의 이야기를 듣는 것 이상을 의미한다고 하였다. 교사는 학생들이 과제를 통해 탐구 활동을 수행하는 동안 학생들의 수학적 사고와 전략에 세심

한 주의를 기울여 학습을 촉진하는 발문이나 조언을 제공해야 하며, 이러한 조정과 중재는 학생 중심 탐구 수업에서도 교사 주도의 설명식 수업에 못지않게 중요하다.

[발췌문 Ⅳ-6]의 상황 이후 교사는 문제 3에 대한 학생들의 탐구 활동 결과를 전체 학급과 공유하면서 [발췌문 Ⅳ-7]과 같이 ASA 합동과 AA 닮음을 관련지어 설명하였으며(249), 이로부터 학생들은 문제 3의 구체적 사례를 AA 닮음 조건으로 일반화하였다(252, R5). 나아가 학생 8은 문제 3에 주어진 변의 길이의 비를 활용하면 닮음비를 구할 수 있다고 하면서 닮음비라는 수학적 용어를 정확히 이해하여 사용하는 모습을 보였다(255, U1).

[발췌문 Ⅳ-7] AA 닮음에 대하여 탐구하는 상황 2(문제 3)

249 교사 : … 두 각의 크기가 각각 같은 두 삼각형은 확대하거나 축소하여 ASA 합동을 만들 수 있어요. 그러니까 우리는 주어진 두 삼각형이 닮음인 것을 굳이 확대하거나 돌려보지 않고도 알 수 있죠. 어떻게?

252 학생들 : 각 두 개가 같으면요. (R5)

253 교사 : 그래요. 각 두 개가 같은 것이 확인되면 길이가 하나도 안 주어졌더라도 우리는 두 삼각형이 닮음인 것을 알 수 있어요. 그러한 두 삼각형을 AA 닮음이라고 해요.

254 교사 : 그런데, ([그림 Ⅳ-4]에서 $\overline{BC}$와 $\overline{BD}$를 가리키며) 여기서 길이 2와 4가 주어짐으로써 우리는 무엇을 알 수 있을까요? 이 문제에서 주어진 변의 길이는 무슨 역할을 할까요?

255 학생 8 : 닮음비요. (U1)

박은지(2013)에 따르면 교사가 삼각형의 닮음을 판단하는 방법을 설명할 때 삼각형의 합동과 닮음 사이의 관계를 명시적으로 비교하여 다루면, 학생들이 이미 학습한 합동 조건에 비추어 닮음을 이해하는 데 기여할 수 있다. 이러한 맥락에서 [발췌문Ⅳ-7]을 통해 교사가 제시한 설명은 학생들이 AA 닮음을 일반화하고 닮음비의 역할을 이해하는 데 주요한 토대가 되었다고 볼 수 있다.

3) SAS 닮음

연구 대상은 문제 4에서 $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$가 닮음임을 [발췌문 Ⅳ-1], [발췌문 Ⅳ-2]와 같이 알지오매스를 조작하여 시각적으로 확인하는 모둠별 탐구 활동을 진행하였다. 이에 교사는 모둠 활동 결과를 전체 학급을 대상으로 공유하면서 알지오매스를 사용하지 않고도 두 삼각형의 닮음을 확인할 수 있겠는지 발문하였으며, 학생들은 [발췌문 Ⅳ-8]과 같이 수학적인 논의를 진행하였다.

[발췌문 Ⅳ-8] SAS 닮음에 대하여 탐구하는 상황(문제 4)

175 교사 : 알지오매스를 사용하지 않고도 닮음인지 알 수 있을까?

186 학생 14 : 변의 길이의 비를 봐요. 근데 애네($\overline{AB}$와 $\overline{ED}$)는 길이가 안 나와 있으니까. 두 개가 같으면 나머지 하나도 같지 않을까요? (U2)

187 교사 : 문제 2에서는 두 쌍의 변의 길이의 비가 같았는데 서로 닮음이었나요? 학생 14의 말로 $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$가 서로 닮음이라고 확인할 수 있겠는지 모둠별로 더 이야기해 보세요.

200 학생 20 : 아! 여기에 선분 (두 쌍)이 이렇게 (길이 비가) 같잖아. 근데 여기 선분이 같고 여기 (끼인) 각도 같으면 결국 만들 수 있는 삼각형은 하나밖에 없잖아. (R6, R4)

217 학생 4 : (다각형 도구를 이용해서 두 변의 길이는 같은데 끼인각의 크기가 다른 두 삼각형을 그려보며) 그래. 이거 재밌는데? (A3)

218 학생 15 : 우리 좀 천재들이 모인 것 같애. (A4)

[발췌문 Ⅳ-8]에서 알지오매스를 사용하지 않고도 문제 4의 $\triangle ABC$와 $\triangle EDC$가 닮음인지 확인할 수 있느냐는 교사의 발문(175)에 학생 14는 변의 길이의 비를 보면 된다고 하면서 변의 길이가 주어진 $\overline{AC}$와 $\overline{EC}$의 비가 $\overline{BC}$와 $\overline{DC}$의 비와 같으니 길이가 주어지지 않은 $\overline{AB}$와 $\overline{ED}$의 비도 이와 같다고 추측하였다(186). 이는 문제 1을 통해 배운 SSS 닮음과 문제 3을 통해 배운 AA 닮음을 혼용한 표현혼용의 양상으로(U2), 학생 14는 두 변의 길이의 비가 같으면 두 삼각형이 SS 닮음이 되므로 나머지 한 변의 길이의 비도 같을 것이라고 잘못 생각한 것이다. 이에 교사는 문제 2를 상기시키며 모둠별 논의를 좀 더 진행하도록 제안하였으며(187), 학생들은 문제 2를 해결한 경험에 비추어 두 삼각형에서 대응하는 두 쌍의 변에 대해 그 길이의 비가 같다고 해서 나머지 한 쌍의 변의 길이의 비가 반드시 같은 것은 아니라는 점을 금방 알아차렸다. 이후 학생들은 알지오매스의 측정 기능을 사용하여 $\angle ACB$와 $\angle ECD$가 같다는 것을 확인하는 등 다양한 활동을 진행하였다. 이 과정에서 학생 20은 길이가 정해진 두 변 사이에 크기가 정해진 각이 끼인 여러 가지 경우를 알지오매스로 그려 탐구해 보고(200, R6) 이 경우에 만들 수 있는 삼각형은 하나뿐임을 명백히 설명하기 위해 자신이 그린 삼각형의 변을 따라 손을 반복하여 움직이는 모습을 보였다(200, R4). de Freitas & Sinclair(2014)는 수학적인 탐구 활동에서 신체의 물리적 움직임이 갖는 의미를 재조명하면서 수학적 사고가 구어적 의사소통뿐 아니라 제스처와 같은 비언어적 표현을 통해 개발될 수 있음을 역설하였다. 이에 따르면 학생 20은 주어진 문제 상황을 깊이 있게 파고들어 수학적인 원리를 찾는 탐구 활동을 수행하였으며, 자신의 생각을 명백히 하고 탐구 활동을 통해 자신이 발견한 바를 확실하게 전달하는 수학적 의사소통을 진행하였다고 볼 수 있다.

박은지(2013)에 따르면 학생들은 두 삼각형의 닮음 여부를 판단하기 위해 두 쌍의 변의 비와 그 끼인각의 크기를 확인해야 한다고 설명은 하지만, 실제 SAS 닮음 조건을 이용하여 문제를 해결할 때는 끼인각이 아니라 아무 각이나 그 크기가 같으면 닮음이 된다고 생각하는 오류를 보인다. 이는 학생들이 직접 SAS 닮음 조건을 구성한 경험이 없어 SAS 닮음 조건에 쓰인 각 요소의 의미를 충분히 인식하지 못했기 때문으로, 이를 개선하기 위해서는 닮은 삼각형을 실제로 조작하여 SAS 닮음 조건을 탐색하는 활동이 필요하다(pp. 41~43). [발췌문 Ⅳ-8]에서 학생 20의 사례는 알지오매스를 활용하여 SAS 닮음 조건을 직접 탐구하는 것은 SAS 닮음 조건을 중학교 1학년에서 학습한 삼각형의 결정 조건과 연결하여 그 의미를 이해하게 하는 데 기여함을 보여준다. 이처럼 새롭게 배운 내용과 이전에 배운 내용을 연결하여 음미하는 것은 효과적인 교수-학습을 위한 필수 전략으로(남인혜, 신보미, 2023), 2022 개정 수학 교육과정은 수학의 여러 내용 요소를 연결하여 다루는 것은 새로운 지식을 생성하고 창의성을 기르는 데 주요한 역할을 한다고 강조하였다(교육부, 2022).

한편 [발췌문 Ⅳ-8]에서 학생 4는 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구하고 이를 모둠별로 논의하는 상황이 재미있다고 언급하였으며(217, A3), 학생 15는 이러한 탐구와 수학적 의사소통을 통해 얻은 만족스러운 경험을 담화 공동체의 일원으로서 느낀 자부심으로 표현하였다(218, A4). 김택수(2007)에 따르면 학생들이 배움의 필요성을 느껴 학습 동기를 갖게 하려면 충분한 시간을 주어 학습한 바를 적극적으로 탐구하도록 하고, 자신들의 사고가 비약적으로 발전하는 구체적인 경험을 제공할 필요가 있다. 박성준(2021)은 알지오매스의 3D 기능을 이용하여 입체도형을 지도함으로써 초등학생들의 학습 동기를 유발하였다고 보고한바, 본 연구를 통해 실행한 알지오매스 활용 학생 중심 탐구 수업에서는 수학을 탐구하는 재미와 수학적인 탐구 성과에 대한 자부심이 수학적 의사소통 양상으로 구체화되었다.

3. 합동과 닮음 개념 비교

방혜진(2008)에 따르면 학생들은 학교 수학에서 다루는 개념의 뜻과 의미를 정확히 숙지하지 못하여 학습에 다양한 어려움을 겪는다. 특히 많은 학생이 삼각형의 합동과 삼각형의 닮음을 혼동하며 그 차이를 구별하지 못한다(전성림, 2009). 본 연구에서 학생들은 다양한 삼각형을 알지오매스를 활용하여 확대 또는 축소하거나 이동하여 포개어보는 탐구 활동을 통해 자연스럽게 '합동'과 '닮음'이라는 용어를 자주 사용하게 되었으며, 특히 문제 4에서는 [발췌문 Ⅳ-9]와 같이 '합동'과 '닮음'을 구별하려는 수학적 논의를 스스로 진행하였다.

[발췌문 Ⅳ-9] 합동과 닮음을 구별하기 위한 수학적 논의 상황(문제 4)
203 학생 20 : 그래서 <u>합동이라는 거, 아니 닮음이라는 거 아냐?</u> (R1)
204 학생 14 : <u>합동이랑 닮음 차이가 뭐야?</u> (J1)
205 학생 15 : <u>합동은 완전 포개어지는 거고, 닮음은... 닮은 거지. 나랑 원빈이랑 닮은 것처럼.</u> (U2)
207 학생 4 : <u>닮음은 하나를 크게 하거나 작게 해서 돌리면 겹쳐지는 거.</u> (U1)
209 학생 20 : <u>합동은 크기도 아예 같아야 하는 거고</u>. (R4)

[발췌문 Ⅳ-9]에서 학생 20이 '닮음'을 '합동'이라고 잘못 표현한 자신의 발언을 바로 잡아 고치자(203, R1), 학생 14는 합동과 닮음의 차이가 무엇인지 적극적으로 질문하였다(204, J1). 이에 학생 15는 완전히 포개지는 것이라는 수학적 의미를 담아 합동을 설명하였으나, 닮음에 대해서는 일상적인 담론에서 사용하는 뜻에 비추어 '생김새가 서로 비슷하다'는 의미로 수학 용어인 닮음을 일상어와 혼용하여 설명하였다(205, U2). 그러나 학생 4가 '닮음은 하나를 크게 하거나 작게 해서 돌리면 겹치는 것'이라고 재진술하였으며(207), 학생 20이 합동은 크기도 같아야 한다고 보충하면서 합동과 닮음의 차이를 분명히 하였다(209).

Sfard(2008)는 특정 단어를 사용하고 이해하는 방식에 따라 수학적 의사소통과 비수학적 의사소통을 구분할 수 있으며, 이를 통해 의사소통 주체의 수학적 사고 수준을 암묵적으로 평가할 수 있다고 하였다. [발췌문 Ⅳ-9]에서 학생 4가 설명한 닮음은 연구 대상들이 주어진 삼각형의 닮음 여부를 탐구할 때 알지오매스를 이용한 전략을 반영한 것으로, 교과서가 닮음을 설명할 때 사용하는 표현인 "한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 만든 도형이 다른 한 도형과 합동이 될 때"(강옥기 외, 2019, p. 215)에 '돌리면'을 추가하여 그 수학적 의미를 다룬 것이다(U1). 또한 학생 20은 서로 닮은 두 도형에 대하여 그 닮음비가 1:1인 특수한 경우가 합동임을 이해한 자신의 생각을 수학적 논의를 통해 명확히 드러내었다(R4). 이상에 따르면 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구하는 활동은 학생들 사이의 의사소통 양상이 수학적인 특징을 띠도록 하며, 의사소통 참여자의 수학적 사고 수준 발달에도 의미 있게 기여한다고 볼 수 있다.

전성림(2009)에 따르면 학생들은 합동과 닮음을 혼동하며 이를 구별하는 데 어려움을 겪으므로 교사는 닮음을 지도하는 교수-학습 상황에서 합동과 관련된 전반적인 설명을 함께 제시하여 그 둘을 명시적으로 비교하는 교수학적 전략을 구현할 필요가 있다. [발췌문 Ⅳ-9]는 이러한 교수학적 전략을 교사가 의도적으로 도입하지 않더라도 알지오매스를 활용하여 학생들이 직접 삼각형의 닮음을 탐구하는 수업에서는 '합동'과 '닮음'을 비교하는 수학적 논의가 학생들 사이에서 자연스럽게 등장함을 보여준다. 또한 이러한 논의를 통해 학생들은 교사의 개입 없이도 합동과 닮음 개념 사이의 관계를 스스로 살펴보고, 그 차이를 이해하여 정확히 사용하는 의사소통을 진행할 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 도형의 닮음 단원에서 알지오매스를 활용한 학생 중심의 탐구 수업을 진행하고, 학생들이 보이는 학습 양상을 의사소통 관점에서 분석하여 도형의 닮음과 관련되는 교수학적 시사점을 논하고자 하였다. 이를 위해 교과서에 제시된 닮음의 뜻을 설명한 후, 이에 따라 학생들이 직접 알지오매스를 활용하여 주어진 삼각형의 닮음 여부를 탐색하고 삼각형의 닮음 조건을 스스로 구성하는 활동 중심 수업을 설계 및 실행하였으며, 탐구 활동 과정의 의사소통 양상에 비추어 학생들이 보인 닮음 학습의 특징을 '닮음비 이해', '삼각형의 닮음 조건 파악', '합동과 닮음 개념 비교'로 범주화하여 분석하였다. 이상을 통해 본 연구에서 얻은 도형의 닮음 지도와 관련한 교수학적 시사점을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 서로 닮아 보이는 두 삼각형 중 하나를 다른 것과 포개기 위해 그 확대 비율을 구할 때 두 삼각형의 대응변의 비가 아니라 넓이의 비에 먼저 주목한다는 사실이 알지오매스를 활용한 탐구 활동에서 드러났다. 이는 닮은 두 도형을 확대 또는 축소하여 실제로 겹쳐보는 상황에서 학생들에게는 두 도형의 닮음비를 넓이의 비로 보는 것이 직관적으로 자연스럽다는 것을 보여준다. 연구 대상이 닮음비를 '대응변의 길이의 비'로 이미 학습하였음에도 이상과 같은 탐구 활동의 양상을 보인 것은, 수학 수업을 통해 올바른 수학 개념을 지도하여도 학생들이 지닌 직관적 한계의 극복은 보장되지 않으며 부적절한 직관은 이후 수학 학습에 지속적으로 영향을 미칠 수 있음을 시사한다. 실제로 여러 연구(오미진, 2012; 방혜진, 2008; 최은비, 2016; 최지선, 2008)는 닮은 두 도형의 닮음비를 넓이의 비로 간주하는 학생들이 적지 않음을 밝힌바, 이러한 오개념은 '대응변의 길이의 비'라는 교과서의 닮음비 정의와 '확대 또는 축소하는 비율'을 넓이의 비로 추측하려는 학생들의 직관이 조정되지 않아 발생하였다고 추론할 수 있다. 이러한 오개념을 극복하기 위해서는 학생들 스스로 직관의 한계를 인식하고 이를 개선하는 기회를 제공할 필요가 있으며(Batanero & Sanchez, 2005), 이때 알지오매스와 같은 공학 도구가 의미 있는 역할을 할 수 있다. 본 연구에 따르면 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구함으로써 학생들은 닮은 두 도형의 넓이의 비를 도형의 확대 또는 축소 비율로 접근하는 직관의 부적절성을 시각적으로 확인하여 자신의 생각을 수정할 필요를 느꼈으며, 닮은 도형을 완전히 포개기 위한 '확대・축소 비율'과 '대응변의 길이의 비'인 닮음비 사이의 관계를 명시적으로 파악하였다.

둘째, 알지오매스를 활용하여 주어진 삼각형의 닮음 여부를 탐구하는 과정은 학생들이 삼각형의 닮음 조건을 발견하는 계기가 되었으며 그 의미를 음미하는 기회를 제공하였다. 또한 이러한 탐구 활동을 통해 문자 및 삼각형의 닮음 조건과 관련된 오개념이 구체화되었고, 이를 극복하는 데는 알지오매스의 활용뿐 아니라 학생의 탐구 활동을 중재하고 조정하는 교사의 역할이 필요함을 확인하였다. 본 연구에서 학생들은 '알지오매스가 없다면 주어진 삼각형이 닮음인지 어떻게 확인할 수 있을까?', '대응하는 변은 어떻게 알 수 있지?'라는 교사 발문을 계기로 닮은 도형의 대응하는 변과 그 비에 좀 더 주목하게 되었으며, 대응하는 변은 닮음인 두 삼각형을 겹쳐보기 위해 이 중 하나를 확대 또는 축소하는 비율이 변의 비가 되는 두 변을 이른다고 바람직하게 설명하는 기회를 얻었다. 오미진(2012)에 따르면 학생들은 닮은 도형에서 대응하는 변을 찾기 어려워하는바, 알지오매스를 활용하여 닮음인 두 삼각형 중 하나를 확대 또는 축소하여 직접 겹쳐보는 탐구 활동 및 사고를 유도하는 교사 발문을 통해 연구 대상은 닮음비와 대응하는 변의 의미를 이해하였으며 대응변의 비와 각의 크기로 삼각형의 닮음을 판단하는 닮음 조건을 발견하는 토대를 마련하였다. 한편 연구 대상은 미지수 x 인 변의 길이를 주어진 값으로 해석하거나 AA 닮음 조건에서 각을 변으로 혼동하여 SS 닮음 조건이 존재한다고 잘못 생각하였다. 이에 교사는 문자 x 의 의미를 설명하고 이전에 탐구한 문제를 예로 들어 SS 닮음

조건이 존재할 가능성에 대해 발문함으로써 학생들이 이상과 같은 오개념을 인식하고 개선할 수 있도록 하였다. 수학 수업에서 교사는 학생들의 수학적 사고와 전략에 세심한 주의를 기울여 학습을 촉진하는 발문이나 조언을 제공해야 하며, 이러한 조정과 중재는 좋은 수학 수업을 만드는 데 핵심적인 역할을 한다(한채린, 김희정, 권오남, 2018; 권나영, 이민희, 2019).

셋째, 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구하는 활동은 학생들의 의사소통이 좀 더 수학적인 특징을 띠도록 하였으며 수학적 사고 수준 발달에도 의미 있게 기여하였다. 학생들은 알지오매스로 삼각형의 닮음을 탐구하는 과정에서 '합동'과 '닮음'이라는 수학적 표현이 빈번하게 사용되자 자연스럽게 이 둘을 비교하는 수학적 논의를 진행하였으며, 학생들 스스로 합동과 닮음 개념의 관계를 탐색하고 그 차이를 이해하여 각각을 정확하게 사용하는 수준에 도달하였다. 전성림(2009)은 학생들이 합동과 닮음을 구별하게 하려면 닮음을 지도하는 교사가 이 둘을 명시적으로 다룰 필요가 있다고 제안하였지만, 본 연구에서는 교사의 개입 없이도 알지오매스 환경을 통해 합동과 닮음에 대한 학생들의 이해가 개선되었다. 나아가 학생들은 알지오매스를 활용하여 도형의 닮음을 탐구함으로써 합동과 닮음 외의 여러 수학적 개념과 이들 사이의 관계를 적절히 다룰 수 있게 되었다. 이를테면, 학생들은 알지오매스 화면이 보여주는 즉각적인 피드백에 비추어 SAS 닮음 조건을 삼각형의 결정 조건과 연결하여 그 의미를 이해하는 논의를 진행하였으며, 이러한 수학적 의사소통에서 제스처와 같은 비언어적 표현이 다양하게 활용되었다. 공학 도구에 대한 신체의 물리적인 접촉은 수학적 개념 발달의 새로운 지평을 열 수 있으며(de Freitas, 2016), 수학적인 탐구 활동에서 신체의 움직임을 통한 의사소통은 수학적 사고 발달에 주요한 역할을 한다(de Freitas & Sinclair, 2014). 이상에 따르면 알지오매스 환경은 문제 상황을 깊이 있게 파고들어 수학적인 원리를 찾는 탐구 활동을 진행하는 데 도움을 주며 학생들이 자신들의 생각을 명백히 하고 탐구 활동을 통해 발견한 바를 담화 공동체와 공유하는 수학적 의사소통에 기여한다.

넷째, 알지오매스 환경에서 도형의 닮음을 학생 중심 탐구 활동으로 진행함에 따라 다양한 유형의 수학적 의사소통 양상이 드러났다. 알지오매스를 활용하여 주어진 도형을 확대하는 비율에 대해 논의하는 과정에서 학생들은 공표(L1), 제안(L3), 의문(J3), 이해(J5) 등의 의사 표출유형을 보였으며, 이는 자연스럽게 사고 과정을 반성(R2)하고 수학적 표현의 가치(A1)를 인식하는 의사소통으로 이어졌다. 또한 알지오매스를 사용하지 않고 삼각형의 닮음을 확인하는 방법에 대해 논의하는 과정에서는 '대응하는 변'이라는 수학적 용어를 정확히 사용하였으며(U1), 대응변을 찾는 방법과 관련된 자신의 아이디어를 알지오매스를 활용해 본 경험을 근거로 정당화하였다(R3). 또한 알지오매스에 기반한 탐구 활동을 통해 주어진 삼각형의 닮음 여부를 탐색한 사례로부터 SSS, AA, SAS 닮음 조건을 일반화하였으며(R5), 이 과정에서 학생들은 합동, 닮음, 확대, 축소, 회전, 대칭, 닮음비와 넓이의 비, 삼각형의 결정 조건 등과 같은 여러 수학적 개념을 다루는 논의를 진행하여 자신들의 사고를 개선하고(R1) 돌이켜보거나(R2) 적절한 근거를 들어 정당화(R3)하는 등의 의사 표출유형을 보였다. 나아가 학생들은 알지오매스를 활용한 탐구 활동 과정의 즐거움(A3)과 그 성과에 대한 자부심(A4), 수학적 표현의 편리함(A1)을 적극적으로 언급하였으며, 이는 수학적 의사소통을 통한 정서적 표현의 구체적인 양상을 보여준다. 수학 학습은 수학적 담론의 발전으로 개념화되며 수학을 배우는 것은 수학적 논의를 수정하고 확장하는 방법을 배우는 것인바(Sfard, 2001), 이상의 결과는 본 연구에 참여한 학생들이 도형의 닮음과 관련하여 의미 있는 수학적 성장을 이루었음을 시사한다.

본 연구는 알지오매스를 활용한 학생 중심 탐구수업의 의사소통 양상을 분석하여 학생들의 닮음 개념 이해 및 오개념 극복에 의미 있는 변화가 있음을 확인하였으며, 이는 학교 현장에서 알지오매스를 활용한 도형의 닮음 지도 방식을 구체화하는 데 기여하였다는 의의를 갖는다. 본 연구에서 학생들이 닮음에 대한 올바른 개념을 구성하기 위해서는 알지오매스의 활용뿐만 아니라 학생의 사고를 촉진하는 교사의

발문과 중재가 주요함이 드러난바, 알지오매스를 활용한 수업이 효과적으로 실행되는 데 필요한 교사 역량과 역할에 대한 후속 연구가 진행되기를 기대한다.

참고 문헌

강수영, 신보미(2022). 중학교 증명 수업에서 학생들의 연역적 추론 분석: 의사소통(commognition) 관점을 중심으로. **교육과정평가연구, 25**(1), 143-172.

강옥기 외(2019). **중학교 수학2.** 서울: 동아출판(주).

교육부(2018). **수학, 직접 만져보고 관찰하면서 배워요.** 교육부 보도자료(2018. 11. 7.)

교육부(2015). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제2015-74호[별책 8]. 서울: 저자.

교육부(2022). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제2022-33호[별책 8]. 서울: 저자.

구나영(2014). **확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 관한 연구.** 석사학위논문, 서울대학교.

권나영, 이민희(2019). 중등예비수학교사의 활동 일지에서 살펴본 노티싱의 특징. **한국학교수학회논문집, 22**(1), 63-80.

김남희(2009). **변수 개념의 분석 및 교수-학습.** 서울: 경문사.

김미주(2014). **스토리텔링을 활용한 수학 수업에서의 담화 분석.** 석사학위논문, 서울대학교.

김민혜(2020). **알지오매스를 이용한 중학교 2학년 기하영역 교수・학습 자료 개발.** 석사학위논문, 부산대학교.

김성미(2007). **Clairaut의 <기하학 원론>에 따른 '도형의 닮음' 지도.** 석사학위논문, 고려대학교.

김지연(2021). **AlgeoMath를 활용한 교수·학습 자료 개발: 중학교 2학년 도형의 닮음을 중심으로.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

김택수(2007). **동적 시각화 자료의 분류와 수학적 정당화에 관한 연구.** 박사학위논문, 공주대학교.

남인혜, 신보미(2023). 개방형 과제를 활용하는 초등 수학 수업에서 학생의 참여 분석. **수학교육, 62**(1), 57-78.

박선화(2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. **수학교육학연구, 10**(2), 247-262.

박성준(2021). **알지오매스를 활용한 입체도형 교수・학습자료 개발: 초등학교 6학년 입체도형 단원 중심으로.** 석사학위논문, 서울교육대학교.

박은지(2013). **중학생들의 닮은 도형 문제 해결력에 대한 분석.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

방혜진(2008). **중학교 8-나 단계 도형의 닮음 단원에 대한 오류 유형 분류에 관한 연구.** 석사학위논문, 이화여자대학교.

서유석(2020). **AlgeoMath를 활용한 이차함수 그래프 교수・학습 자료 개발 및 적용.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

오미진(2012). **도형의 닮음 단원에 대한 교과서 분석 및 학생들의 오개념 유형에 관한 사례연구.** 석사학위논문, 이화여자대학교.

오택근(2014). **벡터 수업의 담론 창의성 분석.** 박사학위논문, 서울대학교.

오택근, 박미미, 이경화(2014). 수학적 토론에서 의사소통적 갈등과 인지 갈등의 관계. **수학교육학연구, 24**(2), 125-143.

오택근(2017). 곡선의 길이 수업에서 길이 개념에 대한 담론 분석. **학교수학, 19(3)**, 571-591.

유상휘, 송상헌(2013). 사다리꼴 넓이 구하기 활동에서 나타나는 수학적 의사소통과 유추적 사고 과정 분석. **수학교육학연구, 23**(2), 253-267.

유재근, 박문환(2019). 학교수학에 나타난 닮음의 의미에 대한 고찰. **수학교육학연구, 29**(2), 283-299.

이경화, 정혜윤, 강완, 안병곤, 백도현(2017). 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리의 제안 및 적용. **수학교육논문집, 31**(2), 203-221.

이상우(2021). **공학적 도구를 활용한 수업에 따른 수학적 오류의 변화: 중학교 3학년 이차함수 단원을 중심으로.** 석사학위논문, 연세대학교.

이은실(2021). **AlgeoMath환경에서 수학적 불변성을 강조한 교수·학습 자료 개발: 중2 사각형의 성질 단원을 중심으로.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

이준열 외(2019). **중학교 수학2.** 서울: ㈜천재교육.

이해민(2022). **공학적 도구를 활용한 도형의 닮음 단원에서 중학교 2학년 학생 세 명의 문제해결 행동요인 분석.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

이환철(2019). 알지오매스(AlgeoMath)에 담긴 미래 수학교육의 방향 탐색. **East Asian Mathematical Journal. 35**(4), 387-406.

임재훈, 박교식(2009). 우리나라 수학 교과서의 닮음 도입 및 정의에 관한 비판적 논의. **수학교육학연구, 19**(3), 393-407.

전성림(2009). **중학생들의 합동과 닮음 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 분석 및 교정: 사례연구.** 석사학위논문, 순천대학교.

정보나, 류희찬, 조완영(2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하영역의 수학화 교수학습 방법. **수학교육학연구, 12**(4), 543-556.

정서영(2014). **수학교사의 테크놀로지 활용에 대한 관심변화 방안으로서 T-ACCEPT 모델 개발.** 박사학위논문, 한국교원대학교.

주민정(2021). **알지오매스 블록 코딩을 활용한 자유학기제 수학과 주제선택 활동 교수·학습 자료 개발.** 석사학위논문, 한국교원대학교.

최은비(2016). **닮음의 빅 아이디어(Big Idea)와 관련된 중학교 2학년 학생들의 오개념과 오류 분석.** 석사학위논문, 이화여자대학교.

최지선(2003). **중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰.** 석사학위논문, 서울대학교.

최지선(2008). **닮음 개념에 대한 교수학적 분석.** 박사학위논문, 서울대학교.

허선희, 도종훈(2022). 중학교 기하교육에서 탐구형 기하 소프트웨어의 활용 방안. **교육발전, 41**(4), 615-629.

한채린, 김희정, 권오남(2018). 학생의 통계적 변이성 이해에 대한 수학 교사의 노티싱 변화 양상 사례연구. **한국학교수학회논문집, 21**(2), 183-206.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). USA: Springer.

de Freitas, E. (2016). Material encounters and media events: What kind of mathematics can a body do? *Educational Studies in Mathematics, 91*, 185-202.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* Cambridge: Cambridge Univrsity Press. 이경화 외 5인 역(2020). **수학 신체 테크놀로지의 삼중주.** 서울: 경문사.

Fredricks, J. A., Wang, M. T., Linn, J. S., Hofkens, T. L., Sung, H., Parr, A., & Allerton, J. (2016). Using qualitative methods to develop a survey measure of math and science engagement. *Learning and Instruction, 43*, 5-15.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 171-189). USA: Springer.

Reeve, J. (2013). How students create motivationally supportive learning environments for themselves : The concept of agentic engagement. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 579-585.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Skilling, K., Bobis, J., Martin, A. J., Anderson, J., & Way, J. (2016). What secondary teachers think and do about student engagement in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 28*(4), 545-566.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices or Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* Reston, VA: NCTM. 방정숙 역(2013). **효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행.** 서울: 경문사.

An Analysis of Students' Communication in Lessons for the Geometric Similarity Using AlgeoMath

Kim, Yeonha[1) · Shin, Bomi[2)

Abstract

This study conducted a student-centered inquiry lesson on the similarity of figures using AlgeoMath, with student learning aspects analyzed from a communication perspective. This approach aimed to inform pedagogical implications related to teaching geometric similarity. Through utilizing AlgeoMath, students were able to visually confirm that their chosen figures were similar, experiencing key mathematical concepts such as the ratio of similarity to the area of similar figures, and congruency and similarity conditions of triangles. In the lessons applying this concept, we categorized the features of similarity learning displayed by students, as seen in the communication aspects of their exploratory activities, into 'Understanding similarity ratios', 'Grasping conditions of similarity in triangles', and 'Comparing concepts of congruency and similarity'. Through exploratory activities based on AlgeoMath, students discussed the meaning and mathematical relationships of key concepts related to similarity, such as the ratio of similarity to the area of figures, and the meaning and conditions of congruence and similarity in triangles. By improving misconceptions about the similarity of figures, they were able to develop deeper mathematical understanding. This study revealed that in teaching and learning the geometric similarity using AlgeoMath, obtaining meaningful pedagogical outcome was not solely due to the features of the AlgeoMath environment, but also largely depended on the teacher's guidance and intervention that stimulated students' thinking.

Key Words : AlgeoMath, Geometric similarity, Mathematical communication

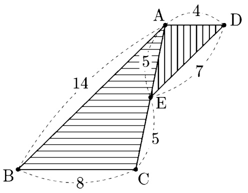
Received May 19, 2023
Revised June 15, 2023
Accepted June 15, 2023

＊ 2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97G40, 97U70

1) Sinyong Middle School (liberty617@hanmail.net), First Author
2) Chonnam National University (bomi0210@jnu.ac.kr), Corresponding Author

<부록> 알지오매스를 활용하여 삼각형의 닮음을 탐구하는 교수-학습 자료

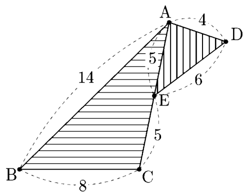
문제 1. 그림에 대한 학생 A와 학생 B의 대화를 읽고 다음 활동을 해 보자.



학생 A : 두 삼각형이 닮음인지 확인하고 싶어.
학생 B : 알지오매스를 사용해서 닮음의 뜻에 맞는지 알아보면 보면 좋을 것 같아.

학생 A와 학생 B는 $\triangle AED$를 일정한 비율로 확대 또는 축소하고 적당히 이동시켜 두 삼각형이 닮음인지 알아보려고 한다. 어떻게 하면 좋을지 모둠 친구들과 이야기해 보고, 이야기한 내용에 따라 알지오매스를 실행해보자.

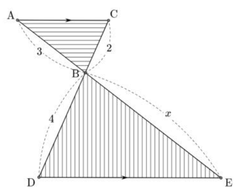
문제 2. 그림에 대한 학생 A와 학생 B의 대화를 읽고 다음 활동을 해 보자.



학생 A : 두 삼각형이 닮음인지 확인하고 싶어.
학생 B : 알지오매스를 사용해서 닮음의 뜻에 맞는지 알아보면 보면 좋을 것 같아.

학생 A와 학생 B는 $\triangle AED$를 일정한 비율로 확대 또는 축소하고 적당히 이동시켜 두 삼각형이 닮음인지 알아보려고 한다. 어떻게 하면 좋을지 모둠 친구들과 이야기해 보고, 이야기한 내용에 따라 알지오매스를 실행해보자.

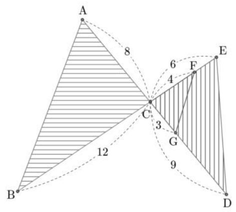
문제 3. 그림에 대한 학생 A와 학생 B의 대화를 읽고 다음 활동을 해 보자.



학생 A : 두 삼각형이 닮음인지 확인하고 싶어.
학생 B : 알지오매스를 사용해서 닮음의 뜻에 맞는지 알아보면 보면 좋을 것 같아.

학생 A와 학생 B는 $\triangle ABC$를 일정한 비율로 확대 또는 축소하고 적당히 이동시켜 두 삼각형이 닮음인지 알아보려고 한다. 어떻게 하면 좋을지 모둠 친구들과 이야기해 보고, 이야기한 내용에 따라 알지오매스를 실행해보자.

문제 4. 그림에 대한 학생 A와 학생 B의 대화를 읽고 다음 활동을 해 보자.



학생 A : 주어진 세 개의 삼각형 중 닮음인 삼각형이 있는지 확인하고 싶어.
학생 B : 알지오매스를 사용해서 닮음의 뜻에 맞는지 알아보면 보면 좋을 것 같아.

학생 A와 학생 B는 $\triangle ABC$, $\triangle CGF$, $\triangle CDE$ 전체 또는 일부를 일정한 비율로 확대 또는 축소하고 적당히 이동시켜 이 중 서로 닮음인 삼각형이 있는지를 알아보려고 한다. 어떻게 하면 좋을지 모둠 친구들과 이야기해 보고, 이야기한 내용에 따라 알지오매스를 실행해보자.