

<https://doi.org/10.7236/JIIBC.2023.23.3.167>

JIIBC 2023-3-23

## 자금흐름 일치 문제의 장기채권 우선 잔고 알고리즘

### Balance Algorithm for Long-term Bond First of Cash Flow Matching Problem

이상운\*

Sang-Un Lee\*

**요약** 자금 흐름 일치 문제(CFMP)는  $T$ 년도 간 지불해야 할 총액을 전액 현금으로 지불하지 않고 채권이나 은행 예금의 원금과 이자로 지급하여 초기 투자액을 최소화시키는 것이 목적이다. CFMP를 풀 수 있는 방법으로는 선형계획법(LP)이 유일하게 알려져 있다. 선형계획법은  $T$ 개의 선형함수를 최적화시키는 문제로 수기 식으로는 해결이 불가능하여 선형계획법 해결사인 LINGO 등을 활용하는 실정이다. 본 논문은 LINGO의 도움 없이 오로지 수기 식으로 CFMP의 해를 구하는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 만기 도래 일자가 최장기부터 단기의 내림차순으로 해당 채권이 차기 만기 도래 채권의 이전 년도까지 지급액을 커버하는 방법으로 채권 매수량을 결정한다. 또한 최 단기 채권 만기 도래 이전 년도까지는 은행 예금의 원금과 이자로 충당하는 예금액을 결정하였다. 2개의 실험 데이터에 제안된 알고리즘을 적용한 결과 선형계획법에 비해 보다 정확한 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

**Abstract** The cash flow matching problem(CFMP) aims to minimize the initial investment by paying the total amount due for the  $T$ -year in principal and interest of bonds or bank deposits without paying the full amount in cash. Linear programming(LP) is the only known way to solve CFMP. The linear programming method is a problem that optimizes  $T$  linear functions, and it cannot be solved by handwriting, so LINGO, which is a solution to the linear programming method, is used. This paper proposes an algorithm that obtains the solution of CFMP solely by handwriting without the help of LINGO. The proposed algorithm determines the amount of bond purchases by covering payments until the previous year of the next maturity bond in the order that the maturity date falls from the longest to the short term. In addition, until the year before the maturity of the shortest maturity bond, the amount of deposit covered by the principal and interest of the bank deposit was determined. As a result of applying the proposed algorithm to two experimental data, it was shown that more accurate results can be obtained compared to the linear programming method.

**Key Words** : Cash flow matching, Payment, Annual coupon, Surplus, Deficit

\*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과  
접수일자 2022년 11월 18일, 수정완료 2023년 5월 3일  
게재확정일자 2023년 6월 9일

Received: 18 November, 2022 / Revised: 3 May, 2023 /  
Accepted: 9 June, 2023

\*Corresponding Author: [sulee@gwnu.ac.kr](mailto:sulee@gwnu.ac.kr)  
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National  
University, Korea

## I. 서 론

자금 흐름 일치 문제(cash flow matching problem, CFMP)는  $T$ 년도의 장기간에 걸쳐 지급해야 금액을 전액 현금으로 준비하여 매년 지급하는 것이 아니라 채권이나 은행 예금에 투자한 원금과 이자로 충당하는 문제로, 지급 총액 대비 투자 금액을 최대한으로 줄이는 것이 목적이다.<sup>[1]</sup>

CFMP를 풀 수 있는 방법으로는 선형계획법(linear programming, LP)이 유일하게 알려져 있다.<sup>[2-15]</sup>

그러나 LP는  $T$ 년도 각각에 대한 채권이나 은행 예금의 투자액과 이자에 대한 지급액의 선형 함수  $T$ 개를 모두 충족하는  $n$  종류의 채권과 은행 예금의 투자액을 결정해야 하는 복잡함으로 인해 수기 식으로는 풀 수 없으며, 반드시 선형계획법 해결사(linear programming solver, LPS)의 도움을 받아야만 한다. 대표적인 LPS로는 LINGO(optimization modeling software for linear, nonlinear, and integer programming)<sup>[3]</sup>가 알려져 있다.

본 논문에서는 LPS 도움없이 완전 수기 식으로 CFMP를 풀 수 있는 알고리즘을 제안한다. 제안된 방법은 최장기 만기 도래 채권부터 최 단기 만기 도래 채권까지 만기도래 내림차순으로 차기 채권의 만기 도래 이전 년도까지 지불액을 충족하는 채권 수량을 매입하는 양을 결정하는 단순한 방법을 적용하였으며, 첫 해부터 최 단기 채권 만기 도래 년도 이전년도 까지는 은행 예금의 원금과 이자액으로 충족시키는 방법으로 은행 예금액을 결정하는 방법을 채택하였다. 2장에서는 예제 문제를 대상으로 선형 계획법을 적용하여 얻은 결과의 문제점을 고찰해 본다. 3장에서는  $T$ 년도의 어느 한 해에도 은행 잔고 부족액이 발생하지 않는 자금 흐름 일치 문제의 해를 수기 식으로 얻는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 추가 문제를 대상으로 제안된 알고리즘을 적용하여 성능을 검증한다.

## II. 관련 연구와 문제점

자금흐름 문제에서, 부채  $L_i(i=1,2,\dots,T)$ 를 커버하기 위해,  $n$  종류의 채권  $b_j(j=1,2,\dots,n)$ 를 구매하여야 하며, 각 년도에 필요한 현금 흐름량을  $F_{ij}$ , 각 채권의 초기 구매가를  $p_j$ 라 할 경우 선형계획법으로 표현하면 식 (1)과 같으며, 식 (2)의 목적함수의 값인 채권 구매량  $x_j$ 와 예금 잉여금(surplus)  $s_i$ 를 구해야만 한다.<sup>[4]</sup>

$$\sum_{j=1}^n F_{1j}x_j - s_1 = L_1 \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^n F_{ij}x_j + s_{i-1} - s_i = L_i, \quad i=2,\dots,T$$

$$\min p^T x, \quad s.t. \quad Fx + Rs = L, \quad x, s \geq 0 \tag{2}$$

$$\text{where } R_{ii} = -1, R_{i+1,i} = 1$$

표 1은 Baker<sup>[2]</sup>에서 인용된 연금 채무 기금(funding a pension liability) 마련을 위한 CFMP-1 자금흐름 일치 문제이다. 연금 채무는 14년 동안 총 \$310,000을 지급해야 하며, 이를 위해 만기 5년, 11년과 14년의 채권 3종에 투자하여 매년 발생하는 명목 수익률(annual coupon)과 만기 시 원금과 수익률을 가지고 지급액을 해결하며, 채권이 만기되기 이전의 초기 4년간은 은행 단기 예금의 원금과 잔액 이자율 4%(0.04)로 해결하고자 한다. 채권은 액면가(face value)가 \$1,000인 경우 현재 구매가(current value)는 각각 \$980, \$970과 \$1,050이며, 명목 수익률은 각각 \$60(6%, 0.06), \$65(6.5%, 0.065)와 \$75(7.5%, 0.075)이다. 이 경우 Y00년에 투자할 채권 구매량  $b_1, b_2, b_3$ 와 예금(saving)  $s$ 를 결정하는 문제이다. 채권과 예금은 정수 값을 가진다.

표 1. 연금채무 CFMP-1  
Table 1. CFMP-1 of pension liability

Year	지급금 (단위 : 천)	Bond			Saving (4%)
		$b_1$ (6%)	$b_2$ (6.5%)	$b_3$ (7.5%)	
Y00	\$0	-	-	-	-
Y01	\$12	0.06	0.65	0.75	0.04
Y02	\$14	0.06	0.65	0.75	0.04
Y03	\$15	0.06	0.65	0.75	0.04
Y04	\$16	0.06	0.65	0.75	0.04
Y05	\$18	1.06	0.65	0.75	0.04
Y06	\$20	-	0.65	0.75	0.04
Y07	\$21	-	0.65	0.75	0.04
Y08	\$22	-	0.65	0.75	0.04
Y09	\$24	-	0.65	0.75	0.04
Y10	\$25	-	0.65	0.75	0.04
Y11	\$30	-	1.65	0.75	0.04
Y12	\$31	-	-	0.75	0.04
Y13	\$31	-	-	0.75	0.04
Y14	\$31	-	-	1.75	0.04
Total	\$310	-	-	-	-
현재 가		\$0.980	\$0.970	\$1.050	-
만기		5년	11년	14년	-
액면가		\$1.000	\$1.000	\$1.000	-

Baker<sup>[2]</sup>는 CFMP-1에 선형계획법을 적용하여 그림 1의 결과를 제시하였다. 여기서 문제점은 Y04, Y10, Y13과 Y14의 은행 잔고 부족으로 지급액을 충족시키지 못



Balance Algorithm for Long-term Bond First of Cash Flow Matching Problem

Year	Fund Investment				Annual Payment (p)	Pension Liability(Coposen+Saving Interest+Bank Account)				Bank Account Balance
	Bond #1 (b <sub>1</sub> )	Bond #2 (b <sub>2</sub> )	Bond #3 (b <sub>3</sub> )	Bank Account Surplus(s <sub>t</sub> )		Bond Coposen	Yield Interest(0.04)	Total(s <sub>t</sub> )	deficit(d <sub>t</sub> )	
Y00	\$0	\$0	\$28,837	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
Y01	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$0	\$2,160	-9,840	-9,840.23
Y02	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$390	\$1,770	-10,210	-10,210.94
Y03	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$810	\$1,350	-10,860	-10,861.78
Y04	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$1,413	\$973	-11,269	-11,269.62
Y05	1.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$0	\$2,160	-11,817	-11,817.23
Y06	0.065	0.075	\$15,837	\$20,000	\$2,160	\$615	\$1,545	\$1,470	-10,347	-10,347.94
Y07	0.065	0.075	\$14,308	\$20,000	\$2,160	\$1,372	\$790	\$2,162	-10,181	-10,181.48
Y08	0.065	0.075	\$54,517	\$20,000	\$2,160	\$1,181	\$1,979	\$2,161	-8,020	-8,020.94
Y09	0.065	0.075	\$76,535	\$24,000	\$2,160	\$1,061	\$3,099	\$2,899	-6,130	-6,130.43
Y10	0.065	0.075	\$101,434	\$20,000	\$2,160	\$945	\$4,059	\$3,895	-4,269	-4,269.23
Y11	1.065	0.075	\$0	\$30,000	\$2,160	\$0	\$2,160	\$2,160	-3,109	-3,109.23
Y12	0.075	\$17,837	\$31,000	\$2,160	\$1,111	\$1,049	\$2,991	\$2,734	-2,374	-2,374.94
Y13	0.075	\$17,728	\$31,000	\$2,160	\$1,109	\$1,048	\$2,728	\$2,728	-2,374	-2,374.94
Y14	1.075	\$0	\$31,000	\$31,000	\$0	\$0	\$31,000	\$0	\$0	\$0.23
Current Price	\$980.00	\$970.00	\$1,050.00	Total	\$310,000					
Face Value	\$1,000.00	\$1,000.00	\$1,000.00							
Total Investment	\$30,278.85									

$b_3 \times 1.075 = p_{14}, b_3 = 31,000/1.075 = 28,837$

(b) Bond #3 (b<sub>3</sub>)

Year	Fund Investment				Annual Payment (p)	Pension Liability(Coposen+Saving Interest+Bank Account)				Bank Account Balance
	Bond #1 (b <sub>1</sub> )	Bond #2 (b <sub>2</sub> )	Bond #3 (b <sub>3</sub> )	Bank Account Surplus(s <sub>t</sub> )		Bond Coposen	Yield Interest(0.04)	Total(s <sub>t</sub> )	deficit(d <sub>t</sub> )	
Y00	\$0	\$0	\$28,837	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
Y01	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$0	\$2,160	-9,840	-9,840.23
Y02	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$390	\$1,770	-10,210	-10,210.94
Y03	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$810	\$1,350	-10,860	-10,861.78
Y04	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$1,413	\$973	-11,269	-11,269.62
Y05	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$2,160	\$0	\$2,160	-11,817	-11,817.23
Y06	0.065	0.075	\$15,837	\$20,000	\$2,160	\$615	\$1,545	\$1,470	-10,347	-10,347.94
Y07	0.065	0.075	\$14,308	\$20,000	\$2,160	\$1,372	\$790	\$2,162	-10,181	-10,181.48
Y08	0.065	0.075	\$54,517	\$20,000	\$2,160	\$1,181	\$1,979	\$2,161	-8,020	-8,020.94
Y09	0.065	0.075	\$76,535	\$24,000	\$2,160	\$1,061	\$3,099	\$2,899	-6,130	-6,130.43
Y10	0.065	0.075	\$101,434	\$20,000	\$2,160	\$945	\$4,059	\$3,895	-4,269	-4,269.23
Y11	1.065	0.075	\$0	\$30,000	\$2,160	\$0	\$2,160	\$2,160	-3,109	-3,109.23
Y12	0.075	\$17,837	\$31,000	\$2,160	\$1,111	\$1,049	\$2,991	\$2,734	-2,374	-2,374.94
Y13	0.075	\$17,728	\$31,000	\$2,160	\$1,109	\$1,048	\$2,728	\$2,728	-2,374	-2,374.94
Y14	1.075	\$0	\$31,000	\$31,000	\$0	\$0	\$31,000	\$0	\$0	\$0.23
Current Price	\$980.00	\$970.00	\$1,050.00	Total	\$310,000					
Face Value	\$1,000.00	\$1,000.00	\$1,000.00							
Total Investment	\$30,278.85									

b <sub>2</sub>	s <sub>13</sub>	d <sub>13</sub>	관계
0	-57,788	-31,149	-
50,000	-2,408	-28,934	-
70,000	19,744	-28,047	<
75,000	25,282	-27,826	<
76,000	26,390	-27,782	<
77,000	27,497	-27,737	>
77,200	27,719	-27,728	>
77,210	27,730	-27,728	>
77,208	27,728	-27,728	=

Year	Fund Investment				Annual Payment (p)	Pension Liability(Coposen+Saving Interest+Bank Account)				Bank Account Balance
	Bond #1 (b <sub>1</sub> )	Bond #2 (b <sub>2</sub> )	Bond #3 (b <sub>3</sub> )	Bank Account Surplus(s <sub>t</sub> )		Bond Coposen	Yield Interest(0.04)	Total(s <sub>t</sub> )	deficit(d <sub>t</sub> )	
Y00	\$0	\$77,208	\$28,837	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
Y01	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$0	\$7,181	-44,819	-44,819.71
Y02	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$191	\$6,990	-45,010	-45,010.46
Y03	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$473	\$6,708	-45,202	-45,202.27
Y04	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$807	\$6,376	-45,394	-45,394.06
Y05	1.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$0	\$7,181	-45,586	-45,586.71
Y06	0.065	0.075	\$10,819	\$20,000	\$7,181	\$413	\$6,769	\$1,352	-45,778	-45,778.16
Y07	0.065	0.075	\$24,070	\$20,000	\$7,181	\$963	\$6,110	\$1,742	-45,970	-45,970.41
Y08	0.065	0.075	\$48,852	\$20,000	\$7,181	\$1,554	\$5,027	\$1,377	-46,162	-46,162.66
Y09	0.065	0.075	\$75,224	\$24,000	\$7,181	\$1,299	\$4,072	\$2,028	-46,354	-46,354.91
Y10	0.065	0.075	\$104,252	\$20,000	\$7,181	\$1,097	\$3,091	\$2,379	-46,546	-46,546.16
Y11	1.065	0.075	\$0	\$30,000	\$7,181	\$0	\$7,181	\$7,181	-46,738	-46,738.41
Y12	0.075	\$27,728	\$31,000	\$7,181	\$1,176	\$4,338	\$3,061	\$2,727	-46,930	-46,930.66
Y13	0.075	\$27,728	\$31,000	\$7,181	\$1,176	\$4,338	\$2,728	\$2,728	-47,122	-47,122.91
Y14	1.075	\$0	\$31,000	\$31,000	\$0	\$0	\$31,000	\$0	\$0	\$0.23
Current Price	\$980.00	\$970.00	\$1,050.00	Total	\$310,000					
Face Value	\$1,000.00	\$1,000.00	\$1,000.00							
Total Investment	\$105,170.61									

(c) Bond #2 (b<sub>2</sub>)

Year	Fund Investment				Annual Payment (p)	Pension Liability(Coposen+Saving Interest+Bank Account)				Bank Account Balance
	Bond #1 (b <sub>1</sub> )	Bond #2 (b <sub>2</sub> )	Bond #3 (b <sub>3</sub> )	Bank Account Surplus(s <sub>t</sub> )		Bond Coposen	Yield Interest(0.04)	Total(s <sub>t</sub> )	deficit(d <sub>t</sub> )	
Y00	\$0	\$77,208	\$28,837	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
Y01	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$0	\$7,181	-44,819	-44,819.71
Y02	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$191	\$6,990	-45,010	-45,010.46
Y03	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$473	\$6,708	-45,202	-45,202.27
Y04	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$807	\$6,376	-45,394	-45,394.06
Y05	1.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$7,181	\$0	\$7,181	-45,586	-45,586.71
Y06	0.065	0.075	\$10,819	\$20,000	\$7,181	\$413	\$6,769	\$1,352	-45,778	-45,778.16
Y07	0.065	0.075	\$24,070	\$20,000	\$7,181	\$963	\$6,110	\$1,742	-45,970	-45,970.41
Y08	0.065	0.075	\$48,852	\$20,000	\$7,181	\$1,554	\$5,027	\$1,377	-46,162	-46,162.66
Y09	0.065	0.075	\$75,224	\$24,000	\$7,181	\$1,299	\$4,072	\$2,028	-46,354	-46,354.91
Y10	0.065	0.075	\$104,252	\$20,000	\$7,181	\$1,097	\$3,091	\$2,379	-46,546	-46,546.16
Y11	1.065	0.075	\$0	\$30,000	\$7,181	\$0	\$7,181	\$7,181	-46,738	-46,738.41
Y12	0.075	\$27,728	\$31,000	\$7,181	\$1,176	\$4,338	\$3,061	\$2,727	-46,930	-46,930.66
Y13	0.075	\$27,728	\$31,000	\$7,181	\$1,176	\$4,338	\$2,728	\$2,728	-47,122	-47,122.91
Y14	1.075	\$0	\$31,000	\$31,000	\$0	\$0	\$31,000	\$0	\$0	\$0.23
Current Price	\$980.00	\$970.00	\$1,050.00	Total	\$310,000					
Face Value	\$1,000.00	\$1,000.00	\$1,000.00							
Total Investment	\$106,708.54									

b <sub>1</sub>	s <sub>10</sub>	d <sub>10</sub>	관계
0	-74,252	-20,789	-
50,000	-12,250	-18,309	-
70,000	12,551	-17,317	<
80,000	24,952	-16,821	>
75,000	18,752	-17,069	<
74,000	17,512	-17,118	<
73,500	16,892	-17,143	<
73,700	17,140	-17,133	>
73,695	17,133	-17,133	=

Year	Fund Investment				Annual Payment (p)	Pension Liability(Coposen+Saving Interest+Bank Account)				Bank Account Balance
	Bond #1 (b <sub>1</sub> )	Bond #2 (b <sub>2</sub> )	Bond #3 (b <sub>3</sub> )	Bank Account Surplus(s <sub>t</sub> )		Bond Coposen	Yield Interest(0.04)	Total(s <sub>t</sub> )	deficit(d <sub>t</sub> )	
Y00	\$12,695	\$77,208	\$28,837	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
Y01	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$1,603	\$0	\$1,603	-49,707	-49,707.00
Y02	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$1,603	\$168	\$1,435	-50,142	-50,142.89
Y03	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$1,603	\$336	\$1,097	-50,578	-50,578.78
Y04	0.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$1,603	\$504	\$760	-51,014	-51,014.67
Y05	1.060	0.065	0.075	\$0	\$12,000	\$1,603	\$0	\$1,603	-51,450	-51,450.56
Y06	0.065	0.075	\$67,298	\$20,000	\$7,181	\$2,692	\$9,873	\$10,565	-51,886	-51,886.45
Y07	0.065	0.075	\$57,171	\$20,000	\$7,181	\$2,287	\$9,008	\$11,295	-52,322	-52,322.34
Y08	0.065	0.075	\$46,619	\$20,000	\$7,181	\$1,882	\$8,143	\$9,025	-52,758	-52,758.23
Y09	0.065	0.075	\$35,646	\$24,000	\$7,181	\$1,306	\$6,887	\$8,193	-53,194	-53,194.12
Y10	0.06									

#### IV. 알고리즘 적용 및 결과 분석

본 장에서는 표 2의 CFMP-2<sup>[3]</sup>에 대해 제안된 LBFBA를 적용하여 본다. CFMP-2는 주 복권회사에서 로또 상금을 15년간 \$319,000,000을 분할 지급하는 계획이며, 첫 해(Y00)에는 현금으로 \$10,000,000을 지급하고, 나머지 14년간에는 채권 2종류와 은행 예금과 이자로 충당하고자 하는 문제이다. 이 문제에 대해 선형계획법 해결사인 LINGO 패키지를 이용하여 그림 4의 결과를 제시하였다.

표 2. 로또 상금 지급 CFMP-2  
 Table 2. CFMP-2 of lottery prizes

Year	지급금 (단위 : 백만)	Bond		Cash	Saving (4%)
		$b_1(6\%)$	$b_2(6.5\%)$		
Y00	\$10	-	-	\$10	-
Y01	\$11	0.06	0.065	-	0.04
Y02	\$12	0.06	0.065	-	0.04
Y03	\$14	0.06	0.065	-	0.04
Y04	\$15	0.06	0.065	-	0.04
Y05	\$17	0.06	0.065	-	0.04
Y06	\$19	1.06	0.065	-	0.04
Y07	\$20	-	0.065	-	0.04
Y08	\$22	-	0.065	-	0.04
Y09	\$24	-	0.065	-	0.04
Y10	\$26	-	0.065	-	0.04
Y11	\$29	-	0.065	-	0.04
Y12	\$31	-	0.065	-	0.04
Y13	\$33	-	1.065	-	0.04
Y14	\$36	-	-	-	0.04
Total	\$319	-	-	-	-
현재 가		\$0.980	\$0.965	-	-
단기		6년	13년	-	-
액면가		\$1.000	\$1.000	-	-

```

Global optimal solution found.
Objective value:                195.7265
Extended solver steps:          4
Total solver iterations:        27

Variable           Value
LUMP                195.7265
BUY ( A)            96.00000
BUY ( B)            90.00000
SINVEST ( 1)        4.796526
SINVEST ( 2)        5.598387
SINVEST ( 3)        5.432322
SINVEST ( 4)        3.259615
SINVEST ( 5)        0.000000
SINVEST ( 6)        90.61000
SINVEST ( 7)        81.08440
SINVEST ( 8)        70.17778
SINVEST ( 9)        56.83489
SINVEST ( 10)       40.95828
SINVEST ( 11)       22.44661
SINVEST ( 12)       0.1944784
SINVEST ( 13)       65.05226
SINVEST ( 14)       34.65435
SINVEST ( 15)       0.4052172E-01
    
```

Solution: PBOND

Year	Fund Investment			Annual Payment (P)	Payment(Coupons+Saving Interest+Bank Account)			
	Bond #1 (b1)	Bond #2 (b2)	Short-term Fund(f)		Bond Coupon	Yield Interest	Total(Y)	Cash & Saving (c, s)
Y00	\$96	\$90	\$4.8000	\$10.00	\$0	\$0	\$0	\$10.00
Y01	0.065	0.065	\$4.8000	\$11.00	\$11.61	\$0.19	\$11.80	\$1.6000
Y02	0.060	0.065	\$5.0000	\$12.00	\$11.61	\$0.22	\$11.83	\$2.4361
Y03	0.060	0.065	\$5.4361	\$14.00	\$11.61	\$0.22	\$11.83	\$3.2635
Y04	0.060	0.065	\$3.2635	\$15.00	\$11.61	\$0.13	\$11.74	\$0.0041
Y05	0.060	0.065	\$0.0041	\$17.00	\$11.61	\$0.00	\$11.61	\$5.3855
Y06	1.060	0.065	\$0.0000	\$19.00	\$107.61	\$0.00	\$107.61	\$8.6100
Y07	0.065	0.065	\$8.6100	\$20.00	\$5.85	\$3.54	\$9.39	\$78.0044
Y08	0.065	0.065	\$78.0044	\$22.00	\$5.85	\$3.12	\$8.97	\$64.9746
Y09	0.065	0.065	\$64.9746	\$24.00	\$5.85	\$2.60	\$8.45	\$49.4236
Y10	0.065	0.065	\$49.4236	\$26.00	\$5.85	\$1.98	\$7.83	\$31.2505
Y11	0.065	0.065	\$31.2505	\$29.00	\$5.85	\$1.25	\$7.10	\$9.3505
Y12	0.065	0.065	\$9.3505	\$31.00	\$5.85	\$0.57	\$6.42	\$15.4255
Y13	1.065	0.065	\$0.0000	\$33.00	\$95.85	\$0.00	\$95.85	\$62.8500
Y14	0.065	0.065	\$62.8500	\$36.00	\$0.00	\$2.51	\$2.51	\$29.3440
Current Price	\$0.980	\$0.965	Total	\$319				
Face Value	\$1.00	\$1.00						
Total Investment				\$195.73				\$1,000,000

그림 4. CFMP-2에 관한 LINGO 해  
 Fig. 4. LINGO solution for CFMP-2

그림 4의 결과를 보면  $b_1$ 은 96,  $b_2$ 는 90, 단기 펀드에 \$4.8000, 초기 현금 \$10을 투자하여 총 투자액은 \$195.73으로 \$319(단위 : 1,000,000)를 지급하고자 하였으나 Y05와 Y12에서 잔액이 부족하여 지급불능 사태가 발생할 수 있음을 알 수 있다. CFMP-2에 대해 LBFBA를 적용한 결과는 그림 5에 제시하였다. 여기서  $b_2$ 는 64,  $b_1$ 은 118,  $f$ 는 \$10.8740, 초기 현금 \$10을 투자하여 총 투자액은 \$198.27로 15년간 은행 잔고 부족으로 인한 사태를 방지할 수 있음을 알 수 있다. 결론적으로 LINGO에 비해 \$4.54를 추가한 투자액을 보였으나 잔고 부족 사태를 방지하는 결과를 얻을 수 있었다.

Year	Fund Investment			Annual Payment (P)	Payment(Coupons+Saving Interest+Bank Account)			
	Bond #1 (b1)	Bond #2 (b2)	Short-term Fund(f)		Bond Coupon	Yield Interest	Total(Y)	Cash & Saving (c, s)
Y00	\$0	\$64	\$0.0	\$10.00	\$0	\$0	\$0	\$10.0000
Y01	0.060	0.065	\$0.0000	\$11.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$6.8400
Y02	0.060	0.065	\$0.0000	\$12.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$7.8400
Y03	0.060	0.065	\$0.0000	\$14.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$9.8400
Y04	0.060	0.065	\$0.0000	\$15.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$10.8400
Y05	0.060	0.065	\$0.0000	\$17.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$12.8400
Y06	1.060	0.065	\$0.0000	\$19.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$14.8400
Y07	0.065	0.065	\$0.0000	\$20.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$15.8400
Y08	0.065	0.065	\$0.0000	\$22.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$17.8400
Y09	0.065	0.065	\$0.0000	\$24.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$19.8400
Y10	0.065	0.065	\$0.0000	\$26.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$21.8400
Y11	0.065	0.065	\$0.0000	\$29.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$24.8400
Y12	0.065	0.065	\$0.0000	\$31.00	\$4.16	\$0.00	\$4.16	-\$26.8400
Y13	1.065	0.065	\$0.0000	\$33.00	\$68.16	\$0.00	\$68.16	\$35.1600
Y14	0.065	0.065	\$35.1600	\$36.00	\$0.00	\$1.41	\$1.41	\$0.5664
Current Price	\$0.980	\$0.965	Total	\$319				
Face Value	\$1.00	\$1.00						
Total Investment				\$71.76				\$1,000,000

(a) Bond #2( $b_2$ )

Year	Fund Investment			Annual Payment (P)	Payment(Coupons+Saving Interest+Bank Account)			
	Bond #1 (b1)	Bond #2 (b2)	Short-term Fund(f)		Bond Coupon	Yield Interest	Total(Y)	Cash & Saving (c, s)
Y00	\$118	\$64	\$0.0	\$10.00	\$0	\$0	\$0	\$10.0000
Y01	1.065	0.065	\$0.0000	\$11.00	\$11.24	\$0.00	\$11.24	\$0.2400
Y02	0.060	0.065	\$0.2400	\$12.00	\$11.24	\$0.01	\$11.25	-\$0.5104
Y03	0.060	0.065	\$0.0000	\$14.00	\$11.24	\$0.00	\$11.24	-\$2.7600
Y04	0.060	0.065	\$0.0000	\$15.00	\$11.24	\$0.00	\$11.24	-\$3.7600
Y05	0.060	0.065	\$0.0000	\$17.00	\$11.24	\$0.00	\$11.24	-\$5.7600
Y06	1.060	0.065	\$0.0000	\$19.00	\$129.24	\$0.00	\$129.24	\$110.2400
Y07	0.065	0.065	\$110.2400	\$20.00	\$4.16	\$4.41	\$8.57	\$98.8096
Y08	0.065	0.065	\$98.8096	\$22.00	\$4.16	\$3.95	\$8.11	\$84.9220
Y09	0.065	0.065	\$84.9220	\$24.00	\$4.16	\$3.40	\$7.56	\$68.4789
Y10	0.065	0.065	\$68.4789	\$26.00	\$4.16	\$2.74	\$6.90	\$49.3780
Y11	0.065	0.065	\$49.3780	\$29.00	\$4.16	\$1.98	\$6.14	\$26.5131
Y12	0.065	0.065	\$26.5131	\$31.00	\$4.16	\$1.06	\$5.22	\$0.7337
Y13	1.065	0.065	\$0.7337	\$33.00	\$68.16	\$0.03	\$68.19	\$35.9230
Y14	0.065	0.065	\$35.9230	\$36.00	\$0.00	\$1.44	\$1.44	\$1.3599
Current Price	\$0.980	\$0.965	Total	\$319				
Face Value	\$1.00	\$1.00						
Total Investment				\$187.40				\$1,000,000

(b) Bond #1( $b_1$ )

Year	Fund Investment			Annual Payment (P)	Payment(Coupons+Saving Interest+Bank Account)			
	Bond #1 (b1)	Bond #2 (b2)	Short-term Fund(f)		Yield		Cash & Saving (c, s)	
					Bond Coupon	Interest		Total(Y)
Y00	\$118	\$64	\$10,8740	\$10.00	\$0	\$0	\$0	\$10,0000
Y01	0.060	0.065	\$10,8740	\$11.00	\$11.24	\$0.43	\$11.67	\$11,5490
Y02	0.060	0.065	\$11,5490	\$12.00	\$11.24	\$0.46	\$11.70	\$11,2509
Y03	0.060	0.065	\$11,2509	\$14.00	\$11.24	\$0.45	\$11.69	\$8,9410
Y04	0.060	0.065	\$8,9410	\$15.00	\$11.24	\$0.36	\$11.60	\$5,5386
Y05	0.060	0.065	\$5,5386	\$17.00	\$11.24	\$0.22	\$11.46	\$0,0001
Y06	1.060	0.065	\$0,0001	\$19.00	\$129.24	\$0.00	\$129.24	\$110,2401
Y07		0.065	\$110,2401	\$20.00	\$4.16	\$4.41	\$8.57	\$98,8097
Y08		0.065	\$98,8097	\$22.00	\$4.16	\$3.95	\$8.11	\$84,9211
Y09		0.065	\$84,9211	\$24.00	\$4.16	\$3.40	\$7.56	\$68,4790
Y10		0.065	\$68,4790	\$26.00	\$4.16	\$2.74	\$6.90	\$49,3782
Y11		0.065	\$49,3782	\$29.00	\$4.16	\$1.98	\$6.14	\$26,5133
Y12		0.065	\$26,5133	\$31.00	\$4.16	\$1.06	\$5.22	\$0,7338
Y13		1.065	\$0,7338	\$33.00	\$68.16	\$0.03	\$68.19	\$35,9232
Y14			\$35,9232	\$36.00	\$0.00	\$1.44	\$1.44	\$1,5601
Current Price	\$0,980	\$0,965	Total	\$319				
Face Value	\$1,00	\$1,00						
Total Investment	\$198,27		\$1,000,000					

(c) Short-term fund(f)

그림 5. CFMP-2에 관한 장기채권 우선 잔고 알고리즘  
Fig. 5. LBFBA for CFMP-2

제안된 LBFBA는 모든 실험 데이터에 대해 은행 잔고 부족 사태 없이 최적의 자금 흐름 일치 계획을 만들 수 있음을 보였으며, 선형계획법 해결사의 도움 없이 수기 식으로 해를 구하는 단순함도 보였다.

## V. 결론

본 논문은 자금흐름 일치 문제(CFMP)에 대해 선형계획법 해결사의 도움 없이 수기 식에 해를 구할 수 있는 알고리즘을 제안하였다.

CFMP는 T년도 간 지불 총액을 전액 현금으로 지급하지 않고 n 종류의 채권과 은행 예금에 투자하여 원금과 이자로 충당하는 계획을 수립하는 문제이다. 이 문제의 핵심은 채권은 만기까지는 원금을 회수할 수 없으므로 최 단기 채권이 만기가 도래하는 이전 년도까지는 은행 예금의 원금과 이자로 충당해야 하며, 현 채권 만기가 도래하는 년도부터 차기 채권 만기 도래 이전 년도까지는 현재의 채권 원금을 은행 예금으로 재투자하여 원금과 이자로 충당하는 방법을 적용하면 쉽게 문제를 풀 수 있다. 따라서 본 논문에서는 최장기 채권부터 최 단기 채권까지 만기 도래 내림차순으로 해당 채권의 원금과 은행 이자로 차기 채권 만기 도래 이전 년도의 은행 예금 잔금(surplus,  $s_i$ )과 지급 부족액(deficit,  $d_i$ )에 대해  $s_i - d_i \geq 0$ 로 지급불능 사태를 방지하도록 하였다. 채권 매수 량과 은행 예금액은 1000, 100, 10, 1 단위로 조절하면서  $s_i - d_i \geq 0$ 가 되도록 수기 식으로 결정하였다.

본 논문에서 제안한 알고리즘을 2개의 문제에 대해 적용한 결과 선형계획법은 특정 연도에 부족액이 발생하는 경향을 보였으나 제안된 알고리즘은 항상  $s_i - d_i \geq 0$ 로

CFMP의 원래 취지를 정확히 반영한 자금흐름 일치 계획을 수립할 수 있음을 보였다.

## References

- [1] Goldman Sachs Asset Management "Cash Flow Matching: The Next Phase of Pension Plan Management," pp. 1-7, Feb. 2020.
- [2] K. R. Baker, "Gaining Insight in Linear Programming from Patterns in Optimal Solutions," INFORMS Transactions on Education, Vol. 1, No. 1, pp. 4-17, Sep. 2000, <https://doi.org/10.1287/ited.1.1.4>
- [3] Lindo Systems, "LINGO 16.0 Users Manual: Bond Portfolio Optimization Model: PBOND," [https://www.lindo.com/doc/online\\_help/lingo16\\_0/index.htm#l'bond\\_portfolio\\_optimization\\_pbond.htm](https://www.lindo.com/doc/online_help/lingo16_0/index.htm#l'bond_portfolio_optimization_pbond.htm), Retrieved Nov. 2022.
- [4] Wikipedia, "Cashflow matching," [https://en.wikipedia.org/wiki/Cashflow\\_matching](https://en.wikipedia.org/wiki/Cashflow_matching), Retrieved Nov. 2022.
- [5] G. Cornuéjols, J. Peña, and R. Tütüncü, "Optimization Methods in Finance(2nd ed.)," Cambridge University Press. pp. 35-37. 2018.
- [6] G. Iyrngar, "Cash Flow Matching: A Risk Management Approach," North American Actuarial Journal, Vol. 13, No. 3, pp. 370-384, Jan. 2009.
- [7] D. Shang and S. Uryasev, "Cash Flow Matching Problem with CVaR Constraints: A Case Study with Portfolio Safeguard," Project Report 2011-1, Risk Management and Financial Engineering Lab. Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Jan. 2011.
- [8] R-bloggers, "A Simple ALM Cash Flow Matching using Excel and R," <https://www.r-bloggers.com/2021/09/a-simple-alm-cash-flow-matching-using-excel-and-r/>, Sep. 2021.
- [9] Breaking Down Finance, "Cash Flow Matching," <https://breakingdownfinance.com/finance-topics/bond-valuation/cash-flow-matching/>, Retrieved Nov. 2022.
- [10] J. Davis, "Cash Matching Strategy," <https://www.youtube.com/watch?v=ytEJDB-cXlM>, Retrieved Nov. 2022.
- [11] V. Jhwar, "Portfolio Immunization vs. Cash Flow Matching: What's the Difference?," <https://www.investopedia.com/articles/investing/022615/portfolio-immunization-vs-cash-flow-matching.asp>, Jan. 2022.
- [12] Course Hero, "A simple optimal portfolio problem is the cash matching problem," <https://www.coursehero.com/tutors-problems/Math-Other/28541237-A-simple-optimal-portfolio-problem-is-the-cash-matching-problem-Suppo/>, Retrieved Nov. 2022.
- [13] R. Nils, "Rolling 13 Month Cash Flow Report,"

<https://www.solverglobal.com/report-budget-forecast-and-dashboard-template-glossary/rolling-13-month-cash-flow-report-example/>, Aug. 2020.

- [14] GGM Nonprofit Consulting, "Model Cash Flow Projection (Free Download)," <https://www.ggmnonprofitconsulting.com/news/2020/2/4/notes-on-using-the-monthly-cash-flow-projection>, Retrieved Nov. 2022.
- [15] W. Suo, "Comm 324 -Managing Bond Portfolios Passive Strategies," <https://slideplayer.com/slide/9196525/>, Retrieved Nov. 2022.

### 저 자 소 개

#### 이 상 운(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007.3 ~ 2015.3 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
- 2015.4 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 인공지능과 빅데이터분석, 최적화 알고리즘
- e-mail : [sulee@gwnu.ac.kr](mailto:sulee@gwnu.ac.kr)