

타원 기둥에 의한 자력 벡터 및 자력 변화율 텐서 반응식

임형래¹ · 엄주영^{2*}

¹부산대학교 지구과학교육과

²경북대학교 지구과학교육과

Expressions of Magnetic vector and Magnetic Gradient Tensor due to an Elliptical Cylinder

Hyoungea Rim¹ and Jooyoung Eom^{2*}

¹Department of Earth Science Education, Pusan National University

²Department of Earth Science Education, Kyungpook National University

요약

이 논문에서는 타원 기둥 형태의 이상체에 의한 자력 벡터와 자력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 화성암 관입이나 킴벌라이트 구조 등은 축 대칭성을 가지면서 주향 방향과 수직 방향의 반지름이 서로 다른 타원 기둥 형태를 가지는 경우가 많다. 이런 타원 기둥의 자력 반응은 이전 논문에서 유도한 중력 변화율 텐서에 자화 방향에 대한 정보를 포함시킨 포아송 관계식을 이용하여 유도하였다. 타원 기둥의 자력 변화율 텐서는 벡터 자력을 미분하여 유도하는데 삼중 적분으로 표현되는 타원 기둥의 인력 퍼텐셜을 각 축방향으로 3회 미분한 총 10개의 삼중 미분 함수를 구하는 것과 동일하다. 미분과 적분의 순서는 바꾸는 것이 가능하므로 결과적으로 자력 변화율 텐서는 타원 기둥의 인력 퍼텐셜을 3회 미분한 후, 깊이 방향으로 적분하고 나머지 이중 적분은 복소 평면에서 타원 기둥의 단면을 폐곡선으로 하는 경로를 따라 선적분으로 변환하여 유도된다. 이 논문에서 복소 평면에서 선적분으로 유도한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식은 립쉬츠-한켈 적분으로 유도한 원기둥의 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식과 완벽하게 일치함을 보였다.

주요어

자력, 자력 변화율 텐서, 타원 기둥형 이상체, 포아송 관계식

ABSTRACT

In this study, the expressions of magnetic vector and magnetic gradient tensor due to an elliptical cylinder were derived. Igneous intrusions and kimberlite structures are often shaped like elliptical cylinders with axial symmetry and different radii in the strike and perpendicular directions. The expressions of magnetic fields due to this elliptical cylinder were derived from the Poisson relation, which includes the direction of magnetization in the gravity gradient tensor. The magnetic gradient tensor due to an elliptical cylinder is derived by differentiating the magnetic fields. This method involves obtaining a total of 10 triple derivative functions acquired by differentiating the gravitational potential of the elliptical cylinder three times in each axis direction. As the order of differentiation and integration can be exchanged, the magnetic gradient tensor was derived by differentiating the gravitational potential of the elliptical cylinder three times in each direction, followed by integration in the depth direction. The remaining double integration was converted to a complex line integral along the closed boundary curve of the elliptical cylinder in the complex plane. The expressions of the magnetic field and magnetic gradient tensor derived from the complex line integral in the complex plane were shown to be perfectly consistent with those of the circular cylinder derived by the Lipschitz-Hankel integral.

KEYWORDS

magnetic, magnetic gradient tensor, elliptic cylinder, complex variable

Received: 17 April 2023; Revised: 15 May 2023; Accepted: 23 May 2023

*Corresponding author

E-mail: eomjy@knu.ac.kr

Address: 80 Daehakro, Bukgu, Daegu 41566, Korea

©2023, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서 론

최근 자력 및 자력 변화율 탐사 방법은 지하구조를 해석하거나 인공 구조물을 탐지하려는 목적으로 일반적으로 적용되고 있다(Matende and Mickus, 2021; LaFehr and Nabighian, 2012). 화산 지역에서 화도의 관입이나 초고압 맨틀 물질을 포함하는 킴벌라이트 구조 등에 특히 자력 및 자력 변화율 탐사 방법들이 활용되고 있다(Battaglia *et al.*, 2008; Beiki, 2012; Kamm *et al.*, 2015; Wang and Yang, 2023). 관입 화산암이나 킴벌라이트 구조는 일반적으로 원기둥이나 한쪽 방향으로 연장된 타원 기둥의 형태를 갖는다. 지금까지는 원기둥에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식만이 알려져 있어서(Rim and Eom, 2020; Rim, 2020) 타원 기둥 형태의 지하 구조를 해석하는데 어려움이 있었다. 따라서 이 연구에서는 타원 기둥으로 지하 이상체를 자력 및 자력 변화율 탐사를 이용하여 지하 이상체를 타원 기둥으로 해석하는데 필수적인 해석해를 유도하고자 한다.

이 논문에서는 일정한 방향으로 자화된 깊이 방향으로 무한한 타원 기둥이 장반경 방향의 북쪽과 일정한 방향으로 놓여 있는 경우에 타원 기둥의 자력 벡터와 자력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 타원 기둥에 의한 자력은 포아송 관계식을 이용하여 이전 연구(Rim, 2023)에서 이미 유도한 타원 기둥의 중력 변화율 텐서에 자화 모멘트를 결합하여 유도하였고, 자력 변화율 텐서는 벡터 자력을 미분하여 유도하였다.

타원 기둥에 의한 자력

단면 S 가 두 반지름 a 와 b 를 갖는 타원이고, 깊이 방향으로 무한히 길고 밀도가 ρ 인 타원 기둥에 의한 인력 퍼텐셜은 식 (1)과 같이 측정점 (x, y, z) 과 타원 기둥 내의 미소 적분소까지의 거리 역수를 3중 적분하는 식으로 표현된다(Blakely, 1996). 식 (1)에서 γ 는 만유인력 상수이고, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ 은 측정점과 타원 기둥을 구성하는 임의의 미소 적분소까지의 거리이다. 측정점에 해당하는 좌표계 (x, y, z) 는 북쪽을 x 축, 동쪽을 y 축, 깊이 방향을 z 축으로 설정한 오른손 직교 좌표계를 이용한다. 타원 기둥을 표시하는 직교 좌표계 (ξ, η, ζ) 도 동일한 좌표계를 적용한다. Fig. 1은 단면이 타원인 타원 기둥의 모양을 보여준다. 타원 기둥의 윗면은 수평면과 평행하고, 단면 타원의 두 반지름을 기준 좌표축으로 하는 2차원 평면 좌표계 (ξ', η') 로 정의할 수 있다. 단면 타원의 한 축이 북쪽과 이루는 방위각은 α 이고 타원 기둥 윗면 중심의 좌표는 (ξ_0, η_0, ζ_0) 이다. 유한한 길이의 타원 기둥에 대한 인력 퍼텐셜은 타원 기둥의 윗면과 아랫면을 시작면으로 하는 반무한 타원 기둥의 반응값들을 서로 빼서 구할 수 있다.

$$U(x, y, z) = \gamma \rho \iint_S \left[\int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} d\zeta \right] d\xi d\eta \quad (1)$$

식 (1)의 삼중 적분은 타원 기둥의 중심 축 방향 대칭성을 이용하여 중심축 방향(ζ)으로 먼저 적분하고 나머지 이중 적분은 타원 기둥의 경계면인 폐곡선 C 의 경로를 따라 복소 평면에서 선적분한다. 복소 평면에서 선적분하기 위하여 폐곡선 C 를 표현하는 복소 변수 w 를 식 (2~4)와 같이 도입한다.

$$w = u(t) + iv(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

$$u(t) = a \cos t \cos \alpha - b \sin t \sin \alpha + \xi_0 - x \quad (3)$$

$$v(t) = a \cos t \sin \alpha + b \sin t \cos \alpha + \eta_0 - y \quad (4)$$

복소 변수 w 의 미분은 식 (5~6)과 같이 주어진다.

$$u'(t) = -a \sin t \cos \alpha - b \cos t \sin \alpha \quad (5)$$

$$v'(t) = -a \sin t \sin \alpha + b \cos t \cos \alpha \quad (6)$$

모든 적분을 수행하고 나면 결과적으로 식 (7)로 표현되는 타원 기둥의 윗면에 해당하는 경계면과 관측점 사이의 거리인 r_0 만 남게 된다.

$$r_0 = \sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2} \quad (7)$$

타원 기둥에 의한 자력 벡터 반응식은 이전 연구(Rim, 2023)에서 이미 유도한 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서에 포아송 관계식(식 8~10)을 적용하여 유도한다. 포아송 관계식은 일정한 밀도와 일정한 방향의 자화를 갖는 임의의 3차원 이상체의 중력 퍼텐셜과 자력 퍼텐셜이 식 (1)과 같은 동일한

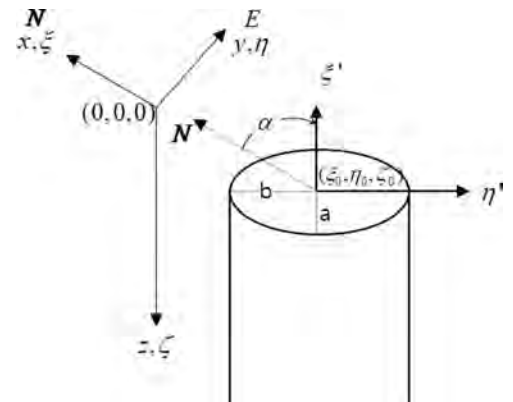


Fig. 1. The schematic geometry of the semi-infinite vertical elliptical cylinder. The origin of the top plane is (ξ_0, η_0, ζ_0) and two radii of the elliptic section are indicated by a and b , respectively. The identical Cartesian coordinates are used for observation and for the elliptic cylinder. x indicates a northward, and y indicates an eastward and downward positive system. The heading angle α is measured from the north to one of the elliptic radii in a clockwise direction.

적분식으로 표현될 수 있는 성질을 이용한 관계식이다 (Blakely, 1996; Ren *et al.*, 2017; Ren *et al.*, 2019).

$$b_x = \frac{1}{G\rho}(g_{xx}m_x + g_{xy}m_y + g_{xz}m_z) \quad (8)$$

$$b_y = \frac{1}{G\rho}(g_{xy}m_x + g_{yy}m_y + g_{yz}m_z) \quad (9)$$

$$b_z = \frac{1}{G\rho}(g_{xz}m_x + g_{yz}m_y + g_{zz}m_z) \quad (10)$$

여기서 타원 기둥은 한 방향으로 일정하게 자화되었다고 가정하고, 자기 모멘트 벡터는 식 (11)과 같이 복각(ϕ), 편각(ψ) 및 자화 강도(κ)로 표현한다.

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\psi \\ \cos\phi \sin\psi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad (11)$$

따라서 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서를 포아송 관계식으로 변환하여 유도한 자력 벡터는 다음과 같다.

$$b_x = m_x \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \frac{\theta_{x1}(t)}{w\bar{w}} dt \\ & - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{(5w\bar{w} + 6(\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_{x3}(t) dt \\ & - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)} \left(\frac{2}{r_0} + \frac{1}{(\zeta_0 - z)} \ln \left| \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right| \right) \theta_{y1}(t) dt \end{aligned} \right] \quad (12)$$

$$+ m_y \left[-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{(3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_{y3}(t) dt \right]$$

$$+ m_z \left[-\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} v'(t) dt \right]$$

$$b_y = m_x \left[-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{(3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_{y3}(t) dt \right]$$

$$+ m_y \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \frac{\theta_{x1}(t)}{w\bar{w}} dt \\ & + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{(5w\bar{w} + 6(\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_{x3}(t) dt \\ & + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)} \left(\frac{2}{r_0} + \frac{1}{(\zeta_0 - z)} \ln \left| \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right| \right) \theta_{y1}(t) dt \end{aligned} \right] \quad (13)$$

$$+ m_z \left[-\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} u'(t) dt \right]$$

$$b_z = m_x \left[-\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} v'(t) dt \right] + m_y \left[-\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} u'(t) dt \right] + m_z \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \frac{\theta_{1x}(t)}{w\bar{w}} dt \right] \quad (14)$$

여기서 식 (12~14)의 적분 안에서 수평 좌표만을 포함한 $\theta_{x1}(t)$, $\theta_{y1}(t)$, $\theta_{x3}(t)$ 및 $\theta_{y3}(t)$ 는 각각 식 (32~33), 식 (36~37)과 같이 주어진다.

타원 기둥에 의한 자력 변화율 텐서

타원 기둥에 의한 자력 변화율 텐서는 식 (15~20)과 같이 벡터 자력을 각 축 방향으로 미분하여 정의된다.

$$b_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} b_x = J_{xxx}m_x + J_{xyx}m_y + J_{xzx}m_z \quad (15)$$

$$b_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} b_y = J_{xyy}m_x + J_{yyy}m_y + J_{yyz}m_z \quad (16)$$

$$b_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} b_z = J_{xzz}m_x + J_{yzz}m_y + J_{zzz}m_z \quad (17)$$

$$b_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} b_y = J_{xyx}m_x + J_{xyy}m_y + J_{xyz}m_z \quad (18)$$

$$b_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} b_z = J_{xyz}m_x + J_{yyz}m_y + J_{yzz}m_z \quad (19)$$

$$b_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} b_z = J_{xzx}m_x + J_{xyz}m_y + J_{xzz}m_z \quad (20)$$

여기서 삼중 미분 함수 J_{pqt} 와 중력 변화율 텐서 g_{pq} 은 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$J_{pqt} = \frac{1}{\gamma\rho} \frac{\partial}{\partial t} g_{pq} \quad p, g, t = x, y, z \quad (21)$$

삼중 미분 함수(식 21)는 미분 순서에는 상관없으므로 총 10 종류의 삼중 미분 함수가 필요하다. 삼중 미분 함수 중 식 (22~26)과 같이 중심축(z) 방향 미분이 적어도 1회 이상 포함된 경우 중심 축 방향의 미분이 타원 단면의 폐곡선을 경로를 따르는 선적분과는 무관하므로 적절한 중력 변화율 텐서 성분을 z 로 미분하여 바로 구할 수 있다. 예를 들어 삼중 미분 함수 J_{xzz} 는 중력 변화율 텐서의 g_{xz} 성분을 z 로 미분하여 유도할 수 있다. 중심 축 방향의 미분이 전혀 포함되지 않은 삼중 미분 함수(식 28~31)은 삼중 적분으로 표현된 중력 퍼텐셜을 먼저 3회 미분한 후 중심축 방향으로 적분하고 나머지 이중 적분은 복소 평면에서 타원 단면을 폐곡선으로 선적분하여 구한다. 자세한 유도 과정은 부록에 정리하였다.

$$J_{xzz} = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\zeta_0 - z}{r_0^3} \right) v'(t) dt \quad (22)$$

$$J_{yzz} = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\zeta_0 - z}{r_0^3} \right) u'(t) dt \quad (23)$$

$$J_{xyz} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right) \theta_{y3}(t) dt \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
J_{xxz} = & -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^3} \theta_{x1}(t) dt \\
& -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^3} \theta_{y1}(t) dt \\
& +\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right) \theta_{x3}(t) dt
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
J_{yyz} = & -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^3} \theta_{x1}(t) dt \\
& +\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0^3} \theta_{y1}(t) dt \\
& -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right) \theta_{x3}(t) dt
\end{aligned} \quad (26)$$

$$J_{zzz} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r_0^3} \right) \theta_{x1}(t) dt \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
J_{xxx} = & \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} v'(t) dt \\
& -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3} \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0^3} + \frac{3}{2|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_1 - z)}{r_0 + (\zeta_1 - z)} \right| \right] \theta_{x2}(t) dt \\
& -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right] \theta_{x4}(t) dt \\
& -\int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0} \right] \theta_{x4}(t) dt
\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
J_{yyy} = & \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} u'(t) dt \\
& -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3} \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0^3} + \frac{3}{2|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right] \theta_{y2}(t) dt \\
& +\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right] \theta_{y4}(t) dt \\
& -\int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0} \right] \theta_{y4}(t) dt
\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
J_{xyy} = & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} u'(t) dt \\
& +\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3} \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0^3} + \frac{3}{2|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right] \theta_{y2}(t) dt \\
& -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right] \theta_{y4}(t) dt \\
& +\int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0} \right] \theta_{y4}(t) dt
\end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
J_{yyy} = & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} v'(t) dt \\
& +\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3} \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0^3} + \frac{3}{2|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right] \theta_{x2}(t) dt \\
& +\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right] \theta_{x4}(t) dt \\
& +\int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0} \right] \theta_{x4}(t) dt
\end{aligned} \quad (31)$$

여기서 타원 기둥 단면인 타원 경계로 정의되는 $u(t)$ 와 $v(t)$ 및 이들의 미분이 포함된 함수는 다음과 같이 주어진다. 이들 함수의 특징은 변수가 수평 방향인 (x, y) 만 가지고 중심축(z) 변수가 전혀 포함되지 않은 점이다.

$$\theta_{x1}(t) = u(t)v'(t) - v(t)u'(t) \quad (32)$$

$$\theta_{y1}(t) = v(t)u'(t) + u(t)v'(t) \quad (33)$$

$$\theta_{x2}(t) = (u^2(t) - v^2(t))v'(t) + 2u(t)v(t)u'(t) \quad (34)$$

$$\theta_{y2}(t) = (u^2(t) - v^2(t))u'(t) - 2u(t)v(t)v'(t) \quad (35)$$

$$\theta_{x3}(t) = \frac{(u^3(t) - 3u(t)v^2(t))v'(t) - (3u^2(t)v(t) - v^3(t))u'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \quad (36)$$

$$\theta_{y3}(t) = \frac{(u^3(t) - 3u(t)v^2(t))u'(t) + (3u^2(t)v(t) - v^3(t))v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \quad (37)$$

$$\theta_{x4}(t) = \frac{(u^4(t) - 6u^2(t)v^2(t) + v^4(t))v'(t) - (4u^3(t)v(t) - 4u(t)v^3(t))u'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^4} \quad (38)$$

$$\theta_{y4}(t) = \frac{(u^4(t) - 6u^2(t)v^2(t) + v^4(t))u'(t) + (4u^3(t)v(t) - 4u(t)v^3(t))v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^4} \quad (39)$$

퍼텐셜 이론에 따르면(Blakely, 1996; Lowrie and Fichtner, 2020) 자력 변화율 텐서의 대각 성분의 합($b_{xx} + b_{yy} + b_{zz} = 0$)은 0이고 비대각 성분은 대칭임을 여기서 유도한 타원 기둥에 의한 자력 변화율 텐서 반응식에서도 확인된다. 또한 중력 변화율 텐서의 대각 성분 합을 한 방향으로 미분한 것과 동일한 결과인 3개의 삼중 미분 함수의 합($J_{xxx} + J_{yyy} + J_{zzz} = 0$, $J_{xyy} + J_{yyy} + J_{yzz} = 0$, $J_{xxz} + J_{yyz} + J_{zzz} = 0$)도 모두 '0'임을 확인할 수 있다.

자력 및 자력 변화율 텐서 모델링

Fig. 2는 타원 기둥의 윗면의 중심이 $(0, 0, -500)$ m, 단반경 400 m, 장반경 800 m, 기둥의 길이 1,000 m, 타원 단면의 장

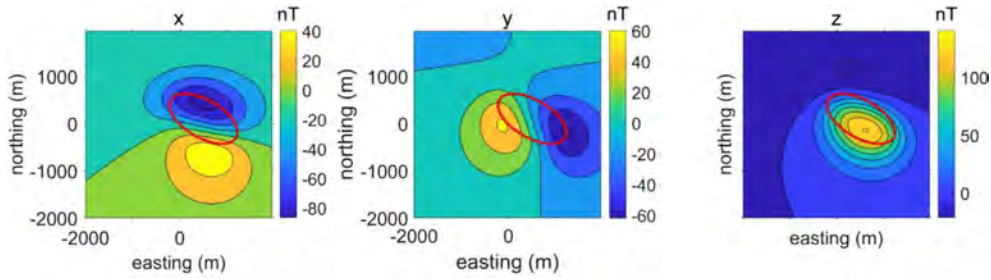


Fig. 2. Magnetic fields due to an elliptical cylinder (red ellipse) with a length of 1,000 m. The origin of the elliptical section of the top plane is (0, 0, -500 m). The short and long radii are 400 m and 800 m, respectively. The magnetization vector has an inclination of 50°, the declination of -10°, and magnitude of magnetization of 1 A/m. The observation points locate on the the sea level.

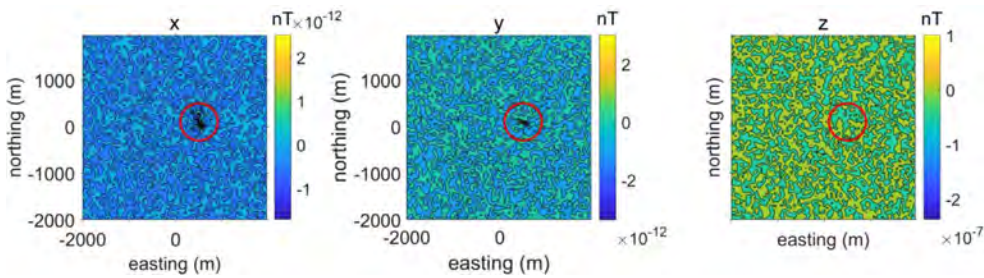


Fig. 3. Differences between the magnetic fields due to a circular cylinder (red circle) as calculated by Rim and Eom (2020) and this study.

축의 방위각 N60W, 자화 방향의 북각 50°, 편각 -10°, 자화 강도 1 A/m인 타원 기둥에 대한 자력 벡터를 보여준다. 원기둥에 의한 자력 벡터와 비슷한 패턴을 보이고 타원 단면의 주향 방향으로 연장된 자력 이상 반응을 보여준다. 장반경과 단반경을 같게 설정하면 원기둥과 같으므로 원기둥에 의한 자력 벡터와 비교하면 Fig. 3과 같이 완벽하게 일치한다. 원기둥에 의한 자력 벡터는 Rim and Eom (2020)의 반응식으로 계산하였는데, 원형의 방사상 대칭성을 고려한 립쉬츠-한켈 적분(Eason *et al.*, 1955)을 이용하여 유도한 식으로서 이 연구에서 적용한

복소 적분을 이용한 방식과 전혀 다른 방식으로 유도하였지만 두 벡터 자력 반응식의 차이는 10⁻⁷ nT 이하로 완벽하게 일치함을 알 수 있다.

같은 타원 기둥에 대한 자력 변화율 텐서 반응(Fig. 4)은 전형적인 원기둥과 비슷한 양상이지만 타원의 모양에 따라 반응 값이 연장되어 나타난다. 자력 벡터에서 원기둥 반응과 비교한 것과 동일한 방식으로 원기둥의 자력 변화율 텐서(Rim, 2020)와 비교한 경우 비교하면 Fig. 5와 같이 완벽한 일치를 보여준다.

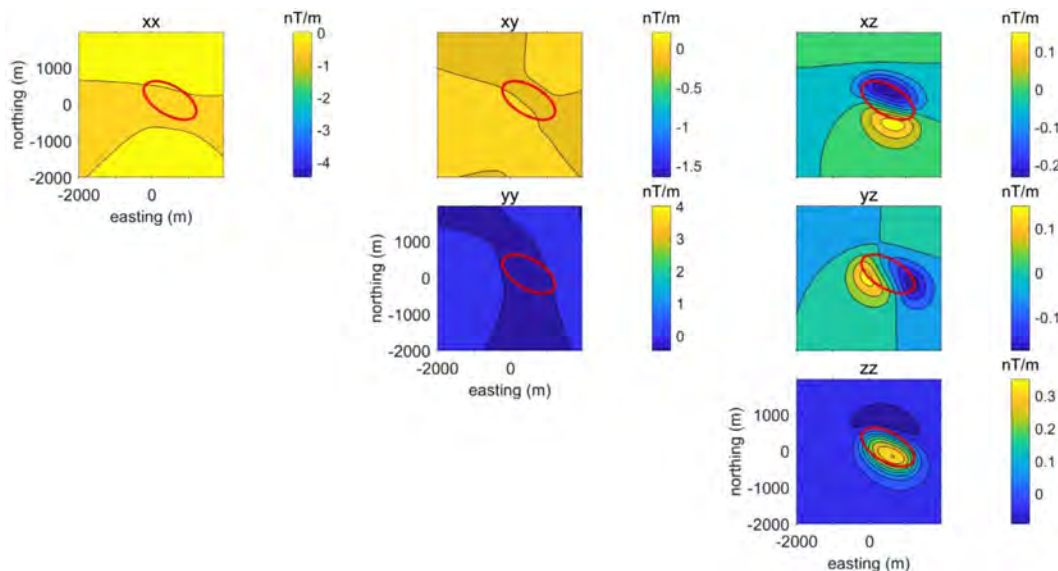


Fig. 4. The magnetic gradient tensor due to the same elliptical cylinder used in Fig. 2.

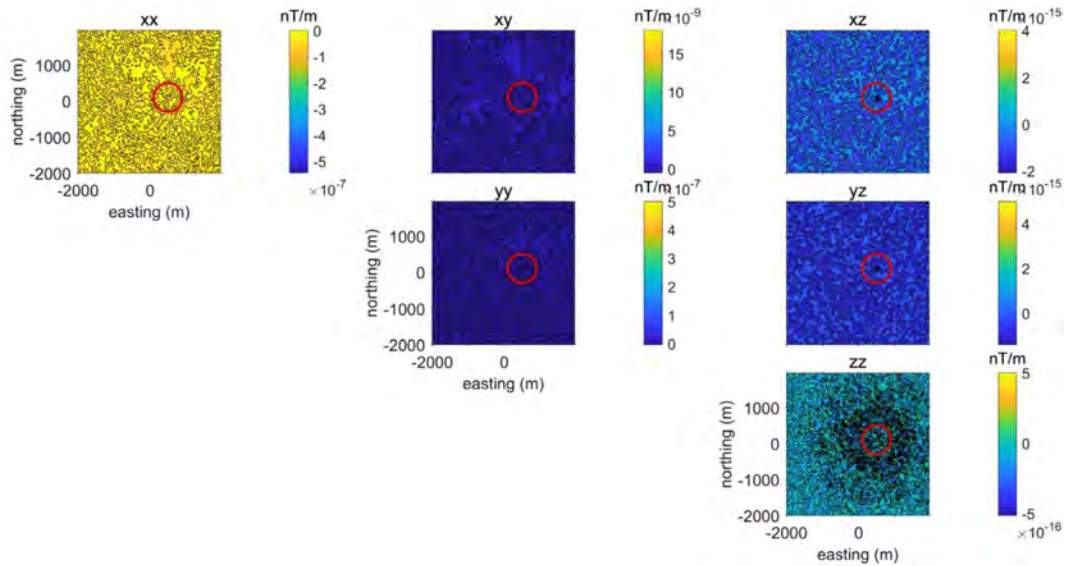


Fig. 5. Differences between the magnetic gradient tensors due to the circular cylinder (red circle) calculated by Rim and Eom (2020) and this study.

결론

일정한 밀도와 자화를 가지는 이상체에 대한 중력 퍼텐셜과 자력 퍼텐셜 포아송 관계식에 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서를 적용하여 타원 기둥에 의한 벡터 자력 반응식을 유도하였다. 유도한 자력 벡터를 직교 좌표계에서 각 축 방향으로 미분하여 자력 변화율 텐서를 유도하였다. 이때 타원 기둥을 z 방향 적분과 수평 성분의 이중 적분을 타원 경계를 경로로 하는 선적분으로 분리하여 유도한다. 립십치-한켈 적분을 적용한 원기둥의 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식과 선적분을 이용한 적용한 방법과 완벽하게 일치함을 보여주었다.

화성암 관입이나 킴벌라이트 구조 등은 깊이 방향으로 길게 연장되면서 그 단면이 원형인 경우도 있지만 주향 방향의 불규칙성으로 한 방향이 다른 방향에 비해 연장되는 타원 단면을 가지는 것이 일반적이다. 이런 구조에 자력 및 자력 변화율 탐사를 적용하려면 이 연구에서 유도한 벡터 자력과 자력 변화율 텐서의 해석해를 활용하여 타원 기둥의 길이 뿐만 아니라 타원 단면의 방위각을 고려하여야 이상체의 정밀한 모양을 추정할 수 있다. 타원 기둥에 대한 자력 및 자력 변화율 텐서의 해석해를 이용하면 현장 자료의 3차원 역산 해석에서도 타원 기둥의 구조에 해당하는 몇 개 변수만을 추적하는 비선형 역산이 가능하므로 정밀한 역산 해석에 도움을 줄 수 있을 것이다.

감사의 글

이 논문은 기상청 기상·지진 See-At 기술 개발 연구 사업 (KMI 2018-02710)의 지원으로 수행되었습니다.

References

- Battaglia, M., Gottsmann, J. Carbone, D., and Fernández, J., 2008, 4D volcano gravimetry, *Geophysics*, **73**(6), WA3-WA18, doi: 10.1190/1.2977792
- Beiki, M., Clark, D. A., Austin, J. R., and Foss, C. A., 2012, Estimating source location using normalized magnetic source strength calculated from magnetic gradient tensor data, *Geophysics*, **77**(6), J23-J37, doi: 10.1190/geo2011-0437.1
- Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, doi: 10.1017/CBO9780511549816
- Eason, G., Noble, B., and Sneddon, I. N., 1955, On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Philos. Trans. R. Soc. A, Math. Phys. Sci.*, **247**(935), 529-551, doi: 10.1098/rsta.1955.0005
- Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M., 1980, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, doi: 10.1016/C2013-0-10754-4
- Kamm, J., Lundin, I. A., Bastani, M., Sadeghi, M., and Pedersen, L. B., 2015, Joint inversion of gravity, magnetic, and petrophysical data — A case study from a gabbro intrusion in Boden, Sweden, *Geophysics*, **80**(5), B131-B152, doi: 10.1190/geo2014-0122.1
- Kwok, Y. K., 1989, Conjugate complex variables method for the computation of gravity anomalies, *Geophysics*, **54**(12), 1629-1637, doi: 10.1190/1.1442631
- Kwok, Y.-K., 1991a, Singularities in gravity computation for vertical cylinders and prisms, *Geophysical Journal International*, **104**(1), 1-10, doi: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x
- Kwok, Y. K., 1991b, Gravity gradient tensors due to a polyhedron with polygonal facets, *Geophysical Prospecting*,

39(3), 435-443, doi: 10.1111/j.1365-2478.1991.tb00320.x

Kwok, Y. K., and Beyer, L. A., 1993, Gravity due to a body with rotational symmetry about a vertical axis, *Geophysics*, **58(2)**, 298-306, doi: 10.1190/1.1443414

LaFehr, T. R., and Nabighian, M. N., 2012, *Fundamentals of gravity exploration*, Society of Exploration Geophysicists, doi: 10.1190/1.9781560803058

Lowrie, W., and Fichtner, A., 2020, *Fundamentals of Geophysics 3rd ed.*, Cambridge University Press, doi: 10.1017/9781108685917

Matende, K., and Mickus, K., 2021, Magnetic and gravity investigation of kimberlites in north-central Botswana, *Geophysics*, **86(2)**, B67-B78, doi: 10.1190/geo2020-0450.1

Ren, Z., Chen, C., Tang, J., Chen, H., Hu, S., Zhou, C., and Xiao, X., 2017, Closed-form formula of magnetic gradient tensor for a homogeneous polyhedral magnetic target: A tetrahedral grid example, *Geophysics*, **82(6)**, WB21-WB28, doi: 10.1190/geo2016-0470.1

Ren, Z., Chen, H., Chen, C., Zhong, Y., and Tang, J., 2019, New analytical expression of the magnetic gradient tensor for homogeneous polyhedrons, *Geophysics*, **84(3)**, A31-A35, doi: 10.1190/geo2018-0741.1

Rim, H., 2023, The Expressions of vector gravity and gravity gradient tensor due to an elliptical cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **26(1)**, 1-7, doi: 10.7582/GGE.2023.26.1.001. (in Korean with English abstract)

Rim, H., and Eom, J., 2020, The closed-form expressions of magnetic field due to a right cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23(1)**, 50-54, doi: 10.7582/GGE.2020.23.1.050. (in Korean with English abstract)

Rim, H., 2020, The closed-form expressions of magnetic gradient tensor due to a circular cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23(2)**, 67-71, doi: 10.7582/GGE.2020.23.2.067. (in Korean with English abstract)

Wang, K., and Yang, D., 2023, Joint inversion with petrophysical constraints using indicator functions and the extended alternating direction method of multipliers, *Geophysics*, **88(1)**, R49-R64, doi: 10.1190/geo2022-0167.1

부록

여기서는 삼중 미분 함수 중에서 z 방향의 미분이 전혀 포함되지 않은 경우 중 하나인 J_{xxx} 의 유도 과정을 기술한다. J_{xxx} 는 중력 변화율 텐서의 g_{xx} 를 x 방향으로 미분하여 정의된다.

$$J_{xxx} = \frac{1}{\gamma\rho} \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} = \iint_S \left[\int_{\zeta_0}^{\infty} \left(-\frac{9(\xi-x)}{r^5} + \frac{15(\xi-x)^3}{r^7} \right) d\zeta \right] d\xi d\eta \quad (A-1)$$

먼저 타원 기둥의 중심축(ζ) 방향으로 적분하면 식 (A-2)와 같다(Gradshteyn and Ryzhik, 1980).

$$J_{xxx} = \iint_S \left[\frac{3(\xi-x)^3}{\{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2\} r_0^5} + \frac{(\xi-x)\{(\xi-x)^2 - 3(\eta-y)^2\}}{\{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2\} r_0^3} \frac{(\zeta_0-z)}{r_0} \right. \\ \left. + \frac{2(\xi-x)\{(\xi-x)^2 - 3(\eta-y)^2\}}{\{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2\} r_0} \frac{(\zeta_0-z)}{r_0} \right] d\xi d\eta \quad (A-2)$$

여기에 본문에서 정의한 복소 변수(식 2~4)를 도입하면 식 (A-3)으로 변환된다.

$$J_{xxx} = \iint_S \left[\frac{3}{8} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{w^2}{\bar{w}} + \frac{\bar{w}^2}{w} \right) \frac{(\zeta_0-z)}{r_0^5} \right) + \frac{9}{4} \operatorname{Re} \left(w \frac{(\zeta_0-z)}{r_0^5} \right) \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{w}}{w^2} \frac{(\zeta_0-z)}{r_0^3} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{w^3} \frac{(\zeta_0-z)}{r_0} \right) \right] d\xi d\eta \quad (A-3)$$

식 (A-3)에는 복소 변수 w 가 포함된 적분의 총 5 종류가 있는데 이 중에서 예를 들어 첫번째 적분 항에서 선적분으로 변환될 함수 $F_1(w, \bar{w})$ 는 식 (A-4)의 관계로부터 구해진다 (Kwok, 1989; Kwok, 1991a; Kwok, 1991b; Kwok and Beyer, 1993).

$$2i \frac{\partial F_1(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} = \frac{3 w^2 (\zeta_0 - z)}{8 \bar{w} r_0^5} \quad (A-4)$$

식 (A-4)의 양변을 \bar{w} 로 적분하여 $F_1(w, \bar{w})$ 를 구한다.

$$F_1(w, \bar{w}) = -i \frac{3}{16} w^2 \left(\frac{2}{(\zeta_0 - z)^3 r_0} + \frac{2}{3(\zeta_0 - z) r_0^3} + \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3 |\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right) \quad (A-5)$$

식 (A-5)를 이용하여 본문에서 정의한 타원 기둥의 단면 경계인 타원 경로 C 에 대하여 선적분하고 실수부만을 선택하면 첫번째 적분에 의한 반응식 (A-6)을 얻을 수 있다.

$$J_1 = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)} \left[\frac{6w\bar{w} + 8(\zeta_0 - z)^2}{(\zeta_0 - z)^2 r_0^3} + \frac{3}{(\zeta_0 - z)^2 |\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right] \theta_{x2}(t) dt \quad (A-6)$$

식 (A-3)에서 복소 변수 w 가 포함된 다른 4개 적분 항에 대해서도 같은 방법을 적용하고 정리하면 최종적으로 삼중 적분 함수 J_{xxx} 가 식 (A-7)와 같이 유도된다.

$$J_{xxx} = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} v'(t) dt \\ - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^3} \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0^3} + \frac{3}{2|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - (\zeta_0 - z)}{r_0 + (\zeta_0 - z)} \right| \right] \theta_{x2}(t) dt \\ - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3\{w\bar{w} + 2(\zeta_0 - z)^2\}^2 - 4(\zeta_0 - z)^4}{r_0^3} \right] \theta_{x4}(t) dt \\ - \int_0^{2\pi} (\zeta_0 - z) \left[\frac{3w\bar{w} + 4(\zeta_0 - z)^2}{r_0} \right] \theta_{x4}(t) dt \quad (A-7)$$