

# On Spherical Trigonometry

구면삼각법에 관한 소고

KOH Youngmee 고영미

Spherical trigonometry refers to the geometry related to spherical triangles. It has been an important tool for studying astronomy since ancient times. In trigonometry, concepts such as trigonometric functions naturally emerge from the relationship between arcs and chords of a circle. In this paper, we briefly examine the origin of spherical trigonometry. To introduce the basics of spherical trigonometry, we present fundamental and important theorems such as Menelaus's theorem, the law of sines and the law of cosines on a sphere, along with their proofs. Furthermore, we discuss the educational value and potential applications of spherical trigonometry.

*Keywords:* Trigonometry, Spherical trigonometry; 삼각법, 구면삼각법.

*MSC:* 01A20, 01A35, 01A60, 97-03, 97G60

## 1 서론

수학은 인류의 역사가 시작된 이래로 끊임없이 성장하고 발전하고 또 변화되어 왔다. Glen Van Brummelen은 《Heavenly Mathematics》 [2]에서 수학과 교육과정에서 사라진 「구면삼각법(spherical trigonometry)」을 「잊혀진 수학」으로 칭하며 그의 유래와 수학을 소개하였다. 수학 분야는 그렇게 오고 가는 것이며, 구면삼각법 역시 한때 핵심 연구 주제였던 시기가 있었지만 [3, 4, 7] 지금은 잊혀진 수학이 되었다. 하지만 그는 구면삼각법이 자체적으로 아름다우며 경이롭고 기발한 아이디어를 담고 있다고 힘주어 말한다. 그는 「아무리 귀한 보물이라도 아무도 관심을 갖지 않으면 결국 잊혀진다」는 생각때문에 구면삼각법의 기록을 남겨두기 위하여 《Heavenly Mathematics》를 저술하였다고 한다 [2, p. viii].

기하는 수학의 한 축을 이룬다. 수학이 인류의 논리적 인식수단으로서의 역할을 담당함을 인정한다면 기하 역시 중요한 인식 수단의 하나일 것이다. 또한 기하가 도형을 다루므로

---

이 논문은 2022학년도 수원대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.

KOH Youngmee: Dept. of Data Science, Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr

Received on Mar. 22, 2023, revised on Apr. 12, 2023, accepted on Apr. 14, 2023.

기본도형인 삼각형의 성질을 공부하는 것 또한 인식 수단이 된다. 이때 자연스럽게 따라 나오는 것이 삼각함수이다. 우리가 사는 지구와 우주의 모습이 구면을 닮았음을 인정한다면 구면에서의 도형과 삼각형의 성질을 다루는 구면삼각법에 대한 학습이 우리의 인식을 넓히는 나름의 의미와 가치를 지닐 것이다.

평면기하에서 사인법칙, 코사인법칙 등이 다루어지듯이, 구면기하에서도 그에 대응하는 기본적인 내용들이 있다. 이런 내용은 교육자료로 활용이 가능할 뿐만 아니라 매우 유용해 보인다. 본 글은 구면삼각법의 유래와 함께 기본적인지만 중요한 기본 원리를 정리하고, 그의 교육적 가치와 활용 가능성에 대하여 고찰하고자 한다. 기본 원리의 설명은 가능한 한 간결하면서 읽기 쉽고 이해하기 쉽게 구성하고자 한다. 특히 오래된 글에서 사용된 기호를 현대적으로 바꾸어 학교 교육의 내용과 쉽게 연계하여 이해할 수 있도록 한다. 예를 들어, 각의 크기를 나타낼 때  $360^\circ$ 의 각도로 표현하기보다는 라디안을 사용한다.

본 글은 Brummelen의 저술 《The Mathematics of the Heaven and the Earth》 [1]와 《Heavenly Mathematics》 [2] 그리고 Eli Maor의 《Trigonometry Delight》 [5]를 주로 활용하였다. Lauren Roberts의 《Spherical Trigonometry Through the Ages》 [6]는 [2]에 대한 요약본에 해당하여 같이 참조하였다. 특히, [1]은 1차 사료의 번역을 실어 어느 정도의 역사적 검증을 유도하였기에, 삼각법의 역사에 보다 깊이 연구하고 싶은 독자들은 이를 참조하기를 바란다. 또한 19세기 내지 20세기 초반까지 구면삼각법과 삼각함수에 대한 교재로 사용되었던 것으로 여겨지는 I. Todhunter의 《Spherical Trigonometry》 (1886) [7]와 W. Chauvenet의 《A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry》 (1887) [3]는 J.D.H. Donnay의 《Spherical Trigonometry》 [4]와 함께 구면삼각법을 연구하고자 하는 독자들이 참고할 만하다.

## 2 구면삼각법의 유래

구면삼각법은 고대시대부터 천문학 연구의 중요 수단이었다. 눈으로 보는 천체의 모습은 구면, 즉, 천구 위에 별들이 위치한 형상으로 관측되었기 때문이다. 고대 사람들은 지구가 평평하다고 믿었지만 그리스 시대에도 이미 Pythagoras(기원전 6세기)나 Aristotle(기원전 340년경) 등을 비롯한 학자들은 천체뿐만 아니라 지구 역시 둥글다고 생각하였다 [6, p. 1]. 그래서 천문학자뿐만 아니라 많은 학자들에게 구면삼각법은 천문 측량을 위한 유용한 계산 수단이었다.

구면삼각법에서는 호와 현의 관계로 인하여  $\sin$ 과 같은 삼각함수<sup>1)</sup>가 자연스럽게 언급될

1) Ptolemy에 이어 각의 함수로서의 sine 함수는 Aryabhata(c. 510)가 처음 다루었으며, 기호  $\sin$ 은 영국 그래섬대학(Gresham College) 천문학 교수였던 Edmund Gunter(1581-1626)가 처음 사용했다. [5, p. 35-36]

수 밖에 없는데, 초기의 sine 함수는 현(弦, chord)<sup>2)</sup>의 길이를 나타내는 함수<sup>3)</sup>의 형태로 주어졌다. 그러한 현 함수(chord function)는 기원전 150년 경 니케아(Nicaea)에 살았던 그리스의 천문학자이자 지리학자, 수학자였던 Hipparchus (기원전 c. 190–c. 120)가 처음 사용한 개념이다. 그는 지구를 중심으로 해가 지나는 궤적을 알아내기 위하여 현 함수를 생각하고 그에 대한 값의 표를 만들기도 했다. 그렇기에 Hipparchus가 삼각법의 원조로 인정되고 있다 [2, 5, 9]. 그는 평면삼각법에서 다루는 다양한 공식을 알고 있었지만 관심사는 주로 구면삼각형에 대한 것이었다 [5, p. 24].

삼각법(trigonometry)<sup>4)</sup>에 관한 최초의 중요한 저술은 Claudius Ptolemy(c. 85–c. 165)의 《Almagest》<sup>5)</sup>인데, 여기에 현 함수의 값을 다룬 표가 나온다 [5, p. 27]. Ptolemy는 아마도 최초의 응용수학자라고 할 수 있지만, 사실은 Hipparchus나 Ptolemy는 모두 천문학자였다. 이들의 삼각법은 중세시대로 접어들며 아랍과 힌두 천문학자들을 통하여 흡수되고 발전되었는데 특히 구면삼각법이 발전하였다.

최초로 구면삼각법의 중요 결과를 도출해낸 학자로 언급되는 Menelaus (c. 70–c. 130)는 1세기 경 로마제국의 알렉산드리아에서 살았던 천문학자이자 수학자였다 [2, 6, 10]. 그는 구면기하를 다루는 《구면학(Sphaerica)》을 저술하였는데,<sup>6)</sup> 매우 훌륭한 저서로 평가받고 있다. 특히 이 책에는 그의 이름이 붙은 「Menelaus 정리」가 수록되어 있다. 그의 가장 큰 업적 중 하나는 현 함수를 sine 함수로 전환한 것인데, 그가 알아낸 구면의 성질은 거의 천 여년 동안 천문학자들이 사용하였던 수단이었고, 11–12세기의 중동 학자들이 이를 이용하여 보다 간결한 공식을 만들었는데, 「구면 사인법칙(spherical law of sines)」, 「구면 코사인법칙(spherical law of cosines)」 등이 그에 해당한다 [2, 6].

중세 수학자로는 아랍 수학자 Abū Nasr Mansūr (970–c. 1036)와 그의 스승 Abū 'l-Wafā와 제자 al-Bīrūnī를 들 수 있다. Abū Nasr는 「극삼각형(polar triangle)」 [3.3절 참조]이라는 개념을 만들었으며 《Book of Azimuth》와 《The Determination of Spherical Arcs》를 저술하였다.<sup>7)</sup> 그는 Menelaus 정리를 이용하여 「4수 법칙」을 유도하였고 구면 사인법칙 등을 만들었다. Abū 'l-Wafā도 Ptolemy의 저술과 같은 제목의 《Almagest》를 저술하였는데, 내용은 보다 논리적이고 다양했고 또 천문학 문제를 다루면서 tan, cot와 같은 여러가지

2) 현은 원호의 양 끝점을 잇는 선분을 의미한다. Ptolemy는 현의 길이  $d$ 를  $d = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$  (단,  $r$ 은 반지름,  $\alpha$ 는 중심각)로 계산하였는데, 이는 사인법칙을 주는 식이기도 하다. [5, p. 25–27]

3) 당시에 함수라는 용어가 있었던 것은 아니지만 유사한 의미의 계산이 사용되었다.

4) Trigonometry(삼각법)라는 용어의 사용은 1600년 Bartholomew Pitiscus의 저술 《Trigonometria》의 제목에서 기인한다고 한다. [2, p. 73]

5) 아랍어로는 《Kitāb al-majistī》인데, 「위대한 책, the Great Book」이라는 뜻을 갖는다.

6) 비록 원본은 전해지지 않아도 아랍어 또는 라틴어 본이 전해진다고 한다. [2]

7) 《Book of Azimuth》는 유실되었지만 그 내용이 al-Bīrūnī의 저서 《Keys to Astronomy》에 담겨 전해진다고 한다. 《The Determination of Spherical Arcs》는 지금까지도 전해지며, 해돋이 시각의 계산 등의 내용이 담겨 있다고 한다. [2]

삼각함수에 해당하는 내용도 다루었다 [2].

이러한 아랍 및 힌두의 지식 유산은 중세 시기가 끝나가면서 그리스의 지식 유산과 함께 유럽으로 넘어갔는데, 천문학자 Johann Müller (1436–1476)가 그 중심에 있었다고 한다. 그는 1436년 쾨니히스베르크<sup>8)</sup>에서 태어나 라이프치히에서 교육을 받았는데, 그의 이름이 어느 지역에서 불리느냐에 따라 다른 이름을 가졌고 라틴어 이름으로는 Regio Monte로 불리다가 Regiomontanus로 불리게 되었다. 그는 《De triangles omnimodis》<sup>9)</sup>라는 제목의 저술을 남겼는데, 천문학을 위한 수학을 제시하기 위함이었다. 저술은 1464년에 완성했지만 그의 사후 반 백년이 지난 1533년에 출판되었다 [5].

이러한 수학은 영국으로 넘어가 17세기 전반에 로그함수를 개발한 John Napier (1550–1617), William Oughtred (1574–1660), John Willis (1616–1703) 등에 의해 해석적 방법으로 발전해 나아갔다. 특히 Napier는 종교적으로 카톨릭을 반대하는 개신교도(Protestant)로서 수학자라기보다는 국가와 신앙을 위한 수단을 개발하는 발명가였다. 그는 삼각함수의 값의 계산을 효율적으로 할 수 있도록 로그함수를 발명하였고, 주로 직각삼각형의 성질을 연구하여 구면직각삼각형으로부터 얻어지는 10개의 기본 항등식을 얻어내기도 했으며 이러한 항등식을 쉽게 기억할 수 있는 수단을 개발하였다 [2, Chap. 5].

참고로, 삼각법은 하늘(천체)을 이해하기 위한 수단이었기에 역사적 관점에서 보면 실질적으로 평면삼각법보다는 구면삼각법의 연구가 더 주도적이었다. 이러한 구면삼각법에 대한 연구와 교육이 20세기 중반까지 이어지다가 미국에서 일어난 새수학(New Math) 운동으로 인하여 수학과 교육계 내에서 자취를 감추게 된다.

### 3 구면삼각법

「구면삼각법」은 구면 위의 삼각형과 관련된 기하학을 말한다. 삼각법의 주목표는 삼각형에 대한 일부 정보를 가지고 그 삼각형에 대한 다른 정보들을 알아내는 것이다 [2, p. 110]. 그래서 구면삼각법은 구면에서의 삼각형을 정의하고, 그에 대해 알고 있는 변의 길이 또는 각의 크기를 가지고 그 삼각형과 관련된 다른 정보와 성질 등을 알아내는 것이 목표이다.

기하학을 하기 위해서 우리는 점과 선, 각, 면 등을 정의한다. 마찬가지로 구면기하학을 하기 위해서도 이들에 해당하는 개념(대상)들을 정의해야 한다. 점은 당연히 구면 위의 점으로 정의되고, 선은 구면 위의 선으로 정의되며, 각은 구면 위의 두 직선 사이의 각으로 정의되고, 면은 구면 위의 선들로 둘러싸인 구면 위의 영역으로 정의되어야 할 것이다. 그런데, 선은 직선과 곡선으로 구분할 수 있으며, 다각형은 직선들로 둘러싸인 영역을 의미한다. 그러므로 삼각형을

8) Königsberg는 the royal mountain, 즉, 「왕의 산」이라는 의미이다. 그래프이론에 나오는 다리 문제로 유명한 쾨니히스베르크는 북방 십자군의 전진기지였던 성의 이름이며 그를 기반으로 발전한 도시의 이름이다.

9) On triangles of every kind, 즉, 「모든 종류의 삼각형에 관하여」라는 뜻이다.

정의하기 위해서는 구면에서의 직선을 먼저 「정의」할 수 있어야 한다.

직선이 두 점을 잇는 최단거리를 주는 선분의 연장임을 인식한다면 구면 상의 직선 또한 구면의 두 점을 잇는 구면 상의 선분 중에 최단거리를 주는 선분의 연장으로 이해함이 타당하다. 구면의 두 점을 잇는 최단거리의 선분을 찾기 위해 먼저 구면과 평면이 만나 형성되는 공통 영역을 알아보자. 단, 구면의 반지름은 편의상 1로 잡는다.

- 구면과 평면의 교차영역, 즉, 절단선(cross section)은 원(circle)이다.

증명. 구면의 중심  $O$ 에서 평면  $H$ 에 수선을 내려 만나는 점을  $O'$ 라 하자. 구면과 평면의 교차영역 위의 한 점  $B$ 를 잡으면  $\angle BO'O$ 는 직각이어서 삼각형  $BO'O$ 는 직각삼각형이다. 그러므로  $\overline{O'B} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{O'O}^2}$  인데, 여기서  $\overline{OB} = 1$ 은 구의 반지름이므로, 그 값은 점  $B$ 의 선택과 무관하다. 그러므로 구면과 평면의 교차영역은 원이다. [Figure 1 참조] •

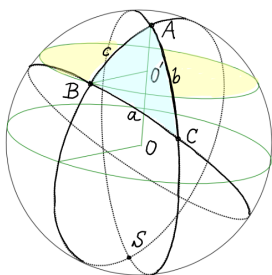


Figure 1. Straight lines, circles and a triangle on a sphere; 구면에서의 직선과 원 그리고 삼각형

또한 구면에서의 「원」은 구면의 평면에 의한 절단선으로 주어짐도 쉽게 알 수 있다. 이때 원은 평면에 포함되므로 구면 위의 두 점을 잇는 선들 중에 길이가 짧게 되는 선은 원호여야 함도 알 수 있다. 그러면 두 점을 잇는 많은 원호들 중에 어떤 원호가 구면 상의 「직선」일까?

- 구면에서의 직선은 대원(great circle)이다. 즉, 대원이 구면에서의 직선이다.

증명. 구면 위의 두 점을 잇는 원호 중에 그 원호의 반지름이 클수록 곡률(굽어진 정도)이 작고, 그래서 두 점 사이의 거리가 짧다. 그러므로 구의 중심을 지나는 원, 즉, 대원의 반지름이 가장 커서 구면에서의 직선은 대원으로 주어진다. •

구면 위의 두 직선 사이의 각(angle)은 어떻게 정의될까? 구면 위의 두 직선 사이의 각은, 자연스럽게, 각 직선과 구의 중심을 포함한 두 평면의 사이각으로 정의한다. 편의상 우리는 각도(각의 크기)를 라디안(radian)<sup>10)</sup>으로 측정한다.

10) 라디안은 각의 크기를 나타내는 단위로, 반지름이 1인 원의 원호의 길이로 측정한다. 예를 들어, 「직각」, 즉,  $90^\circ$ 는 반지름이 1인 원의 원주의  $1/4$ 의 길이인  $2\pi/4 = \pi/2$ (라디안)이다. 라디안은 18세기에 각의 측량 단위로 고려되었다가 1765년 Euler가 각속도 등의 계산에 그 개념을 정식으로 채용하였다. 이후 20세기 후반을 거치면서 SI(국제 단위 시스템, International System of Units)에서 각의 측량 단위로 인정하였다 [11]. 각에 대한 역사는 [5, Chapter 1]을 참조한다.

구면 위의 직선과 각 등을 정의하였으므로, 기본 도형에 해당하는, 구면 위의 세 점  $A, B, C$  를 꼭지점으로 갖는 구면 위의 삼각형  $ABC$ 를 만들 수 있다. 이때 꼭지점  $A, B, C$ 와 마주보는 변을 각각  $a, b, c$ 로 나타내자. 그러면 변이 각의 크기가 된다. 즉,  $a = \angle BOC$ 이다. 그러면  $\angle BOC < \angle COA + \angle AOB$  이므로  $a < b + c$ 이다. 그러므로

- 구면삼각형에서 한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 작다.

구면삼각형은 크기가 제한된, 즉, 반지름이 1인 구면 위에 그려진 삼각형이므로 그 크기가 제한된다. 사실, 삼각형의 세 변  $a, b, c$ 는 구면을 두 개의 영역으로 나누는데, 한 영역은 반구 내에 포함되고 다른 영역은 반구를 포함하게 된다. 우리는 편의상 반구 내에 포함된 영역을 「구면삼각형」으로 생각하기로 한다. 그러므로 최대 크기의 구면삼각형은 원주 상에 세 점  $A, B, C$ 를 갖는 반구(semi-sphere)가 될 것이다. 이때  $\angle A = \pi, \angle B = \pi, \angle C = \pi$ 이므로 세 내각의 합이  $3\pi$ 임을 알 수 있다. 또한 세 변의 합  $a + b + c = 2\pi$ 이다.

- 구면삼각형  $ABC$ 에 대하여,  $\pi < \angle A + \angle B + \angle C \leq 3\pi$ 이고  $0 < a + b + c \leq 2\pi$ 이다.

구면삼각형  $ABC$ 의 세 내각의 합이  $\pi$  (즉,  $180^\circ$ )보다 크면, 구면의 중심을 향하는 방향을 따라 구면삼각형  $ABC$ 를 세 꼭지점을 지나는 평면에 사영하여 얻는 평면삼각형과 각을 비교하여 확인할 수 있다.<sup>11)</sup> 그러나 3.3절에서 설명할 「극쌍대 정리」를 적용해도 그 사실을 알 수 있다.

우리는 조합론적 사고를 통하여 구면삼각형  $ABC$ 의 넓이를 구할 수 있다. 이러한 아이디어는 프랑스 출신 수학자 Albert Girard (1595–1632)의 생각이었는데,<sup>12)</sup> 삼각형의 각 변을 포함한 활꼴을 이용한다. 「활꼴(lune)」은 두 개의 구면 직선(대원)으로 만들어지는 도형을 말한다. 예를 들어, [Figure 1]에서 초승달 모양의 도형  $ABSC$ 가 활꼴이다.

- 구면삼각형  $ABC$ 의 넓이는  $\triangle ABC = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$ 이다.

증명.  $AS$ 을 중심축으로 한 활꼴  $ABSC$ 의 넓이는 각도에 비례하므로,  $\angle A = \theta$ 라고 하면,

$$\text{활꼴의 넓이} = \frac{\theta}{2\pi} \text{ 구면의 넓이} = \frac{\theta}{2\pi} 4\pi R^2 = 2\theta \quad (\text{단, 구면의 반지름 } R = 1)$$

로 주어진다. 삼각형의 각 변  $BC, CA, AB$ 를 포함한 활꼴의 넓이는 각각  $2\angle A, 2\angle B, 2\angle C$ 인데, 세 활꼴의 합은 반구에 삼각형이 두 번 더 겹쳐진 것이므로

$$2\triangle ABC = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C - \frac{1}{2}4\pi R^2 \quad (\text{단, 구의 반지름 } R = 1)$$

11) 구면삼각형의  $\angle A$ 는 두 면, 즉, 면  $AOB$ 와 면  $AOC$ 의 사이각으로 주어진다. 이때  $\angle A$ 는 선분  $OA$ 에 「수직」인 면에서의 각이므로 평면삼각형  $ABC$ 의 각  $A$ 보다 크다. 예를 들어, 8분의 1 구면의 꼭지점으로 이루어진 구면삼각형과 그 꼭지점을 잇는 평면삼각형을 비교해본다.

12) Girard의 *Invention nouvelle en l'algebre* (1629)에 나오는 아이디어. 그는  $\sin, \tan, \sec$  등의 축약 기호뿐만 아니라  $\sqrt[3]{\quad}$ 를 처음 사용한 수학자이며, 저서 《Trigonométrie》(1626)도 남겼다.

이다. 즉, 구면삼각형의 넓이는 세 각의 합에서  $\pi$ 를 뺀 값으로 주어진다. •

구면삼각형의 넓이 공식을 이용하여 다면체에 대한 Euler의 공식  $V - E + F = 2$ 에 대한 증명도 가능하다.<sup>13)</sup> 사실 공식의 증명은 Adrien-Marie Legendre (1752-1833)가 그의 유명한 저술 《Eléments de Géométrie》에서 구면삼각법을 적용하여 처음으로 제대로 된 증명을 제공하였다 [2, p. 116-119]. Euler 공식의 최초의 증명이 구면삼각법에 의한 증명이었음이다 소 놀랍다.

### 3.1 Menelaus 정리

천문학자이면서 수학자로 평가되는 알렉산드리아의 Menelaus는 기하와 삼각법에 관련된 책들을 여럿 저술했다고 하는데, 전해지는 것은 《Sphaerica》 하나뿐이라고 한다. 이 책 제3권에 평면에서 직선이 삼각형을 지날 때의 각 변의 분할 비율에 관한 정리<sup>14)</sup>가 실려있는데, 이를 이용하여 구면삼각형에 대한 Menelaus 정리를 유도하였다.

- 평면 Menelaus 정리. 평면삼각형  $ABC$ 를 지나는 직선  $l$ 이  $AB$ 의 연장선과  $BC$  및  $CA$  위의 점  $D, E, F$ 에서 만날 때,  $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$  이 성립한다.<sup>15)</sup> [Figure 2(a) 참조]

증명. 점  $B$ 에서 직선  $l$ 과 평행한 선을 그어  $AC$ 와 만나는 점을  $G$ 라 하면,  $\frac{AD}{DB} = \frac{AG}{GC}$ ,  $\frac{BE}{EC} = \frac{GF}{FC}$  가 되어  $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AG}{GC} \cdot \frac{GF}{FC} \cdot \frac{CF}{FA} = (-1)^3 = -1$ 이다.<sup>16)</sup> •

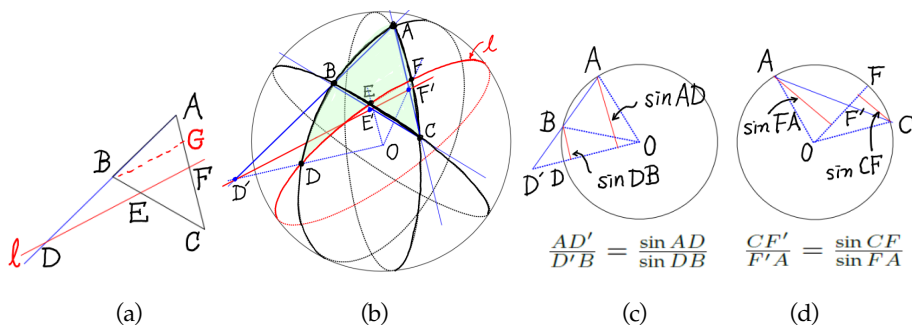


Figure 2. (a) Planar Menelaus Theorem; 평면 Menelaus 정리 (b) Spherical Menelaus Theorem; 구면 Menelaus 정리 (c), (d) Cross sections of the sphere; 구면 직선의 단면

구면삼각형을 구면의 중심에서 방사되는 직선을 따라 구면삼각형의 세 꼭지점을 포함하는 평면으로 사영시켰을 때, 구면에서의 변들의 비는 각 변의 sin 값의 비로 대응된다. [Figure

13)  $V$ 는 주어진 다면체의 꼭지점의 개수,  $E$ 는 변의 개수,  $F$ 는 면의 개수를 뜻한다.

14) 이 정리를 일반적으로 Menelaus 정리라고 부른다.

15) 정리를 쉽게 기억하기 위해  $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow A$ 와 같이 순환고리를 생각한다.

16) 선분의 방향을 고려하여  $\frac{CF}{FC} = -1$ 과 같이 계산하면 그 값이  $-1$ 이지만, 방향을 무시하면 값이  $1$ 이다.

2(b), (c), (d) 참조] 그렇게 얻어진 평면도형에 대하여 Menelaus 정리를 적용하여 구면에서의 Menelaus 정리를 얻는다.

- 구면 Menelaus 정리 1. 구면삼각형  $ABC$ 를 지나는 구면 위의 직선  $\ell$ , 즉, 대원이  $AB$ 의 연장선과  $BC$  및  $CA$  위의 점  $D, E, F$ 에서 만날 때,  $\frac{\sin AD}{\sin DB} \cdot \frac{\sin BE}{\sin EC} \cdot \frac{\sin CF}{\sin FA} = 1$  이다.

증명. 구면 위의 도형  $ABDECF$ 를 구의 중심  $O$ 에서 방사시켜 구면삼각형  $ABC$ 의 세 꼭지점  $A, B, C$ 를 지나는 평면 위로 사영시켜 평면 도형  $ABD'E'CF'$ 을 얻는다. 그러면  $\frac{AD'}{D'B} \cdot \frac{BE'}{E'C} \cdot \frac{CF'}{F'A} = 1$  인데, 이때  $\frac{AD'}{D'B} = \frac{\sin AD}{\sin DB}$ ,  $\frac{BE'}{E'C} = \frac{\sin BE}{\sin EC}$ ,  $\frac{CF'}{F'A} = \frac{\sin CF}{\sin FA}$  이다. •

Menelaus 정리는 다양한 형태로 주어지기도 한다. 예를 들어, 평면 Menelaus 정리를 유도할 때의 보조선을 점  $B$ 에서 긋는 대신 점  $E$ 에서 선분  $AB$ 와 평행하게 그어 선분  $AC$ 와 만나는 점을  $G$ 라 놓는다. 삼각형의 닮음에 의해  $\frac{AB}{EG} = \frac{BC}{CE}$ ,  $\frac{EG}{AD} = \frac{EF}{FD}$  인데, 이를 변변 곱하여  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FD}$ , 즉,  $\frac{DA}{AB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FD} = 1$ 을 얻는다.<sup>17)</sup> 그래서 다른 형태의 구면 Menelaus 정리를 얻는다.

- 구면 Menelaus 정리 2. 위와 같은 상황에서,  $\frac{\sin DA}{\sin AB} \cdot \frac{\sin BC}{\sin CE} \cdot \frac{\sin EF}{\sin FD} = 1$  이다.

9세기 경 Thābit ibn Qurra(836–901)<sup>18)</sup>가 다소 다른 방법으로 위 정리를 증명하기도 했다. 구면 Menelaus 정리는 고대에서 중세에 이르기까지 거의 천 년 이상 동안 천문학 등에서 좌표의 계산도구로 사용되었고, 특히, 해, 달, 지구의 움직임에 대한 관측에 유용하였다. 이러한 구면 정리는 「6수 법칙(rule of 6 quantities)」을 의미하는데, 아랍 수학자 Abū Naṣr Maṣūm (970–c. 1036)<sup>19)</sup>는 《Book of Azimuth》에서 이를 간단한 형태로 바꿔 「4수 법칙(rule of 4 quantities)」으로 만들었다.<sup>20)</sup> 이는 Menelaus 정리를 위한 도형  $ABDECF$ 에서 점  $D$ 를 대원  $AC$ 에 대한 극(pole)<sup>21)</sup>인 경우를 생각하는 것인데, 그러면  $\sin DA = 1$ ,  $\sin FD = 1$ 이 되어 4수 법칙을 얻는다. [Figure 3 참조]

- 4수 법칙(Rule of 4 Quantities).  $\frac{\sin AB}{\sin BC} \cdot \frac{\sin CE}{\sin EF} = 1$ , 즉,  $\frac{\sin AB}{\sin EF} = \frac{\sin BC}{\sin CE}$ .

17) 큰 의미는 없지만, 순환고리  $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ 를 만들기 위하여 선분의 방향을 바꾸었다.

18) 9세기 후반 바그다드에 살았던 수학자이자 천문학자. 대수와 기하, 그리고 천문학에 중요한 업적을 남겼다.

19) Abū Naṣr는 페르시아에서 태어나 지금의 아프가니스탄에서 생을 마친 아랍 수학자로서 Abū 'l-Wafā에게 수학하고, al-Bīrūnī를 제자로 둔 일국의 왕자였다.

20) 원본은 유실되었으나, al-Bīrūnī의 저서 《Keys to Astronomy》에 그러한 기록이 전한다고 한다 [2, p. 59].

21) 어떤 원호의 「극」이란, 적도에 대한 남극이나 북극처럼, 구면의 중심에서 원호를 포함한 면에 수직인 선을 그어 구면과 만나는 점을 의미한다.



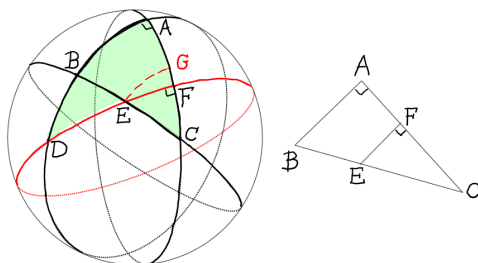


Figure 3. Rule of 4 Quantities and its limit case; 4수 법칙과 그의 극한

특히 구면삼각형  $ABC$ 를 아주 작게 줄이면 점  $D$ 는 상대적으로 아주 멀게 되어  $\angle A$ 와  $\angle F$ 는 거의 직각이 되고, 각 변의 길이는 매우 짧아져, 예를 들어  $\sin AB \simeq AB$ 가 되어, 평면삼각형에서의 닮음에 의한 비례식  $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{CE}$ 를 얻을 수 있는데, 이는 4수 법칙의 극한으로 이해할 수 있다. [Figure 3 참조]

### 3.2 구면 사인법칙

「4수 법칙」은 구면삼각법의 발전에 크게 기여하였고, 그로부터 구면삼각형의 각과 변의 관계를 설명하는 사인법칙을 유도할 수 있다.<sup>22)</sup> 구면 사인법칙을 처음 개발한 사람이 누구인지에 대한 논란은 있지만,<sup>23)</sup> 이란에서 태어나 이라크에서 생을 마감한 수학자, 천문학자 Abū 'l-Wafā' al-Būzjānī (940–998)가 《Almagest》<sup>24)</sup>에서 사인법칙을 증명하였다.

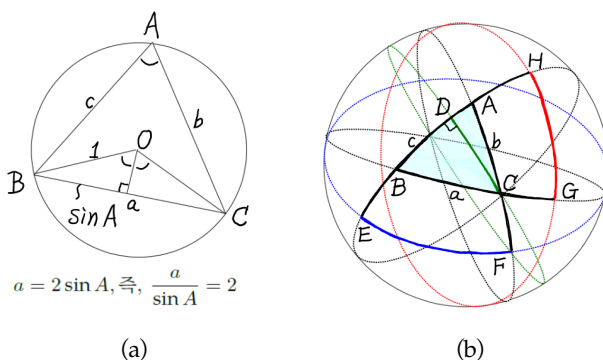


Figure 4. (a) Planar Law of Sines; 평면 사인법칙 (b) Spherical Law of Sines; 구면 사인법칙

- 구면 사인법칙. 구면삼각형  $ABC$ 에서 각 꼭지점을 마주보는 변의 길이를 각각  $a, b, c$ 라고 하면,  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ 가 성립한다.

22) 평면에서의 사인법칙은, Euclid의 《Elements》의 제3권에 나오는, 중심각이 원주각의 2배라는 사실로부터 쉽게 유도된다;  $a = 2 \sin A$ , 즉,  $\frac{a}{\sin A} = 2$  [Figure 4(a) 참조]. [5, p. 87–89]

23) Al-Bīrūnī는 자신의 저서 《Keys to Astronomy》에서 사인법칙의 최초 개발자를 Abū Nasr라고 했지만, 이들의 관계를 고려하면 의심의 여지는 있다. [6]

24) 이 책은 Ptolemy의 《Almagest》 [8]와 동일한 제목의 저서지만, 훨씬 더 많은 내용과 아이디어를 담고 있다.

증명. 구면삼각형  $ABC$ 의 점  $C$ 에서 변  $AB$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라 하자. 먼저, 점  $A$ 가 극(pole)이 되도록 대원을 그리고, 변  $AB$ 와 변  $AC$ 의 연장선과 만나는 교점을 각각  $E$ 와  $F$ 라고 하면, 4수 법칙에 의하여  $\frac{\sin DC}{\sin EF} = \frac{\sin AC}{\sin AF}$ 이다. 이때  $\sin EF = \sin \angle A = \sin A$ 이고  $\sin AC = \sin b$ 이며  $\sin AF = 1$ 이므로  $\sin DC = \sin A \sin b$ 이다 [Figure 4(b) 참조].

다음으로, 점  $B$ 가 극이 되는 대원과 변  $BC$ ,  $BA$ 의 연장선과의 교점을 각각  $G$ ,  $H$ 라 하면, 4수 법칙에 의해  $\frac{\sin DC}{\sin HG} = \frac{\sin BC}{\sin BG}$ 이다. 이때도  $\sin HG = \sin B$ ,  $\sin BC = \sin a$ ,  $\sin BG = 1$ 이므로  $\sin DC = \sin B \sin a$ 이다. 즉,  $\sin A \sin b = \sin DC = \sin B \sin a$ 여서  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$  (마찬가지로,  $= \frac{\sin c}{\sin C}$ )이다. •

구면삼각형의 크기를 아주 작게 줄여나가면, 구면삼각형은 거의 평면삼각형이 되고, 각 변의 길이는 매우 작아져서, 예를 들어,  $\sin a \simeq a$ 가 된다. 그러므로 구면 사인법칙의 극한으로 평면에서의 사인법칙  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 를 얻을 수 있다.

### 3.3 구면 Pythagoras 정리와 구면 코사인법칙

기본도형이 삼각형이기는 하지만 삼각형의 성질을 유도하기 위하여 우리는 종종 직각삼각형을 살핀다.  $\angle C$ 가 직각인 구면직각삼각형  $ABC$ 를 생각해보자. 「삼수선 정리」<sup>25)</sup>에 따라 점  $A$ 에서 구면의 중심  $O$ 와 이은 선분  $OB$ ,  $OC$ 에 내린 수선의 발을 각각  $E$ ,  $F$ 라고 하면, 삼각형  $AEF$ ,  $AOE$ ,  $AOF$ ,  $FOE$ 는 모두 직각삼각형<sup>26)</sup>이다 [Figure 5(a) 참조]. 구의 반지름이 1이므로,  $OA = 1$ ,  $OE = \cos c$ ,  $OF = \cos b$ 이고,  $OE = OF \cdot \cos a$ 이므로 다음의 「구면 Pythagoras 정리」를 얻는다.

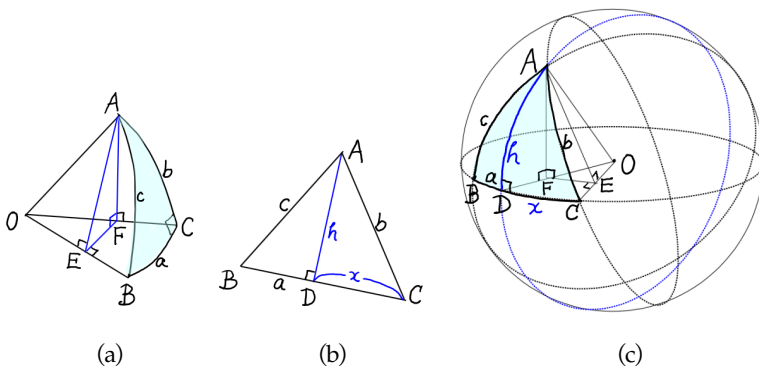


Figure 5. (a) Theorem of 3 Vertical Lines; 삼수선 정리 (b) Planar Law of Cosines; 평면 코사인법칙 (c) Spherical Law of Cosines; 구면 코사인법칙

25) 직선  $\ell$ 을 뚫고 있는 평면 밖의 점  $P$ 에서 평면에 내린 수선의 발을  $O$ 라 하고  $O$ 에서  $\ell$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 선분  $PH$ 는 직선  $\ell$ 에 수직이다.

26) 삼각형 기호에서 끝 꼭지점의 각이 직각이 되도록 나타내었다. 예를 들어, 삼각형  $AEF$ 에서  $\angle F$ 가 직각이다.

- 구면 Pythagoras 정리.  $\cos c = \cos b \cdot \cos a$ , 즉, 구면 직각삼각형에서 빗변의 코사인 값은 밑변과 높이 각각의 코사인 값의 곱과 같다.<sup>27)</sup>

우리는 평면삼각형을 두 개의 직각삼각형으로 분할하고 각각에 대해 Pythagoras 정리를 적용하여 평면 코사인법칙을 유도한다. 즉, 평면삼각형  $ABC$ 의 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라고 하고,  $AD = h$ ,  $DC = x$ 로 놓으면 [Figure 5(b) 참조],  $b^2 = h^2 + x^2$  이고  $c^2 = h^2 + (a - x)^2 = a^2 + (h^2 + x^2) - 2ax = a^2 + b^2 - 2ax$ 인데,  $x = b \cos C$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

로 주어지는 「평면 코사인법칙」을 얻는다.

구면삼각형도 같은 방식으로 두 개의 구면 직각삼각형으로 분할하여 [Figure 5(c) 참조] 구면 Pythagoras 정리를 적용하면,  $\cos b = \cos h \cos x$ 이고,

$$\cos c = \cos h \cos(a - x) = \cos h(\cos a \cos x + \sin a \sin x) = \cos a \cos b + \sin a \cos h \sin x$$

이다. 여기서 구면 직각삼각형  $ADC$ 의 점  $A$ 에서 변  $OC$ 에 내린 수선의 발을  $E$ , 변  $OD$ 에 내린 수선의 발을  $F$ 라고 하고  $EF$ 의 길이를 구해보자.  $\angle AFE$ 와  $\angle OEF$ 는 직각이고,  $\angle AOF = h$ 여서  $OF = OA \cos h = \cos h$ 인데 ( $OA = 1$ 은 구면의 반지름), 삼각형  $EOF$ 에서  $\angle EOF = x$ 이므로  $EF = OF \sin x = \cos h \sin x$ 이다. 이번에는  $EF$ 를 달리 구해보자.  $\angle AOC = b$ 이므로  $AE = AO \sin b = \sin b$ 이고, 삼각형  $AEF$ 에서  $\angle AEF = \angle C$ , 즉,  $EF = AE \cos C = \sin b \cos C$ 이므로,  $EF$ 의 값을 비교하여 「구면 코사인법칙」을 얻는다.<sup>28)</sup>

- 구면 코사인법칙.  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ .

구면 코사인법칙은 지구 상의 두 지점  $A$ 와  $B$ 간 거리의 계산방법을 준다. 점  $C$ 를 북극으로 선택하여 구면삼각형  $ABC$ 을 만듦으로써  $A$ 와  $B$ 의 위도와 경도로 길이  $a$ 와  $b$ , 사이각  $C$ 를 알 수 있다. 그러면 구면 코사인법칙에 의해 두 지점 간 거리  $c$ 를 구할 수 있다.

이와 같이 구면 코사인법칙은 두 변과 그 사이각을 아는 구면삼각형의 다른 한 변의 길이를 구하는 방법을 제공한다. 그러나 한 변의 길이와 양 끝각을 아는 구면삼각형의 남은 한 각의 크기도 알 수 있는데,<sup>29)</sup> 이는 구면에서는 구면삼각형의 변을 각으로 변환하고, 각을 변으로 변환할 수 있는 방법이 있기에 가능하다. 이러한 방법을 「극쌍대 정리」<sup>30)</sup>라고 한다.

27)  $a, b, c$ 가 충분히 작다고 가정하고  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / 2n! \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ 을  $\cos c = \cos b \cdot \cos a$ 에 적용하면,  $1 - \frac{c^2}{2} = (1 - \frac{b^2}{2})(1 - \frac{a^2}{2}) \approx 1 - \frac{1}{2}(b^2 + a^2)$ , 즉, Pythagoras 정리  $c^2 = b^2 + a^2$ 을 얻는다.

28) 다른 방법으로, Todhunter는 평면 코사인법칙을 이용하여 구면 코사인법칙을 유도하였다. [7, # 37]

29) 평면삼각형의 세 내각의 합은  $\pi$ (즉,  $180^\circ$ )여서 두 각을 알면 다른 한 각을 알 수 있다. 하지만 구면삼각형의 내각의 합은  $\pi$ 에서  $3\pi$  사이의 값으로, 일정하게 주어지지 않기에 별도의 방법이 필요하다.

30) Brummelen은 극쌍대 정리를 구면삼각형에서 가장 중요한 정리 중 하나로 꼽았다. [2, p. 37]

구면삼각형  $ABC$ 에 대응되는 「극삼각형(polar triangle)」은 구면삼각형  $ABC$ 의 각 꼭지점  $A, B, C$ 가 극(pole)이 되는 세 개의 대원의 교점을 이은 구면삼각형  $A'B'C'$ 로 정의된다. 자세한 내용은 [2, p. 35–38] 또는 [7, # 27]을 참조한다.

- 구면삼각형에 대응되는 극삼각형의 극삼각형은 원래의 구면삼각형이다.
- 극쌍대 정리(Polar Duality Theorem). 구면삼각형  $ABC$ 에 대응되는 극삼각형  $A'B'C'$ 의 세 변은  $a' = \pi - \angle A, b' = \pi - \angle B, c' = \pi - \angle C$ 이고, 세 각은  $\angle A' = \pi - a, \angle B' = \pi - b, \angle C' = \pi - c$ 로 주어진다.

구면삼각형의 세 변의 합이  $2\pi$ 보다 작다는 사실을 극삼각형에 적용하면  $a' + b' + c' = 3\pi - (\angle A + \angle B + \angle C) < 2\pi$  여서  $\angle A + \angle B + \angle C > \pi$  임을 알 수 있다. 또한 극삼각형의 세 변에 구면 코사인법칙을 적용하여 각에 대한 코사인법칙도 유도할 수 있다.

- 각에 대한 구면 코사인법칙.  $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$ .  
증명. 예를 들어,  $\cos c' = \cos(\pi - C) = -\cos C, \sin a' = \sin(\pi - A) = \sin A$  등을 구면 코사인 법칙에 적용한다. •

#### 4 교육적 가치와 활용 가능성

1957년 10월 4일 소련이 최초로 인공위성 스푸트니크 1호를 지구 궤도에 쏘아 올렸고,<sup>31)</sup> 미국은 이에 쇼크를 받아 「새수학(New Math)」 운동이 일어났다. 즉, 수학교육에서 계산의 의미와 내용의 이해를 요구하였고 이론화를 강조하였다. 그래서 응용의 성격이 강한 기하와 삼각법 등이 등한시되었고 [5, p. xii], 특히 구면삼각법은 수학과 교육과정에서 아예 사라졌다. 그러나 1945년에 발간된 J.D.H. Donnay의 《Spherical Trigonometry》의 머리말에 이미 대학의 커리큘럼에서 구면삼각법이 정규교과목의 자리를 잃고 있었다고 한다 [4]. 하지만 컴퓨터 과학, 데이터과학, IT기술 등을 포함하여 과학과 공학 등이 발전하면서 우리는 벡터와 행렬을 포함한 기하와 삼각법에 대한 이해를 필요로 한다. 그러한 면에서 구면삼각법은 공간지각력과 삼각법의 이해를 함양할 수 있는 기회를 제공하는 교육내용으로 여겨져 학습 대상으로 가치가 있다고 여겨진다.

구면기하학은 입체를 다루어야 하는 어려움이 있지만, 구면이라는 제한된 크기와 형태에서의 입체를 다루기에 실제로 입체를 만들어볼 수도 있으며 그러한 입체를 종이에 그려볼 수도 있다. 특히 3차원 입체를 평면에 투영한 그림을 그려보거나 사진을 찍어 두 결과를 비교해보는

31) 미국과 소련이 대치하던 냉전시대의 부분적 상황과 흑인에 대한 인종차별 문제를 극적으로 잘 그려낸 영화 「히든 피겨스(Hidden Figures, 2016)」가 있다. [https://en.wikipedia.org/wiki/Hidden\\_Figures](https://en.wikipedia.org/wiki/Hidden_Figures), [http://www.cine21.com/news/view/?mag\\_id=86718](http://www.cine21.com/news/view/?mag_id=86718)

활동을 통하여 입체에 대한 실질적인 지각 내지는 인식능력을 높일 수 있다. 그러한 훈련이 공간지각력과 적절한 계산능력을 배양함은 의심의 여지가 없다. 또한 요즘 기하교육을 위하여 많이 사용되는 GeoGebra<sup>32)</sup>를 활용하여 그림을 그려보며 코딩교육과도 연결지을 수 있다. Brummelen도 이러한 다양한 계산을 포함한 실전 경험이 교육에 있어서도 커다란 즐거움이 될 수 있다고 강하게 피력한다 [2, p. xi].

또한 구면삼각법은, 지구 자체가 거의 구면이므로 항해, 항공 등의 기술에 사용되고, 고대로부터 천문학을 하기 위한 수단이었던 것처럼 천문학을 이해하기 위한 계산 수단으로서도 중요한 역할을 가진다. 또한 최근 많이 사용되는 GPS 기술에도 당연히 사용될 유용한 지식이며, 더욱이 3차원 컴퓨터 그래픽을 위해서도 유용한 지식이다.

사실, 구면삼각법은 19세기 후반, 20세기 중반까지도 학교나 대학에서 교육되었고 나름의 연구를 위한 수학 분야였다. 특히 19세기에 발간된 I. Todhunter의 《Spherical Trigonometry》(1886) [7]는 부제로 학교나 대학교에서의 사용을 위한 교재임을 적시하고 있고,<sup>33)</sup> W. Chauvenet의 《A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry》(1887)는 9판이며 1850년의 머리말이 담겨 있다.[3]. 비록 Donnay가 1945년 당시 구면삼각법이 대학교육의 정규교과목에서 사라지고 있었다고 했지만 [4], 우리는 이러한 사실들로부터 19세기에서 20세기 전반까지는 구면삼각법이 정규교육의 과정에 포함되었음을 유추해볼 수 있다. 심지어 인터넷 검색을 해보면, 지금도 일부 대학에서 교육하고 있음을 알 수 있다.<sup>34)</sup>

그러므로, 입체에 대한 인식 능력과 공간지각력 등의 배양과 다양한 응용 가능성을 고려하였을 때, 구면삼각법에 대한 학습은 나름의 의미를 지닌다. 또한 Brummelen이 강조하였듯이 구면삼각법 자체의 아름다움을 경험할 수 있다는 의미도 있다. 그리고 위에서 언급한 교재들이 구면삼각법의 기본적인 내용을 다루고 나면 그 후로는 삼각함수의 성질에 대한 내용으로 바뀌므로 궁극적으로 구면삼각법은 어느 정도의 기본적인 내용을 습득하는 것만으로도 효과를 볼 수 있다. 결론적으로 구면삼각법은 적절한 학습으로 공간지각력과 함께 다양한 응용에 적용할 수 있는 내용이므로 어느 정도 충분한 교육적 가치를 지닌다고 사료된다.

## 5 결론

역사적으로 구면삼각법이 지구과학이나 천문학에서 중요한 역할을 담당했음은 분명하다. 그리고 항해, 항공, 지구 상의 위치의 판독 그래서 GPS와 같은 기술에의 응용, 지도 제작, 3D 그래픽의 프로그래밍 등등 다양한 분야에 사용 가능한 기본지식이다.

32) <https://www.geogebra.org/> 참조.

33) 부제로 제목 아래 「For the Use of Colleges and Schools; With Numerous Examples」와 같은 설명이 덧붙여 있다. [7]

34) 예를 들어, UCLA에서의 구면삼각법에 관한 강의노트를 찾아볼 수 있다. <https://www.math.ucla.edu/~robjohn/math/spheretrig.pdf>

이러한 구면삼각법은 고대의 Hipparchus와 Menelaus 등과 같이 하늘에 대한 호기심이 충만한 천문학자들의 노력이 점철되어 발전하였다. 1세기 때의 Menelaus 정리, 10세기 수학자 Abū Nasr에 의한 4수 법칙, Abū 'l-Wafā' 가 유도해낸 구면 사인법칙, 그리고 구면 코사인법칙 등 구면삼각형에 대한 기본적인 성질들이 이미 중세 이전에 개발되었음을 볼 수 있었다.

구면삼각법은 한 때, 적어도 20세기 초까지는, 중요한 수학교육의 한 분야였다. 그러나 20세기 중반 특별한 이유없이 점차 교육 대상에서 사라지더니 결국 지금은 수학과 교육과정에서 찾아볼 수 없는 대상이 되었다. 아마도 미국에서의 「새수학 운동」과 구면삼각법을 대치할 수 있는 리만기하 등의 수학 이론의 대두로 인한 결과였을 수 있다. 하지만 구면삼각법은 지구 측량이라던가 군사학, 항해술, 지도제작법, 그리고 컴퓨터그래픽 등에서 현재도 중요하게 사용되는 수학이다. 그리고 현재도 일부 대학에서는 교육하고 있는 수학이기도 하다. 구면삼각법의 기본적인 내용은 그다지 어렵지 않고, 현재 학생들이 어려워하는 공간에 대한 인식과 지각을 높일 수 있음을 생각하면 구면삼각법의 교육을 다시금 고려해볼 만한 가치가 있다고 여겨진다.

## References

1. Glen VAN BRUMMELEN, *The Mathematics of the Heaven and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press, 2009.
2. Glen VAN BRUMMELEN, *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*, Princeton University Press, 2013.
3. William CHAUVENET, *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*, J. B. Lippincott Company, Philadelphia, 1887.
4. J. D. H. DONNAY, *Spherical Trigonometry: After the Cesaro Method*, Interscience Publishers, Inc., 1945.
5. Eli MAOR, *Trigonometry Delights*, Princeton University Press, 1998.
6. Lauren ROBERTS, *Spherical Trigonometry Through the Ages*, MMath Mathematics Report (Supervisor: Dr. Andrew Fletcher), School of Mathematics and Statistics, Newcastle University, (May 1) 2015. [https://www.mas.ncl.ac.uk/library/display\\_pdf.php?id=309](https://www.mas.ncl.ac.uk/library/display_pdf.php?id=309)
7. Issac TODHUNTER, *Spherical Trigonometry: For the Use of Colleges and Schools* (with numerous examples), Fifth edition, MacMillan and Co., 1886. <https://www.gutenberg.org/files/19770/19770-pdf.pdf>
8. G. J. TOOMER (trans.), *Ptolemy's Almagest*, Duckworth, 1984.
9. Wikipedia, Hipparchus. <https://en.wikipedia.org/wiki/Hipparchus> (2022. 12. 26.)
10. Wikipedia, Menelaus of Alexandria. [https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus\\_of\\_Alexandria](https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria) (2022. 12. 26.)
11. Wikipedia, Radian. <https://en.wikipedia.org/wiki/Radian> (2023, 1. 12.)