



Research Article

An analysis of characteristics of open-ended tasks presented in sequences of high school mathematics textbooks: Focusing on cognitive demands

Oh, Young-Seok¹ · Kim, Dong-Joong^{2*}

¹Student, Graduate School of Korea University

²Professor, Korea University

*Corresponding Author: Dong-Joong Kim (dongjoongkim@korea.ac.kr)

ABSTRACT

The purpose of the study is to analyze the characteristics of open-ended tasks in terms of cognitive demands. For this purpose, we analyzed characteristics of open-ended tasks presented in the sequence units of three high school mathematics textbooks. The results of the study have revealed that low cognitive demand levels of open-ended tasks had characteristics including procedures within previous tasks or within those tasks. On the other hand, high cognitive demand levels of open-ended tasks had characteristics of actively exploring new conditions to gain access to what is being sought, requesting a basis for judgement, linking various representations to the concepts of sequences, or requiring a variety of answers. These results are significant in that they not only specified the characteristics of open-ended tasks with high cognitive demands in terms of the intended curriculum, but also provided a direction for the development of open-ended tasks with high cognitive demands.

Key words: open-ended tasks, types of open-ended tasks, levels of cognitive demand, characteristics of open-ended tasks, sequence

고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징 분석: 인지적 난이도 관점을 중심으로

오영석¹ · 김동중^{2*}

¹고려대학교 대학원생 · ²고려대학교 교수

*교신저자: 김동중 (dongjoongkim@korea.ac.kr)

초록

본 연구의 목적은 개방형 과제의 특징을 인지적 난이도 관점에서 분석하는 것이다. 이를 위하여 고등학교 수학교과서 3종을 대상으로 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 분석하였다. 연구 결과, 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제는 이전의 과제 또는 해당 과제 내에 절차를 포함하고 있는 특징이 있었다. 반면에 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제는 구하고자 하는 것에 접근하기 위하여 새로운 조건을 능동적으로 탐구하거나 판단 근거를 요구하는 과제 또는 다양한 표상을 수열의 개념과 연결 짓거나 다양한 해답을 요구하는 특징이 있었다. 이러한 연구 결과는 의도된 교육과정 측면에서 인지적 난이도가 높은 개방형 과제의 특징을 구체화하였을 뿐 아니라 인지적 난이도가 높은 개방형 과제 개발에 그 방향성을 제공하였다는데 의미가 있다고 볼 수 있다.

주요어: 개방형 과제, 개방형 과제의 유형, 인지적 난이도 수준, 개방형 과제의 특징, 수열

Received May 01, 2023

Revised May 08, 2023

Accepted May 23, 2023

2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

Copyright © 2023 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

컴퓨터의 발전으로 데이터 중심의 인공지능 시대가 도래함에 따라 산업계에서는 사회에 필요한 콘텐츠를 생산하기 위해 데이터를 수집하고 모델링하며 그 결과를 해석할 수 있는 인재를 요구하고 있다. 과거에는 이전의 지식을 잘 알아 규칙과 기호로 형식화하는 능력이 중요했다면, 이제는 사회에 존재하는 데이터를 분석하고 여러 가지 모델을 통해 의미를 생성하는 능력이 중요해지고 있다. 이렇게 사회에서 요구하는 능력의 패러다임이 변화함에 따라 미래 사회의 구성원인 학생들에게 변화된 능력을 함양시킬 수 있는 교육의 필요성과 중요성이 증대되고 있다. 따라서 학생들이 데이터를 분석하여 그 의미를 생성하는 능력을 함양할 수 있는 교육 과정의 중요성이 강조되고 있다.

수학교육공동체에서는 일찍이 패러다임의 변화를 인식하고, 학생들에게 미래사회에서 요구하는 수학 내용과 과제가 포함된 교육과정을 개발하고자 노력해왔다. 구체적으로 수학 과제 개발 측면에서, NCTM은 전통적인 수학과 교육과정에서 제공하였던 정의, 원리, 규칙, 공식 등을 확인하는 폐쇄형 과제와는 달리, 여러 가지 해결과정과 해답을 생성할 수 있는 개방형 과제를 포함시키고자 하였다 (Latterell, 2004; NCTM, 2000, 2014). 이러한 개방형 과제는 학생들에게 사회와 문화가 반영된 데이터로부터 다양한 모델과 의미를 생성할 수 있는 학습기회를 제공한다는 점에서 데이터 분석 능력을 함양시키는데 필수적인 과제라고 할 수 있다. 뿐만 아니라 수학교육연구에 따르면 개방형 과제는 학생들에게 심도있는 추론 과정을 요구하며 (Do, 2007; Lee & Kim, 2017; Sanchez, 2013), 창의적인 사고 촉진에도 긍정적인 효과가 있는 것으로 보고되고 있다 (Do, 2007; Kwon, Park, Park & Cho, 2005; NCTM, 1999).

또한 수학 내용 측면에서, 우리나라 수학과 교육과정에 포함되어 있는 고등학교 수준의 수열 단원은 주어진 데이터(예: 항과 항의 값, 이웃하는 두 항 등)를 토대로 데이터를 설명하기에 적합한 모델(예: 일반항, 점화식 등)을 구하거나 주어진 데이터와 모델로부터 이후의 데이터를 예측하는 내용을 학생들에게 제공한다. 이러한 수열 단원의 내용은 학생들에게 머신러닝의 지도학습 알고리즘, 딥러닝의 순환신경망(Recurrent Neural Network) 알고리즘에 대한 기초적인 지식을 형성할 수 있는 학습기회를 제공한다는 점에서 데이터 분석 능력을 함양시키는데 중요한 내용이라고 할 수 있다 (Lee, 2021).

따라서 전문한 개방형 과제와 수학 내용 측면을 종합해보았을 때, 수열 단원에 제시된 개방형 과제는 학생들의 데이터 분석 능력을 함양시킬뿐 아니라 데이터의 의미를 생성하는 학습기회를 제공할 가능성이 높다. 하지만 우리나라 고등학교 수학교과서에 포함된 과제를 분석한 Kim과 Kim (2013)의 연구에 따르면, 우리나라 수학교과서에서 제공하는 과제 중 94%가 인지적 난이도 수준이 낮은 것으로 보고되었다. 이는 우리나라 고등학교 수학교과서에서 제공하는 대다수의 과제가 학생들에게 수준 높은 사고의 학습 기회를 제공하고 있지 않다는 것을 의미한다. 이뿐 아니라, 인지적 난이도가 높은 과제는 학생들의 개념적 이해를 향상시키지만 교사들은 종종 이러한 과제를 자신들의 수업 시간에 실행하는데 어려움을 겪는다 (Jackson et al., 2013). 따라서 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 인지적 난이도를 중심으로 분석하여 개방형 과제의 수준을 분류하고 이를 바탕으로 학생들에게 수준 높은 사고의 학습 기회를 제공할 수 있는 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제를 구분하고 그 특징을 분석하는 것은 수열의 개방형 과제에 대한 교수·학습에 중요한 의의가 있다고 볼 수 있다.

따라서 본 연구의 중요성은 다음과 같다. 우선 교육과정 측면에서 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제에 대한 의도된 교육과정의 인지적인 학습기회를 밝힘으로써, 학생들에게 심도있는 학습기회를 제공할 수 있는 개방형 과제 개발에 대한 방향성을 제시할 수 있다는 점에서 중요하다. 또한 교수 측면에서 고등학교 수열 단원의 내용을 도입하고 전개하고자 하는 교사가 학생들에게 심도있는 학습기회를 제공할 수 있도록 과제를 선택하고 제시하는 방법을 어떻게 수정하고 보완할 수 있는지에 대한 아이디어를 제공할 수 있다는 점에서 중요하다.

이러한 필요성과 중요성을 토대로 본 연구의 목적은 우리나라 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 과제를 대상으로 개방형 과제를 추출하고, 인지적 난이도 관점에서 개방형 과제의 특징을 분석하는 것이다. 이를 위해 Smith와 Stein (1998)의 수학 과제에 대한 인지적 난이도의 관점을 토대로 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 인지적 난이도 수준을 분석하고자 한다. 이를 통해 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 인지적인 학습기회에 대한 교육과정 및 교수 측면에서 시사점을 제공하고자 한다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다: 인지적 난이도 관점에서 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징은 무엇인가?

이론적 배경

개방형 과제

수학교과서에서 제공하는 과제의 형태를 구분하는 방법 중 하나는 과제를 개방형과 폐쇄형의 범주로 분류하는 것이다. 여기서 개방형 과제는 폐쇄형 과제와 반대되는 의미로 사용되고 있다. 하지만 개방형 과제에 대한 의미는 학자들마다 다소 차이가 있다. 따라서 본 연구에서 의미하는 개방형 과제에 대한 조작적 정의가 무엇인지 살펴볼 필요가 있다.

Pehkonen (1997)은 개방형 과제와 폐쇄형 과제를 과제에서 제공하는 발문을 기준으로 분류하였다. Pehkonen은 과제의 발문을 출발 상황과 목표 상황¹으로 구분하고 각각의 상황이 열려 있는지 혹은 닫혀 있는지를 살펴보았다. 그리고 자신의 분류 기준에 따라 폐쇄형 과제를 출발 상황과 목표 상황이 모두 닫혀 있는 과제로 정의하고, 개방형 과제를 출발 상황 또는 목표 상황이 열려 있는 과제로 정의하였다.

한편, NCTM (1999)은 개방형 과제와 폐쇄형 과제를 과제에서 요구하는 해결 방법과 해답을 기준으로 분류하였다. NCTM은 폐쇄형 과제를 하나의 올바른 해결과정과 한 가지 해답을 요구하는 과제로 정의하고, 개방형 과제를 한 가지의 해답을 요구하더라도 여러 가지 해결 방법과 과정을 요구하거나 여러 가지 해답을 요구하는 과제로 정의하였다.

두 문헌에서 정의하고 있는 개방형 과제의 의미를 종합해보면, 개방형 과제는 출발 상황 또는 목표 상황 또는 해결 방법이 열려 있는 과제로 정의할 수 있다. 하지만 개방형 과제를 세 가지 유형으로 명확하게 구분할 수 있는 것은 아니다. 왜냐하면 과제의 발문에서 두 가지 이상의 유형을 혼합하여 요구하는 경우도 있기 때문이다 (Do, 2007). 따라서 본 연구에서는 선행 연구를 종합하여 개방형 과제를 출발 상황이 열린 과제(A task with an open-ended starting situation), 목표 상황이 열린 과제(A task with an open-ended goal situation), 해결 방법과 과정이 열린 과제(A task with open-ended methods and processes for a solution), 그리고 상황이 혼합되어 열린 과제(A task with mixed situations that are open)로 분류하였다. 각 유형의 개방형 과제에 대한 구체적인 의미는 Table 1과 같다.

Table 1. The types and meanings of open-ended tasks (Do, 2007; NCTM, 1999; Pehkonen, 1997)

Types	Meanings
A task with an open-ended starting situation	What is to be sought is presented, but there are insufficient or unnecessary data and conditions, so in some cases, various answers may exist
A task with an open-ended goal situation	What is to be sought is not clear, so it is a task to guess what is to be sought, and then find the corresponding one
A task with open-ended methods and procedures for a solution	There is something to be sought, but it is a task that requires various solutions and procedures to reach what is sought
A task with mixed situations that are open	The task is a mixture of open-ended starting situation, open-ended goal situation, open-ended methods and processes for a solution

인지적 난이도

인지적 난이도는 과제가 학생들에게 요구하는 사고 과정의 깊이와 복잡성을 인지적인 학습기회 측면에서 판단할 수 있도록 하는 관점이다 (Smith & Stein, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000). Smith와 Stein (1998)은 과제의 형태, 해결 절차, 인지적인 노력 정도, 수학적 이해 등의 특징을 고려하여 과제의 인지적 난이도를 높은 수준(Higher-level)과 낮은 수준(Lower-level)으로 구분하였다. 또한 각 수준을 세분화하여 높은 수준의 과제를 연결성이 있는 절차 과제(Procedures with connections)와 탐구형 과제(Doing mathematics)로 분류하고, 낮은 수준의 과제를 암기형 과제(Memorization)와 연결성이 없는 절차 과제(Procedures without connections)로 분류하였다. 과제의 인지적 난이도 수준의 유형과 특징에 대한 구체적인 내용은 Table 2와 같다.

1 출발 상황이란 과제에 주어진 자료와 조건을 의미하며, 목표 상황이란 과제에서 구하고자 하는 것을 의미한다 (Pehkonen, 1997).

Table 2. Levels of cognitive demands (Smith & Stein, 1998)

Levels	Types	Characteristics
Lower-level	Memorization	<ul style="list-style-type: none"> • Involve either reproducing previously learned facts, rules, formulas, or definitions or committing facts, rules, formulas or definitions to memory • Cannot be solved using procedures because a procedure does not exist or because the time frame in which the task is being completed is too short to use a procedure • Are not ambiguous. Such tasks involve the exact reproduction of previously seen material, and what is to be reproduced is clearly and directly stated.
	Procedures without connections	<ul style="list-style-type: none"> • Have no connection to the concepts or meaning that underlie the facts, rules, formulas, or definitions being learned or reproduced • Are algorithmic. Use of the procedure either is specifically called for or is evident from prior instruction, experience, or placement of the task. • Require limited cognitive demand for successful completion. Little ambiguity exists about what needs to be done and how to do it. • Have no connection to the concepts or meaning that underlie the procedure being used • Are focused on producing correct answers instead of on developing mathematical understanding • Require no explanations or explanations that focus solely on describing the procedure that was used
Higher-level	Procedures with connections	<ul style="list-style-type: none"> • Focus students' attention on the use of procedures for the purpose of developing deeper levels of understanding of mathematical concepts and ideas • Suggest explicitly or implicitly pathways to follow that are broad general procedures that have close connections to underlying conceptual ideas as opposed to narrow algorithms that are opaque with respect to underlying concepts • Usually are represented in multiple ways, such as visual diagrams, manipulatives, symbols, and problem situations. Making connections among multiple representations helps develop meaning • Require some degree of cognitive effort. Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with conceptual ideas that underlie the procedures to complete the task successfully and that develop understanding
	Doing mathematics	<ul style="list-style-type: none"> • Require complex and nonalgorithmic thinking—a predictable, well-rehearsed approach or pathway is not explicitly suggested by the task, task instructions, or a worked-out example • Require students to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships • Demand self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes • Require students to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task • Require students to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions • Require considerable cognitive effort and may involve some level of anxiety for the student because of the unpredictable nature of the solution process required

연구 방법 및 절차

연구 대상

본 연구에서는 인지적 난이도 관점에서 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 분석하기 위하여 고등학교 수학교과서 9종 중 학교 현장에서 점유율이 높은 것으로 추정되는 3종의 수학교과서 (Hwang et al, 2019; Kim et al, 2019; Ryu et al, 2019)에 포함된 과제를 연구 대상으로 선정하였고, 편의상 3종의 수학교과서는 임의대로 A, B, C와 같이 표기하였다.

연구 방법 및 절차

본 연구의 연구문제를 해결하기 위해 기존의 이론이나 선행연구를 토대로 분석을 수행하는 지시적 내용분석 방법² (Hsieh & Shannon, 2005)을 적용하였다. 해당 방법을 적용하여 수행한 연구 절차는 다음과 같다. ① 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 분석하기 위해 Table 1에서 언급한 Do (2007)와 NCTM (1999) 그리고 Pehkonen (1997)의 개방형 과제 유형을 토대로 분석틀의 한 축을 구성하였다. 그리고 인지적인 학습기회 측면에서 개방형 과제의 특징을 분석하기 위해 Smith와 Stein (1998)의 과제의 인지적 난이도 관점을 토대로 분석틀의 또 다른 축을 구성하여 1차 분석틀을 구성하였다. ② 예비 연구1을 수행하기 위해 본 연구에서 선정하지 않은 1종의 고등학교 수학교과서 (Park et al, 2019)를 대상으로 1차 분석틀을 사용하여 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 인지적 난이도의 관점에서 분석하였

2 지시적 내용분석은 질적내용분석법의 한 가지 접근 방법으로, 기존의 이론이나 선행연구를 확장하거나 타당성을 확인할 목적으로 사용할 수 있는 연구 설계이다 (Hsieh & Shannon, 2005).

다. ③ 예비 연구 1의 결과를 토대로 1차 분석틀에서 암기형 과제의 범주를 제거하고, 인지적 난이도 관점에서 개방형 과제의 특징을 분석하기에 적합한 분석 근거를 도출하여 2차 분석틀을 구성하였다. ④ 예비 연구 2를 수행하기 위해 연구 대상으로 선정된 3종의 수학교과서의 중단원을 임의로 뽑아 2차 분석틀을 사용하여 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 인지적 난이도 관점에서 분석하였다. ⑤ 예비 연구 2를 토대로 2차 분석틀의 분석근거를 보완하고 최종 분석틀을 개발하였다. 이와 같이 본 연구를 수행하기 전에 두 번의 예비 연구를 통해 4종의 수학교과서를 분석함으로써 연구의 신뢰도를 확보할 수 있었다 (Graneheim, Lundman, 2004). 또한 예비 연구를 통해 개발된 최종 분석틀을 수학교육 전문가가 검토함으로써 연구의 타당도를 확보할 수 있었다 (Guba & Lincoln, 1989). ⑥ 마지막으로 최종 분석틀을 적용하여 인지적 난이도 관점에서 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징에 대한 연구 결과를 도출하고자 한다.

분석틀

예비연구 1과 예비 연구 2의 결과를 바탕으로 인지적 난이도 관점에서 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 분석하기 위해 개발한 최종 분석틀은 Table 3과 같다. Table 3의 1열에 포함된 범주는 개방형 과제의 유형을 분석하기 위한 구성요소로서, 각 구성요소를 S(출발 상황이 열린 과제), G(목표 상황이 열린 과제), P(해결 방법과 과정이 열린 과제), 그리고 M(상황이 혼합되어 열린 과제)으로 코드화하였다. Table 3의 1행에 포함된 범주는 인지적 난이도 수준을 분석하기 위한 구성요소로서, 각 구성요소를 PNC(연결성이 없는 절차 과제), PWC(연결성이 있는 절차 과제), DM(탐구형 과제)으로 코드화하였다. 그리고 Table 3의 1열의 구성요소와 1행의 구성요소를 통합하여 출발 상황이 열린 연결성이 없는 절차 과제(SPNC)의 2가지 세부 구성요소(SPNC-1, SPNC-2), 목표 상황이 열린 연결성이 없는 절차 과제(GPNC)의 2가지 세부 구성요소(GPNC-1, GPNC-2), 해결 방법과 과정이 열린 연결성이 없는 절차 과제(PPNC)의 2가지 세부 구성요소(PPNC-1, PPNC-2), 상황이 혼합되어 열린 연결성이 없는 절차 과제(MPNC)의 2가지 세부 구성요소(MPNC-1, MPNC-2), 출발 상황이 열린 연결성이 있는 절차 과제(SPWC)의 세부 구성요소(SPWC-1), 목표 상황이 열린 연결성이 있는 절차 과제(GPWC)의 세부 구성요소(GPWC-1), 해결 방법과 과정이 열린 연결성이 있는 절차 과제(PPWC)의 세부 구성요소(PPWC-1), 상황이 혼합되어 열린 연결성이 있는 절차 과제(MPWC)의 세부 구성요소(MPWC-1), 출발 상황이 열린 탐구형 과제(SDM)의 세부 구성요소(SDM-1), 목표 상황이 열린 탐구형 과제(GDM)의 세부 구성요소(GDM-1), 해결 방법과 과정이 열린 탐구형 과제(PDM)의 세부 구성요소(PDM-1), 상황이 혼합되어 열린 탐구형 과제(MDM)의 세부 구성요소(MDM-1)에 대한 의미를 구체화하였다.

Table 3. Analytical framework for characteristics of open-ended task

	Procedures without connections (PNC)	Procedures with connections (PWC)	Doing mathematics (DM)
A task with an open-ended starting situation (S)	SPNC-1. Procedures for solving the task are included within the open-ended task (A task with an open starting situation) SPNC-2. Procedures for solving open-ended tasks (A task with an open starting situation) are presented in previous task	SPWC-1. It is an open-ended task (A task with an open starting situation) that helps develop meaning by linking various representations (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations) with the concept of sequence	SDM-1. It is an open-ended task that actively explores the open conditions given to the task to access what is to be obtained
A task with an open-ended goal situation (G)	GPNC-1. Procedures for solving the task are included within the open-ended task (A task with an open goal situation) GPNC-2. Procedures for solving open-ended task (A task with an open goal situation) are presented in previous task	GPWC-1. It is an open-ended task (A task with an open goal situation) that helps develop meaning by linking various representations (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations) with the concept of sequence	GDM-1. It is nonalgorithmic form of task that determines whether what is sought from an task is true or false, gives an appropriate explanation if true, or presents a counter-example if false
A task with open methods and procedures for a solution (P)	PPNC-1. Procedures for solving the task are included within the open-ended task (A task with open methods and procedures for a solution) PPNC-2. Procedures for solving open-ended tasks (A task with open methods and procedures for a solution) are presented in previous task	PPWC-1. It is an open-ended task (A task with open methods and procedures for a solution) that helps develop meaning by linking various representations (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations) with the concept of sequence	PDM-1. It is difficult to predict because there are various solutions and procedures for a given open-ended task
A task with mixed situations that are open (M)	MPNC-1. Procedures for solving the task are included within the open-ended task (A task with mixed situations that are open) MPNC-2. Procedures for solving open-ended tasks (A task with mixed situations that are open) are presented in previous task	MPWC-1. It is an open-ended task (A task with mixed situations that are open) that helps develop meaning by linking various representations (e.g., visual diagrams, manipulatives, symbols, problem situations) with the concept of sequence	MDM-1. It is difficult to predict because there are various conditions, solutions, processes, and answers to a given task with mixed situations that are open.

3 개방형 과제는 수학적 사실, 규칙, 공식 정의에 대한 암기를 확인하거나 절차가 없는 과제의 특징과는 관련이 적기 때문에 암기형 과제 범주가 분석틀에서 제거되었다.

연구 결과

인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제의 특징

본 절에서는 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제의 특징이 무엇인지를 설명하기 위해, 연구 대상으로 선정한 3종의 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 Table 3의 분석틀을 사용하여 분석하였다. 그 결과, 전체 과제 367개 중 목표 상황이 열린 연결성이 없는 절차 과제는 2개, 해결 방법과 과정이 열린 연결성이 없는 절차 과제는 1개, 상황이 혼합되어 열린 연결성이 없는 절차 과제는 4개로 나타났다. 먼저 목표 상황이 열린 연결성이 없는 절차 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 4와 같다. B교과서의 144페이지에 포함된 개방형 과제는 주어진 데이터로부터 수열의 합 모델을 여러 가지로 나타내고 해당 모델을 동료 학생들과 비교하는 과제로서, 여러 가지 목표 상황을 요구하지만, 학생들이 해당 과제를 마추하기 이전에 B교과서의 143페이지에 포함된 과제를 경험함으로써 개방형 과제를 해결하는 방법이 이전 과제에서 나타나 있다. 따라서 Table 4의 개방형 과제를 목표 상황이 열린 연결성이 없는 절차 과제(GPNC)로 분류하였다.

Table 4. GPNC task

문제 3 기호 Σ 를 사용하면 수열의 합을 다양한 방법으로 나타낼 수 있다. 다음에 답하시오.

(1) ...생략...

(2) 등차수열 108, 112, 116, ..., 1004의 합을 기호 Σ 를 사용하여 다양한 방법으로 나타내고, 친구들과 비교하시오.

(B Textbook, 2019, p. 144)

Basis for Analysis	Characteristics
	Various goal situations are required in a given open task, but by experiencing the previous task as shown in the figure below before facing the task, the procedure for solving the task becomes clear

$$\textcircled{\text{답}} \quad \textcircled{1} \quad 1+4+7+\dots+28=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=4}^{13}2^i=2^4+2^5+2^6+\dots+2^{13}$$

GPNC-2

문제 1 다음을 기호 Σ 를 사용하여 나타내시오.

(1) $2+4+6+\dots+20$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^n}$

(B Textbook, 2019, p. 143)

다음으로, 해결 방법과 과정이 열린 연결성이 없는 절차 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 5와 같다. C교과서의 150페이지에 제시된 개방형 과제는 다양한 방법으로 해당 점화식(순차적인 데이터에 대한 모델)이 어떤 수열인지를 추측하는 과제로서, 다양한 방법을 요구하지만, 해당 과제 내에 과제를 해결할 수 있는 방법을 포함하고 있어 학생들이 과제를 해결하는 방법과 과정이 제시되어 있다. 따라서 Table 5의 개방형 과제를 해결 방법과 과정이 열린 연결성이 없는 절차 과제(PPNC)로 분류하였다.

Table 5. PPNC task

생각을 넓히는 수학 수열 $\{a_n\}$ 이 $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0(n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$ 과 같이 귀납적으로 정의될 때, 다음과 같이 다양한 방법으로 이 수열은 어떤 수열인지 추측하여 보자.

<방법 1> $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 대입해 보기

<방법 2> $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ 을 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 으로 변형하여 생각해 보기

(C Textbook, 2019, p. 150)

Basis for Analysis	Characteristics
PPNC-1	Various methods are required in a given open-ended task, but methods to solve the task are included within the task

다음으로, 상황이 혼합되어 열린 연결성이 없는 절차 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 6과 같다. A교과서의 121페이지에 포함된 개방형 과제는 두 데이터를 학생이 모으고, 그에 따라 다양한 일반항 모델을 도출하는 과제로서, 여러 가지 출발 상황과 목표 상황을 요구하지만, 학생들이 해당 과제를 마주하기 이전에 A교과서의 121페이지에 포함된 과제를 경험함으로써, 개방형 과제를 해결하는 절차를 이미 알게 된다. 따라서 Table 6의 개방형 과제를 상황이 혼합되어 열린 연결성이 없는 절차 과제(MPNC)로 분류하였다.

Table 6. MPNC task

문제 5 문제 04과 같이 등차수열의 두 항을 스스로 정하고, 일반항 a_n 을 구하시오.

(A Textbook, 2019, p. 121)

Basis for Analysis	Characteristics
MPNC-2	Various starting & goal situations are required in a given open-ended task, but by experiencing the task as shown in the figure below before facing the task, the procedure for solving the task becomes clear.

예제 1 제3항이 11, 제7항이 23인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

풀이 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 = a + (3-1)d = 11, \text{ 즉 } a + 2d = 11 \quad \dots\dots ①$$

$$a_7 = a + (7-1)d = 23, \text{ 즉 } a + 6d = 23 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

답 $a_n = 3n + 2$

문제 04 제2항이 -6, 제10항이 26인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하시오.

(A Textbook, 2019, p. 121)

인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제의 특징

본 절에서는 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제의 특징이 무엇인지를 설명하기 위해 앞 절에서와 같이 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 Table 3의 분석틀을 사용하여 분석하였다. 그 결과, 전체 과제 367개 중 상황이 혼합되어 열린 연결성이 있는 절차 과제는 1개, 출발 상황이 열린 탐구형 과제 1개, 목표 상황이 열린 탐구형 과제 2개, 상황이 혼합되어 열린 탐구형 과제는 4개로 나타났다. 먼저 상황이 혼합되어 열린 연결성이 있는 절차 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 7과 같다. A 교과서의 137페이지에 포함된 개방형 과제는 데이터(구슬의 전체 개수)를 바꾸어 가며, 규칙에 제시된 놀이를 진행할 때 먼저 구슬을 가져가는 사람이 이길 수 있는 여러 가지 방법을 탐색하는 출발 상황과 목표 상황이 열린 과제로서, 주어진 실생활의 상황을 수열의 개념과 연결 짓게 함으로써 의미를 개발하는데 도움을 주는 개방형 과제이다. 아래의 개방형 과제에서 출발 상황을 [규칙 1]에서 한번에 1개 또는 2개 또는 3개의 조건으로 학생들이 어떤 조건을 선택하느냐에 따라 개방적으로 제시했을 뿐 아니라 문제에서 구슬의 전체 개수를 바꾸는 조건을 제시함으로써 열린 과제로 제시하였다. 목표 상황은 [규칙 1]과 구슬을 먼저 가져가는 사람을 개방적으로 제시함으로써 이기는 방법을 열린 과제로 제시하고 있다. 따라서 Table 7의 개방형 과제를 상황이 혼합되어 열린 연결성이 있는 절차 과제(MPWC)로 분류하였다.

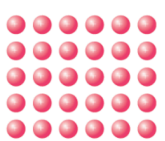
다음으로 출발 상황이 열린 탐구형 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 8과 같다. A 교과서의 137페이지에 포함된 개방형 과제는 데이터(구슬의 전체 개수)를 바꿀 때, 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이길 수 있도록 하는 데이터에 대한 조건을 설명하는 과제로서, 기존의 주어진 자료와 새롭게 주어진 열려 있는 조건을 능동적으로 탐구하여 구하고자 하는 것에 접근하는 개방형 과제이다. 아래의 과제에서 출발 상황을 문제에서 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기도록 구슬의 전체 개수를 바꾸는 조건을 제시함으로써 열린 과제로 제시하였다. 따라서 Table 8의 개방형 과제를 출발 상황이 열린 탐구형 과제(SDM)로 분류하였다.

Table 7. MPWC task

수행 과제 30개를 이용하여 두 사람이 다음과 같은 규칙으로 놀이를 한다.

[규칙 1] 두 사람이 교대로 한 번에 1개 또는 2개 또는 3개의 구슬을 가져간다.

[규칙 2] 마지막 구슬을 가져가는 사람이 이긴다.



2. 구슬의 전체 개수를 바꾸어 친구와 놀이를 해 보고, 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기는 방법을 찾아보자.

(A Textbook, 2019, p. 137)

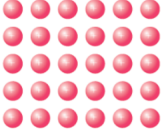
Basis for Analysis	Characteristics
MPWC-1	It is an open-ended task (with open-ended starting situations and goal situations) that helps develop meaning by linking a given real-life situation with the concept of a sequence

Table 8. SDM task

수행 과제 30개를 이용하여 두 사람이 다음과 같은 규칙으로 놀이를 한다.

[규칙 1] 두 사람이 교대로 한 번에 1개 또는 2개 또는 3개의 구슬을 가져간다.

[규칙 2] 마지막 구슬을 가져가는 사람이 이긴다.



3. 구슬의 전체 개수를 바꿀 때, 먼저 구슬을 가져가는 사람이 항상 이기는 방법이 존재하도록 하는 구슬의 전체 개수의 조건을 설명해 보자.

(A Textbook, 2019, p. 137)

Basis for Analysis	Characteristics
SDM-3	It is an open-ended task to actively explore and obtain existing given data and newly given open-ended starting conditions

다음으로 목표 상황이 열린 탐구형 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 9와 같다. A 교과서의 126페이지에 포함된 개방형 과제는 승수 학생이 구한 일반항 모델이 참인지 혹은 거짓인지 판단하고, 참이라면 참인 이유를 설명하고, 거짓이라면 반례를 제시하는 비알고리즘적인 형태의 개방형 과제이다. 아래 과제에서 목표 상황을 학생들이 승수의 의견이 참인지 거짓인지를 선택할 수 있도록 개방적으로 제시함으로써 승수의 의견에 대한 판단을 열린 과제로 제시하고 있다. 따라서 Table 9의 개방형 과제를 목표 상황이 열린 탐구형 과제(GDM)로 분류하였다.

Table 9. GDM task

문제 13 다음 승수의 말이 옳은지 그른지 판단하고, 그 이유를 설명하시오.

승수: 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 $S_n = n^2 + 1$ 일 때, 일반항은 $a_n = 2n - 1$ 이야.

(A Textbook, 2019, p. 126)

Basis for Analysis	Characteristics
GDM-1	It is nonalgorithmic form of task that determines whether what is sought from an open-ended task is true or false, and gives an appropriate explanation if it's true, or presents a counter-example if it's false

마지막으로 상황이 혼합되어 열린 탐구형 과제에 대한 분석 결과의 예시는 Table 10과 같다. C 교과서의 162페이지에 포함된 개방형 과제는 항의 값을 바꾸어 가며 그 성질을 탐구하는 과제로서, 데이터의 조건을 변경해가며 다양한 해답을 도출하는 개방형 과제이다. 아래 과제에서 출발 상황을 1이 아닌 다른 수로 바꾸는 조건으로 제시함으로써 조건의 변경을 열린 과제로 제시하였다. 또한 목표 상황은 학생들이 보고 말하기 수열을 두 개 이상 답하도록 제시함으로써 정답이 여러 개인 열린 과제로 제시하고 있다. 따라서 상황이 혼합되어 열린 탐구형 과제(MDM)로 분류하였다.

Table 10. SDM task

<p>창의융합프로젝트 1986년 영국의 수학자 콘웨이(Conway, J. H., 1937~)는 ‘보고 말하기 수열[look and say sequence]’을 소개하였다. 이 수열의 규칙은 다음과 같다.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>수열의 각 항은 바로 앞항의 수를 보고 왼쪽부터 연속된 같은 숫자와 그 개수를 묶어 읽는 방식으로 만든다.</p> </div> <p>보고 말하기 수열은 베르나르 베르베르(Bernard Werber, 1961~)의 소설 “개미”에 소개된 이후 개미 수열이라 불리기도 한다. 위 규칙대로 첫째항이 1인 개미 수열의 각 항을 구하면 다음과 같다.</p> <p>첫째항 1을 보고 ‘1이 1개’라 말한다. ➡ 11 둘째항 11을 보고 ‘1이 2개’라 말한다. ➡ 12 셋째항 12를 보고 ‘1이 1개, 2가 1개’라 말한다. ➡ 1121 넷째항 1121을 보고 ‘1이 2개, 2가 1개, 1이 1개’라 말한다. ➡ 122111 다섯째항 122111을 보고 ‘1이 □개, 2가 □개, 1이 □개’라 말한다. ➡ □ □ ⋮</p> <p>따라서 첫째항이 1인 개미 수열은 1, 11, 12, 1121, 122111, □, ...이다. (“세계일보”, 2013년 10월 27일) 1이 아닌 다른 수로 시작하는 보고 말하기 수열을 두 개 이상 만들어 보고, 만든 수열의 성질을 알아보자.</p>
--

(C Textbook, 2019, p. 162)

Basis for Analysis	Characteristics
MDM-1	It is an open-ended task to derive various answers based on exploring given data and conditions with open-ended starting conditions and goal conditions.

결론 및 제언

본 연구의 목적은 인지적 난이도 관점에서 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 분석하는 것이었다. 이러한 목적을 달성하기 위해 3종의 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제를 대상으로 인지적 난이도 관점에서의 개방형 과제의 특징 분석틀을 개발하고, 분석틀을 사용하여 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 분석하였다. 이와 같은 분석 결과로부터 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

첫째, 수열 단원에 포함된 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제는 이전의 과제가 주어진 개방형 과제를 해결할 수 있는 절차를 포함하고 있거나 주어진 개방형 과제를 해결할 수 있는 절차가 이미 과제 내에 포함되어 있는 특징이 있다고 할 수 있다. 연구 결과를 살펴보면, 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제 7개 중 4개의 과제가 이전의 과제에 주어진 개방형 과제를 해결할 수 있는 절차를 포함하고 있었고 3개의 과제가 개방형 과제를 해결할 수 있는 절차를 과제 내에 포함하고 있었다. 이러한 결과는 우리나라 교과서의 경우 과제 해결을 돕는 관련 개념 또는 공식이 과제와 가까운 위치에 제시되어 있다는 Kwon과 Kim (2021)의 연구 결과와 그 흐름을 같이 한다.

둘째, 수열 단원에 포함된 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제는 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제와는 다른 특징들이 나타났다. 과제에서 새로운 조건을 능동적으로 탐구할 수 있게 하거나 판단 근거를 요구하거나 여러 가지 표상을 수열의 개념과 연결지음으로써 의미를 개발하는데 도움을 주거나 탐구한 조건을 토대로 다양한 해답을 요구하는 특징들이 나타났다. 연구 결과를 살펴보면, 연결성이 있는 절차의 개방형 과제는 시각적 그림 표상을 수열의 개념과 연결지음으로써 의미 개발에 대한 학습기회를

제공하고 있었다. 그리고 출발 상황이 열린 탐구형 과제는 새로운 조건을 능동적으로 탐구할 수 있는 학습기회를 제공하고 있었고, 목표 상황이 열린 탐구형 과제는 판단 근거를 탐구하는 학습기회를 제공하고 있었으며, 상황이 혼합되어 열린 탐구형 과제는 과제의 여러 가지 해답을 탐구하는 학습기회를 제공하고 있었다. 이러한 결과는 인지적 난이도 수준이 높은 과제는 심도있는 사고 과정의 학습기회를 제공한다는 이전 연구의 결과들 (Oh, 2019; Tarr et al., 2008)과 그 흐름을 같이 한다. 따라서 본 연구에서는 인지적 난이도 관점에서 고등학교 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 구체화함으로써 학생들에게 인지적 수준이 높은 학습기회를 제공할 수 있는 개방형 과제의 특징들이 무엇인지 밝혔다는데 그 의의가 있다.

위와 같은 결론을 바탕으로 교육과정, 교수 측면, 연구 측면에서 다음과 같은 제언을 할 수 있다.

첫째, 교육과정 측면에서 인지적 난이도 수준이 낮은 개방형 과제의 구조를 개선하여 인지적 난이도 수준을 높일 수 있는 과제의 특징을 구체화할 필요가 있다. 과제의 출발 상황에서는 학생들이 적극적으로 참여가능하면서도 주어진 데이터를 변경할 수 있도록 열린 조건들을 명시화할 필요가 있고, 설명과 증명을 요구하는 목표 상황을 제시할 뿐 아니라, 데이터를 다양한 표상과 연결지음으로써 다양한 의미를 경험할 수 있는 풀이 방식을 통해 다양한 전략을 바탕으로 다양한 해결이 가능한 수준 높은 개방형 과제의 구조로 개선할 수 있도록 과제의 특징을 구체화할 필요가 있다.

둘째, 교수 측면에서 고등학교 수열 단원에서 교사가 학생들에게 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제를 수업에서 활용하고자 할 때, 과제 소개와 과제 실행의 두 가지 측면에 주의를 기울일 필요가 있다. 교사가 인지적 난이도 수준이 높은 과제의 특징을 이해하는 것도 중요하지만 그 특징을 이해했다고 해도 과제의 소개와 실행 과정에서 과제의 인지적 수준은 유지할 수도 있고 또는 퇴보할 수도 있다 (Parrish & Bryd, 2022; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000). 따라서 과제를 소개할 때는 교사가 어떻게 자신의 답론을 시작하는 것이 학생들의 인지적 사고에 도움이 되고 과제의 요구사항, 맥락 및 관련된 자료를 어떻게 소개하는 것이 인지적 수준을 감소시키지 않고 소개할 수 있는지 고민이 필요하다. 또한 과제의 실행 측면에서 학생들이 어떻게 주어진 과제와 상호작용하면서 과제의 의도된 사고와 추론을 경험할 뿐 아니라 다양한 전략을 활용할 수 있는 방향으로 안내될 수 있도록 교사가 발문을 진행하느냐는 학생들에게 실질적인 도움이 될 것이다. 따라서 교사는 본 연구에서 밝힌 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제의 특징을 토대로 학생들에게 제공할 과제를 인지적 수준이 감소하지 않게 소개하고 실행한다면 학생들에게 심도있는 사고 과정의 학습기회를 제공할 수 있을 것이다.

마지막으로 연구 측면에서 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제가 교실 현장에 과제를 소개하고 실행할 때, 인지적 난이도 수준에서 어떤 변화가 일어나는지 살펴볼 필요가 있다. 본 연구는 의도된 교육과정 측면에서 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징을 구체화하였다. 그러나 실제 교실 현장에서 과제가 소개되고 실행될 때, 여러 가지 요인에 의해서 과제의 인지적 수준이 유지되기도 하고 퇴보하기도 한다. 따라서 실제 교실 현장에서 인지적 난이도 수준이 높은 개방형 과제가 실행될 때, 개방형 과제의 인지적 난이도 수준을 유지시키거나 퇴보시키는 교사의 발문 전략 (Na, Choi & Kim, 2023)과 같은 구체적 요인과 방법이 무엇이고 그 특징은 무엇인지 실행된 교육과정 측면에서 후속 연구가 이루어질 필요가 있다.

Acknowledgements

This research was supported by the College of Education, Korea University Grant in 2023.

References

- Do, J. (2007). How to pose an open problem?: Two cases of posing an open-ended problem by reorganizing given closed problems. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 10(2), 221-235.
- Graneheim, U. H., & Lundman, B. (2004). Qualitative content analysis in nursing research: Concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness. *Nurse Education Today*, 24(2), 105-112. <https://doi.org/10.1016/j.nedt.2003.10.001>
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1989). *Fourth generation evaluation*. SAGE Publications.

- Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277-1288. <https://doi.org/10.1177/1049732305276687>
- Hwang, S. et al. (2019). *High school mathematics 1*. Mirae-n.
- Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(4), 646-682. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.4.0646>
- Kim, M., & Kim, G. Y. (2013). The Analysis of mathematical tasks in the high school mathematics. *School Mathematics*, 15(1), 37-59.
- Kim, W. et al. (2019). *High school mathematics 1*. Visang.
- Kwon, H., & Kim, G. (2021). A comparative analysis of mathematical tasks in middle-school geometry of Korea and the US. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 21(3), 1531-1557. <http://doi.org/10.22251/jlcci.2021.21.3.1531>
- Kwon, O. N., Park, J. S., Park, J. H., & Cho, Y. M. (2005). Cultivating mathematical creativity through open-ended approaches: Development of a program and effectiveness analysis. *The Mathematical Education*, 44(2), 307-323.
- Latterell, C. M. (2004). *Math wars: A guide for parents and teachers*. Praeger Publishers.
- Lee, B. (2021). *Basic mathematics for data science with python*. Hanbit Academy.
- Lee, M. H., & Kim, S. H. (2017). A comparison of students' reasoning shown in solving open-ended and multiple-choice problems. *School Mathematics*, 19(1), 153-170.
- Na, Y., Choi, S., & Kim, D. (2023). Students' cognition and a teacher's questioning strategies in error-finding activity of the concept of irrational numbers. *The Mathematical Education*, 62(1), 35-55. <http://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.1.35>
- NCTM (1999). *Mathematics assessment: A practical handbook for grades 9-12*. NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- NCTM (2014). *Principles to action*. NCTM.
- Oh, Y. (2019). An analysis of components of reasoning process according to the levels of cognitive demands of the reasoning tasks: focused on the highschool level mathematical sequence. *Communications of Mathematical Education*, 33(3), 395-423. <http://doi.org/10.7468/jksmee.2019.33.3.395>
- Park, K. et al. (2019). *High school mathematics 1*. Donga.
- Parrish, C. W., & Bryd, K. O. (2022). Cognitively demanding tasks: Supporting students and teachers during engagement and implementation. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(1), 1-16. <https://doi.org/10.29333/iejme/11475>
- Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem". In Pehkonen, E.(Ed.), *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom* (pp.7-11). Helsinki University.
- Ryu, H. et al. (2019). *High school mathematics 1*. Chunjae.
- Sanchez, W. B. (2013). Open-ended questions and the process standards. *Mathematics Teacher*, 107(3), 206-211.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School* 3(5), 344-350. <https://doi.org/10.5951/mtms.3.5.0344>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. S. (2000). *Implementing Standards-Based Mathematical Instruction: A Casebook for Professional Development*. Teachers College Press.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chaves, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280.

Authors Information

Young-Seok Oh, Graduate School of Korea University, Graduate student, 1st author.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5764-6422>

Dong-Joong Kim, Korea University, Professor, Corresponding Author.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7607-5664>