Journal for History of Mathematics
Vol. 36 No. 1 (Feb. 2023), 1–17
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2023.36.1.001

History of solving polynomial equation by paper folding

종이접기를 활용한 방정식 풀이의 역사

Choi Jaeung 최재웅 Ahn Jeaman* 안재만

Paper folding is a versatile tool that can be used not only as a mathematical model for analyzing the geometric properties of plane and spatial figures but also as a visual method for finding the real roots of polynomial equations. The historical evolution of origami's geometric and algebraic techniques has led to the discovery of definitions and properties that can enhance one's cognitive understanding of mathematical concepts and generate mathematical interest and motivation on an emotional level. This paper aims to examine the history of origami geometry, the utilization of origami for solving polynomial equations, and the process of determining the real roots of quadratic, cubic, and quartic equations through origami techniques.

Keywords: paper folding, polynomial equation, Lill's method, Beloch's fold, Huzita-Hatori Axiom; 종이접기, 다항방정식, 릴의 방법, 벨로치 접기, 후지타-하토리 공리.

MSC: 01A99, 14-03, 51A99 ZDM: A30

1 서론

종이접기는 본질적으로 수학분야의 연구 대상이 될 수 있는 다양한 속성을 가지고 있다. 종이를 접고 펴는 과정에서 얻게 되는 종이주름은 평면의 직선 또는 선분에 대응하며 이들의 패턴은 기하학, 정수론, 위상수학, 조합론 및 그래프 이론 등 여러 분야의 수학적 내용을 담고 있다.

종이접기 수학이 언제 어디서부터 발생했는지는 일부 논쟁의 여지가 있지만 Michael Friedman [9]은 그 시작을 16세기 초반 Albrecht Dürer가 다면체를 나타내기 위해 종이접기를 활용한 것에서 찾는다. 18세기에는 종이접기가 합법적인 증명 절차로 인정되어

*Corresponding Author.

본 논문은 공주대학교 일반대학원 최재웅의 석사학위 논문을 바탕으로 일부를 발췌하여 요약 정리하고, 추가 연구하여 작성한 것입니다.

Choi Jaeung: ChungNam Science High School E-mail: danielchoi7784@gmail.com
Ahn Jeaman: Dept. of Math. Edu. Kongju National Univ. E-mail: jeamanahn@kongju.ac.kr
Received on Feb. 1, 2023, revised on Feb. 15, 2023, accepted on Feb. 20, 2023.

평행선 공리의 증명을 위한 도구로서 사용되었고, 19세기 이후에는 시각 및 손으로 만지고 느끼며 경험할 수 있는 수학적 모델을 만들기 위해 사용되었다 [9, 13, 12].

종이접기를 수학적으로 모델링하는 가장 기본적인 방법은 종이와 종이 위의 한 점을 각각 복소평면과 그 위의 복소수에 대응시키는 것이다. 이때 종이주름선은 평면 위의 한 직선에 대응되며 종이를 접는 것은 직선에 대한 대칭이동으로 볼 수 있다. 이러한 관점에서 종이접기를 결정하는 접기법에 대한 연구가 1980년대 중반부터 2000년대까지 있었고, 그 결과 7가지 접기법으로 명확하게 정의될 수 있음이 증명되었다 [3, 1, 16]. 이러한 7가지 종이접기 방법은 단일 접기에 대한 공리로 채택되어 후지타-하토리 공리(Huzita-Hatroi Axiom)로 불리며 이로써 종이접기 기하학에 대한 공리적 접근이 가능하게 되었다.

19세기와 20세기에는 종이접기를 활용하여 다항식의 해를 기하학적으로 찾는 방법에 대한 연구가 이루어졌다. 종이 위의 두 점은 복소평면의 두 점 0과 1에 대응시킬 수 있고, 이로부터 후지타-하토리 공리의 7가지 방법으로 접어서 구성할 수 있는 복소수들이 무엇인지 이론적으로 생각할 수 있다. 이는 대수적으로 '종이접기 수(Origami numbers)'를 정의할 수 있게 하며 이러한 수들의 집합이 체(Field)를 이룬다는 것을 증명할 수 있다 [14]. 어떠한 다항방정식의 해가 종이접기 수가 되는가에 대한 질문은 자연스러우며 이를 종이접기로 구성하는 과정은 대수와 기하학의 연결고리로서 종이접기가 활용되는 중요한 예가 된다.

본 논문에서는 종이접기를 활용하여 방정식의 해를 구하고자 했던 시도들이 역사적으로 어떻게 진행되어 왔는지 개괄하여 정리하고, 차수가 4 이하인 다항방정식의 실근은 종이접기로 구할 수 있음을 설명한다. 또한 이차, 삼차방정식의 식이 구체적으로 주어질 때 릴의 방법(Lill's method) [13, 20], 벨로치 접기(Beloch's fold) [9, 16] 그리고 알페린 접기(Alperin's fold) [2, 13] 등을 사용하여 실근을 구하는 구체적인 접기 과정을 설명한다. 한편 사차방정식의 경우 해를 종이로 접는 방법이 존재함을 증명할 수 있으나, 삼차방정식의 경우처럼 일반적인 접기 방법은 알려져 있지 않다. 차수가 4 이상인 고차방정식의 해를 종이로 접는 기하학적 방법을 찾기 위해, 여러 개의 주름을 동시에 접는 다중 접기에 대한 연구가 최근 진행되고 있다. 본 논문에서는 2개의 주름을 동시에 접는 접기 방법을 간단히 소개하고, 이를 활용하여 사차방정식의 실근을 구하는 방법을 설명한다.

2 종이접기의 기하학의 역사

16세기 Albrecht Dürer(1471–1528)와 Francesco Maurolico(1494–1575)는 종이접기를 기하학과 접목하여 다면체의 성질을 입증하기 위한 도구로 사용하였다. 18세기에 이르러 종이접기는 대칭의 개념과 연관되어 합법적인 증명 절차로 받아들여졌고, Johann

Heinrich Lambert(1727–1777)는 평행선 공리에 대한 증명을 위해 종이접기를 활용하였다 [9].

19세기에는 Bernhard Riemann(1826–1866)이 1854년에 리만 기하학과 비유클리드 기하학의 기초를 제공하면서 유럽 수학자들 사이에서 이와 관련된 연구를 위해 종이를 사용하기도 하였다. 1868년 Eugenio Beltrami(1835–1900)는 음의 상수 곡률을 갖는 타원면, 쌍곡면, 포물면을 석고와 종이로 제작하여 음의 상수 곡률을 갖는 곡면이 존재함을 보였고, 쌍곡면과 포물면을 모두 갖는 유사구(pseudosphere)의 제작을 위해 종이를 사용하였다 [9].

영국에서는 Dionysius Lardner(1793–1859)가 당시 유클리드 원론에 기초한 기하교육을 비판하며, 학교와 대학에서의 기하교육을 위해 '운동 (motion)'의 개념을 사용해야 한다고 주장하였다. 그는 기하학에서의 증명 방법으로서 접기를 생각하고 이를 통해 대칭의 개념을 강조하였다 [19]. 평면 기하학에서 기하학 명제를 증명하기 위해 종이접기를 고려한 또 다른 수학자로 Olaus Henrici(1840–1918)가 있다. 그 또한 접기와 대칭 사이의 관계를 개념화하였고 이러한 Henrici의 연구는 Tandalam Sundara Row(1853년생)에게 영향을 미쳤다 [11].

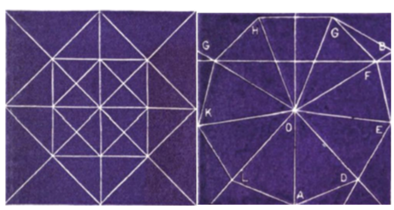

Figure 1. Folding of Successive Rectangles and Regular Nonagon; 연속 사각형 및 구각형 접기

19세기에 실제적이고 구체적인 활동을 통해 수학적 모델을 만들어 기하를 교육하고 연구하고자 하던 시도는 당시 유아교육에도 영향을 미쳤다. Friedrich Fröbel(1782–1852)은 이러한 흐름 하에 기하적 원리에 기반한 종이접기 활동을 제안하였다 [10]. Henrici와 Fröbel의 영향을 받아 Row는 [Figure 1]과 같이 종이접기로 정다각형(정오각형, 정육각형, 정팔각형, 정구각형 등)을 만들었고, 원과 이차곡선에 대한 개념에 접기를 활용하였다. 그는 이런 활동을 기초로 1893년에 그의 책 "Geometric Exercises in Paper Folding"을 발간하였다 [9].

다각형의 작도 가능성에 대한 Gauss-Wantzel 정리 [7]에 의하면 정구각형은 작도 불가능하다는 사실이 알려졌지만, 그는 정구각형을 종이접기로 접을 수 있을 뿐만 아니라 종이접기로 120° 의 삼등분이 가능함을 보였다 [9]. 또한 그는 [Figure 2]와 같이 직선 밖의 한 점을 직선 위의 한 점에 올리는 접기를 할 때 생기는 주름들의 포락선(envelope)이 포물선

임을 발견하였고, 이때 각각의 주름선은 포물선의 접선이 된다는 사실을 발견하였다 [23].

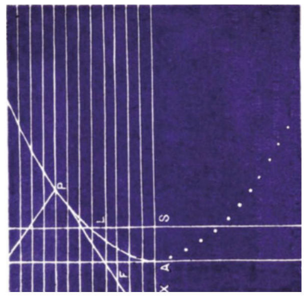

Figure 2. Folding of a Parabola; 포물선 접기

19세기 당대 영향력이 컸던 수학자 Felix Klein(1849–1925)은 1895년 그의 강연에서 Row의 종이접기 기하학 책 “Geometric Exercises in Paper Folding”을 언급하여 그 당시 교육 및 수학계에 종이접기 기하에 대한 관심을 불러일으켰다 [12, 21]. 이후 Giovanni Vacca(1872–1953)는 Row의 책에 영향을 받아 접기에 대한 수학사를 주제로 논문을 발표하였고 Margherita Piazzolla Beloch(1879–1976)는 Vacca의 논문을 읽고 Row의 책에 영향을 받아 종이접기로 삼차방정식을 푸는 방법을 연구하게 되었다 [12, 24].

Beloch는 Row의 ‘한 점을 직선 위로 올리는 접기’에 대한 아이디어에 영감을 받아 ‘두 점을 두 직선 위에 동시에 올리는 접기’인 ‘벨로치 접기(Beloch’s fold)’를 정의하였다. 그녀는 Row의 발견으로부터 추론하여 벨로치 접기를 할 때 생기는 주름선은 두 포물선의 공통접선이 된다는 기하적 의미를 발견하였다. 이러한 공통접선을 대수적으로 구하는 문제는 삼차방정식의 해를 구하는 것과 동치인 사실을 이용하여 그녀는 이를 정육면체의 부피를 두 배로 만드는 델리안 문제(Delian problem), 즉 방정식 $x^3 = 2$의 실근 $\sqrt[3]{2}$를 종이접기 방법으로 해결할 수 있음을 증명하였다 [12]. 이는 오래된 작도 불능 문제가 종이접기로는 가능함을 보여주는 결과이며, 눈금없는 자와 컴파스로 구성할 수 있는 기하와 종이접기로 구성할 수 있는 기하의 차이를 보여준다. Beloch는 이를 일반화하여 삼차방정식의 해를 종이접기를 활용하여 구하는 기하적 방법을 설명하고 이를 1935년과 1936년에 두 편의 논문으로 발표하였다 [12].

Beloch는 그녀의 연구 결과를 발표하며 1867년에 발표된 Eduard Lill(1830–1900)의 접기 방법을 인용하였다. 이는 방정식의 실근을 그래프를 사용하여 시각적으로 찾는 ‘그래프 방법(graphical method)’으로 현재 릴의 방법(Lill’s method)으로 불린다. 릴의 방법은 임의의 차수를 가지는 다항방정식의 계수 경로로부터 릴의 경로를 구하여 기하학적으로 방정식의 해를 구하는 방법을 제공하지만, Lill이 자신의 논문에서 종이접기와의 연관성을 언급하지는 않았다 [20]. 그러나 Beloch는 삼차방정식의 경우 릴의 방법과 종이접기와의 연관성을 발견하고 실근을 구하기 위해 두 점을 두 직선 위에 올리는 접기 방법을 사용하

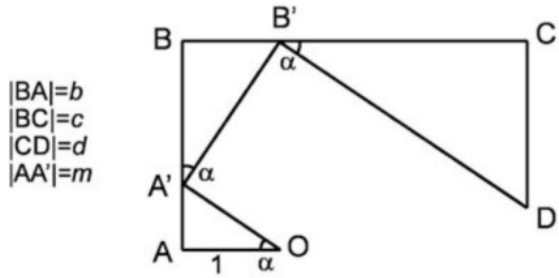

Figure 3. Lill's method; 릴의 방법

였다. [Figure 3]은 삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$을 릴의 방법으로 해결하는 과정을 보여준다.

Beloch의 결과는 한 번에 한 개의 주름을 접는 단일 접기를 다루었기에 고차방정식의 종이접기 해법에 적합하지 않다. 여러 개의 주름선을 동시에 접는 다중 접기에 대한 연구는 후대 기하학자들에 의해 이루어졌다. Robert Lang과 Roger Alperin(1947–2019)은 세 개의 주름을 동시에 접어 특정한 오차방정식의 해를 구하였다. 실제로 세 개의 주름을 동시에 접고 조정하는 작업은 매우 복잡하고 어렵기 때문에 종이접기로 오차방정식의 실근을 구하는 것은 쉽지 않은 일이지만 컴퓨터의 도움을 얻어 주름선을 디자인하는 것이 가능하다 [1, 12]. Lang과 Alperin은 이를 일반화하여 임의의 n차 방정식의 해는 $n-2$개의 주름을 동시에 접어 풀 수 있다는 정리를 증명하였다 [1, 17]. 이후 Yasuzo Nishimura는 일반적인 오차방정식의 해를 종이접기로 구하기 위해서는 2개의 주름이면 충분하다는 사실을 보였고 [22], Joachim König와 Dmitri Nedrenco는 차수가 7인 일반적인 유리계수 다항방정식은 2개의 주름을 동시에 접어 풀 수 있다는 것을 보였다 [17].

Beloch의 결과가 당시 수학자들의 흥미를 끌지 못하였다는 사실을 주목할 필요가 있다. 그녀가 활동하던 시기에 파시즘이 이탈리아에서 부상하면서 유럽 다른 지역과의 학술 교류가 어려웠고, 그 결과 그녀의 연구는 이탈리아 내에서만 알려지게 되었다. 또한 비유클리드 기하, 리만 기하, n차원 벡터공간과 함수공간, 힐베르트 공간 등 공간 기하에 대한 연구가 활성화되고 있던 당시에 그녀의 연구가 2차원 평면 기하에만 국한되었다는 점과 종이접기 기하학이 순수수학보다는 수학교육의 한 분야로써 분류되었다는 점이 그 이유라 할 수 있다 [9]. 그러나 이러한 Beloch의 결과는 1980년대에 Humiaki Huzita에 의해 소개되면서 종이접기 기하에 대한 국제적 관심이 재개되었다. 일본계 이탈리아 수학자 Humiaki Huzita(1924–2005)는 1989년에 열린 국제학술회의인 "The First International Origami Science and Technology"에서 벨로치의 논문을 소개하였고 이와 함께 벨로치 접기로 삼차방정식의 실근을 구하는 방법을 설명하였다.

20세기 초반에 힐베르트가 주도한 수학의 형식화 운동이 일어나면서 많은 수학자들이

유클리드 기하와 비유클리드 기하에 대한 공리화를 시도했다 [5, 25]. 그러나 종이접기 기하학에 대한 공리화는 20세기 말에 와서야 이루어졌다 [9]. 종이접기 기하학에서의 공리는 1980년대 Jacques Justin에 의해 처음으로 주어졌다 [16]. 그는 Peter Messer에게 영감을 얻어 7개의 공리를 제안하였으나 그의 논문은 수학자들의 주목을 받지 못했다. 이와 독립적으로 비슷한 시기에 Humiaki Huzita [15]도 종이접기에 대해 체계적인 연구를 수행하여 6개의 공리(공리 1-공리 6)를 발표하였고, 2000년대 초 Koshiro Hatori에 의해 오랜기간 간과되었던 Justin의 공리7이 재발견되었다 [1]. 이러한 이유로 종이접기의 7개의 공리 집합은 Huzita-Hatori Axioms 또는 Huzita-Justin Axioms로 불린다. 2010년 Alperin과 Lang은 공리1부터 공리5까지 5가지 접기 방법으로 구성할 수 있는 것은 공리6 하나로 가능하다는 것을 증명했다 [1]. 따라서 종이접기 공리는 공리6과 공리7만으로 충분하지만 1980년대 이후 종이접기 분야에서 지속되어 온 관례를 따라 7개의 공리로 기술한다. 이후 단일 접기에 관한 이 공리 집합은 두 개 이상의 주름을 동시에 접는 다중 접기 구조로 발전하였다 [1].

다음은 후지타-하토리 공리를 구성하는 7가지 종이접기 방법이다.

후지타-하토리 공리(Huzita-Hatori Axioms)

Axiom 1. 두 점 p_1, p_2에 대하여, 두 점을 지나는 접기 방법은 유일하다.

Axiom 2. 두 점 p_1, p_2에 대하여, p_1을 p_2위에 올려 접는 방법은 유일하다.

Axiom 3. 두 선분 l_1, l_2에 대하여, l_1을 l_2위에 올려 접을 수 있다.

Axiom 4. 점 p와 선분 l에 대하여, 선분 l에 수직이며 점 p를 지나도록 접는 방법은 유일하다.

Axiom 5. 두 점 p_1, p_2와 선분 l_1에 대하여, 점 p_1을 선분 l_1위에 올리면서, 접힌 주름이 점 p_2를 지나도록 접을 수 있다.

Axiom 6. 두 점 p_1, p_2와 선분 l_1, l_2에 대하여, 점 p_1을 선분 l_1 위에 놓음과 동시에, 점 p_2가 선분 l_2 위에 놓일 수 있도록 접을 수 있다.

Axiom 7. 한 점 p, 두 선분 l_1, l_2에 대하여, 점 p를 선분 l_2위로 올리면서, 접힌 주름이 선분 l_1과 수직이 되도록 접을 수 있다.

1989년에 종이접기 기하학을 위한 공리가 세워진 후 종이로 접을 수 있는 것과 없는 것이 무엇인지, 만약 접을 수 있다면 실제로 어떻게 접을 수 있는지에 대한 문제가 제기되었고 이는 기하학적 접기 알고리듬 및 계산 문제로 발전하였다. MIT 대학의 교수 Erik

Demaine [8]은 기하학 접기 알고리듬에 대한 연구를 수행하여 종이로 접을 수 있는 주름 패턴을 밝히고 어떠한 대상을 종이로 접을 수 있는가 연구하였다. 이 연구는 컴퓨터 프로그램뿐 아니라 특정 알고리듬을 사용한 계산 가능성 문제와 관련이 있기 때문에 컴퓨팅이 종이접기에 중요한 역할을 하게 되었다. 주름 패턴에 관한 기본정리는 Jun Maekawa, Toshikazu Kawasaki 그리고 Jacques Justin의 선행 연구가 있었으며, Robert Lang [18]은 이를 바탕으로 종이접기 디자인 알고리듬과 컴퓨터 프로그램을 개발하였다.

3 종이접기를 활용한 방정식의 풀이

이 장에서는 종이접기를 활용하여 이차, 삼차, 사차방정식의 해를 기하학적으로 어떻게 구할 수 있는지 설명한다.

3.1 릴의 방법 (Lill's method)

오스트리아 공학자 Lill은 1867년 다항방정식의 해를 시각적으로 볼 수 있는 방법을 제시하였다. 릴의 방법은 다항방정식

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

의 실근을 구할 수 있는 기하학적 방법이며 다음과 같다.

첫째, 원점 O에서 출발하여 방정식 (1)의 계수 경로를 구한다. 먼저 x^n의 계수가 1이므로 원점 O에서 x축을 따라 점 $(1,0)$까지 이동하고, 이어서 x^{n-1} 계수의 부호가 양수이면 $90°$ 회전하고, 음수이면 $-90°$ 회전한 후 계수의 절댓값만큼 좌표축에 평행하게 이동한다. 같은 방법으로 나머지 계수들에 적용하면 계수 경로를 얻을 수 있다. 경로가 끝나는 마지막 위치를 점 T로 나타내자.

둘째, 원점 O에서 출발하여 계수 경로는 n개 이하의 선분으로 이루어진다. 계수 경로를 이루는 각 선분 위에 한 점을 택한 후 원점에서 시작하여 이 점들을 선분으로 연결하여 그린다. 이때 그려진 선분들이 서로 수직이 되면서 마지막 선분이 점 T를 지나도록 조정한다. 이렇게 얻어진 경로를 릴의 경로라 하자.

셋째, 릴의 경로를 이루는 첫 번째 선분의 기울기를 m이라고 하면, $-m$은 다항방정식 (1)의 해가 된다 [20].

예를 들어 계수가 모두 양수인 이차 방정식 $x^2+a_1x+a_0=0$을 생각해보자. 점 O로부터 x축의 양의 방향으로 계수 1만큼 이동하여 점 $A(1,0)$을 구하고, 점 A로부터 y축의 양의 방향으로 a_1만큼 평행이동하여 점 $B(1,a_1)$을 구한다. 점 B로부터 x축의 음의 방향으로 a_0의 크기만큼 평행이동하여 점 $T(1-a_0, a_1)$를 구하면 이차 방정식 $x^2 + a_1x + a_0 = 0$의 계수 경로를 얻을 수 있다.

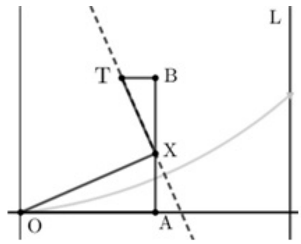

Figure 4. Finding solutions of a quadratic equation using Lill's method; 릴의 방법을 활용한 이차 방정식의 해 구하기

계수 경로로부터 릴의 경로는 다음과 같이 찾을 수 있다. 이는 각 $\angle OXT = 90°$을 만족시키도록 선분 $\overline{AB}$의 연장선 위에 있는 점 X를 찾는 문제와 같다. 먼저 점 $(2, 0)$을 지나며 선분 $\overline{AB}$에 평행한 직선 L을 잡고 점 O를 직선 L 위로 접을 때 생기는 주름선이 점 T를 지나도록 조정한다. 이때 주름선이 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점을 X라 하면 $\overline{TX}$와 선분 $\overline{OX}$는 서로 수직이고 따라서 $\angle OXT = 90°$가 된다. 두 점 O, X를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 릴의 방법에 의해 $x = -m$은 이차 방정식 $x^2 + a_1x + a_0 = 0$의 해가 된다 [1, 13]. 이때 선분 $\overline{AX}$의 길이는 m이므로 이는 주어진 이차 방정식의 해에 대한 기하학적 의미를 가진다.

[Figure 4]는 릴의 방법으로부터 종이접기를 이용하여 이차방정식 $x^2 + a_1x + a_0 = 0$의 실근을 구하는 방법을 보여준다. 종이접기 주름은 동적 기하 소프트웨어인 지오지브라(GeoGebra)를 사용하여 구현할 수 있다 [1].

3.2 벨로치 접기 (Beloch's fold)

Beloch는 1934년 Row가 제시한 접기 방법, 즉 한 점을 한 직선 위에 올리는 접기를 일반화하여 두 점을 두 직선 위에 올리는 접기 방법으로 발전시켰다 [9]. 평면 위의 한 점 P를 한 직선 l 위에 올리는 접기를 할 때 점 P가 놓이는 l위의 점을 Q라 하자. 이때 얻게 되는 주름선을 m이라 하면 종이접기의 대칭성으로부터 직선 m은 선분 $\overline{PQ}$의 수직이등분선이 됨을 알 수 있다. 또한 점 Q를 지나며 직선 l에 수직인 직선 n이 주름선과 만나는 점은 점 P와 직선 l로부터 거리가 같다 ([Figure 5] 참조). 따라서 직선 l 위의 점 Q의 위치를 바꾸어가면서 반복해서 접을 때 생기는 주름선들의 포락선은 점 P를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선이 된다. 한 점을 한 직선 위에 올리는 접기를 수행할 때 얻게 되는 주름선은 기하적으로 포물선의 접선을 의미하고, 이는 대수적으로 이차 방정식의 해를 구하는 것과 동치이다 [13, 12].

Beloch는 Row의 개념을 확장하여 [Figure 6]과 같이 두 점을 두 직선 위에 동시에 올리는 접기를 고려하였다. 이는 벨로치 접기(Beloch's fold)라 하며 이때 생긴 주름선은 두 점 P_1, P_2를 초점으로 하고 두 직선 l_1, l_2를 각각 준선으로 하는 두 포물선의 공통접선이

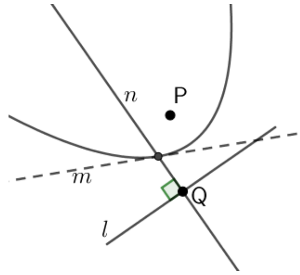

Figure 5. Folding the point P onto a line l; 점 P를 한 직선 l 위에 올리는 접기

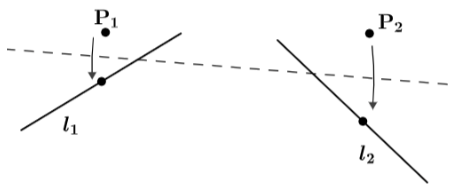

Figure 6. Beloch's fold; 벨로치 접기

된다 [12]. 이것이 벨로치 접기의 기하학적 의미이며 두 포물선의 공통접선을 구하는 것은 대수적으로 삼차 방정식을 푸는 것과 같다.

주어진 두 점 P_1, P_2와 두 직선 l_1, l_2에 대하여 벨로치 접기 방법은 많아야 3가지가 존재한다 [4]. 그 이유를 밝히는 과정은 대수와 기하가 어떻게 연관되는지를 보여주는 좋은 예가 된다. 이를 기하학적으로 살펴보기 위해 지오지브라(GeoGebra)를 사용할 수 있다. 먼저 두 점 P_1, P_2 그리고 직선 l_1을 좌표평면 위에 나타낸 후 점 P_1을 직선 l_1 위의 임의의 점 Q로 올리는 접기를 시행한다. 그러면 이 접기에 의해 점 P_2는 직선 l_1에 대칭인 점 P_2'로 이동한다. 이제 지오지브라의 '자취그리기' 기능을 사용하여 점 Q의 위치를 이동시키면 점 P_2'의 자취는 하나의 곡선 C가 된다. 이 곡선은 점 P_2의 좌표에 의존하며, 점 P_2의 위치에 따라 다양한 모양으로 그려진다. [Figure 7]은 점 $P_1(1,2)$와 직선 $l_1 : y = 0$에 대해, 점 P_2의 위치에 따른 곡선 C의 그래프를 지오지브라로 나타낸 것이다.

이제 직선 l_2를 고려하면 벨로치 접기는 기하학적으로 직선 l_2 위에 점 P_2'가 놓이는 경우이므로, 그 경우의 수는 직선 l_2와 곡선 C의 교점의 개수와 같다. 곡선의 형태는 바뀌어도 이러한 교점의 개수가 3개 이하만 존재한다는 사실은 지오지브라(GeoGebra)를 활용하여 다양한 곡선을 그려 예측할 수 있다. 그러나 이 사실을 엄밀히 증명하기 위해서는 곡선 C의 자취의 방정식과 직선 l_2의 연립방정식의 해를 구하는 것이 필요하다.

벨로치 곡선 C의 방정식을 구하기 위해 두 점의 좌표를 각각 $P_1(0,a)$와 $P_2(b,c)$로 놓고 두 직선을 각각

$$l_1 : x = -a, \qquad l_2 : y = dx + c$$

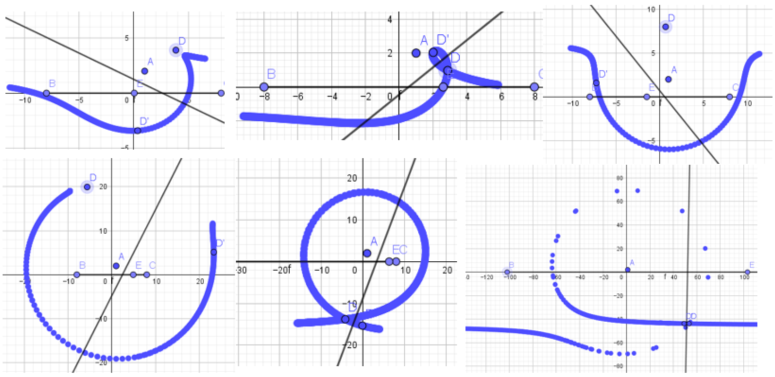

Figure 7. Drawing Beloch curve using GeoGebra; 지오지브라를 활용한 벨로치 곡선 그리기

로 정하자. 그러면 점 P_2의 대칭점 P_2'의 자취의 방정식, 즉 곡선 C를 나타내는 식은

$$-2a(b-c)^2 + (c-y)(b^2+c^2-x^2-y^2) = 0$$

이 됨을 증명할 수 있다 [4]. 곡선 C의 방정식은 차수가 3인 대수 곡선(algebraic curve)을 나타내며, 일반적인 경우에 타원 곡선이 됨을 알 수 있다. 직선 l_2의 식을 곡선 C의 방정식에 대입하여 연립하면 삼차방정식을 얻게 되고 벨로치 접기 방법의 개수는 삼차방정식의 해의 개수와 같다. 따라서 벨로치 접기는 최대 3가지 방법이 있음을 알 수 있다 [12].

이러한 이유로 벨로치 접기는 임의의 삼차방정식의 실근을 구하는 종이접기 방법과 연관이 있음을 유추할 수 있다. 그녀는 이러한 연관성을 밝히기 위해 릴의 방법을 도입하였다. 일반적으로 방정식의 해를 릴의 방법으로 구하기 위해 릴의 경로를 구성하는 것은 쉬운 일이 아니다. Beloch의 중요한 업적은 삼차방정식의 실근을 구하기 위해 벨로치 접기를 이용하여 릴의 경로를 찾는 방법을 제시한 것이다. 그녀는 임의의 삼차방정식의 실근을 얻기 위해 계수 경로를 원점 O에서 점 T까지 나타낸 후, 두 점 O, T를 특정한 두 직선 위에 동시에 올리는 접기를 시행하여 릴의 경로를 찾을 수 있음을 보였다 [1, 9, 13, 12].

[Figure 8]은 모든 계수가 양수인 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 실근을 벨로치 접기와 릴의 방법으로 구하는 방법을 보여준다. 이를 설명하면 다음과 같다.

선분 $\overline{P_1P_2}$를 포함하는 직선을 주름선으로 하여 접을 때 원점 O가 대칭이동된 점을 A라 하자. 또한 선분 $\overline{P_2P_3}$을 포함하는 직선을 주름선으로 하여 접을 때 점 T가 대칭이동된 점을 B라 하자. 점 A를 지나며 x축에 수직인 직선을 L_1, 점 B를 지나며 y축에 수직인 직선을 L_2라 하고 두 점 O와 T를 두 직선 L_1와 L_2 위에 각각 올리는 벨로치 접기를 시행한다. 이때 생기는 주름선이 계수 경로와 만나는 두 점을 Q_1, Q_2라 하자. 그러면 선분 $\overline{OQ_1}$의 기울기 m에 대하여 $-m$은 주어진 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 해가 된다. 이는 다음과 같이 보일 수 있다.

$\angle Q_1OP_1 = \theta$로 놓으면 $m = \tan\theta$이다. 세 개의 삼각형 $\triangle Q_1OP_1$, $\triangle Q_2Q_1P_2$ 그리고

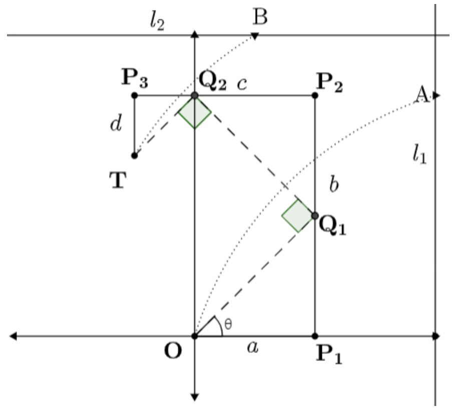

Figure 8. Finding a solution of a cubic equation using Lill's method; 릴의 방법을 활용한 삼차방정식의 해 구하기

$\triangle TQ_2P_3$은 닮은 삼각형이므로

$$m = \tan\theta = \frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_1Q_1}}{a} = \frac{b - \overline{Q_1P_2}}{a}$$

이고 따라서 $\overline{Q_1P_2} = b - am$이다. 또한

$$m = \tan\theta = \frac{\overline{Q_2P_2}}{\overline{Q_1P_2}} = \frac{\overline{Q_2P_2}}{b - am} = \frac{c - \overline{Q_2P_3}}{-am}$$

이고 따라서 $\overline{Q_2P_3} = am^2 - bm + c$이다. 마지막으로

$$m = \tan\theta = \frac{\overline{P_3T}}{\overline{Q_2P_3}} = \frac{d}{am^2 - bm + c}$$

이므로 이를 정리하면

$$a(-m)^3 + b(-m)^2 + c(-m) + d = 0$$

을 얻는다. 따라서 $x = -m$은 삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$의 해가 된다.

3.3 알페린 접기 (Alperin's fold)

주어진 임의의 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$에 $x = z - \frac{a}{3}$를 대입하여 정리하면 다음과 같이 z에 대한 삼차방정식을 얻는다.

$$z^3 + \left(\frac{3b - a^2}{3}\right) z - \left(\frac{9ab - 27c - 2a^3}{27}\right) = 0$$

따라서 일반적인 삼차방정식의 풀이는 이차항의 계수가 0인 삼차방정식

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{2}$$

의 경우만 다루어도 충분하다. 2010년 Alperin [2]은 삼차방정식 (2)의 해를 종이접기로 구하는 방법을 제시하였다. 이 종이접기 방법은 다음과 같다.

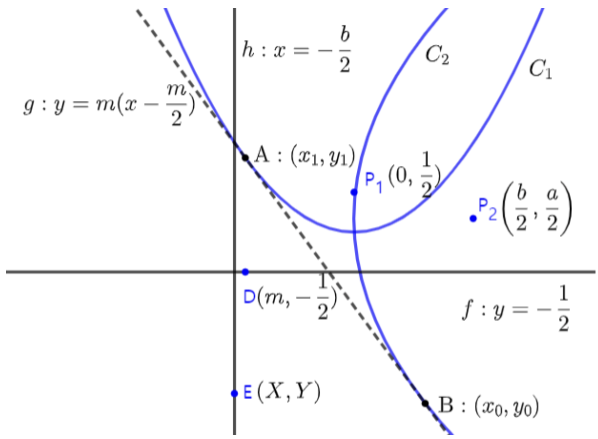

Figure 9. Alperin's fold; 알페린 접기

정리 3.1 ([2]): 삼차방정식 $x^3 + ax + b = 0$ 대하여 두 점

$$P_1\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

를 두 직선

$$l_1: y = -\frac{1}{2}, \quad l_2: x = -\frac{b}{2}$$

위로 각각 동시에 올리는 벨로치 접기를 시행하면 이때 얻어지는 주름선에 대한 직선의 기울기 m은 $x^3 + ax + b = 0$의 해이다.

이 정리에 대한 증명은 다음과 같이 할 수 있다. [Figure 9]와 같이 점 P_1을 초점으로 하고 직선 l_1을 준선으로 하는 포물선을 C_1, 점 P_2를 초점으로 하고 직선 l_2를 준선으로 하는 포물선을 C_2라 하자. 이때 두 점 P_1, P_2를 두 직선 l_1, l_2 위로 각각 동시에 올리는 벨로치 접기를 시행하면 주름선은 두 포물선 C_1, C_2의 공통접선이다. 두 포물선의 방정식을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$C_1: y = \frac{1}{2}x^2 \quad C_2: \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx$$

주름선이 나타내는 공통접선 g가 두 포물선 C_1, C_2와 만나는 점의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_0, y_0)$이라 하면 공통접선의 기울기는 포물선 위의 각 점 A, B에서의 접선의 기울기와 같으므로 두 점의 좌표는 다음과 같다.

$$A(x_1, y_1) = \left(m, \frac{1}{2}m^2\right), \quad B(x_0, y_0) = \left(\frac{b}{2m^2}, \frac{a}{2} + \frac{b}{m}\right)$$

따라서 공통접선 직선 g의 기울기 m은 다음 식

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{m}}{m - \frac{b}{2m^2}}$$

을 만족시키고, 이를 간단히 하면 $m^3 + am + b = 0$이다. 따라서 주름선에 대한 직선 g의 기울기 m은 삼차방정식 $x^3 + ax + b = 0$의 해가 된다 [4].

Alperin은 또한 종이접기로 구성 가능한 수를 연구하였다 [2]. 실수 α가 종이접기 수(Origami number)라는 것은 길이 1로부터 시작하여 종이접기 공리의 7가지 접기 방법으로 길이가 $|\alpha|$인 선분을 얻을 수 있다는 것을 의미한다. 예를 들면 $\sqrt{2}$는 한 변의 길이가 1인 정사각형을 접고 그 대각선을 접어서 얻을 수 있기 때문에 종이접기 수이다. 이러한 정의는 임의의 복소수로 확장하여 정의할 수 있다 [7]. 종이를 복소평면에 대응시키고 종이 위의 한 점을 복소수 z에 대응시키면 원점과 복소수 z를 잇는 선분을 고려할 수 있다. 이 선분을 종이접기 공리로부터 구성할 수 있는 경우 복소수 z를 종이접기 수라고 정의한다.

종이접기 수들의 집합 $\mathcal{O}$는 사칙연산에 대해 닫혀 있음을 보일 수 있다. 즉, 종이접기 수를 더하거나 빼도 다시 종이접기 수가 되고, 곱하거나 나누어도 다시 종이접기 수가 된다. 따라서 종이접기 수들의 집합 $\mathcal{O}$는 복소수 체 $\mathbb{C}$의 부분체가 된다 [2, 14, 7]. 이 사실은 종이접기 수를 연구할 때, 갈루아 이론을 비롯한 체이론을 도입할 수 있게 한다. 작도가능한 수, 작도가능한 다각형과 같은 주제의 여러 결과들이 체이론을 도입하여 설명할 수 있고, 이와 유사하게 종이접기 가능한 수, 종이접기 가능한 다각형 등과 같은 주제들을 설명하기 위해 갈루아 이론을 도입할 수 있다 [7].

3.4 2개 이상의 주름을 동시에 접기

삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식이 존재하고 이는 복소수의 사칙연산, 제곱근 $\sqrt{}$, 세제곱근 $\sqrt[3]{}$ 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 이들은 모두 종이접기 작용에 대해 닫혀 있기 때문에 종이접기 수를 계수로 가지는 4차 이하의 모든 다항식의 해는 종이접기 수가 된다. 릴의 방법과 벨로치 접기는 삼차방정식의 실근을 구성하는 종이접기 방법을 알려주지만 삼차방정식의 복소수 해를 체계적으로 접는 알고리듬은 아직 알려져 있지 않다. 사차방정식의 경우에는 릴의 방법을 통해 단일 접기로 실근을 구하는 일반적인 방법이 알려져 있지 않다. 그러나 Alperin은 유리계수를 가지는 사차방정식을 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 형태로 바꾸면 이 방정식의 실근은 두 포물선

$$y = x^2, \quad \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -b\left(x + \frac{c}{b} - \frac{a^2}{4b}\right)$$

의 해가 된다는 사실을 이용하여 이 두 포물선의 쌍대곡선의 공통접선으로부터 해를 구할 수 있음을 보였다 [2].

차수가 5 이상인 방정식의 해를 종이접기로 구하는 어려움은 다중 접기를 고려하여 극복할 수 있다. Lang은 두 개의 주름을 동시에 접어 각을 오등분할 수 있음을 보였다. 각의 오등분은 대수적으로 오차방정식의 해를 구하는 문제와 같기 때문에 이 결과는 2개의 주름을 동시에 접는 방법으로 특정 오차방정식의 해를 구할 수 있음을 보여준다 [1]. 이후 Alperin과 Lang은 여러 개의 주름 선을 동시에 조정하는 방법에 대해 연구하였고 임의의 n차 방정식의 해는 $n-2$개의 주름을 동시에 접어 풀 수 있다는 정리를 증명하였다

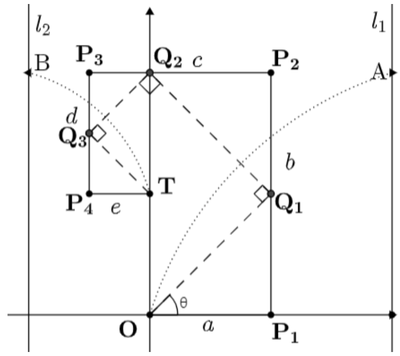

Figure 10. Solving quartic equations using Lill's method; 릴의 방법으로 사차방정식 풀기

[1, 6, 17]. 이는 사차방정식과 오차방정식의 경우 각각 2개와 3개의 주름을 동시에 접는 방법으로 방정식의 실근을 구할 수 있다는 것을 의미한다. 이후 2015년에 Nishimura는 일반적인 오차방정식의 실근은 2개의 주름을 동시에 접어서 구하는 것이 가능함을 보였다 [22].

사차방정식의 실근을 2개의 주름을 동시에 접어 구할 수 있는 이유는 릴의 방법으로부터 가능하다. [Figure 10]과 같이 모든 계수가 양수인 사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 에 대하여 계수 경로와 릴의 경로를 나타내자.

방정식의 해를 구하기 위해서는 릴의 경로를 찾아야 하고 이는 그림과 같이

$$\angle OQ_1Q_2 = \angle Q_1Q_2Q_3 = \angle Q_2Q_3T = 90^\circ \tag{3}$$

를 만족시키는 점 Q_1, Q_2, Q_3를 종이접기를 사용하여 찾아야 한다. 이를 위해서는 다음과 같은 과정이 필요하다.

직선 P_1P_2를 주름선으로 하여 접을 때 원점 O가 대칭이동된 점을 A라 하자. 또한 직선 P_3P_4를 포함하는 직선을 주름선으로 하여 접을 때 점 T가 대칭이동된 점을 B라 하자. 점 A를 지나며 x축에 수직인 직선을 L_1, 점 B를 지나며 x축에 수직인 직선을 L_2라 하고 두 점 O와 T를 두 직선 L_1과 L_2 위에 각각 올리는 접기를 시행한다. 각각의 주름선이 직선 P_1P_2와 직선 P_3P_4와 만나서 생기는 교점을 각각 Q_1, Q_3라 할 때, 직선 P_2P_3 위에 놓이는 점 Q_2가 식 (3)을 만족시키도록 두 주름선을 조절하면 릴의 경로를 접을 수 있다 [1].

사차방정식의 해를 구하기 위해 사용한 방법은 삼차방정식의 경우처럼 두 점을 두 직선 위에 동시에 올린다는 점에서 유사하다. 그러나 삼차방정식의 경우는 하나의 주름만 생긴다. 사차 방정식의 경우는 직선 Q_1Q_2와 직선 Q_2Q_3과 같이 두 주름선이 동시에 발생하고, 두 주름선이 특정 조건을 만족하도록, 즉 수직으로 만나도록 조절하면서 접어야 한다는 점에서 단일 접기와 다르다 [1].

단일 접기에서 방정식의 해를 언제 종이접기로 구할 수 있는지 판별하는 문제뿐 아니라,

종이접기 수학 분야에서 많은 문제들은 결국 단일 접기로 구성할 수 있는 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$가 무엇인가에 대한 질문으로 귀결된다. 이와 관련하여 다음과 같은 사실이 알려져 있다.

정리 3.2 ([14, 7]): 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$에 대하여 $\mathbb{Q}$ 위에서 $\alpha \in \mathbb{C}$의 분해체를 L이라 하자. 이때, 다음은 동치이다.

(1) $\alpha \in \mathbb{C}$는 종이접기 수이다.

(2) $[L:\mathbb{Q}] = 2^s 3^t$ 꼴이다. 이때 t, s는 음이 아닌 정수이다.

위의 정리는 종이접기 수들의 집합이 체를 이룬다는 사실로부터 갈루아 이론을 사용하여 증명할 수 있고, 이 결과는 종이접기 가능성에 대한 판별법을 준다. 예를 들면 소수 p에 대하여 언제 정p각형을 단일 접기로 구성할 수 있는가 하는 문제는 복소수 $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$가 종이접기 수가 되도록 소수 p를 결정하는 문제와 같다. α의 분해체 L의 확대차수 $[L:\mathbb{Q}]$는 p차 원분 다항식(the p-th cyclotomic polynomial)의 차수 $p-1$과 같으므로 소수 p가 $p = 2^s 3^t + 1$꼴이 되는 경우에만 정p각형 접기가 가능하다 [7]. 반면 같은 이유로, 단일 접기로는 임의의 각의 오등분, 정11각형 등은 종이접기가 불가능하다. 그러나 이는 2개 이상의 주름을 동시에 접는 방법으로 해결할 수 있다. Lang은 2개의 주름을 동시에 접어 각을 오등분하였고 Alperin과 Lang은 세 개의 주름을 동시에 조절하는 접기로 임의의 오차방정식을 풀 수 있음을 보였다 [1]. 체 이론의 관점에서 다중 접기로 접을 수 있는 종이접기 수들에 대한 분류는 아직 해결되지 않은 문제로 남아있다.

4 결론

16세기에 Dürer는 3차원 공간에 있는 대상들을 평면에 그리는 원근법 기술과 함께 공간에 대한 기하학적 이해를 위해 정다면체와 준정다면체의 전개도를 제작하고 이를 종이접기로 구성하였다.

18세기 유럽에서는 종이접기가 기하학 명제를 증명하기 위한 합법적인 요소로 간주되면서 평행선 공리를 증명하기 위한 도구로 종이접기가 사용되기도 하였다.

19세기에 이르러 Riemann이 기하학 분야에서 리만 기하학과 비유클리드 기하학의 기초를 제공하면서 이를 설명하기 위한 수학적 모델의 제작 필요성이 증가하였고 프랑스와 영국에서는 이와 관련된 연구를 위해 종이를 사용하기도 하였다.

이러한 시대적 배경에서 유아교육에 종이접기를 도입한 Fröbel의 업적과, 접기와 대칭 사이의 관계를 개념화한 Henrici의 연구는 Row에게 영향을 주었다. 그는 기하 교육을 위한 도구로서 종이접기를 활용하였다. 특히 직선 위의 임의의 점을 직선 밖의 한 점에 올리는 접기를 할 때 생긴 주름선의 포락선이 포물선이 된다는 사실을 발견하고 1893년

발간된 그의 책에 이를 기록하였다. 이후 당시 수학계에 영향력이 컸던 수학자 Klein이 그의 강연에서 이 책을 언급하면서 종이접기 기하가 주목을 받게 되었고, 이는 이탈리아의 여성 수학자였던 Beloch에게 영향을 주었다. 그녀는 Row의 책 안에 수록된 포물선 아이디어에 영향을 받아 종이접기로 삼차방정식을 푸는 방법을 발견하였다. 이를 위해 그녀는 두 점을 두 직선 위에 올리는 접기와 다항방정식의 해를 기하적으로 구할 수 있는 릴의 방법을 사용하였다. 이는 이후 Lang과 Alperin, 그리고 Thomas Hull 등 이 분야의 여러 학자들에게 영향을 주었고 고차방정식의 종이접기 해법에 대한 연구로 이어졌다.

20세기 초반에 힐베르트가 주도한 수학의 형식화 운동이 일어나면서 많은 수학자들이 유클리드 기하와 비유클리드 기하에 대한 공리화를 시도했다. 그러나 종이접기 기하학의 공리화는 20세기 말에 와서야 Justin, Huzita, Hatori 그리고 Lang 등에 의해 이루어졌다. 이는 단일 접기를 수학적으로 엄밀하게 설명하는 방법을 제공하며 총 7가지 접기 방법으로 단일 접기가 결정된다는 것을 말해준다. 이 접기법은 단일 접기에 대한 공리로 채택되어 현재 '후지타-하토리 공리(Huzita-Hatori Axiom)' 로 불린다. 이후 다양한 필요에 의해 두 개 이상의 종이 주름을 동시에 조절하여 접는 방법에 대한 논의가 발생하였으며 이를 수학적으로 엄밀하게 공리화하고자 하는 연구가 Lang과 Alperin에 의해 수행되었다. 이러한 접기 방법은 각의 오등분 및 차수가 4이상인 고차방정식의 종이 접기 해법을 위한 이론적 토대가 된다.

References

1. R. Alperin, R. Lang, One-, two-, and multi-fold origami axioms, *Origami* 4 (2009), 371–393.
2. R. Alperin, A mathematical theory of origami constructions and numbers, *New York Journal of Mathematics* 6 (2010), 119–133.
3. D. Auckly, J. Cleveland, Totally real origami and impossible paper folding, *American Mathematical Monthly* 102(3) (1995), 215–226.
4. Choi Jae-ung, *Solving polynomial equations by origami and GeoGebra*, Ph. M. Thesis, Kongju National University, 2018.
5. Choi Wonbae, Hilbert and Formalism, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 33–43.
6. T. Chow, K. Fan, The Power of Multifolds: Folding the Algebraic Closure of the Rational, *Origami* 4 (2009), 395–404.
7. D. Cox, *Galois theory*. 2nd edition. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012.
8. E. Demaine, J. O'Rourke, *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.
9. M. Friedman, *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*, Birkhäuser, 2019.

10. F. Fröbel, *Gesammelte pädagogische Schriften*, Enslin, 1874.
11. O. Henrici, *On congruent figures*, Longman, 1879.
12. T. Hull, Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill, *The American Mathematical Monthly* 118(4) (2011), 307–315.
13. T. Hull, *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*, 2nd Edition, A K Peters/ CRC Press, 2012 .
14. T. Hull, *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*, Cambridge University Press, 2020.
15. H. Huzita, La recente concezione matematica dell 'origami-trisezione dell' angolo, *Scienza e gioco* (1985), 433–441.
16. J. Justin, Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques, *L' Ouvert* (1986), 9–19.
17. J. König, D. Nedrenco, Septic Equations are Solvable by 2-fold Origami, *Forum Geometricorum* 15 (2016), 193–205.
18. R. Lang, *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, A K Peters, 2003.
19. D. Lardner, *A treatise on geometry and its application to the arts*, the cabinet cyclopaedia, Longman, 1840.
20. E. Lill, Resolution graphique des equations numeriques d'un degre quelconque a une inconnue, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2(6) (1867), 359–362.
21. P. Magrone, V. Talamanca, Folding cubic roots: Margherita Piazzolla Beloch's contributions to elementary geometric constructions, Proceedings, *16th Conference on Applied Mathematics Aplimat* (2017), 971–984.
22. Y. Nishimura, Solving quintic equations by two-fold origami, *Forum Mathematicum* 27(3) (2015), 1379–1387.
23. T. Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Open Court, 1901.
24. G. Vacca, Della piegatura della carta applicata alla geometria, *Periodico di Mathematiche* 4(10) (1930) 43–50.
25. Yang Seong-Deog, Jo Kyeonghee, On Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie', *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 61–86.