

# 위상최적설계를 이용한 H형강 부재의 스티프너 형상탐색

## Shape Extraction of Stiffeners of H-beam using Topologically Structural Optimization

정 원 식  
Jung, Wonsik

반 티엔 탄  
Banh, Thien Thanh

이 동 규  
Lee, Dongkyu

### Abstract

In this work, we deal with the feasibility of structural topology optimization for beam designs using retrofits that optimally allocates the reinforcement to the web under the condition that designers set bolt regions for H-beams of different dimensions. Mean compliance or minimal strain energy is considered for the optimization. Volume fraction is given to the design space to assign appropriate steel material quantities. The purpose of this study is to evaluate optimal shapes of stiffeners with the maximum rigidity that improves the axial and shear performance of the H-beam and to satisfy a given safety design standard of H-beam and stiffeners in case arbitrary load effect and resistances. Finally, the effectiveness of stiffness-based topology optimization on stiffeners is verified with several practical applicable examples.

**Keywords :** Topology optimization, H-beam, Stiffener, Strain energy, Steel, Shape Extraction

## 1. 서론

H형 보는 주로 건축, 토목과 같은 건설산업 분야의 구조물을 구성하는 부재로 사용되고 있다. 구성 재료는 대부분 강재이며, 목재 또는 강 합성 재료를 적용할 수 있다. 용접 또는 볼트를 접합부로 사용함으로써 인한 조립 및 해체가 쉬운 강재 H형 보의 고유한 특성에도 불구하고 집중하중, 좌굴 및 접합부 주변 웹과 플랜지의 비 일체화 거동으로 구조적인 안전성과 사용성이 문제가 되는 경우가 많다. 이런 경우 엔지니어와 설계자는 웹과 플랜지 부분에 보강 재료를 사용함으로써 안전성과 사용성을 확보하면서 부재의 경량화와 고강성을 달성하는 이른바 최적화 설계<sup>1),2),3)</sup>가 대안으로 부상하고 있다. 최근 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며, 실제 구조

물에 적용하기 위한 설계 정보를 제공하는 수준으로 발전하고 있다.

한편, H형 보의 보강 방법에는 내삽형 십자 베어링 판, 웹 보강 중간재 등을 용접이나 볼트로 부착하는 보강 법이 대부분이다. 예를 들면 유럽의 EN 1993-1-5에 위와 같은 보강재와 보강 방법이 설명되어 있다. 전단 좌굴 저항 예측을 위한 개선된 방법(Rockey, K.C. and Schkaloud, M. (1971)<sup>4)</sup>, Giuseppe Guarnieri 1985)<sup>5)</sup>을 개발하기 위한 선행 연구가 진행되었고, 실물 실험과 구조해석을 통해 전단 좌굴 거동 조사, ABAQUS를 이용한 전단 좌굴 거동의 수치연구를 통해 FE 모델을 생성하여 구조적인 안전성의 향상 정도를 검증(X.W. Chen et al. 2018)<sup>6)</sup> 하였다. H형 거더 또한 위와 동일한 방법으로 M.F. Hasanein(2010)<sup>7)</sup>에 의해 수행되었다. Olsson(2001)<sup>8)</sup>은 오스테나이트 및 이중 스테인리스강 거더에 대해 실험을 수행하였고, 전단 저항 계산을 위한 새로운 보강 설계 공식을 제안하였다.

부재 보강 형상에 대한 최적화 설계에서 가장 상위 레벨에 있는 구조 위상 최적화는 치수, 형상, 부재 간의 연결성의 최적 설계 정보를 제공한다. 이는

\* 주저자, 정희원, 세종대학교 건축공학과 석사과정  
Dept of Architectural Engineering, Sejong University  
\*\* 정희원, 세종대학교 건축공학과 박사후연구원 공학박사  
Dept. of Architectural Engineering, Sejong University  
\*\*\* 교신저자, 정희원, 세종대학교 건축공학과 교수 공학박사  
Dept. of Architectural Engineering, Sejong University  
Tel: 02-3408-4035 Fax: 02-3408-4331  
E-mail: dongkyulee@sejong.ac.kr

특정 설계 영역 내에서 이상적인 보강 재료 분포를 결정하기 위해 주어진 재료 제약 조건, 하중 및 경계 조건을 충족하면서 목적함수를 최소화하거나 최대화한다. SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 접근법에 대한 Bendsøe(1989)<sup>9)</sup>와 Bendsøe 및 Kikuchi(1988)<sup>10)</sup>의 획기적인 연구가 그 받침이 되었고, 다양한 구조 위상 최적화 방법으로 발전했다. Xie와 Steven(1993)<sup>11)</sup>은 진화론적 구조 최적화(ESO, Evolutionary Structural Optimization), Querin et al.(1998)<sup>12)</sup>은 다중 재료 관점에서 BESO(~Bi-directional Evolutionary Structural Optimization)를 제안했다. 그러나 구조 위상 최적 설계의 난제 중 하나는 형상의 경계가 체크 보드 또는 지그재그 형상으로 인해 명확한 구조물의 형상을 탐색하는 것이 어려운 것이다. 레벨셋(level sets)은 재료 경계면에 곡률에 기반한 경계 확장을 고려하여 연속적인 경계면을 산출할 수 있으며, Osher와 Sethian(1988)<sup>13)</sup>에 의해 제시되었다. 관련하여 Sethian and Wiegmann (2000)<sup>14)</sup>, Osher and Santosa (2001)<sup>15)</sup>, and Allaire et al. (2004)<sup>16)</sup>은 형상함수와 함께 레벨셋 접근법을 개발했다. 위상 최적화에 레벨셋을 적용한 Wang et al.(2003)<sup>17)</sup>은 고차원 스칼라 함수를 경계 수준의 레벨셋 집합을 나타낸다. Xia et al. (2011)<sup>18)</sup>은 응력 기반 위상 최적화의 다중 레벨셋 경계면과 구조 진동을 고려하여 첫 번째 고유진동수를 최대화한다. 본 연구는 스티프너 부재의 재료 경계면이 모호한 지그재그 형상의 위상 최적화를 개선하기 위하여 상기와 같은 레벨셋방법을 적용한다.

스티프너 보강재를 제시한 K.J. Rasmussen, G.J. Hancock(1993)<sup>19)</sup>은 보강재로 인한 전단 좌굴 저항 거동을 수치적으로 분석했고, 이론과 실험을 통한 효율적인 설계 접근법이 몇몇 연구자들(L. Gardner and M. Theofanous<sup>20)</sup>, Jurgen Becque et al.<sup>21)</sup>)에 의해 제안되었다. 본 연구는 H형 보의 스티프너 보강 형상을 위상 최적화함으로써 강성 기반 보강 모델을 찾는다. 지금까지 스티프너 위상 최적화에 관한 연구는 없으며, 본 연구는 위상 최적화된 스티프너 형상을 찾고 H형 보의 접합부 주위 볼트 영역은 임의로 중공 형태를 가진다고 가정하여 주어진 재료에

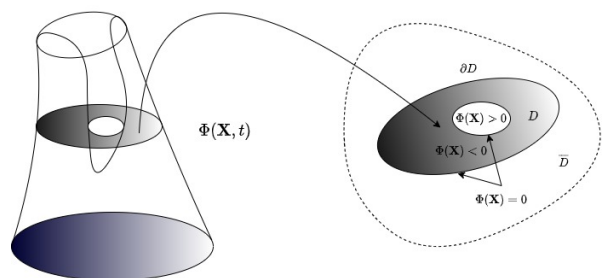
맞는 최대 강성을 가지는 스티프너 형상을 제시하고자 한다. 이는 수치 예제를 통하여 레벨셋과 위상 최적화법을 적용한 보강재 형상 구현이 합리적임을 증명한다. 또한 보 및 거더에 국한되지 않고 보강이 필요한 기둥, 가새, 벽체와 같은 구조부재에도 범용적으로 적용이 가능하다.

## 2. 연속경계면을 갖는 위상최적화

### 2.1 레벨셋(Level Set) 모델

식(1)에 따르면, 구조물의 설계공간은 기존의 솔리드 영역( $D$ )을 포함하는 고정된 참조 영역( $\bar{D}$ )을 (Fig. 1)에 나타낸 바와 같이  $D \subseteq \bar{D}$ 라고 나타낸다. 연속적인 재료경계면을 나타내기 위해 Wang 과 Wang (2004)<sup>22)</sup>이 제시한 레벨셋 설정 모델 (S)은 다음과 같은 고차원 함수를 통해 앞서 설명한 설계공간  $D$ 의 재료 경계를 암시적으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 S &= \{X: X \in \bar{D}, \Phi(X) = 0\} \\
 \Phi(X) &> 0 \quad \forall X \in D \setminus \partial D \\
 \Phi(X) &= 0 \quad \forall X \in \partial D \\
 \Phi(X) &< 0 \quad \forall X \in \bar{D} \setminus D
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



〈Fig. 1〉 Topology optimization design domain

## 2.2 방사형 기저함수

방사형 기저 함수(Radial Basis Function, RBF)는 Wang과 Wang(2006)<sup>23</sup>에 의해 레벨셋 기반 위상 최적화방법에서 처음 도입되었다. RBF는 특정 지점 Buhmann (2004)<sup>24</sup>, 또는 매듭을 중심으로 한 방사대칭 함수이며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\varphi_i(X) = \varphi(\|X - X_i\|), X_i \in D$$

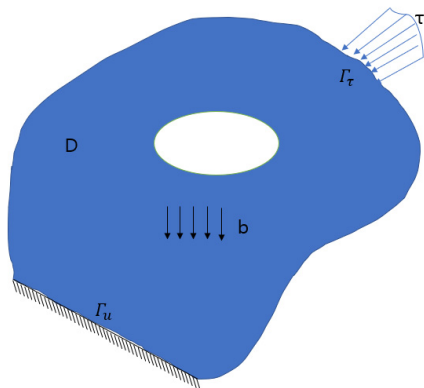
$$\varphi_i(X) = \sqrt{(X - X_i)^2 + c_i^2} \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_i(X)}{dX} = \frac{(X - X_i)}{\sqrt{(X - X_i)^2 + c_i^2}}$$

여기서,  $\|X - X_i\|$  은  $c_i^2$ 에 대한 유클리드 기호를 나타낸다, 그리고  $X_i$ 는 매듭의 위치, 위상최적화는 다중 사분원(MQ)을 사용하여 최적화가 수행된다.

## 2.3 위상 최적화의 준수도 최소화 문제

〈Fig. 2〉와 같이 준수도 최소화 작업은 재료의 부피에 대한 제약을 받는 선형탄성 구조에 대한 문제로 식 (3)을 따르는 수학적 모델이다.



〈Fig.2〉 Structural topology optimization problem definition

$$\text{Minimize}_\phi J(u, \phi) = \int_D (\epsilon(u) : C : \epsilon(u)) H(\phi) d\Omega$$

$$s.t. \begin{cases} a(u, v, \phi) = l(v, \phi) & \forall v \in U \\ G(\phi) = \int_D H(\phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 \\ u = u_0 & \in \Gamma_u \\ C : \epsilon(u) \cdot n = \tau & \in \Gamma_\tau \end{cases} \quad (3)$$

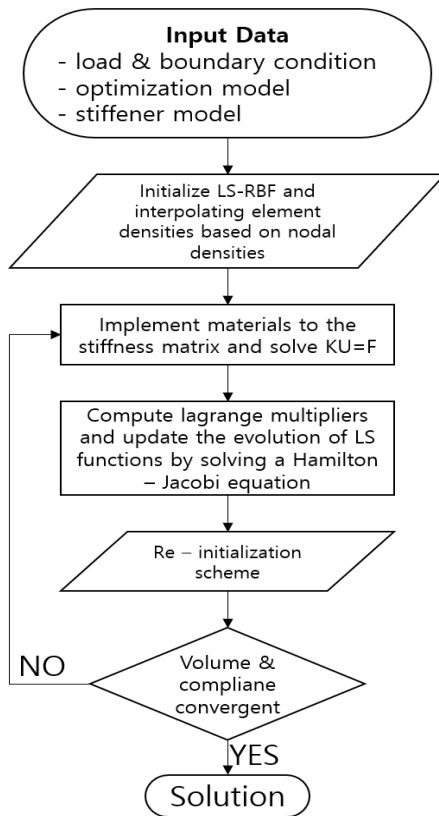
여기서,  $J(\phi)$ 는 목표함수,  $u$ 는 변위,  $u_0$ 는 초기 변형값,  $\epsilon$ 과  $C$ 는 각각 선형화된 변형 텐서와 Hook 탄성 텐서이고,  $b$ 는 내력을 나타낸다.

선형 탄성 평형 방정식은 에너지 이중 선형  $a(u, v, \phi)$  및 이중 선형 형식  $l(v, \phi)$  관점에서 약한 변동 형태로 작성된다.  $G(\phi)$ 는 제약조건으로  $V_{\max}$  (허용되는 최대 볼륨)를 설정하여 부피를 제한한다.

## 3. 위상최적화 전산 프로세스

연속적인 재료 경계면을 갖는 레벨셋 기반 위상 최적화방법에 적용하는 H-형강에 대한 LS-RBFs 위상 최적화 접근법의 전산 프로세스는 〈Fig. 3〉와 같다. 목적함수(최소 변형률 에너지 또는 최대 강성), 설계변수(재료 밀도), 설계 공간에 투입되는 재료 제약조건, 구조물의 형태 및 재료에 대한 초기 변수를 설정하는 초기화 과정, 선형 방정식의 해인 변위를 구하는 구조해석 과정, 목적함수를 설계 변수에 대해 편미분하는 민감도 해석 과정, 재료 경계면의 시간에 대한 법선방향으로의 확장을 레벨셋의 집합으로 정의하고, Wei et al. (2018)<sup>25</sup>이 제시한 헤밀턴 야코비 방법에 의해 새로운 레벨셋 집합으로 업데이트하는 최적화 과정으로 구성된다.

이러한 과정은 목적함수 값의 허용오차를 설정하여, 값의 변화가 허용오차보다 작을 때까지 반복적으로 수행된다.



〈Fig.3〉 A sequential computational flowchart of the present optimization procedures

## 4. 적용 예제

### 4.1 H형강 보강재의 모델 형상

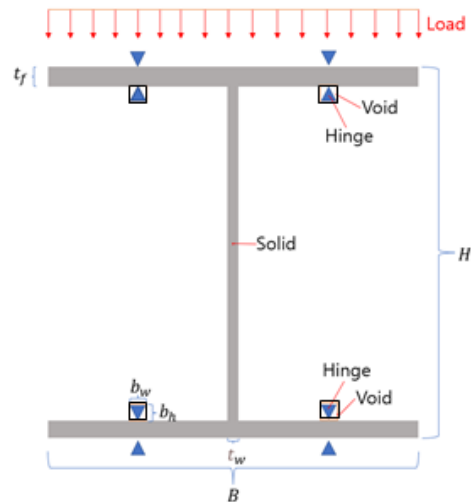
〈Fig. 4(a)〉는 H형 강보에 설치된 사각형 플레이트 스티프너의 성능 실험에서 알 수 있듯이, 일반적으로 시공상 제작상 편의를 위해 사각형 상의 판형을 스티프너로 사용하고 있다. 본 연구는 스티프너의 형상을 최적화하여 재료를 절감하고, 외부에서 작용하는 하중 효과와 이에 저항하는 구조물의 저항 성능(재료강도, 사이즈 등)의 설계식에서 요구되는 구조성능치인 변위 한계값을 목적 함수인 변형률 에너지 한계값으로 치환하는 설계 아이디어를 개념적으로 제시하고자 한다.

〈Fig. 4(b)〉는 H형강 보강재 모델을 나타낸다. 형강 상부에 등분포 하중이 작용하고, 충전부(Solid)는 플랜지와 웨브를 가지는 H형강 형상을, 공극부(Void)는 임의의 다른 부재와 볼트 접합을 가정하여 볼트 영역을 나타내며 힌지 부가 사용된다. 볼트 영역은 위상 최적화의 설

계 공간이 아니므로, 공극 부는 위상 최적화 전과정을 통해 재료 밀도 값이 없는 페시브(passive) 영역으로 모델링 한다.



(a) The experiment of H-beam with stiffener



(b) Sectional geometry for H-beam with stiffener.

〈Fig. 4〉 Numerical model of H-beam with stiffener

본 연구에서 사용할 H-beam 모델의 실제 크기와 H-beam을 1/4 스케일로 가정한 모델은 〈Table 1〉과 같다.

H-beam의 제원은  $H \times B \times t_w \times t_f$ (높이×너비×웨브 두께×플랜지 두께)이며,  $b_h \times b_w$ 는 볼트가 체결되는 영역의 높이와 너비를 나타낸다.

H형강과 구조최적화 되는 스티프너의 재료 강도는 일반적인 강재의 탄성계수(210,000MPa)를 적용하였으며, 프아송 비는 0.3으로 설정하여 위상 최적화를 수행한다.

〈Table 1〉 Actual or reduced specification of H-beam model (mm)

Actual Scale	H	B	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	b <sub>h</sub>	b <sub>w</sub>	H-beam area
#1	400	400	13	21	40	24	14%
#2	400	200	8	12	34	27	10%
#3	200	400	12	12	17	41	11.9%
1/4							
Reduced Scale	H	B	t <sub>w</sub>	t <sub>f</sub>	b <sub>h</sub>	b <sub>w</sub>	H-beam area
#1	100	100	3	6	10	6	14%
#2	100	50	2	3	8	6	10%
#3	50	100	3	3	4	10	11.9%

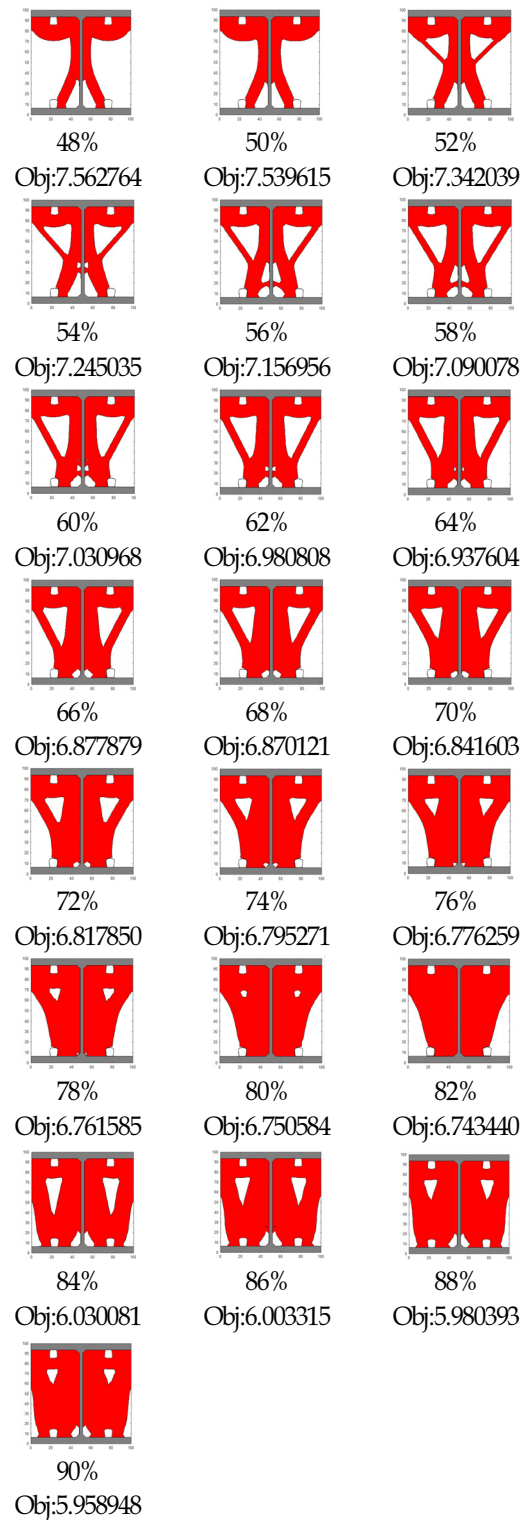
- $H \times B \times t_w \times t_f = \text{height} \times \text{width} \times \text{web thickness} \times \text{flange thickness}$
- $b_h \times b_w = (\text{void area}) \text{ height} \times \text{width}$

#### 4.2 재료 부피 별 스티프너의 위상최적화 결과

〈Figs. 5~7〉은 H-형강에 RBF(MQ)를 적용한 스티프너의 위상 최적화 결과(빨간색 영역)를 나타낸다. #1, #2, #3의 재료 부피는 모두 2%씩 점진적으로 증가시켜, 미세한 부피 변화를 제어하면서 효율적인 위상 최적화를 구현할 수 있음을 알 수 있으며, 위상 최적화의 결과로서 다양한 형상의 스티프너를 보여주고 있다. 여기서 솔리드 영역(D)은 볼트 영역으로 최적화의 공간에서 제외된다.

각 모델들은 공통적으로 설계 공간 내에서 재료가 없는 비어있는 형상이 다양한 위치와 형상으로 발견된다. 〈Fig. 7〉에 의하면 재료 부피가 48%가 넘는 시점부터 90%까지 목적함수(최소변형률 에너지)가 수렴된 결과를 보여준다. 본 결과를 설계 관점에서 확장하여 고려한다면, 재료 부피가 최대가 아닌 작은 부피를 제어함을 통하여, 유사한 강성 또는 설계 한계치에 근접하는 성능설계 기반 최적으로 투입되는 재료 부피를 찾아줌으로써 재료를 절감할 수 있다. 즉, 본 연구에서 제시하는 위상 최적화 결과는 100% 재료 부피를 가지는 사각형 상의 플레이트 스티프너의 대안으로 제안할 수 있다.

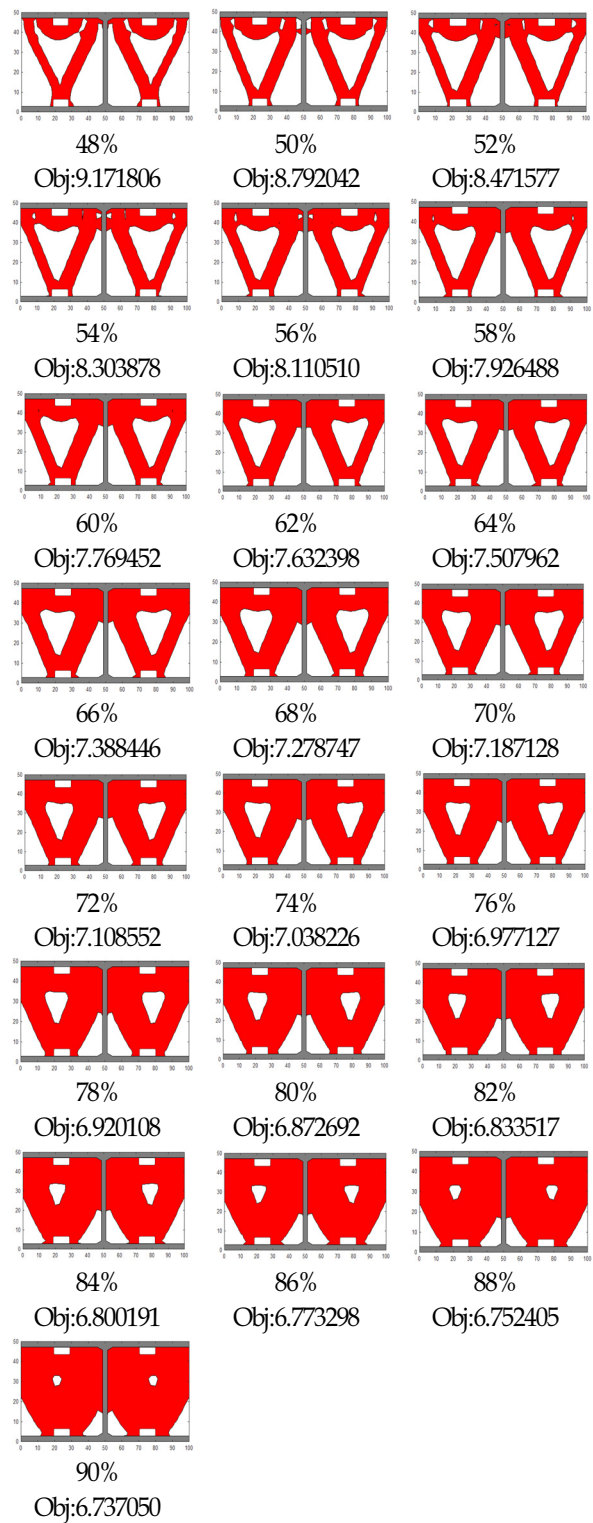
〈Figs. 5~7〉의 재료 부피는 전체 면적이 100%일 때 H-형강(#1, 2, 3) 자체 부피인 각각 14%, 10%, 11.9%를 포함하는 값이다. #2의 50% 결과를 예로 들면, 스티프너가 차지하는 재료 부피는 40%이다.



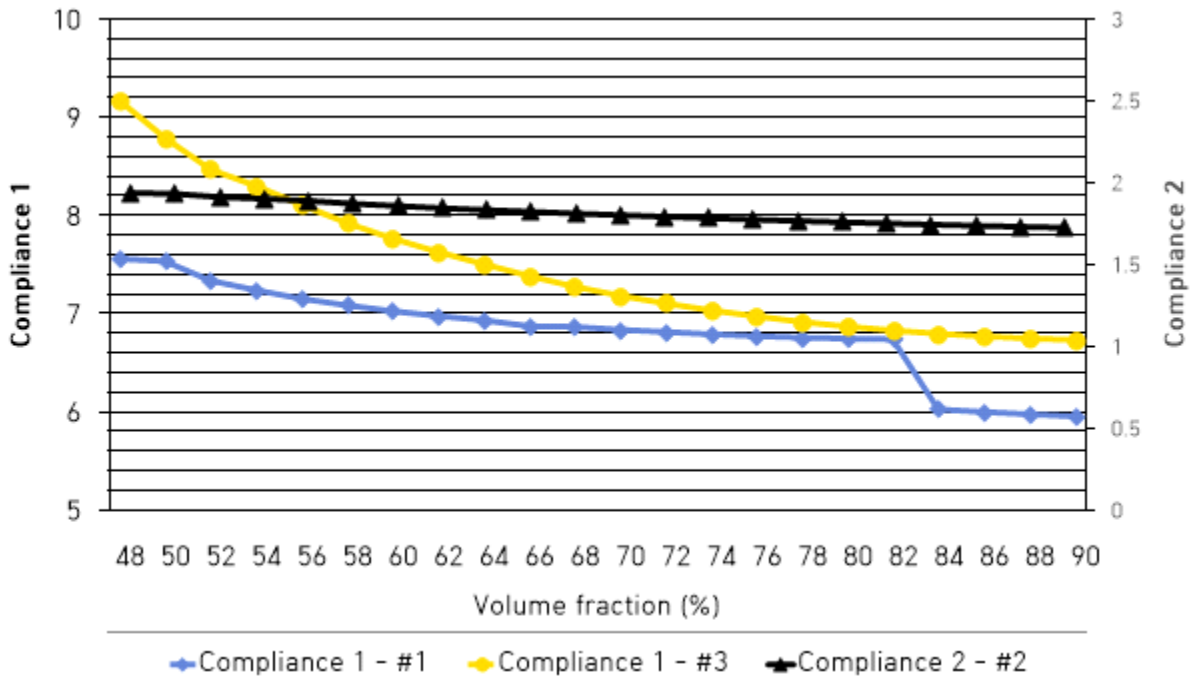
〈Fig. 5〉 #1, 100×100×3×6 optimal topology configuration in terms of volume fraction



<Fig. 6> #2, 100×50×2×3 optimal topology configuration in terms of volume fraction



<Fig. 7> #3, 50×100×3×3 optimal topology configuration in terms of volume fraction



〈Fig. 8〉 Non-dimensional converged values of objective function in terms of volume fractions.

### 4.3 H-형강 스티프너의 분석

〈Fig. 8〉은 투입되는 재료부피에 따른 각 모델의 목적함수 수렴값을 나타낸다. 모델 #1, #3는 준수도 1에 대응하는 좌측수직축을 기준으로 작성하였으며, 모델 #2는 준수도 2에 대응하는 우측수직축을 기준으로 하였다.

#2를 제외한 모델들은 공통적으로 82%부터 48%까지 점차 수렴하는 거동을 보인다. 단, 80%에서 #1은 준수도가 큰 폭으로 감소함과 동시에 보이드 형상의 차이가 발생한다. #3은 전체 구간에서 준수도의 기울기가 점차 안정되는 수렴형태를 나타낸다. 또한, #2에 비해 높은 준수도에서 시작하여 #1에 비해 높은 변화율을 보여준다. #1은 82%와 84%구간에서 한번 큰 수치로 변화 후 일정하게 유지되는 변화를 보여준다. #2는 기본적으로 #1과 #3에 비해 약 0.22에서 0.25배의 수치에서 시작하여 48%의 수치를 상대적으로 일정하게 유지하는 형상을 보여준다. #2는 적은 재료를 사용해도 충분한 안정성(강성)을 도모한다.

〈Fig. 8〉은 특정한 H-형강의 재원과 스티프너를 가정한 경우, 설계자 또는 엔지니어가 요구되는 성능설계값(한계변위)을 설정한다면 한계변위값을 최소변형률에너지 공식에 입력할 수 있고, 이에 해당하는 최소변형률

값을 가지는 재료밀도를 찾아낼 수 있는 성능설계기반 구조설계 개념을 제시하는 의미가 있다.

## 5. 결론

본 연구는 재료경계면의 연속성을 가지는 레벨셋 기반 위상최적화 설계를 제시하고, H-형강의 스티프너 형상을 찾고자 한다. 단순한 형상 탐색이 아니라, 실제 설계에서 요구되는 한계변위값이내에 근접하는 스티프너의 최적 재료부피와 최적형상을 찾아내는 설계방법론을 제시한다.

스티프너 설계가 본 연구에서 제시하는 설계방법론의 적용예제로서 그 효과를 검증하였고 다음과 같은 분석 내용으로 요약한다.

1. 최대부피 이외의 변형률에너지를 최소화하여 구조적 안전성(강성)을 확보하는 최적의 보강재는 공통적으로 재료가 없는 비어있는 형상을 갖는다.

2. 재료부피에 따른 준수도는 48%에서부터 90%까지 준수도를 나타내며, 전체적으로 재료부피가 많이 투입되면 목적함수값(최소변형률 에너지)이 작아지는 현상을 볼 수 있다.

3. 볼트 영역(Void 영역)과 H-beam 모델(Solid 영역)에 따른 다양한 형태의 위상 최적화를 나타낼 수 있다.

본 논문에 대한 한계점으로 H-beam에 대한 다양한 하중(수평하중, 휨하중, 장기처짐 등)은 고려는 되어 있지 않아 3차원 모델에서 구현하려면 추가적인 연구가 필요하다. 또한, 동일한 조건 내에서도 재료 선정에 따라 E(탄성계수)값이 달라 변형률 에너지에 변화가 생겨 또 다른 형상이 생성된다. 즉, 중공 형태의 스티프너는 부피의 변화에 따라 주조형태가 달라짐으로 설계자의 요구 조건에 충족할 수 있는 정형화된 형태를 제작하기 어렵다. 그러므로 추후 연구가 필요할 것으로 사료된다.

### 감사의 글

This work was supported by the National Research Foundation of Korea(NRF) grant funded by the Korea government (MSIT) (No. 2022R1A2C1003776).

### References

1. Alinia, M. M. "A study into optimization of stiffeners in plates subjected to shear loading." *Thin-walled structures*, Vol.43, No.5, pp.845-860, 2005, doi: 10.1016/j.tws.2004.10.008
2. Chen, S., & Wang, X., "Finite element analysis of distortional lateral buckling of continuous composite beams with transverse web stiffeners", *Advances in Structural Engineering*, Vol.15, No.9, pp.1607-1616, 2012, doi: 10.1260/1369-4332.15.9.160
3. Tsavdaridis, K. D., & Galiatsatos, G., "Assessment of cellular beams with transverse stiffeners and closely spaced web openings", *Thin-Walled Structures*, Vol.94, pp.636-650, 2015, doi: 10.1016/j.tws.2015.05.00
4. Rockey, K. C., & Skaloud, M., "The ultimate load behaviour of plate girders loaded in shear", *The Structural Engineer*, Vol.50, No.1, pp.29-47, 1972.
5. Guarnieri, G., "Collapse of plate girders with inclined stiffeners.", *Journal of Structural Engineering*, Vol.111, No.2, pp.378-399, 1985, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1985)111:2(378)
6. Chen, X. W., Yuan, H. X., Du, X. X., Zhao, Y., Ye, J., & Yang, L., "Shear buckling behaviour of welded stainless steel plate girders with transverse stiffeners", *Thin-Walled Structures*, Vol.122, pp.529-544, 2018, doi: 10.1016/j.tws.2017.10.043
7. Hassanein, M. F., "Imperfection analysis of austenitic stainless steel plate girders failing by shear", *Engineering Structures*, Vol.32, No.3, pp.704-713, 2010, doi: 10.1016/j.engstruct.2009.11.016
8. Olsson, A., "Stainless steel plasticity: material modelling and structural applications (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet), 2001.
9. Bendsøe, M. P., "Optimal shape design as a material distribution problem", *Structural optimization*, Vol.1, pp.193-202, 1989.
10. Bendsøe, M. P., & Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.71, No.2, pp.197-224, 1988, doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2
11. Xie, Y. M., & Steven, G. P., "A simple evolutionary procedure for structural optimization", *Computers & structures*, Vol. 49, No.5, pp.885-896, 1993, doi: 10.1016/0045-7949(93)90035-C
12. Querin, O. M., Steven, G. P., & Xie, Y. M., "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm", *Engineering computations*, Vol.15, No.8, pp.1031-1048, 1998.
13. Osher, S., & Sethian, J. A., "Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations", *Journal of computational physics*, Vol.79, No.1, pp.12-49, doi: 10.1016/0021-9991(88)90002-2
14. Sethian, J. A., & Wiegmann, A., "Structural boundary design via level set and immersed interface methods", *Journal of computational*



- physics, Vol.163, No.2, pp.489-528, 2000, doi: 10.1006/jcph.2000.6581
15. Osher, S. J., & Santosa, F., "Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I: Frequencies of a two-density inhomogeneous drum", *Journal of Computational Physics*, Vol.171, No.1, 272-288, 2001, doi: 10.1006/jcph.2001.6789
  16. Allaire, G., Jouve, F., & Toader, A. M., "Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method", *Journal of computational physics*, Vol.194, No.1, pp.363-393, 2004, doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.032
  17. Wang, M. Y., Wang, X., & Guo, D., "A level set method for structural topology optimization", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.192, No.1-2, pp.227-246, 2003, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00559-5
  18. Xia, Q., Shi, T., & Wang, M. Y., "A level set based shape and topology optimization method for maximizing the simple or repeated first eigenvalue of structure vibration", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.43, pp.473-485, 2011, doi: 10.1007/s00158-010-0595-6
  19. Rasmussen, K. J. R., & Hancock, G. J., "Design of cold-formed stainless steel tubular members. II: Beams", *Journal of Structural Engineering*, Vol.119, No.8, pp.2368-2386, 1993, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1993)119:8(2368)
  20. Gardner, L., & Theofanous, M., "Discrete and continuous treatment of local buckling in stainless steel elements", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol.64, pp.11, pp.1207-1216, 2008, doi: 10.1016/j.jcsr.2008.07.003
  21. Becque, J., Lecce, M., & Rasmussen, K. J., "The direct strength method for stainless steel compression members", *Journal of constructional steel research*, Vol.64, No.11, pp.1231-1238, doi: 10.1016/j.jcsr.2008.07.007
  22. Wang, M. Y., & Wang, X., "PDE-driven level sets, shape sensitivity and curvature flow for structural topology optimization", *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.6, No.4, pp.373, 2004.
  23. Wang, S., & Wang, M. Y., "Radial basis functions and level set method for structural topology optimization", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.65, No.12, pp.2060-2090, 2006, doi: 10.1002/nme.1536
  24. Buhmann, M. D., "Radial basis functions: theory and implementations", Cambridge university press, Vol.12, pp.89-98, 2003.
  25. Wei, P., Li, Z., Li, X., & Wang, M. Y., "An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.58, pp.831-849, 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1904-8
- Received : October 10, 2022
  - Revised : November 22, 2022
  - Accepted : November 27, 2022