



Research Article

Elementary school students' metaphors of angle concepts

Kim, Sangmee*

Associate Professor, Chuncheon National University of Education

*Corresponding Author: Sangmee Kim (sangmee@cnu.ac.kr)

ABSTRACT

This study used metaphors as a analysis tool to investigate elementary school students' formation and development of angle concepts. For this purpose, the students were asked to write words associated with angle, right angle, acute angle and obtuse angle and to explain why. In case of angle and right angle, responses of 268 students from 3rd to 6th graders were analyzed and for acute angle and obtuse angle, those of 192 students from 4th to 6th graders were examined. As the results of categorizing the metaphors, they can be classified into categories such as; (1) qualitative aspects: 'things metaphor', 'personality metaphor', 'emotions metaphor' etc., (2) quantitative aspects: 'motions metaphor', 'changes metaphor', 'emotions metaphor' etc., and (3) relational aspects: 'shape relations metaphor.' The metaphoric expressions were prominent in 'qualitative aspects' associated with shapes. As for the other aspects, 'quantitative aspect'- the size of angles and the amount of spread and 'relational aspects' - elements of angle and relationship with another shapes, the frequency increases were shown to as grade levels were up. In case of right angle and acute angle, 'qualitative aspects' associated with shapes were outstanding and the frequency of the metaphoric expressions of obtuse angle was distributed similarly in three aspects. As the figure strand and the measurement strand are integrated to an strand in the 2022 revised curriculum, we need more discussion of multifaced aspects of angle and the learning sequences in the 'figure and measurement' strand.

Key words: metaphor of angles, mathematical metaphor, students' angle concepts, right angle, acute angle, obtuse angle

초등학생의 각 개념 형성에 나타난 수학적 은유

김상미*

춘천교육대학교 부교수

*교신저자: 김상미 (sangmee@cnu.ac.kr)

초록

이 연구는 초등학생이 각의 다면성을 어떻게 형성하고 학년이 올라가면서 초등학생의 각 개념은 어떻게 변화하는가를 은유 분석하였다. 초등학교 각 개념 학습 요소인 각, 직각, 예각, 둔각에 대하여, 이 용어를 생각하면 떠오르는 것을 낱말로 표현하고 그 근거를 서술하도록 하였다. 각과 직각은 3학년 1학기에 학습하므로 3~6학년 총 268명의 응답을 분석 대상으로 하였고, 예각과 둔각은 4학년 1학기에 학습하므로, 4~6학년 총 192명의 응답을 분석 대상으로 설정하였다. '은유적 표현'과 그 '근거'를 짝지어 은유적 표현을 정리하고, 기하적 도형이라는 질적 측면, 측정 및 회전량이라는 양적 측면, 점과 선의 구성 요소와의 관계적 측면에서 코드화하였다. 은유적 표현을 범주화한 결과, 질적 측면에서 <사물의 은유>, <인간형의 은유>, <감정의 은유> 범주 등, 양적 측면에서 <움직임의 은유>, <변화의 은유>, <감정의 은유> 범주 등, 관계적 측면에서 <도형 관계의 은유> 범주를 찾았다. 초등학생의 은유적 표현은 모양으로 접근하는 각의 질적 측면에서 가장 많이 나타났고, 학년이 올라가면서 각의 크기 및 벌어진 정도의 양적 측면이나 각의 구성 요소 및 다른 도형과의 관계적 측면이 증가하였다. 직각과 예각은 모양의 접근이 두드러졌고 둔각은 세 가지 접근의 빈도 분포가 유사하였다. 이 연구에서 추출한 초등학생의 은유적 표현은 각 개념 형성을 파악하는 기초 자료로 활용되거나 수업 구성 및 학습 자료로 활용될 수 있을 것이다. 다면적인 각 개념의 형성을 위하여 차시별 도입 방법만이 아니라 관련 학습 내용 간의 학습 계열의 추가적인 논의가 필요하고, 2022 개정 수학과 교육과정에서 도형과 측정 영역이 하나의 영역으로 변경되면서 각의 다면성과 연계하여 학습 계열 설정의 논의가 더욱 중요한 시기이다.

주요어: 각의 은유, 수학적 은유, 직각, 예각, 둔각

Received February 09, 2023

Revised February 13, 2023

Accepted February 13, 2023

2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

Copyright © 2023 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

각이 어떤 종류의 것인가에 대하여 오랜 논쟁거리였고, 각을 보는 다양한 입장은 오랜 그리스 시대부터 찾을 수 있다. 그리스 시대의 각 개념은 입체와 면에서 이루어지는 것으로서 곡면의 각, 직선과 곡선 사이의 각, 곡선 사이의 각을 다루었다. 이 당시의 각은 곡선으로 된 각도 일반적으로 인정하고 있다. 아리스토텔레스의 <형이상학>에서 각이란 선의 꺾인 정도를 말하고 한 개의 선이 굽어서 만들어가는 것이었다. 유클리드의 <기하학 원론>에서 각을 기운 정도나 직선 각을 정의하는 것은 오히려 이 당시의 각 개념으로는 새로운 시도라고 할 수 있다. 우리나라 초등 수학과 교육과정의 논의에서 각 개념에 관한 관심이 대두된 것은 반직선과 관련한 논의에서 찾을 수 있다. 초등 수학과에서 4차 수학과 교육과정 시기까지는 각을 두 반직선(또는 사선)이 한 점에서 만나는 것으로 다루었으나, 5차 수학과 교육과정 시기부터 반직선이 삭제되면서 각을 표현하는 방식에서 반직선을 삭제하고 선분으로 표현되었다. 2009 개정 교육과정 시기부터 현행 2022 개정 교육과정 시기는 반직선을 재도입하고 각을 두 반직선이 한 꼭짓점에서 만나는 것으로 정의하고 있다. 이러한 반직선의 도입을 둘러싼 변화는 각을 수학적으로 어떻게 정의하는가에 관한 논의와 밀접하게 관련되어 있지만, 그 이전에 각을 바라보는 관점이나 다른 도형과 깊은 관련이 있다.

수학교육에서 각을 바라보는 입장이나 정의하는 방식에 관한 논의와 더불어 각 개념의 다면적인 성격도 주목받았다. 각의 다면성에 대한 논의는 수학에서 오랜 논의였고 수학교육에서도 지속해서 논의되어 왔다(Lee, 2001; Mitchelmore & White 2000; Keiser, 2004; Fyhn, 2006; Henderson & Taimina, 2007; Kim, 2018a; Kim, 2018b; Kim & Heo, 2022). 각의 다면성에 대하여 각을 동적 측면과 정적 측면으로 구분하기도 하고(Lee, 2001), 각을 기하적 모양(geometric shape), 이동(dynamic motion), 측정(measure)의 세 측면으로 접근하기도 하고(Fyhn, 2006; Henderson & Taimina, 2007), 각을 질적 측면, 양적 측면, 관계적 측면의 세 측면으로 설정하기도 하면서(Kim, 2018a) 각 개념을 논의하였다. 선행 연구들은 학습 내용으로서 각의 다면성이란 어떤 것인가와 이를 학습 계열로 구성하는 방식에도 질문을 제기하고 있다. 초등 수학과는 초등학교 교육과정 및 수학 교과서를 구성하면서 초등학생의 학습 내용으로서 다면적인 성격을 어떻게 설정할 것인지 또는 어떤 측면과 어떤 순서로 계열화할 것인지 등의 논의가 계속되고 있다. 한편 초등학생의 각 개념 형성에 있어서 각의 다면성으로 인하여 겪는 어려움을 보고 하고 있다. 각을 하나의 모양이라는 관점에서 각 개념을 형성하면서 각을 측정이나 회전의 관점과 관련짓지 않았을 때, 각의 크기 이해에서 어려움을 지적하였다. 각의 크기를 주어진 각의 그림에서 각의 변의 길이가 다르면 다른 각이라고 생각하거나 주어진 그림에서 각의 변이 길면 각도 더 크다고 생각하기도 한다. 또한 다각형의 구성 요소로서 각을 다룰 때 각 개념의 다면성과 어떻게 연계할 수 있을지 질문도 제기된다. 지금까지의 초등 수학과에서 각의 다면성에 관한 연구들은 주로 가르칠 내용으로서, 수학과 교육과정 및 교수의 관점에서 논의되어 왔다. 초등학생에게 각 개념 형성에서 각의 다면성이 주는 어려움에 관하여 몇몇 연구가 보고 되고 있으며, 이 연구들은 주로 설정한 각 개념에서 정오답 하는가 또는 오류가 없는가라는 관점에서 접근한다. 그 밖에도 초등학생의 각 개념 형성 및 변화에 관한 연구는 여전히 진행 중이다. 이 연구는 초등학생의 각 개념은 변화하고 깊어진다는 가정에서 각 개념을 형성하는 과정에 초점을 두어 초등학생은 각의 다면적 성격을 어떻게 형성하고 있는지 또한 어떻게 변화하고 있는지를 살펴보고자 한다.

이 연구는 초등학생의 각 개념 형성에서 다면성의 이해를 탐구하고자 초등학생의 은유 분석을 활용하고자 한다. 수사학의 전통에서는 은유는 일종의 수사적 표현으로 다루어져 왔다면, 최근 개념적 은유 이론은 은유를 수사적인 장식으로서가 아니라 인간의 추론을 이해하는 단서로 활용한다. 은유는 두 경험 영역을 연계하면서 추상적인 것과 구체적인 것, 언어적인 것과 지각적인 것, 개념적인 것과 사실적인 것 등과 결합하면서 개념과 개념과의 관계망을 형성한다. 초등학생들의 은유는 그 성격상 낱말의 흩어진 개념으로서가 아니라 개념망에서 이해할 수 있다. 초등학생들이 표현하는 수학적 은유는 특정 개념에 관하여 말할 때 다른 개념과 어떻게 연관 지어 인식하는가를 말해 준다. 이 연구는 수학교육 연구방법론으로서 은유 분석 방법을 도입하여 각 개념을 분석하고자 한다. Lakoff와 Núñez (2000)의 방법을 활용하여 목표 영역과 근원 영역을 사상하는 방식으로 은유를 추출하고 논의한다. 초등학교 수학 학습에서 전개하는 각 개념에 대한 접근이 초등학생의 각 개념 형성 과정에서 어떻게 나타나는지 초등학생들의 은유적 표현을 통하여 이해하고자 한다. 초등 수학과 교육과정에 명시된 각 개념 학습 요소로 각, 직각, 예각, 둔각에 대하여 초등학생의 각 개념에 관한 은유적 표현을 수집하고 각의 세 가지 측면에 따라 은유적 표현의 범주를 추출한다. 이를 토대로 초등학생들은 각의 다면성에 대하여 각 개념을 어떻게 형성하고 있는지 논의하고, 학년이 변하면서 각 개념은 어떻게 변화하는지 분석한다.

이론적 배경

각의 의미와 다면성

각을 정의하는 방식은 그리스 시대로 거슬러 올라가면 그때의 각은 입체와 면에서 이루어지는 것으로 곡선 사이의 각이나 직선과 곡선 사이의 각도 다루었다(Lee, 2001). 유클리드의 <기하학 원론>에서 각의 정의와 관련된 두 항목을 찾을 수 있다. 하나는 각이란 두 선이 만나서 기운 정도라는 것과 또 하나는 각을 만드는 두 선이 직선일 때 직선 각이라고 부른다는 것이었다. 현재 초등 수학과 교육과정에서 각 개념은 곡선 각은 제외하고 직선 각을 다루고 있지만, 그 당시 각의 관점에서 직선 각이라는 개념은 새로운 것이라고 할 수 있다. 우리나라 초등 수학과 교육과정에 따른 교과서를 살펴본다면 각을 정의하는 방식도 변화되어 왔다. Kim (2018a)은 교수요목기부터 2015 개정 교육과정까지 각 시기별 교과서에서 각을 어떻게 정의하고 표현해 왔는지를 분석하였다. 각의 정의 방식을 분석한 결과, 교수요목기와 1차 수학과 교육과정은 각을 ‘모’라고 도입하였고, 2차에서는 모난 모양이라는 것과 한 점에서 두 선이 이루는 모양이라는 두 가지 정의가 혼재하였고, 3차부터 2015 개정까지는 한 점에서 두 반직선(또는 사선, 선분, 직선)으로 이루어지는 것으로 정의하였다. 각의 표현을 분석한 결과, 1차는 다각형의 일부로 각을 표시하였고, 2차~4차는 화살표로 각의 변을 반직선(또는 사선)으로 나타냈고, 5차 이후 2007 개정까지 반직선의 개념이 교육과정에서 삭제됨과 동시에 각의 변에서 화살표를 삭제하였고, 2009 개정에서 반직선의 개념이 재도입되면서 각의 변 위에 한 점을 표시하여 계속 나아가는 것으로 나타냈다.

선행 연구들은 각의 다면성을 논의하면서 다면적인 성격을 몇 가지 측면 또는 범주로 해설하였다(Freudenthal, 1983; Lee, 2001; Mitchelmore, 1998; Mitchelmore & White, 2000; Keiser, 2004; Fyhn, 2006; Henderson & Taimina, 2007). 각의 다면성에 관한 논의는 유클리드의 기하학 원론에서도 찾을 수 있다. 유클리드의 기하학 원론은 아리스토텔레스의 범주에서 각을 어떤 범주라고 보아야 하는가에 대하여 양의 범주, 질의 범주, 관계 범주라는 세 범주에 대하여 논쟁하고 있음을 소개한다. 선으로 나누면 면이고 면으로 나누면 입체가 되고 각은 면이나 입체이므로 양(quantity)의 범주라고 하고, 사물의 형태는 더 많거나 더 적은 것이 아니며 각은 일종의 도형이므로 질(quality)의 범주라고 하고, 각은 두 선이 놓이는 평면 사이의 관계로서 기울어진 정도로서 관계(relation)의 범주라고 한다. Kim (2018a)은 선행 연구를 종합하여 각의 다면적인 성격을 초등 수학 학습 내용으로서 각과 관련하여 세 가지 측면으로 설정하고 초등 수학 교과서를 분석하였다. 각 개념이 갖는 세 가지 측면으로 기하적 도형이라는 질적 측면, 회전량이라는 양적 측면, 점과 선의 구성 요소와의 관계적 측면을 설정하고, 초등 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서의 흐름을 따라 서술 방식 및 도입 방식을 분석하였다. 분석 결과에 따르면 각을 도입하는 방식은 주로 기하적인 도형이나 구성 요소의 학습에 집중하고 회전량으로서의 측면은 거의 다루지 않는다고 지적하고, 각의 다면적인 성격을 다양하게 경험하고 폭넓게 각 개념을 형성하도록 지원이 필요하다고 밝혔다. Kim과 Heo (2022)는 중학교 수학 교과서의 각을 대상으로 동적 관점과 양적 관점에서 각 개념 제시 양상을 분석하고 초등 학교 교과서와 연계 및 차이점을 논의하였다. 중학교 교과서는 각과 각도를 근접한 시기에 도입함으로써 확장적인 관점을 제시하고 있다고 밝히고 반면에 각과 각도의 혼란 문제를 제기하였다.

수학교육에서 학생들의 각 개념 발달의 연구도 계속하여 진행되어 왔다. Mitchelmore와 White (2000)는 각 개념 발달을 추상화의 수준과 관련지어 3수준을 제시한다. 기울기, 회전, 교차, 굽어짐, 방향, 열림 등의 14가지 물리적 각을 설정하고, 이들 각 개념을 통하여 각 개념의 발달 수준을 분석하였다. 1수준은 상황적 각 개념(situated angle concepts)으로서 일상적 개념과 관련짓고, 물리적인 각을 상황이나 실행에서 경험하는 것과 관련지었다. 학교 수학이 시작되면서 형성된다고 보고, 예를 들어 6세 아동은 언덕을 인식하거나 가파른 변화를 이해하게 된다. 2수준은 맥락적 각 개념(contextual angle concepts)으로서 경험적 추상화와 관련지었다. 예를 들어 초등학교 저학년은 ‘기울기(slope)’와 같은 어휘를 접하지만, 그 용어를 거의 정의하지 못한다. 3수준은 추상적 각 개념(abstract angle concepts)으로서 반영적 추상화의 형성과 관련지었다. 예를 들어 4학년 학생들은 교차, 굽어짐, 기울기 간의 유사성을 인식하기 시작한다. 이 연구는 피아제의 인지발달 단계와 반월의 수준 이론과 연계하고 있다. Keiser (2004)는 6학년 교실에서 각의 측정, 각의 변, 각도의 이해라는 세 가지 질문을 설정하여 각 개념에서 어려워하는 점을 분석하였다. 각의 변이 길어지면 각의 크기가 커진다고 생각하거나 각의 두 변 사이 공간이 커지면 각의 크기도 커진다고 생각하면서 각의 변과 각의 크기 관계를 혼동하고 어려워하였다. 각의 변에서 일부 학생들은 각의 변은 곡선이어도 각이라고 생각하였고, 각도의 이해에서 0° , 180° , 360° 일 때 어려워하였다. 최근에 학

생들의 각 개념과 관련하여 각의 이해 및 오개념 분석의 연구도 있었다(Devichi & Munier, 2013; Crompton, 2015). Kim과 Kim (2020)은 4학년 학생들의 각 개념을 조사하고 정형화된 문제 해결은 잘 하지만 실생활과 연결된 문제는 어려워한다고 밝히고, 도구적 이해가 아니라 관계적 이해가 요구되며 현실적인 문제 상황을 해결하도록 지원해야 한다고 하였다. 선행연구들은 초등학생의 각 개념 형성에서 각의 다면성 연계에 따른 장점 및 난점을 보고 하고 있으며, 초등학생의 각개념의 학습에서 각의 다면성을 어떤 방법으로 연계하고 지원할 것인지 연구와 지원이 필요하다.

수학적 은유 분석

은유(metaphor)라는 낱말은 희랍어 ‘metaphora’에서 ‘meta+pherein’의 조합으로 어휘상으로 ‘넘어+가져가다’를 뜻한다. 은유는 수사적으로 원관념을 숨기고 보조관념으로 대상을 드러내는 방식이다. Lakoff와 Johnson (1980)의 책 ‘Metaphors we live by’를 시작으로 개념적 은유의 탐구는 본격화되었다(Johnson, 1981; Lakoff, 1987, 1993; Lakoff & Johnson, 1980, 1999). 개념적 은유 이론(conceptual metaphor theory)에서 은유는 언어의 장식용 장치가 아니라 현실을 구조화하고 생성하는 개념적 도구이다. 개념적 은유 이론이 본격화되면서 지지와 비판 속에서 그 정의도 변화하고 있지만, 큰 틀에서 통용되는 정의는 개념적 은유란 (일반적으로 추상적인) 하나의 경험 영역을 (일반적으로 구체적인) 다른 경험 영역으로 이해하는 것이다(Kövecses, 2010, 2015). 잘 알려진 은유로 Reddy(1993)는 ‘의사소통’을 ‘도관(Conduit)’으로 비유하면서 ‘도관 은유(Conduit metaphor)’가 널리 퍼졌다. 의사소통의 영역을 일종의 운송 영역으로 투사하여 개념적 사상을 만들었고, 의사소통을 도관을 따라가는 운송의 구체적인 과정에서 바라보게 된다. 이와 같은 은유의 접근은 단지 언어적 수사가 아니라 인간의 추론을 보여주는 사례로서 은유에 관심을 일으켰다.

은유는 구체와 추상, 언어와 지각, 개념과 사실 사이의 오가는 것을 넘어서서 그 대상에 대한 철학이 개입되어 있다. 수학에 관한 은유를 말할 때, 그 은유 속에 수학의 정체성과 관련한 철학이 개입되고 수학적 실천에도 영향을 준다(Park, 2017). 두 영역을 오가는 은유의 이원적인 속성으로 인하여 은유에 관한 평가는 상상력의 원천이라고 지지받기도 하고 또 한편으로 인간의 판단을 흐리고 혼란스럽게 만드는 것이라고 비난받기도 하였다(Kim, 2005). 특히 수학을 정확하고 명확한 학문이어야 한다는 입장에서 은유가 주는 애매함과 모호함은 판단을 흐릴 수 있으므로 제거해야 할 대상이라고 말하기도 한다. 이에 대하여 Sfard (2000)는 수학을 본다면 ‘은유와 엄밀성 사이를 휘젓는 담론(a discursive steering between metaphor and rigor)’이라고 말하고, 은유는 수학자가 새로운 여행을 시작할 수 있는 단서라고 밝혔다. 수학을 불확실하고 성장하는 학문으로 보는 최근의 입장에서 본다면, 오히려 은유의 애매함이 나 모호함은 수학을 성장시키는 자원이 된다고 할 수 있다.

교육 연구에서 은유 연구는 교사의 인식과 실행 분석(Clandinin, 1986; Bullough, 1991; Cassel & Vincent, 2011), 교육 담론으로서 은유(Sticht, 1993; Cameron, 2003), 학생의 개념으로서 은유(Armstrong, 2008), 연구방법론으로서 은유(Schmitt, 2005), 교수법으로서 은유, 추론으로서 은유 등 다양한 접근이 있다. 수학교육에서 은유 연구로는 수학과 및 수학교육관에 관한 은유(Nolder, 1991; Presmeg, 1997; Sfard, 1994, 1997, 1998, 2000; Neyland, 2003), 수학 교사의 은유(Chapman, 1997; Heaton, 2000; Krussel, Edward, & Springer, 2004; Kim, 2005; Cassel & Vincent, 2011). 수학 개념에 관한 학생들의 은유(Chui, 1994; Ju & Kwon, 2003; Kim & Shin, 2007), 수학교육 연구 방법론으로서 은유(Danesi, 2007) 등 여러 분야에서 나타나고 있다.

수학적 은유로 잘 알려진 Chui (1994)와 Lakoff와 Núñez (2000)의 연구가 있다. 이들이 수학적 은유를 통하여 밝히고자 하는 바는 다를 수 있겠지만, 은유를 분석하는 방법은 유사하다. 목표 영역(target domain)과 근원 영역(source domain)의 사상으로 은유를 추출하는 방식이다. 산술(목표 영역)을 움직임(근원 영역)으로 사상하여 산술은 ‘움직임(Motion along a path)’이라는 ‘움직임 은유’를 밝혔다(Chui, 1994, p. 37). 산술은 움직임이라는 은유에 따르면, 산술 연산은 수직선을 따라 움직이는 행위이고, 원점 0은 출발점, 원점에서 오른쪽으로 가는 것은 양의 정수 N , 원점에서 왼쪽으로 가는 것은 음의 정수 $-N$, 원점에서 거리는 절댓값이다. Lakoff와 Núñez (2000)의 ‘Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being’은 그 책 제목에서 보이듯이 수학은 인간 마음과 무관하다는 기존의 가정을 비판하면서 마음에 근거한 수학(mind-based mathematics)을 주장하였다. 무의식적이고 일상적으로 주고받는 언어를 통하여 수학적 은유를 분석하고 추상적인 수학 개념의 기원을 연구하였다. 집합론(목표 영역)을 용기(근원 영역)로 사상하여 집합론은 ‘용기(Containers)’라는 ‘용기의 은유’를 말하였다(Lakoff & Núñez, 2000, p. 123). 집합론은 용기(그릇)라는 용기의 은유에 따르면, 용기의 내부는 집합, 용기 내부의 사물은 집합의 원소, 용기 내부의 용기는 부분 집합, 용기의 외부는 여집합

등으로 말할 수 있다. 이러한 (일반적으로 추상적인) 목표 영역을 (일반적으로 구체적인) 근원 영역으로 사상하여, 다른 영역에서 개념을 다시 바라보게 된다. 이 밖에도 수학교육에 잘 알려진 수학적 은유로는 함수를 기계(machines)로 보는 ‘기계 은유’, 등호를 천칭(양팔 저울, scales)으로 사상하는 ‘천칭(양팔 저울) 은유’가 있다.

연구 방법

연구 대상

이 연구는 초등학생이 각 개념의 다면적인 측면에서 어떤 은유를 형성하고 있는가와 학년별 변화 양상을 파악하고자 하였다. 현행 초등학교 교육과정에 따른 교과서는 각 개념을 3학년 1학기 평면도형에서 명시적으로 도입하고 있다. 이 연구는 각 개념을 학습해가면서 나타내는 은유 및 그 변화를 분석하고자, 초등학교 수학과에서 각 개념을 배운 이후 시기로 설정하였다. 3학년 1학기 과정을 마친 이후에 3~6학년 학생을 대상으로 설문하여 자료를 수집하였다. 3학년은 서울지역 2학급과 도 지역 3학급으로 총 5개 학급을 선정하였고, 4~6학년은 서울지역 학년별 2학급씩 도 지역 학년별 1학급씩으로 총 9개 학급을 선정하였다. 3학년 98명, 4학년 62명, 5학년 86명, 6학년 64명의 총 310명에게 설문을 요청하여 자료를 수집하였다.

자료 수집

이 연구는 설문지를 통하여 수집된 자료로 각 개념에 대한 은유를 분석하였다. 2022년 9월 중 3주간(9월 11일 ~ 9월 31일) 설문 자료를 수집하였다. 은유 분석을 위한 설문 문항 및 분석 과정은 선행 연구(Chapman, 1997; Schmitt, 2005; Danesi, 2007; Reeder, Utley, & Cassel, 2009; Cassel & Vincent, 2011)를 참조하였다. 은유 분석을 위하여 은유적 낱말로 표현하고 그 근거를 서술하도록 설문 문항의 형식을 설정하였다. 각 개념과 관련된 용어로 각, 직각, 예각, 둔각을 제시하였고, 이 용어를 생각하면 떠오르는 것을 하나의 낱말로 표현하도록 하였다. 이와 함께 초등학생 자신이 표현한 낱말에 대하여 그 근거를 기술하도록 하였다. 예를 들어, 설문 문항은 “나에게 ‘직각’은 __이다. 왜냐하면, __이기 때문이다.”의 형식이었다.

초등학교 수학과 학습 요소(Ministry of Education, 2015, p.17)에서 각 개념과 직접적으로 관련되는 용어를 추출하여 각, 각의 꼭짓점, 각의 변, 직각, 예각, 둔각을 설문 문항으로 설정하였다. 이들 응답 자료를 수집하여 초등학생의 은유적 서술 자료를 정리하였다. 수집한 응답을 1차 정리한 결과, 각의 꼭짓점과 각의 변 문항에 대한 응답은 각 개념과 관련하기 어려웠고 주로 여러 가지 다각형의 구성 요소로 응답하였다. 이 연구의 초점은 각 개념의 은유 분석이므로, 각 개념이 거의 나타나지 않았던 각의 꼭짓점과 각의 변에 대한 수집 자료는 이 연구의 분석 대상에서 제외하였다. 현재 우리나라 수학과에서 각과 직각에 관한 학습 내용은 3학년 1학기에 다루고, 예각과 둔각에 관한 학습 내용은 4학년 1학기에 다루고 있다. 초등학교 3학년 학생에게도 학교 수학과 학습 이전에 일상 개념과 관련하여 어떤 서술을 하는지 자료를 수집하고자, 아직 다루지 않았던 예각과 둔각의 설문 문항을 포함하고 다른 학년과 동일한 설문을 하였다. 설문 응답을 1차 정리한 결과, 예각과 둔각의 은유 서술 문항에서 3학년은 무응답 또는 모른다는 응답이 많았고 은유 서술을 찾기 어려웠다. 따라서 예각과 둔각의 은유 분석에서 3학년의 예각과 둔각의 응답 자료는 분석 대상에서 제외하였고 4~6학년 응답 자료만을 분석 대상으로 포함하였다. 각과 직각에 대한 은유 분석은 3학년 76명, 4학년 53명, 5학년 77명, 6학년 62명의 총 268명의 응답을 분석 대상으로 하였고, 예각과 둔각에 대한 은유 분석은 4학년 53명, 5학년 77명, 6학년 62명의 총 192명의 응답을 분석 대상으로 설정하였다.

분석 준거 및 연구 절차

이 연구의 절차는 다음 네 단계로 진행되었다. 첫째로 자료 수집 및 정리 단계이다. 초등학교 수학과 교육과정에서 제시하는 각 관련 학습개념으로 각, 직각, 예각, 둔각을 설문 문항을 설정하여 은유적 표현과 그 근거를 서술한 자료를 수집하였다. 은유적 표현이나 근거를 모두 서술한 응답만을 분석 대상으로 하였고, 분석 대상의 응답을 ‘은유적 표현’과 그 ‘근거’를 짝지어 학생별로 추출하였다.

둘째로 수집 자료를 코드화하는 단계이다. 이 연구는 Kim (2018a)이 설정했던 각의 세 가지 측면을 은유 추출의 준거로 설정하였다. 세 가지 측면은 기하적 도형이라는 질적 측면, 회전량이라는 양적 측면, 점과 선의 구성 요소와의 관계적 측면이다. 초등학생이 ‘왜냐하면, ~이다.’에서 그 은유적 표현에 대한 근거를 토대로, 분석 준거로 설정한 A 질적 측면, B 양적 측면, C 관계적 측면으로 학생별 은유적 표현과 근거의 쌍을 코드화하였다. 작은 세 가지 다면적 성격을 모두 가지며 서로 배타적인 것은 아니므로, 초등학생의 은유적 표현에서도 동시에 나타나기도 하였다. 여러 측면이 동시에 나타날 때는 초등학생이 서술하고 있는 근거에 중점으로 두고 가장 연관되는 하나로 코드화하였다. 또한 동일한 은유적 표현이라도 그 근거에 따라 연관되는 측면으로 코드화하였다. 설문 문항과 무관하게 응답한 경우나 서술한 은유적 표현과 그 근거를 서로 관련지어 서술하지 않은 경우는 코드화에서 제외하였다. 이 코드화 자료는 은유적 표현의 범주화 및 질적 분석과 각의 개념 및 학년에 따른 빈도 분포 분석을 위한 기초 자료이다.

셋째로 은유적 표현을 범주화하고 질적 분석하는 단계이다. 각 측면으로 코드화한 은유적 표현에서 공통으로 나타나는 범주를 찾았다. 개념적 은유 이론(conceptual metaphor theory)은 (추상적인) 경험 영역에 있는 개념을 (구체적인) 다른 경험 영역에 있는 개념적 은유를 통하여 이해하는 것이다(Lakoff & Johnson, 1980; Kövecses, 2010). 이 연구는 은유 분석 방법으로서 각 개념을 목표 영역(target domain)과 근원 영역(source domain)의 사상으로 은유를 추출하는 방식을 활용한다. 추상적인 영역에 있는 각 개념(목표 영역)에 대하여 구체적인 다른 영역의 은유적 표현을 범주화한다. 은유적 표현의 범주를 기반으로 각, 직각, 예각, 둔각에 관하여 초등학생이 갖는 각 개념을 어떻게 형성하고 있는지 분석하였다.

넷째로 학년별 및 측면별 은유적 표현의 분포 양상을 분석하는 단계이다. 세 가지 측면 및 학년 변화에 따라 나타나는 빈도 분포의 양상을 비교 분석하였다. 이를 토대로 초등학생의 각 개념 형성에서 나타나는 특징을 논의하고, 각각의 개념들에 대하여 학년을 따라 세 측면 및 그 은유 양상은 어떻게 변화하는지 분석하였다.

연구 결과

세 가지 측면에서 각의 은유적 표현

각에 관한 은유적 표현

다음은 3~6학년의 초등학생이 각에 관하여 서술한 표현에서 은유를 추출한 것이다.

첫째로, 각의 다면성 중에서 질적 측면은 기하적 모양에 초점을 두는 표현이다. 각의 기하적 모양을 떠올려서 서술한 표현에서 <사물로서 각>, <동물로서 각>, <몸으로서 각>, <기호로서 각>, <감정으로서 각>이라는 범주를 찾을 수 있었다. <사물로서 각>의 범주는 모가 있거나 뾰족하다는 각의 일부에 관련하여 각진 곳이나 뾰족한 부분이 있는 곳을 주변 사물과 관련지은 것이었다. ‘아이스크림콘’, ‘피자’(피자 조각), ‘수박’(수박을 자른 모양임), ‘계단’, ‘의자’, ‘블록’, ‘책’(네모난 것과 비슷함), ‘산’(오뎅하게 서 있음), ‘까시’(끝이 뾰족함), ‘화살촉’, ‘빨대’(꺾여있음), ‘부채’(부채를 펼쳤을 때 각 모양이 있음), ‘다이아몬드’, ‘종이 끝’, ‘팔꿈치’, ‘칼’, ‘바늘’, 등이 있다. <동물로서 각>의 범주는 동물의 부위에서 각의 모양을 떠올린 것으로서, ‘악어 입’(악어가 입을 벌린 모양임), ‘오리 입’, ‘고양이 귀’(각져 있음)이 있다. <몸으로서 각>의 범주는 모양으로서 각을 찾을 수 있는 몸의 일부나 신체와 관련지은 것이었다. ‘입’, ‘인사’(굽힌 모양임), ‘생김새’(각은 여러 모양이 있는데 사람의 생김새도 많음), ‘턱’(각져있음), ‘관절’(꺾여있음), ‘얼굴’(각이 있음), ‘팔꿈치’(각만큼 뾰족함) 등이 있다. <기호로서 각>의 범주는 각의 모양과 관련하여 떠올리는 기호나 문자를 은유적으로 표현한 것이었다. 각을 나타낼 때 사용하는 \angle 이나 <과 같은 모양과 관련된다. 은유적 표현으로 ‘기역’, ‘니은’, ‘부등호’, ‘화살표’(→에서 —을 빼면 각이 됨)가 있다. <감정으로서 각>의 범주는 각의 모양이 주는 감정으로 표현하였다. 각의 뾰족함이 주는 날카로움이나 각진 모양에서 느끼는 감정을 나타내는 것으로, ‘마음’(누군가 마음 어딘가에 각이 있을 것 같음), ‘불편’(각이 있으면 인간관계가 불편함), ‘인생’(각져있는 인생), ‘성공’(성공할 때 각짐), ‘예의’(굽히면 겸손해지고 예의 바름) 등이 있다.

둘째로, 각의 양적 측면은 회전량이나 각의 크기에 초점을 두는 표현이다. 각의 움직임이나 방향 또는 감정의 변화와 관련된 것으로, <움직임으로서 각>, <변화로서 각>, <감정으로서 각>의 범주를 찾을 수 있었다. <움직임으로서 각>의 범주는 움직여서 각이 만들어지는 것을 표현하였다. ‘농구 슛’(손의 각), ‘번덕쟁이’(좁아질 때도 있고 넓어질 때도 있음), ‘공책’(열리면 각이 있음), ‘아이스크

림콘'(각이 커질수록 아이스크림콘이 커짐), '접는 폰'(폰을 열면 생김), '시계'(시간이 지나면 각이 생김), '문'(열었다가 닫힐 때 생김), '윗몸일으키기'(도는 각이 있음), '더하기'(각이 늘 때마다 달라짐), '인사'(여러 각으로 인사하기), '돈'(좁은 각과 큰 각이 있음), '성적'(올라가거나 내려감), '부채'(접었다 폈다 하는 것처럼 수많은 각이 있음) 등이 있다. <변화로서 각>의 범주는 각이 회전하는 방향이나 변화하는 것에 주목하였고, '회전목마'(360도 계속 돌아감), '역전'(지고 있다가 이기는 것처럼 방향이 바뀜), '꿈'(언제든 변함) 등이 있다. <감정으로서 각>의 범주는 각의 크기나 다양하게 변화하는 것을 감정과 관련지어 표현하였다. '생각'(생각과 각은 모두 마음이 넓어질 수 있음), '기분'(예각, 둔각, 직각을 생각할 때마다 다르게 보임, 각의 크기가 다 다름), '마음'(크기에 따라 내부가 달라짐) 등이 있다.

셋째로, 각의 관계적 측면은 꼭짓점과 변과 같은 각의 구성 요소 또는 도형의 포함 관계와 관련된 것으로, <구성으로서 각>, <도형 관계로서 각>, <인간관계로서 각>의 범주를 찾을 수 있었다. <구성으로서 각>의 범주는 두 개의 반직선으로 구성된다거나 한 점에서 만난다는 것에 초점을 두었고, '시계 침'(두 개의 선분이 한 점에 붙어서 각을 만들어 감), '갈림길'(두 선으로 갈라짐), '성적'(점에서 시작해서 위로 올라감), '협동'(변끼리 만나야 만들어짐), '본드'(변을 연결해 줌), '막다른 길'(두 선으로 막혀있음) 등이 있다. <도형 관계로서 각>의 범주는 도형의 일부에 있다는 것에 초점을 두었고, '세모'(세모에는 각이 있음), '다각형'(각이 3개 이상 생김) 등이 있다. <인간관계로서 각>의 범주는 변과 변으로 이루어지거나 만나는 구성 요소에 초점을 두어 표현하였고, '인연'(변과 변이 만나서 멋진 모양이 나옴, 가다가 점에서 만남, 한 선분과 한 선분이 만남), '자식'(엄마와 아빠가 이루어져 자식이 생김), '화해'(싸워도 화해하면 원래로 돌아가기), '이별'(처음에 함께였다가 영원히 만나지 못한 채 점점 멀어짐) 등이 있다.

직각에 관한 은유적 표현

다음은 3-6학년의 초등학생이 직각에 관하여 서술한 표현에서 은유를 추출한 것이다.

첫째로, 직각의 질적 측면은 직각의 모양에 초점을 두는 표현으로서 주로 직각을 L모양 또는 T모양과 관련지었다. 직각의 기하적 모양을 떠올려서 서술한 은유적 표현에서 <사물로서 직각>, <기호로서 직각>, <인간형으로서 직각>, <감정으로서 직각>이라는 범주를 찾을 수 있었다. <사물로서 직각>의 범주는 사물 일부에서 직각을 떠올린 것으로서, 특히 직각은 사물의 모서리에서 떠올린 표현이 많이 나타났다. '종이', '철판', '블록', '침대', '벽', '색종이', '상자', '계단', '달력'(직각이 있음), '노트'(끝부분에 직각), '변기', '핸드폰'(표면에 직각이 있음), '와플'(그려보면 있음), '키보드'(키보드에 직각이 있음), '전봇대'(우뚝 똑같은 각으로 서 있음) 등이 있었다. <기호로서 직각>의 범주는 직각을 모양과 관련지어 기호나 문자를 은유적으로 표현한 것으로, '기역', '니은'을 서술하였다. <인간형으로서 직각>의 범주는 직각의 바른 이미지에서 인간형을 떠올린 것으로서, '모범생'(항상 바름), '천재'(똑바로 문제를 푼)가 있었다. <감정으로서 직각>의 범주는 직각의 모양에서 올바른 답이나 정확성을 떠올리거나 반듯함이나 깨끗함에서 떠올린 낱말들로서, '예절'(직각과 예절은 바름), '깔끔'(반듯하면 깨끗한 기분임), '반짝'(깔끔함), '답'(딱 맞음), '정확'(직각은 정확해 보임), '완벽'(완벽하게 나옴, 혼자 넘어갈 수 없음)이 있었다.

둘째로, 직각의 양적 측면은 90도만큼 벌어지는 것을 떠올려서 서술한 것으로서, <움직임으로서 직각>, <변화로서 직각>, <감정으로서 직각>의 범주를 찾을 수 있었다. <움직임으로서 직각>은 각이 만들어지는 과정에 초점을 둔 것으로서, '인사'(90도로 고개 숙임, 직각으로 인사함)라는 표현이 다수 나타났다. <변화로서 직각>의 범주는 직각이 있는 위치에 초점을 두고 예각과 둔각과의 비교 및 변화를 떠올렸고, '중심'(기울이지 않고 중간에 있음), '기준'(예각과 둔각의 사이), '중간'(예각과 둔각도 아닌 중간) 등이 있었다. <감정으로서 직각>의 범주는 직각이 90도라는 점 또는 그 모양이 변화하는 것에서 느끼는 것으로서, '정직'(언제나 변하지 않고 90도임), '올곧은 것'(오차가 없으면 직각이 됨), '편안'(딱 90도인 것이 편함), '사랑'(계속 바뀜) 등이 있었다.

셋째로, 직각의 관계적 측면은 직각의 구성 요소와의 관계 또는 도형의 포함 관계와 관련된 것으로, <구성으로서 직각>, <만남으로서 직각>, <도형 관계로서 직각>의 범주를 찾을 수 있었다. <구성으로서 직각>의 범주는 직각의 두 변으로 이어지는 것에 초점을 둔 것으로서, '절벽'(한쪽은 바닥이고 위는 | 이 되어 있음), '남떠러지'(앞으로 가면 떨어짐)가 있다. <만남으로서 직각>의 범주는 직각의 두 변이 서로 만나서 하나의 직각을 이루는 것을 표현하였고, '나라'(국민이 만나 완벽한 나라를 이룸), '데이트'(직각으로 만남)가 있다. <도형 관계로서 직각>의 범주는 여러 가지 도형 속에서 직각을 찾은 것으로서, '정사각형'(정사각형의 각은 직각임), '사각형'(꼭짓점에 사각형이 있음), '도형'(직각삼각형과 사각형에 직각이 있음)을 떠올렸다.

예각에 관한 은유적 표현

다음은 4-6학년의 초등학생이 예각에 관하여 서술한 표현에서 은유를 추출한 것이다.

첫째로, 직각의 질적 측면은 예각의 모양을 떠올려서 서술한 표현으로서, <사물로서 예각>, <동물로서 예각>, <몸으로서 예각>, <기호로서 예각>, <가족으로서 예각>, <감정으로서 예각>이라는 범주를 찾을 수 있었다. <사물로서 예각>의 범주는 예각의 예리한 부분과 관련지어 떠올린 것이었고, 여러 범주 중에서도 가장 두드러지게 나타났다. ‘케이크’(자르면 예각이 나옴), ‘고깔모자’, ‘가시’, ‘꼬깔콘’, ‘피자 조각’, ‘연필’, ‘창’(예각은 뾰족하게 생겨서 창과 비슷함), ‘총 손잡이’, ‘곡괭이’(곡괭이처럼 뾰족함), ‘칼’, ‘주사기’, ‘크리스마스 트리’, ‘다이아몬드’, ‘나뭇가지’, ‘산’ 등이 있다. <동물로서 예각>의 범주는 동물의 부위에서 예각의 모양을 떠올린 것으로서, ‘두루미’(입이 뾰족 나옴), ‘새 부리’, ‘악어 입’ 등이 있다. <몸으로서 예각>의 범주는 예각 모양이 생기는 신체 일부의 모양을 떠올린 것으로, ‘얼굴’(얼굴의 턱이 예각 모양), ‘입’(입을 아 벌릴 때), ‘손가락’ 브이’(사진 찍을 때 브이 하면 예각임), ‘준비’(달리기 전의 자세) 등이 있다. <기호로서 예각>의 범주는 예각의 모양을 떠올리는 기호로, ‘부등호’가 있다. <가족으로서 예각>의 범주는 예각의 크기가 작다는 것을 떠올린 것으로서, ‘동생’(예민함, 작음), ‘엄마’(엄마는 예리하고 덩치가 작음) 등이 있다. <감정으로서 예각>의 범주는 예각의 날카로운 모양에서 느끼는 것으로, ‘위협’(날카로운 것은 위협함), ‘엄마 잔소리’(엄마가 잔소리할 때 뾰족함) 등이 있다.

둘째로, 예각의 양적 또는 측정의 측면은 예각이 회전했다거나 움직이는 것에 주목하여 떠올린 표현으로서, <움직임으로서 예각>, <변화로서 예각>, <감정으로서 예각>, 의 범주를 찾을 수 있었다. <움직임으로서 예각>의 범주는 ‘허리 굽힌 할머니’(허리 굽힐 때 \angle 처럼 굽어짐), ‘스트레칭’(허리를 숙이면서 예각임), ‘웁크’, ‘접힘’(접은 것처럼), ‘날씬’(90도가 넘지 않음), ‘눈’(작게 뜨면 예각임), ‘손’(예각은 넓게 벌어지지 않음), ‘다리’(다리를 조금 벌렸을 때), ‘짧은 부채’(펼칠수록 예각에서 둔각이 되는데 짧게 펼쳐서 예각), ‘가위’(가위를 작게 사용하면 예각, 가위를 펼치면 둔각임), ‘안전 가위’(조금만 벌릴 수 있음), ‘둔각의 재료’(예각에서 퍼지면 둔각이 됨) 등이 있다. <변화로서 예각>의 범주는 예각이 만들어지는 과정과 연결 지어 표현한 것으로서, ‘시계’(시계에서 예각 만들어짐), ‘시간’, ‘어린 시절’(각이 커지면서 자라듯이 예각은 어린 시절 같음), ‘몸무게’(줄어들고 늘어나기), ‘노숙자’(사회의 직각을 맞추지 못하고 떨어진 사람), ‘저체중’(직각보다 작음), ‘아이’(직각보다 작은 각) 등이 있다. <감정으로서 예각>의 범주는 예각의 크기가 작다는 점을 떠올린 것으로서, ‘소심’(0도부터 90도까지만 있음), ‘사람’(직각처럼 완벽할 수 없으므로)이 있다.

셋째로, 예각의 관계적 측면은 각의 구성 및 기울기 또는 도형의 포함 관계와 관련된 것으로, <구성으로서 예각>, <도형 관계로서 예각>의 범주를 찾을 수 있었다. <구성으로서 예각>의 범주는 예각이 만들어지면서 기울어짐을 떠올린 것으로서, ‘오르막길’(오르막길처럼 기울어져 있음), ‘인생’(일직선에서 올라가 있음)이 있다. <도형 관계로서 예각>의 범주는 삼각형과의 관련해서 예각을 떠올린 것으로서, ‘정삼각형’(정삼각형의 각은 모두 예각), ‘작은 삼각형’, ‘삼각형의 친구’(삼각형을 만들면 예각이 보임) 등이 있다.

둔각에 관한 은유적 표현

다음은 4-6학년의 초등학생이 둔각에 관하여 서술한 표현에서 은유를 추출한 것이다.

첫째로, 둔각의 질적 측면은 둔각의 모양을 떠올리거나 모양이 주는 느낌을 서술한 것으로서, <사물로서 둔각>, <동물로서 둔각>, <인간형으로서 둔각>, <감각으로서 둔각>, <감정으로서 둔각>이라는 범주를 찾을 수 있었다. <사물로서 둔각>의 범주는 둔각의 모양이 펼쳐진 것과 유사한 물건을 떠올렸고, ‘의자’(둔각처럼 생긴 의자가 있음), ‘남은 피자’, ‘하트’(하트의 밑에 둔각 모양이 있음), ‘미끄럼틀’(쭉 내려가서 평평해짐, 사선으로 되어 있음, 미끄러져 떨어짐), ‘빵’(둔각 모양임), ‘스프레이’(스프레이 마개가 둔각임), ‘피라미드’(둔각처럼 생김), ‘지붕’(둔각임), ‘오르막’(오르막길 모양), ‘산’(높아서), ‘초승달’(막히지 않음) 등이 있다. <동물로서 둔각>의 범주는 동물 일부분에서 둔각의 모양이 나타나는 것을 떠올렸고, 날개, 등, 입에서 찾은 것으로 ‘갈매기’(둔각이 있음), ‘고래 등’(둔각임), ‘하마 입’(하마 입이 둔각 모양), ‘날개’(생김새) 등이 있다. <인간형으로서 둔각>의 범주는 둔각의 이미지에서 인간형을 떠올린 것으로서, ‘잠만보’(게으름), ‘지킴이’(허수아비가 벼를 지켜주듯이 든든함), ‘선생님’(동글동글하지만 뾰족하기도 함)이 있다. <감각으로서 둔각>의 범주는 둔각의 펼쳐진 모양이 주는 감각적 특징을 무거움이나 편안함에서 떠올린 것으로, ‘망치’(두툼하고 무거움), ‘쇼파’(폭신하고 포근함), ‘침대’(편함), ‘말랑함’(누워있어서 말랑해 보임)이 있다. <감정으로서 둔각>의 범주는 둔각이라는 모양이 주는 느낌을 떠올린 것으로, ‘느긋함’(마음이 편해짐), ‘휴식’(둔각처럼 누워있음), ‘인내’(들어가기 힘든 것처럼 보이지만 자기 자리를 지키고 있음), ‘반항’(한 번이 튀어나와 있음) 등이 있다.

둘째로, 둔각의 양적 측면은 둔각이 만드는 회전량이나 넓게 벌어진 정도를 떠올려 서술한 것으로서, <움직임으로서 둔각>, <변화로서 둔각>, <넓음으로서 둔각>, <비교로서 둔각>, <감각으로서 둔각>, <가족으로서 둔각>의 범주를 찾을 수 있었다. <움직임으로서 둔각>은 둔각이 만들어지는 과정을 떠올린 것으로서, ‘구부린 팔’(팔을 구부리면 둔각이 됨), ‘팔꿈치’(둔각이 만들어짐), ‘다리 찢기’(다리가 둔각으로 찢어짐), ‘손 인사’(구부러지기), ‘요가’(요가처럼 펼쳐짐), ‘윗몸일으키기’(둔각이 만들어짐), ‘유연성’(다리를 쪽 펴고 팔을 뻗으면 둔각이 됨), ‘큰 입’(입이 벌릴 수 있는 것), ‘악어’(입이 크게 벌어짐), ‘필통’(펼쳐짐), ‘넓은 부채’(넓게 펼치면 둔각이 됨), ‘스키’(스키를 타면 뒤에 큰 각을 이루며 생김), ‘가위’(최대한 벌리면 둔각이 만들어짐), ‘주식’(둔각처럼 주식이 오름), ‘비만’(직각보다 넓어짐), ‘승리’(결승점 끝을 넘을 때) 등이 있다. <변화로서 둔각>의 범주는 둔각이 만들어지거나 크게 벌어짐을 변화와 관련지어 떠올린 것으로서, ‘늦음’(시간이 갈수록 늦어감), ‘노력’(노력하여 갈 수 있는 통로), ‘똥똥함’(90도를 넘어감), ‘과식’(직각을 넘어서 음식을 많이 먹음), ‘A+’(직각을 뛰어넘음)이 있다. <넓음으로서 둔각>의 범주는 둔각이 넓게 벌어진 정도에서 넓다는 것과 관련지어 떠올린 것으로서 ‘마음’(넓어서), ‘소문’(작은 이야기가 넓게 퍼짐), ‘시야’(넓음), ‘세상’(넓음), ‘바다’(넓음)이 있다. <비교로서 둔각>은 직각이나 예각과 서로 비교하여 떠올린 것으로서, ‘어른’(아이보다 큼), ‘오빠 실력’(나보다 큼), ‘형’(예각, 직각보다 큼), ‘나뻠’(90도를 보통이라고 하면 90도 이상), ‘넓은 방’(직각보다 넓음), ‘성공자’(사회의 90도를 맞춘 후 더 성공한 사람) 등이 있다. <감각으로서 둔각>의 범주는 둔각이 넓게 벌어진 정도에서 떠올린 감각으로서, ‘달달함’(둔하게 벌어져 있음), ‘꿈’(나의 꿈을 위해 노력함, 크고 밝게 빛남)이 있다. <감정으로서 둔각>의 범주는 둔각의 크기가 주는 느낌을 표현한 것으로서, ‘즐거움’(넓음), ‘용감’(많은 면을 보여주는 것이 용감함), ‘막막함’(넓어 보임), ‘욕심’(90도부터 180도까지 있어서) 등이 있다. <가족으로서 둔각>의 범주는 둔각의 넓음을 가족의 넓은 마음이나 보살핌을 떠올려 서술한 것으로, ‘가족’(넓은 마음으로 대해 줌), ‘부모’(넓은 각으로 안아주려는 모습, 넓은 마음으로 대해 주심), ‘할머니’(자녀를 둔각처럼 넘치게 사랑함), ‘아버지’(덩치 있는 아빠를 닮음) 등이 있다.

셋째로, 둔각의 관계적 측면은 둔각의 구성 요소나 다른 도형과의 비교를 떠올려 서술한 것으로서, <구성으로서 둔각>, <도형 관계로서 둔각>의 범주를 찾을 수 있었다. <구성으로서 둔각>의 범주는 둔각이 예각과의 관계를 떠올린 것으로서, ‘국밥’(든든하게 예각을 받쳐주고 있음) <도형 관계로서 둔각>의 범주는 다른 도형의 부분이거나 다른 도형의 모양에서 관계를 떠올린 것으로서, ‘정오각형’(정오각형의 각은 둔각임), ‘긴 삼각형’(길쭉해서)이 있다.

학년에 따른 각의 은유적 표현

각에 대한 은유적 표현을 각의 세 가지 측면에서 코드화한 결과이다. 세 가지 측면은 서로 배타적인 것은 아니며 서로 깊은 관계가 있다. 코드화에서 두 가지 측면이 동시에 나타날 경우는 그 근거의 서술에서 초점으로 하는 측면을 고려하여 하나의 측면으로 코드화하였다. 각의 질적 측면은 모양이나 그 모양에서 주는 느낌을 중심으로 표현한 것이었다. 각의 양적 측면은 각의 회전량이나 각의 크기 정도에 따라 떠오르는 표현을 중심으로 분류하였다. 각의 관계적 측면은 각의 변이나 꼭짓점과 같은 구성 요소, 다른 도형과의 관계를 떠올린 경우였다. 이때 직각, 예각 둔각의 경우는 각의 크기를 중심으로 그 이유를 서술한 경우는 양적 측면으로 코드화하였고, 직각, 예각, 둔각을 명시적으로 언급하여 관계가 나타나면 관계적 측면으로 코드화하였다. 은유적 표현은 서술했지만 그 근거를 응답하지 않은 경우는 세 가지 측면의 코드에서 제외하였다. 각과 직각은 3~6학년 초등학생의 응답에서 추출하고, 예각과 둔각은 4~6학년 초등학생의 응답에서 추출하였다.

각에 관한 은유적 표현의 빈도 분포

Table 1은 각의 은유적 표현을 세 가지 측면에서 분석한 학년별 분포이다. 각 학년에서 추출한 학년별 총 사례 수에 대하여 은유적 표현의 세 측면 각각이 차지한 백분율을 나타낸다. 각 개념은 세 가지 측면 중에서 각의 질적 측면으로 분류했던 각의 모양을 떠올린 표현이 가장 많이 나타났다. 반면에 각 개념 형성의 학년별 변화를 살펴본다면, 각의 양적 측면으로 분류하였던 회전량이나 크기를 떠올린 표현은 학년이 높아질수록 그 분포도 많아졌다. 다른 도형의 일부 또는 다른 도형과의 관계로 떠올린 것으로 각의 관계적 측면은 학년이 높아질수록 많아졌다. 학년별로 세 가지 측면을 비교한다면, 3학년은 각 개념이 예리하다거나 뾰족하다는 모양을 떠올리는 각의 모양 측면이 두드러졌고 각의 은유적 표현의 68.5%가 기하적 모양의 측면이었다. 학년이 높아질수록 각의 크기나 관계적 측면을 표현한 사례들이 많아졌다. 수학과 교육과정에서 각의 변이나 꼭짓점이라는 구성 요소를 3학년 1학기에서 다루었다는

점에서 각의 구성에 대한 표현이 3학년에서 4학년보다 많이 나타난 것을 관련지어 볼 수 있다. 또한 각도의 학습을 4학년 1학기에서 다루었다는 점에서 각의 회전량이나 각도의 은유가 4학년에서 많이 나타난 것과 연계할 수 있다. 6학년은 은유적 표현의 세 가지 측면이 37.3%, 29.4%, 33.3%로 고르게 나타난 편이다. 학년이 높아지고 여러 가지 도형 개념을 학습하면서 각의 은유적 표현에서도 각의 다면성이 나타나고 있다.

Table 1. Analysis of metaphors for angles in three aspects

Grade	Shapes (%)	Measure (%)	Components (%)
3	37 (68.5)	4 (7.4)	13 (24.1)
4	20 (55.5)	10 (27.8)	6 (16.7)
5	25 (46.3)	13 (24.1)	16 (29.6)
6	19 (37.3)	15 (29.4)	17 (33.3)

직각에 관한 은유적 표현의 빈도 분포

Table 2는 직각의 은유적 표현을 분석한 학년별 분포이다. 직각 개념은 세 가지 측면 중에서 직각의 모양을 사물에서 찾는 표현이 가장 많이 나타났다. 직각의 양적 측면을 떠올린 표현은 찾아보기 어려웠고, 직각의 관계적 측면의 경우는 직각의 두 변이 직각으로 만나는 표현이나 여러 다각형에서 직각을 찾는 것이었다. 주로 직각을 기하적 모양에서 직각이 있는 사물의 모서리로 직각을 나타냈다. 3학년의 은유적 표현 중 86.5%가 직각을 기하적 모양으로 표현했다면, 직각의 양적 측면은 나타나지 않았다. 3학년 학생들이 직각을 일종의 모양이라는 이미지를 강하게 나타내고 있는 것은 3학년 수학과 교육과정에서 직각을 모양으로 도입하고 있는 것과 연관 지어 볼 수 있다. 학년 변화에서 두드러진 차이점은 6학년에서 직각을 다른 도형과 관련지어서 표현한 관계적 측면이 많이 나타나고 있다. 은유적 표현의 결과에서 본다면, 6학년이 서술한 직각의 관계적인 측면은 직각이 주는 이미지를 다른 도형과 연계하거나 예각이나 둔각과의 비교에서 기준점으로서 표현하였다.

Table 2. Analysis of metaphors for right angle in three aspects

Grade	Shapes (%)	Measure (%)	Components (%)
3	45 (86.5)	0 (0)	7 (13.5)
4	33 (80.5)	3 (7.3)	5 (12.2)
5	45 (81.8)	3 (5.5)	7 (12.7)
6	33 (66.0)	7 (14.0)	10 (20.0)

예각에 관한 은유적 표현의 빈도 분포

Table 3은 예각의 은유적 표현을 분석한 학년별 분포이다. 예각은 주로 예각의 모양을 사물에서 찾아 기하적 모양의 측면에서 은유적 표현을 서술하였고, 관계적 측면의 표현은 거의 나타나지 않았다. 수학 교과서 4학년 1학기 각도 단원에서 각의 크기를 도입하고, 이어진 차시에서 각이 벌어진 정도를 직각과 비교하여 직각보다 작은 각으로 예각을 도입한다. 이는 예각을 측정의 측면에서 벌어진 정도로 도입하고 있지만, 4학년의 은유적 표현은 주로 예각의 예리한 모양을 떠올려 표현하고 있다. 반면에 학년에 따라 6학년으로 갈수록 양적 측면으로 분류했던 측정의 측면이 많아지고 있다.

Table 3. Analysis of metaphors for acute angle in three aspects

Grade	Shapes (%)	Measure (%)	Components (%)
4	29 (72.5)	9 (22.5)	2 (5.0)
5	39 (68.4)	16 (28.1)	2 (3.5)
6	26 (53.1)	21 (42.8)	2 (4.1)

둔각에 관한 은유적 표현의 빈도 분포

Table 4는 둔각의 은유적 표현을 분석한 학년별 분포이다. 둔각을 직각이나 예각과 비교해 본다면, 직각이나 예각이 전 학년에서 확연하게 모양의 측면이 두드러졌다. 직각은 모양의 측면에서 3학년 86.5%, 4학년 80.5%, 측정의 측면에서 3학년 0%와 4학년 7.3%였고(Table 2), 예각은 모양의 측면에서 4학년 72.5%, 측정의 측면에서 4학년 22.5%였다(Table 3). 반면에 둔각은 4학년 모양의 측면에서 52.8%와 측정의 측면에서 44.4%로, 직각이나 예각에서 나타났던 차이와 비교한다면 모양의 측면과 측정의 측면의 차이는 크지 않았다. 수학 교과서 4학년 1학기에서 예각과 둔각은 같은 차시에서 직각보다 작은 각과 큰 각으로 도입하고 있다. 그 도입 시기와 도입 방법이 유사하지만 예각과 둔각에 대한 초등학생들의 은유적 표현의 측면은 차이가 있었다. 예각은 주로 도형의 측면에서 은유적 표현이 많았던 것과는 달리, 둔각은 측정의 측면에서 움직임, 변화, 비교 등을 나타내는 은유적 표현이 다양하게 나타났다. 직각과 예각은 학년이 올라감에 따라 모양의 측면이 줄었고 측정의 측면은 많아졌지만, 둔각은 학년에 따라 모양의 측면과 측정의 측면의 빈도 분포는 유사하였다.

Table 4. Analysis of metaphors for obtuse angle in three aspects

Grade	Shapes (%)	Measure (%)	Components (%)
4	19 (52.8)	16 (44.4)	1 (2.8)
5	30 (60.0)	19 (38.0)	1 (2.0)
6	28 (57.1)	20 (40.8)	1 (2.1)

각에 관한 초등학생의 은유적 이미지

이 연구는 초등학생의 각, 직각, 예각, 둔각에 대한 은유적 표현의 분석을 통하여 초등학생들이 각 개념 형성에서 보이는 은유적 이미지를 찾을 수 있었다. 각을 둘러싼 여러 가지 개념들은 낱말로 떨어진 것이 아니라 하나의 개념망을 구성하게 된다. 이 연구는 개념적 은유라는 관점에서 은유적 표현을 범주화하고 각, 직각, 예각, 둔각의 개념을 연계하여 공통적인 은유의 범주를 추출하였다. 개념과 개념 이미지의 관계는 별도의 논의가 필요하겠지만, 초등학생의 각 개념의 이미지를 개념적 은유의 목표 영역과 근원 영역의 틀에서 그릴 수 있었다. 각의 모양에 초점을 두었던 질적 측면에서 각, 직각, 예각, 둔각에서 공통으로 <사물의 은유>, <인간형의 은유>, <감정의 은유> 범주를 찾을 수 있었다. 이 범주 중에서 초등학생의 은유적 표현을 기반으로 <인간형의 은유>를 나타내면 Figure 1과 같다. 각의 모양의 측면에서 볼 때, 직각의 이미지는 천재나 모범생으로 우수함이나 반듯함을 나타내고, 예각의 이미지는 예민한 성격으로 예리함을 나타내며, 둔각의 이미지는 지킴이나 잠만보로 든든함과 느긋함 또는 게으름을 나타낸다.

ANGLE Is PERSONALITY	
Source domain PERSONALITY	Target domain ANGLE
a genius	→ right angle
a nervous temperament, a sensitive person	→ acute angle
a heavy sleeper, a keeper	→ obtuse angle

Figure 1. <ANGLE Is PERSONALITY> in the aspect of shapes

각의 크기 및 벌어진 정도에 초점을 두었던 양적 측면에서는 각, 직각, 예각, 둔각에서 공통으로 <움직임의 은유>, <변화의 은유>, <감정의 은유> 범주를 찾을 수 있었다. 이 범주 중에서 초등학생의 은유적 표현을 기반으로 <움직임의 은유>를 나타내면 Figure 2와 같다. 각이 벌어진 정도의 관점에서 볼 때, <움직임의 은유>에서 직각은 90도 고개 숙여 인사하는 것이고, 예각은 짧게 윙크하는 것이고, 둔각은 다리를 펼친 요가나 스키를 타고 내려올 때 눈 위에 그려지는 큰 각이라고 하였다.

ANGLE Is MOTION	
Source domain MOTION	Target domain ANGLE
bow	→ right angle
wink	→ acute angle
yoga, ski	→ obtuse angle

Figure 2. <ANGLE Is MOTION> in the aspect of the amount of spread

각의 구성 및 다른 도형과의 관계에 초점을 두었던 관계적 측면에서는 각, 직각, 예각, 둔각에서 공통으로 <도형 관계의 은유> 범주를 찾을 수 있었다. 초등학생의 은유적 표현을 기반으로 <도형 관계의 은유>를 나타내면 Figure 3과 같다. 각을 찾을 수 있는 도형과 관련지어 표현한 것으로 관계적 측면에서 다각형의 구성 요소로 찾고 있다고 보인다. 직각은 정사각형, 예각은 정삼각형 또는 삼각형, 둔각은 정오각형이라고 서술하였다.

ANGLE Is COMPONENTS	
Source domain COMPONENTS	Target domain ANGLE
square	→ right angle
(equilateral) triangle	→ acute angle
(regular) pentagon	→ obtuse angle

Figure 3. <ANGLE Is COMPONENTS> in the aspect of relations

초등 수학 학습은 개념 형성 과정에서 여러 경험 영역을 오가면서 개념을 형성해간다. 초등학생들이 보이는 은유적 이미지는 개인의 경험이나 개념 형성에 따라 각기 다를 수 있다. 이 연구는 초등학생의 은유적 표현을 통하여 그들의 경험 세계에서 각의 은유적 이미지를 찾아보았다.

결론

각의 다면성은 수학 및 수학교육에서 오랜 논쟁거리였다. 지금도 초등학교에서 가르칠 학습 내용으로서 각의 다면성을 어떻게 설정할 것인지 또는 그 학습 계열은 어떻게 구성할 것인지에 대하여 여전히 진행 중이다. 이 연구는 초등학교 수학 학습에서 전개하는 각 개념의 접근과 관련하여 초등학생의 각 개념은 어떻게 형성되고 학년이 올라가면서 각의 다면성에 대한 이해는 어떻게 변화하는지를 은유 분석 방법을 활용하여 분석하였다. 각과 직각은 3학년 1학기에 학습하므로 3~6학년 총 268명의 응답, 예각과 둔각은 4학년 1학기에 학습하므로 4~6학년 총 192명의 응답을 분석하였다. 각 개념과 관련된 용어로 초등 수학과 교육과정에 명시된 각 개념 학습 요소인 각, 직각, 예각, 둔각에 대하여, 이 용어를 생각하면 떠오르는 것을 하나의 낱말로 표현하도록 하였다. 분석 준거는 각 개념의 세 가지 측면 즉, 기하적 도형이라는 질적 측면, 측정 및 회전량이라는 양적 측면, 점과 선의 구성 요소 및 다른 도형과의 관계적 측면으로 설정하였다.

세 가지 측면을 따라 각, 직각, 예각, 둔각 각각에 대하여 은유적 표현을 추출하고 범주화하였다. 다양한 범주화가 가능하였고 세 가지 측면에서 초등학생들의 개념이 구체적이고 다양하게 표현되었다. 초등학생의 각, 직각, 예각, 둔각에 대한 은유적 표현을 범주화하면서 공통적인 범주를 찾을 수 있었고 각 개념간의 관계를 나타내는 개념망 또는 은유적 이미지를 찾을 수 있었다. 모양에 초점을 두었던 질적 측면은 각, 직각, 예각, 둔각에서 공통으로 <사물의 은유>, <인간형의 은유>, <감정의 은유> 범주 등을 찾을 수 있었다. 각의 크기 및 떨어진 정도에 초점을 두었던 양적 측면에서는 <움직임의 은유>, <변화의 은유>, <감정의 은유> 범주 등을 찾을 수 있었다. 각의 구성 및 다른 도형과의 관계에 초점을 두었던 관계적 측면에서는 <도형 관계의 은유> 범주를 찾을 수 있었다. 이들 범

주에 따라 개념적 은유를 목표 영역과 근거 영역으로 나타내고, 각 범주에서 초등학생의 각을 이해하는 사례 목록을 기초 자료로 마련할 수 있었다.

은유적 표현의 빈도 분포 결과를 종합한다면 각의 다면적 특성 중에서 3~4학년은 주로 각의 모양을 초점으로 하는 은유적 표현이 주로 나타났다면, 점차 학년이 올라가면서 각의 크기 및 벌어진 정도의 측정 및 양적 측면과 각의 구성 요소 및 다른 도형과의 관계적 측면이 증가하였다. 6학년에서는 세 가지 측면이 고르게 나타나는 편이었다. 학년이 올라가면서 은유적 표현에서도 각의 다면성이 나타나고 있다고 보인다. 초등학생들의 은유적 표현의 내용과 관련짓는다면, 관계적 측면이 나타난 것은 5~6학년에서 다루는 평면도형 및 입체도형의 개념과도 연계하는 것으로 보인다. 각 개념은 이후 다른 도형 개념과 연계하면서 변화하고 확대되고 있다고 보인다. 이 점에서 각 개념의 형성은 특정 학년에서 완성된다기보다는 계속 학년을 이어가면서 변화하고 각 개념의 다면성과 다른 도형과의 관계 속에서 확장되는 것이라고 볼 수 있다.

직각, 예각, 둔각에서 학년 변화에 따른 경향도 나타났다. 직각은 학년 전체적으로 모양으로 접근하고 전학년에서 측정의 접근은 거의 나타나지 않았으며, 6학년에서 다른 도형과의 관계적 접근이 나타났다. 예각은 직각이나 둔각보다도 예리한 모양을 초점으로 한 은유적 표현이 두드러졌고, 학년이 높아지면서 측정의 접근이 나타났지만 관계적 접근은 거의 나타나지 않았다. 둔각은 직각이나 예각과 달리 3학년에서 세 가지 접근의 빈도 분포가 유사하였다. 우리나라 교육과정 및 교과서에 나타난 각의 학습 배열을 본다면, 3학년에서 각과 직각을 모양을 중심으로 질적 측면에서 접근하고 4학년에서 예각과 둔각은 직각보다 크고 작은 각으로서 양적 측면에서 접근하고 있다. 이와 비교하여 본다면, 각 개념에서 은유적 표현 빈도는 학년의 방향과 관련되지만, 직각 개념에서 측정의 접근은 학년이 높아져도 거의 나타나지 않았다. 반면에 예각과 둔각 개념은 측정의 측면으로 도입되었지만 예각 개념은 모양의 측면이 많았고 둔각 개념은 세 가지 측면의 빈도가 유사하였다. 은유적 표현의 빈도가 각 개념의 다면성을 나타내는 척도가 될 수는 없겠지만, 초등학생의 직각 개념과 예각 개념은 모양이라는 강한 이미지를 파악할 수 있고 둔각 개념은 모양과 크기라는 두 가지 측면을 모두 찾을 수 있다. 각의 다면성을 경험하고 각 개념을 폭넓게 형성하려면 각 개념 각각의 도입 방식의 문제뿐만 아니라 각 개념들 간의 학습 계열에 관한 추가적인 고려가 있어야 할 것이다.

이 연구 결과 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째로, 수학과 교육과정에서 어떤 학습 내용이 어떤 영역 속에 있는가는 그 학습 내용을 보는 관점을 명시적으로 또는 암묵적으로 말하게 된다. 새롭게 고시된 2022 개정 수학과 교육과정에서 영역 구분이 변화였고, 도형 영역과 측정 영역을 하나의 영역 ‘도형과 측정 영역’으로 제시한다(Ministry of Education, 2022). 도형 영역 속에 있었던 ‘각, 직각, 예각, 둔각’은 ‘도형과 측정 영역’이라는 새로운 영역으로 재편되었다. 영역명의 변화와 학습 내용의 배치는 학습 내용을 어떤 초점에서 어떻게 가르치고 배울 것인가를 점검하기를 요구한다. 이전 교육과정은 도형 영역으로서 각과 측정 영역으로서 각도로 분절된 영역으로 배치되어 왔다면, 도형과 측정 영역이라는 하나의 영역에서 각 개념과 관련된 학습 내용을 어떻게 계열화할지 논의가 필요하다. 영역이 변경된 것으로 인하여 학습 내용의 계열이 변경되어야 하는 것은 아니지만, 각의 다면적 성격과 관련하여 변화가 필요할 것인지 후속적인 논의가 필요하다. 이 점에서 각의 다면성 논의는 영역명의 변화와 맞물려 서로 연계할 수 있는 적절한 시점에 와 있다.

둘째로, 각의 다면성에 대한 접근은 주로 가르쳐야 할 것으로서 그 성격을 밝히는 것에 초점이 있었다. 이것은 수학교육 연구 및 실천에서 수학과 교육과정, 교과서, 수업, 학습을 일방향적으로 관련지어 ‘수학과 교육과정의 의도, 의도에 충실한 교과서, 교과서를 지키는 교사의 수업, 교사의 지침에 따른 학생의 학습’이라는 암묵적으로 가정하는 흐름과도 관련된다. 하지만 그 방향은 쌍방적이어야 하고 학생의 학습에서 교사의 수업으로 교과서와 교육과정의 변화로 재해석되도록 방향을 열어야 교수 학습을 폭넓게 이해할 수 있다. 초등학생의 개념 형성 과정에서 얻은 단서를 통하여 수학교육과정 및 수학을 재해석하도록 교류한다면 초등학생의 학습을 깊이 이해하고 학습을 지원하는 기초 자료를 형성할 수 있을 것이다. 수학과에서 초등학생의 개념 형성이라는 위치를 가르쳐야 할 것을 학습하게 하는 것에 묶어둘 것이 아니라, 학생의 아이디어를 생성하고 더 나아가 그 아이디어가 새로운 수학이나 수학 학습을 생성시킬 수 있는 방향으로 열어야 한다. 이 점에 있어서 초등학생들의 은유 연구는 각 개념의 다면성에 대하여 학습 과정 및 학습 결과의 기초 자료가 될 수 있을 것이다. 이 연구에서 초등학생들이 보여준 흥미로운 은유적인 표현을 통하여 초등학생의 각 개념 형성을 파악하는 자료로 활용되거나 수업 구성 및 학습 자료로 활용되기를 기대한다.

Acknowledgements

This work was supported by Chuncheon National University of Education Grant in 2021.

References

- Armstrong, S. L. (2008). Using metaphor analysis to uncover learners' conceptualizations of academic literacies in post secondary developmental contexts. *The International Journal of Learning*, 15(9), 211-218. <https://doi.org/10.18848/1447-9494/CGP/v15i09/45948>
- Bullough, R.V. (1991). Exploring personal teaching metaphors in preservice teacher education. *Journal of Teacher Education*, 42(1), 43-51. <https://doi.org/10.1177/002248719104200107>
- Cameron, L. (2003). *Metaphor in educational discourse*. Continuum.
- Cassel, D., & Vincent, D. (2011). Metaphors reveal preservice elementary teachers' views of mathematics and science teaching. *School Science and Mathematics*, 111(7), 319-324. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00094.x>
- Chapman, O. (1997). Metaphor in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 201-228. <https://doi.org/10.1023/A:1002991718392>
- Clandinin, D. J. (1986). *Classroom practice: Teacher images in action*. The Falmer Press.
- Chiu, M. M. (1994). Metaphorical reasoning in mathematics: Experts and novices solving negative number problems. *Paper Presented at the Annual Meeting of the American Education Association, April, 4-8*. LA: New Orleans (ERIC Document Reproduction Service No. ED 374-988).
- Crompton, H. (2015). Understanding angle and angle measure: A design-based research study using context aware ubiquitous learning. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 22(1), 19-30. doi: 10.1564/tme_v22.1.02
- Danesi, M (2007). A conceptual metaphor framework for the teaching of mathematics. *Studies in Philosophy and Education*, 26, 225-236. <https://doi.org/10.1007/s11217-007-9035-5>
- Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.10.001>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company.
- Fyhn, A. B. (2006). A climbing girl's reflections about angles. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 91-102. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.004>
- Henderson, D. W. & Taimina, D. (2007). Experiencing meanings in geometry. In D. Pimm, M. Sinclair, & W. Higginson (Eds.), *Mathematics and the Aesthetic* (pp. 58-83). Springer-Verlag.
- Heaton, R. M. (2000). *Teaching mathematics to the new standards: Relearning the dance*. The Teachers College Press.
- Johnson, M. (1981). Introduction: Metaphor in the philosophical tradition. In M. Johnson (Ed), *Philosophical perspectives on metaphor* (pp. 3-47). The University of Minnesota Press.
- Ju, M. K. & Kwon, O.N. (2003). Students' conceptual metaphor of differential equations: A sociocultural perspective on the duality of the students' conceptual model. *School Mathematics*, 5(1), 135-149
- Keiser, J. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing 6th grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(3), 285-306. http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0603_2
- Kim, D. & Kim, M. K. (2020). A study on understanding and misconception about angle of Elementary 4th Grade Students. *School Mathematics*, 22(2), 183-203. <https://doi.org/10.29275/sm.2020.06.22.2.183>
- Kim, S. (2005). Metaphors on mathematics teaching. *School Mathematics*, 7(4), 445-467.
- Kim, S. & Shin, I. (2007). On the Mathematical Metaphors in the Mathematics Classroom. *Education of Primary School Mathematics*, 10(1), 29-39.
- Kim, S. (2018a). Angle concepts and introduction methods of angles in elementary mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, 21(2), 209-221. <https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.2.209>
- Kim, S. (2018b). Research on the definitions of angle in the past Korean elementary mathematics textbooks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(3), 265-282. <https://doi.org/10.29275/jerm.2018.08.28.3.265>
- Kim, S. & Heo, H. (2022). The concept of the angle presented in the middle school mathematics textbooks. *The Mathematical Education*, 61(2), 305-322. <https://doi.org/10.7468/MATHEDU.2022.61.2.305>

- Kövecses, Z. (2010). *Metaphor: A practical introduction* (2nd ed). Oxford University Press.
- Kövecses, Z. (2015). *Where metaphors come from: Reconsidering context in metaphor*. Oxford University Press.
- Krussel, L., Edward, B., & Springer, G. T. (2004). The teacher's discourse moves: A framework for analyzing discourse in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics*, 104(7), 307-312. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2004.tb18249.x>
- Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things: What categories reveal about the mind*. University of Chicago Press.
- Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (2nd ed.) (pp. 202-251). Cambridge University Press
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago University Press.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought*. Basic Books.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Lee, C. H. (2001). An analysis on angle concepts in mathematics education. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics: School Mathematics*, 3(1), 25-44.
- Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Notice 2015-74 [supplement 8].
- Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Notice 2022-33 [supplement 8].
- Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, 16(3), 265-284.
- Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 209-238. <https://doi.org/10.1023/A:1003927811079>
- Neyland, J. (2003). Playing outside: An introduction to jazz metaphor in mathematics education. *Australian Senior Mathematics Journal*, 18(2), 8-18.
- Nolder, R. (1991). Mixing metaphor and mathematics in the secondary classroom. In K. Durkin & B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice* (pp. 561-578). Open University Press.
- Presmeg N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 267-279). Lawrence Erlbaum Associates.
- Reddy, M. (1993). The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (2nd ed.) (pp. 164-201). Cambridge University Press.
- Schmitt, R. (2005). Systematic metaphor analysis as a method of qualitative research. *The Qualitative Report*, 10(2), 358-394. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2005.1854>
- Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-54.
- Sfard, A. (1997). Commentary: On the metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-371). Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13. <https://doi.org/10.3102/013189X027002004>
- Sfard, A. (2000). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate and emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 296-327. <https://doi.org/10.2307/749809>
- Sticht, T. G. (1993). Educational uses of metaphor. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (2nd ed.) (pp. 621-632). Cambridge University Press.
- Park, C. K. (2017). Metaphors for Mathematics and Philosophical Problems. *Journal for History of Mathematics*, 30(4), 247-258. <https://doi.org/10.14477/JHM.2017.30.4.247>
- Reeder, S., Utley, J., & Cassel, D. (2009). Using metaphors as a tool for examining preservice elementary teachers' beliefs about mathematics teaching and learning. *School Science and Mathematics*, 109(5), 290-297. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18093.x>