The Mathematical Education. Vol. 62, No. 1, 23-34
https://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.1.23

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

The analysis and algebraic consideration on the rationalizing denominators in school mathematics

Choi, Jihoon[1] · Kim, Inkyung[2]*
[1]Professor, Cheongju University
[2]Professor, Cheongju University

*Corresponding Author: Inkyung Kim (inkyungkim@cju.ac.kr)

ABSTRACT

The rationalizing denominators presented in the mathematics textbooks is being used in various places of school mathematics curriculum. However, according to some previous research on the rationalizing denominators in school mathematics, it seems that there is no clear explanation as to why rationalizing denominators is necessary and why it should be used. In addition, a previous research insists that most students know how to rationalize denominators but do not understand why it is necessary and important. To confirm this, we examined the rationalizing denominators presented in the 2015 revised mathematics curriculum as school mathematics. Then we also examined the rationalizing denominators algebraically as academic mathematics. In detail, we conducted an analysis on the rationalizing denominators presented in randomly selected three mathematics textbooks and teacher guidebooks for middle school third grade. Then the algebraic meaning of the rationalizing denominators was examined from a proper algebraic structure analysis. Based on this, we present alternative definitions of the rationalizing denominators which is suitable for school mathematics and academic mathematics. Finally, we also present the mathematical contents (irrationals of the special form can be algebraically interpreted as numbers in the standard form) that teachers should know when they teach the rationalizing denominators in school mathematics.

Key words: rationalizing denominators, school mathematics, academic mathematics, algebraic structure

학교수학에서 제시하는 분모의 유리화 분석 및 대수적 고찰

최지훈[1] · 김인경[2]*
[1]청주대학교 교수 · [2]청주대학교 교수

*교신저자: 김인경 (inkyungkim@cju.ac.kr)

초록

교과서에서 제시된 분모의 유리화는 수학과 교육과정의 다양한 곳에서 사용되고 있다. 하지만, 분모의 유리화에 대한 선행연구들은 학교수학에서 분모의 유리화가 왜 필요하고 왜 사용해야 하는가에 대해서는 명확한 설명이 이루어지지 않음을 제시하고 있다. 뿐만 아니라, 대부분의 학생들이 분모의 유리화 방법에 대해서는 이해하고 있으나 그 필요성과 중요성에 관해서는 모른다고 주장하는 연구도 존재한다. 이를 확인해보기 위해, 학교수학으로서 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 분모의 유리화에 대해 살펴보고, 학문수학으로서 대수학적으로 분모의 유리화에 대해 살펴보았다. 세부적으로, 임의로 선정된 중학교 3학년 3종 수학 교과서와 교사용 지도서에서 제시된 분모의 유리화에 대해 분석하였다. 그리고 적합한 대수적 구조 분석을 통하여 분모의 유리화에 대한 대수학적 의미를 살펴보았다. 그리하여, 이를 바탕으로 학교수학과 학문수학에 적합한 분모의 유리화의 정의를 제시하고, 이를 지도하기 위해 교사가 알아야하는 수학적 내용-특별한 형태의 무리수를 대수적인 관점에서 표준적인 형태의 수로 해석-을 제시하였다.

주요어: 분모의 유리화, 학교수학, 학문수학, 대수적 구조

Received December 29, 2022 **Revised** January 17, 2023 **Accepted** January 17, 2023
2000 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D20
Copyright © 2023 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http: //creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

수학과 교육과정에 포함되는 수학적 내용은 수학자, 수학교육자, 수학교사 등의 전문가에 의해 엄선된 중요한 것이라고 볼 수 있다. 하지만, 그럼에도 불구하고, 학생들이 배우면서 그 수학적 내용이 왜 필요한지, 왜 중요한지 알지 못한다면 그 의미가 퇴색될 것이다. 우리가 살펴보고자 하는 '분모의 유리화'는 '수와 연산' 중 '제곱근과 실수'에서 다루어지는 학습요소이지만, 분모의 유리화를 대부분 하나의 방법으로 다루는 경우가 많다. 왜 분모의 유리화가 필요한지, 왜 분모의 유리화를 해야만 하는지에 대한 명확한 설명이 교과서에 주어져 있지 않다. 심지어, 교사용 지도서에서도 분모의 유리화의 필요성을 주장하지만, 진정한 필요성에 의해 사용한다는 설명보다 편리성에 초점을 맞춘 설명을 제시하고 있다(Jang et al., 2020; Ryu et al., 2020).

사실 분모의 유리화에 직접적으로 초점을 두고 연구한 논문은 찾을 수 없었다. 몇몇 연구들(Ok, 2014; Roh, 2002; Song, 2017) 이 제곱근, 실수, 그에 대한 연산 등에 초점을 두고 있지만, 분모의 유리화에 대한 언급은 찾아보기 어려웠다. 분모의 유리화에 대해 언급하고 있는 논문(Kim, 2007; Yun, 2016)을 살펴본다면, 교과서상의 분모의 유리화 정의나 방법에 대한 언급만 있고 이에 대한 어떠한 분석도 제시하지 않고 있음을 알 수 있다. Choi (1999)의 연구에서는 분모의 유리화에서 계산 과정만 보여줄 뿐 유리화의 필요성에 대한 설명이 없어, 학생들이 유리화의 필요성을 느끼지 못한다고 제시하고 있다. 이 연구가 하나의 교과서를 분석한 것이라 일반화하기는 어렵지만, 분석에 의하면 분모의 유리화를 하면 계산이 편하고 오차도 줄일 수 있다는 것으로 지도하고 있다고 제시한다. 그로부터 10년이 넘게 지난 연구(Joo, 2010)에서도 여전히 대부분의 학생들이 분모의 유리화 방법에 대해서는 이해하고 있으나 그 필요성에 관해서는 모르고 있다고 주장한다. 뿐만 아니라 분모의 유리화가 실수의 계산과정이나 대소 관계를 파악하는데 필요한 계산 기술과 같다고 제시한다. 이를 통하여, 대부분의 연구가 분모의 유리화를 하나의 방법으로 생각하고 있다는 것을 알 수 있다.

본 연구에서는 교과서와 교사용 지도서에 제시된 분모의 유리화에 관한 내용을 분석해보고, 대수학적인 측면에서 분모의 유리화의 의의를 살펴볼 것이다. 그리하여 학교수학과 학문수학에 적합한 분모의 유리화의 정의를 생각해보고, 이를 지도하기 위해 교사가 알아야 하는 수학적 내용이 무엇이며, 어떠한 형태로 교과서 및 지도서에 반영되어야 할지 살펴보고자 한다.

3종 교과서와 교사용 지도서에서 제시된 분모의 유리화 분석

2015 개정 수학과 교육과정상에서 분모의 유리화에 대해 살펴보았다. 내용 체계에서 제시된 수와 연산의 내용요소는 '제곱근과 실수'에 분모의 유리화가 속한다고 볼 수 있다. 분모의 유리화가 직접적으로 단원으로서 제시되어 있지 않지만 '제곱근과 실수'에서 수의 연산을 위해 필요한 것이므로, 교육과정상 여기에 속한다고 볼 수 있다. 직접적인 언급은 <용어와 기호>에서 찾아볼 수 있다.

교과서와 교사용 지도서상의 분모의 유리화를 분석하기에 앞서, 다수의 중학교 3학년 수학 교과서를 살펴보았다. 그 결과 분모의 유리화 단원의 내용 및 전개가 유사하여, 대표성을 가진다는 판단 하에 3종 교과서를 임의로 선택하였으며(Jang et al., 2020; Kim et al., 2020; Ryu et al., 2020), 교과서에서 제시하는 내용에 대한 교수-학습 세부사항을 함께 분석하기 위하여 3종 교과서의 교사용 지도서를 분석 대상에 포함하였다. 각 교과서와 교사용 지도서는 출판사별로 편의상 A, B, C로 표기하였고, 표기순서는 임의로 정하였다.

교과서에서 제시된 분모의 유리화

분모의 유리화가 포함된 단원명

3종 교과서에서 분모의 유리화가 포함되어 있는 단원명을 살펴보았다(Table 1). 3종 교과서 모두 분모의 유리화가 소단원으로 제시되지는 않는다. A, C 교과서에서는 '근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈', B 교과서에서는 '근호를 포함한 식의 나눗셈'에서 분모의 유리화의 정의 및 그에 관한 문제가 제시되어 있다. 그리고 2종 교과서는 그 다음 소단원인 덧셈과 뺄셈에서 다시 한번 분모의 유리화에 관한 문제가 제시되어 있다.

Table 1. Unit titles of the three selected textbooks

Textbook	A	B	C
Units	1. Square root and real number	1. Square root and real number	I. Square root and real number
	1. Square root and the property	1. Meaning of square root	1. Square root and real number
	2. Irrational number and real number	2. Property of square root	1) Square root
	3. Computation of expression with radical sign	3. Irrational number and real number	2) Irrational number and real number
		4. Comparison of sizes of real numbers	3) Comparison of sizes of real numbers
		5. Multiplication of expression with radical sign	2. Computation of expression with radical sign
		6. Division of expression with radical sign	**1) Multiplication and division of expression with radical sign**
		7. Addition and subtraction of expression with radical sign	2) Addition and subtraction of expression with radical sign

단원명을 분석해보면, A, B, C 교과서 모두 대단원으로 '제곱근과 실수'를 제시하고 있다. A, B 교과서는 바로 해당 단원을 제시하고, C 교과서는 중단원으로 '근호를 포함한 식의 계산'으로 제시하고 소단원으로 해당 단원을 제시하고 있다. 여기서 A 교과서의 해당 소단원명과 C 교과서의 중단원명이 동일함을 알 수 있다. 결과적으로, A 교과서는 포괄적으로 단원명을 정해서 다루고 있고, B 교과서는 반대로 세부적으로 나누어서 나눗셈에서 다루고 있으며, C 교과서는 곱셈과 나눗셈에서 분모의 유리화를 다루고 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 '근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈(Hur et al., 2015)'과 '제곱근의 곱셈과 나눗셈(Hwang et al., 2013)'이 혼용되고 있었지만, 2015 개정 교육과정에서는 살펴본 교과서 모두 '근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈'으로 단원명을 사용하고 있었다. 이는 연산에 더 적합한 용어를 사용하고 있다고 볼 수 있다. 제곱근에만 한정한 것이 아니라 근호를 포함한 식으로 연산 대상을 확장하여 제시하는 것이다.

분모의 유리화의 정의 방식 분석

3종 교과서에서 제시하는 분모의 유리화 정의를 살펴보자(Table 2). 2009 개정 교육과정에서는 다양한 정의가 제시되었으나 2015 개정 교육과정에서는 세 교과서에서의 정의가 거의 유사하다. 2009 개정 교육과정에서는 가정을 '분모에 무리수가 있을 때(Hur et al., 2015)', '분모에 근호가 있을 때(U et al., 2013)' 등으로 다양하게 제시하였으나, 현재는 모두 '분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때'로 제시하고 있다(Table 2). 2009 개정과의 차이는 먼저 분수를 전제로 하고 있다는 것이고, 무리수와 근호가 혼재하는 것이 아닌 이 둘을 모두 포함한 정의를 사용하고 있다는 것이다. 하지만, 현재의 정의도 완벽하지는 않다. 분수의 분모가 근호를 포함한 무리수라고 하는 것이 $\frac{1}{\sqrt{2}+\pi}$와 같은 수라면 분자, 분모에 $\sqrt{2}-\pi$를 곱해도 $2-\pi^2$를 얻으므로 유리수가 되지 않는다. 즉, 분모의 유리화의 가능성 여부는 교과서상에 언급되어 있지 않다. 이 부분에 대한 더 자세한 수학적 설명은 이후 '분모의 유리화가 불가능한 형태'에서 제시하였다.

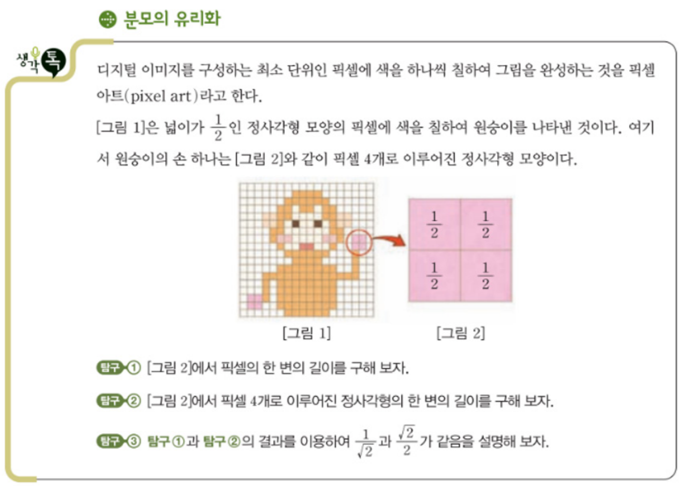
Table 2. The definitions of rationalizing denominators in the three textbooks

Textbook	A	B	C
The definitions of rationalizing denominators	분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다.	분수의 분모가 근호가 있는 무리수일 때, 분모와 분자에 각각 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다.	분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때, 분자와 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다.

분모의 유리화에 대한 부연 설명 분석

3종 교과서 모두 본문 상에서 분모의 유리화 도입 전후에 부연 설명을 제시하고 있다. 먼저, 분모의 유리화를 도입하는 과정을 살펴보면 다음과 같다. A 교과서는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 소수 표현 시 $1 \div \sqrt{2}$ 보다는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 분모, 분자에 $\sqrt{2}$를 곱해서 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 $\sqrt{2} \div 2$로 계산하

는 것이 더 쉽다는 측면에서 분모의 유리화를 도입한다. B 교과서는 제시된 상황 없이 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 의 분모, 분자에 $\sqrt{2}$ 를 곱하여 분모를 유리화시킨다고 설명하고 정의를 도입한다. C 교과서는 넓이를 측정하는 상황을 통하여 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 임을 설명한다(Figure 1). 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 에 근호를 씌운 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 큰 정사각형의 한 변의 길이 2를 반으로 나눈 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 같다고 제시하는 것이다. 그리하여 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 와 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 같음을 인식하고 난 다음에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 로 나타내는 방법을 제시하면서 분모의 유리화를 설명한다. 그러고 난 다음에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 소수표현을 위해 어떤 방법이 더 장점을 가지는지 살펴본다(Figure 2).


분모의 유리화

생각 톡

디지털 이미지를 구성하는 최소 단위인 픽셀에 색을 하나씩 칠하여 그림을 완성하는 것을 픽셀 아트(pixel art)라고 한다.

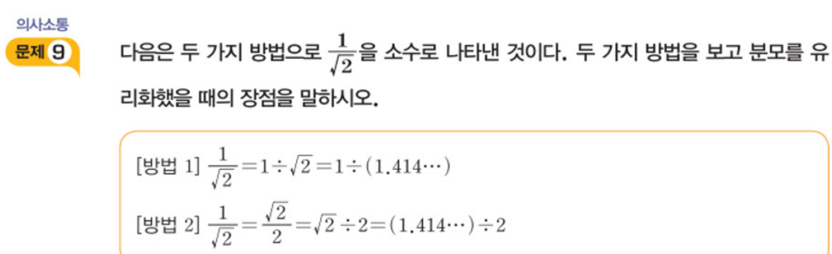
[그림 1]은 넓이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형 모양의 픽셀에 색을 칠하여 원숭이를 나타낸 것이다. 여기서 원숭이의 손 하나는 [그림 2]와 같이 픽셀 4개로 이루어진 정사각형 모양이다.

탐구 ① [그림 2]에서 픽셀의 한 변의 길이를 구해 보자.

탐구 ② [그림 2]에서 픽셀 4개로 이루어진 정사각형의 한 변의 길이를 구해 보자.

탐구 ③ 탐구 ①과 탐구 ②의 결과를 이용하여 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 과 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 같음을 설명해 보자.

Figure 1. The introduction of the rationalizing denominators in Textbook C


의사소통 문제 9

다음은 두 가지 방법으로 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 소수로 나타낸 것이다. 두 가지 방법을 보고 분모를 유리화했을 때의 장점을 말하시오.

[방법 1] $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2} = 1 \div (1.414\cdots)$

[방법 2] $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 = (1.414\cdots) \div 2$

Figure 2. A merit of rationalizing denominator given in Textbook C

그리하여, C 교과서는 분모의 유리화 도입의 필요성과 장점을 모두 제시하면서 왜 분모의 유리화를 배워야 하는지에 대한 타당성을 설명하고 있다.

이후 분모의 유리화에 대한 부연 설명은 분모의 유리화를 하는 방법을 설명하고 있다. 이는 A, B 교과서만 제시하고 C 교과서는 제시하고 있지 않다. 이 방법은

$$a > 0,\ b > 0 \text{ 일 때, } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

로 이를 이용하면 쉽게 분모를 유리화할 수 있다고 제시한다. 그 외에도 A, B, C 교과서는 교사용 지도서에서 몇 가지 분모의 유리화를 하는 방법을 추가로 제시하고 있다.

교사용 지도서에 제시된 분모의 유리화

지도 목표 및 성취 기준 분석

2009 개정 수학과 교육과정의 교사용 지도서에서는 대단원에서 제시하는 지도목표에 분모의 유리화에 관한 내용이 제시된 교과서들이 있었다(Hur et al., 2015; Hwang et al., 2013; U et al., 2013). 그러나 2015 개정 수학과 교육과정의 교사용 지도서에서는 대단원에서 분모의 유리화에 관한 지도목표를 찾아볼 수 없었다(Jang et al., 2020; Kim et al., 2020; Ryu et al., 2020). 단지, 소단원의 지도목표 또는 성취기준에서 분모의 유리화에 관한 내용을 찾아볼 수 있었다(Table 3). B 교사용 지도서는 성취기준을 제시하였고, A, C 교사용 지도서는 지도목표로 제시되어 있었다. A 교사용 지도서는 분모의 유리화에 관한 뜻이나 설명없이 '분모의 유리화를 할 수 있다'라고만 제시하고 있다. B, C 교사용 지도서는 유사한 형태로 제시하고 있는데, 차이가 있다면 C 교사용 지도서는 분수를 먼저 정의하고 분모의 유리화를 정의했다면, B 교사용 지도서는 분모를 이야기하고 분수를 다루었다는 차이가 있다.

Table 3. Teaching goals and achievement criterions for rationalizing denominators in the three textbooks

Textbook	A	B	C
Teaching goals and achievement criterions	분모의 유리화를 할 수 있다.	분모의 유리화의 뜻을 알고, 분모가 근호가 있는 무리수인 분수의 분모를 유리화할 수 있다.	분모의 유리화의 뜻을 알고, 분수의 분모가 근호를 포함한 무리수일 때 분모를 유리화할 수 있게 한다.

지도상의 유의점 및 내용 연구

3종 교사용 지도서의 분모의 유리화에 관한 지도상의 유의점은 Table 4에 제시되어 있다. 여기서 A, C 교사용 지도서에서는 분모의 유리화의 필요성을 알게 하는 것에 유의점을 두었다. 그래서 두 교과서 모두 분모의 유리화 도입 시 분모의 유리화가 필요한 상황을 제시하고 있다. 그러나 B 교사용 지도서에서는 분모의 유리화 도입 상황이 제시되어있지 않고, 바로 분모의 유리화를 정의하고 있다. 하지만, 소단원의 맨 마지막에 '생각넓히기'라는 항목에 가서 지도목표를 '분모의 유리화의 필요성을 알게 한다'고 제시하고 있다(Figure 4). 상황적으로 보았을 때, 분모의 유리화의 필요성을 느껴서 분모의 유리화를 도입하고 이를 적용하면 편리한 상황에서 적절히 사용하도록 하는 것이 중요하게 보인다. 하지만, B 교사용 지도서는 분모의 유리화를 익히고 난 다음, 어디에 쓰이면 편리한지를 제시하고 있어서 순서가 뒤바뀐 것으로 보인다.

Table 4. Teaching point presented in the three teacher guidebooks

<table>
<tr><th>Unit</th><th>Guidebook A</th><th>Guidebook B</th><th>Guidebook C</th></tr>
<tr><td>The units on rationalizing denominators</td><td rowspan="2">- 분모가 무리수일 때와 유리수일 때의 차이점을 확인하고, 분모의 유리화의 필요성을 알게 한다.
- 근호를 포함한 식의 계산 결과는 $\sqrt{(a^2b)}$ 의 꼴은 $a\sqrt{b}$ 의 꼴로 바꾸고, 분모에 근호가 있을 때는 이를 유리화하여 나타내게 지도한다.</td><td>분모의 유리화를 지도할 때, 분모의 항이 두 개인 것은 다항식의 곱셈 단원에서 다룬다.</td><td>분모의 유리화를 지도할 때, 분모가 무리수인 수와 유리수인 수의 차이점을 알게 하여 분모의 유리화의 필요성을 인식하게 한다.</td></tr>
<tr><td>Additions and subtractions of radical expressions</td><td>사칙계산이 섞여 있는 식의 계산에서는 $\sqrt{(a^2b)} = a\sqrt{b}$ (단, $a > 0$, $b > 0$)와 분모의 유리화를 이용하여 각 항을 간단히 한 후에 곱셈과 나눗셈을 먼저 하고, 덧셈과 뺄셈을 할 수 있도록 지도한다.</td><td>근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈에서 근호 안의 수가 a^2b 의 꼴이면 반드시 a^2 을 근호 밖으로 꺼내어 식을 변형한 후에 계산할 수 있도록 한다.</td></tr>
</table>

지도서에 따른 교과서에서 제시상황을 살펴보면 다음과 같다. A 교과서에서는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 소수로 나타내는 과정에서 $1 \div \sqrt{2}$ 보다는 $\sqrt{2} \div 2$ 가 계산상 더 편리함을 제시하고 분모의 유리화의 정의를 제시하고 있다(Figure 3). B 교과서에서는 소단원의 맨 끝에 '생각넓히기'에서 가로의 길이가 $\sqrt{2}m$ 이고 넓이가 3m일 때 세로의 길이를 구하는 상황을 제시하고 있다. 이때, $1 \div \sqrt{2}$ 보다 $\sqrt{2} \div 2$ 가 계산상 더 편리함을 살펴보게 하였다. C 교사용 지도서는 앞에서 제시한 것처럼 A 교과서와 동일하게 $1 \div \sqrt{2}$ 보다는 $\sqrt{2} \div 2$ 가 계산상 더 편리함을 제시하지만, 그보다 앞서 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 임을 제시하고 이 둘을 소수로 바꾸었을 때의 편리성을 따져보도록 하고 있다.

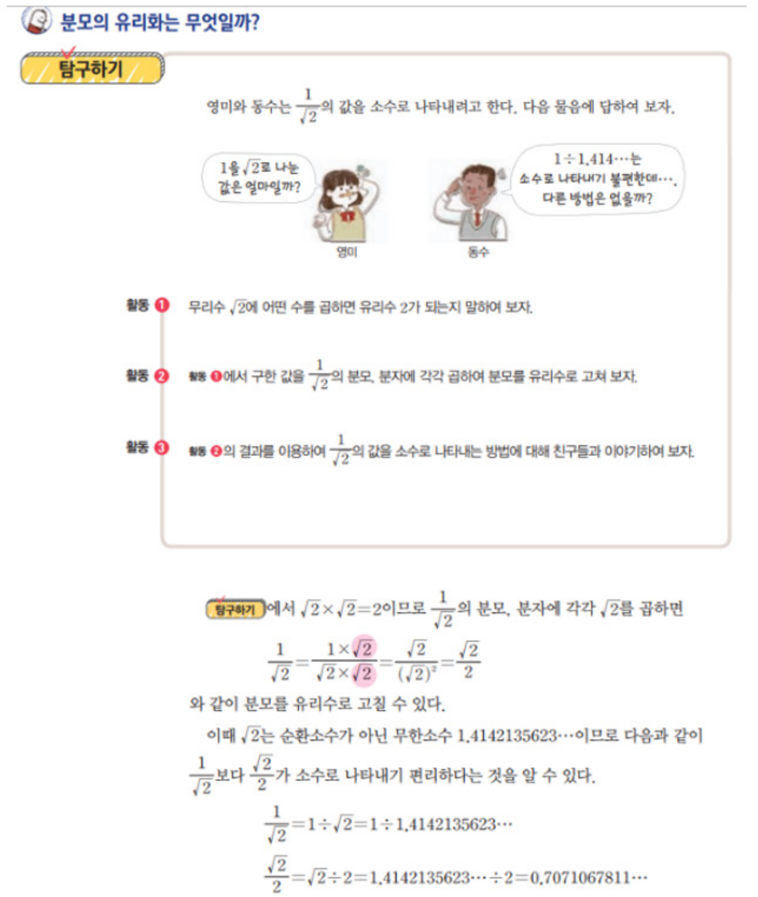


Figure 3. A content of Textbook A

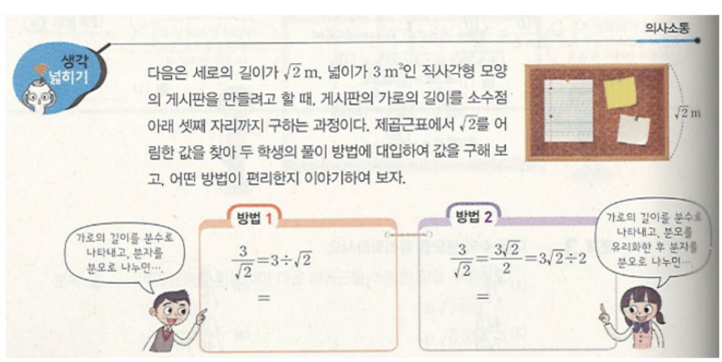


Figure 4. A content of Textbook B

이 3종 교사용 지도서에서 지도상의 유의점으로 분모의 유리화의 필요성을 알게 한다고 되어있지만, 3종 교과서 모두 분모의 유리화의 필요성을 인식시킨다기보다 소수로 나타내는 편리성을 제시한 것이라고 볼 수 있다. 그래서 3종 교과서의 문제들 모두 지도상의 유의점인 분모의 유리화의 필요성을 인식시키기에는 충분하지 않다는 것을 확인할 수 있었다.

그 외의 교사용 지도서에서 제시하고 있는 분모의 유리화와 관련된 특징적인 것을 살펴보면, 세 교과서 모두 소단원에서 분모의 항이 하나인 식만 분모의 유리화를 다루고 있다. A 교사용 지도서에서는 다루는 식에 관한 언급이 전혀 없지만, B 교사용 지도서에는 지도상의 유의점에서 분모의 유리화를 지도할 때 다루는 식을 제한하고 있다. 즉, 분모의 항이 두 개인 것은 다항식의 곱셈

단원에서 다룬다고 제시하고 있다. C 교사용 지도서에서는 지도상의 유의점에는 없지만, 내용연구 부분에서 '분모가 $\sqrt{2}-1$이나 $\sqrt{5}-\sqrt{2}$와 같은 경우, 분수의 분모를 유리화하기 위해서는 제곱근의 사칙계산과 곱셈 공식을 모두 알아야 한다. 따라서 이와 같은 분수의 분모의 유리화는 II. 다항식의 곱셈과 인수분해 단원에서 다루도록 한다.'라고 언급하고 있다.

수학적 측면에서 분모의 유리화의 의의

대수적 구조에서의 분모의 유리화의 의미

현재의 중등학교 수학과 교육과정에서 무리수가 포함된 분수식을 다룰 때, 분모에 무리수 표현을 남겨두는 일은 권장되지 않는다. 예를 들어, 어떤 문항을 풀어내어 최종으로 얻은 답이 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$인 경우를 생각해보자. 그러면 기계적인 분모의 유리화 수행을 통해 분모의 켤레 무리수인 $1-\sqrt{2}$를 분모, 분자에 곱하여

$$\text{(식1)}\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=-1+\sqrt{2}$$

을 얻고, $-1+\sqrt{2}$를 답으로 제시하는 것이 권장된다. 두 수 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$와 $-1+\sqrt{2}$는 같음에도 불구하고 전자를 후자로 변형하는 과정이 요구되는 것이다. 반대로 후자를 전자로 변형하는 과정은 어색할 뿐만 아니라 그 필요성 또한 찾아볼 수 없다. 이는 전자보다 후자가 '수학적으로 더 표준적인 형태의 수'로 인식된다는 것이다. 그러나 그 이유를 앞의 3종 교과서에서는 찾아볼 수 없으며, 3종 교사용 지도서에 따르면 분모의 유리화가 근호를 포함한 분수의 소수 표현 또는 근삿값 추정을 용이하게 한다는 설명이 첨부되어 있을 뿐이다. 하지만 학교수학에서 어떤 수의 소수표현이나 근삿값에 관심을 두는 경우는 다소 제한적이기에, 이 측면에서 분모의 유리화의 이유를 오롯이 설명하기 어렵다. 따라서 본 장에서는 대수학의 이론을 배경으로 삼아 분모의 유리화의 의미를 규명하고자 한다.

집합 A 위에 정의된 이항연산 $\cdot$이 어떤 특별한 공리-예를 들면 교환법칙 또는 결합법칙-를 만족할 때, 순서쌍 $(A,\cdot)$을 대수적 구조라 부른다. 집합 A 위에 또 다른 이항연산 $+$가 존재하여 새로운 대수적 구조 $(A,+,\cdot)$를 생각할 수도 있다. 예를 들어, 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 위에 정의된 덧셈 $+$, 곱셈 $\cdot$ 에 대하여 $(\mathbb{Z},+)$와 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$은 각각 군과 환이라는 대수적 대상이 된다. 이와 같은 대수적 대상의 구조 연구는 대수학 연구의 주요한 방향이다. 따라서 대수학적 측면에서 분모의 유리화를 설명하려면 적절하게 설정된 대수적 구조의 관찰이 필요하다.

연산이 덧셈인 경우

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$는 덧셈에 관하여 군을 이룬다. 이 군 $(\mathbb{R},+)$의 두 원소 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$와 $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$의 연산을 생각하자. 두 원소의 분모가 서로 다르므로, 덧셈 과정에서 다음과 같은 통분의 필요성이 자연스럽게 제기된다.

$$\text{(식2)}\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}+\frac{1+\sqrt{2}}{-1}=-2$$

즉, 통분 과정에서 분모의 유리화가 자동으로 진행되며 덧셈이 쉽게 계산된 것인데, 그 배경에는 두 원소의 분모가 서로 켤레 무리수라는 사실이 존재한다. 그렇다면 분모가 켤레 무리수 관계에 있지 않은 두 원소 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$와 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$의 덧셈 과정에서는 통분의 이득을 취하기 어려울 것이다. 그러나 (식2)와 같이 각 원소의 분모를 유리화하는 다음의 계산 과정

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}+\frac{2-\sqrt{3}}{1}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

을 거치면 쉬운 덧셈 계산이 가능하다. 따라서 분모의 유리화는 분모에 근호가 포함된 두 수의 덧셈의 용이성을 제공할 수 있다.

연산이 곱셈인 경우

분모의 유리화는 곱셈 구조를 바탕으로 설명할 때 비로소 그 본질에 접근할 수 있다. 다만 (식1)에서 제시된 두 원소의 덧셈 논의와는 맥락을 달리한다. 두 수 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 와 $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ 를 더하는 과정에서는 각 원소의 분모의 유리화가 덧셈의 용이성에 기여하였으나, 곱하는 과정에서는 분모의 유리화 과정을 생략한 채

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{1}{-1}=-1$$

과 같이 간단한 계산이 가능하기 때문이다. 따라서 곱셈의 측면에서 분모의 유리화를 설명하는 과정은 '두 무리수의 곱셈' 대신 '어떤 대수적 구조에 부여된 연산으로서의 곱셈'을 생각해야 한다. 논의의 중심 역할을 맡게 될 유리수 1과 무리수 $\sqrt{2}$ 에 각각 x와 y라는 형식적인 이름을 새롭게 부여해보자. 그러면 (식1)과 (식2)에 등장한 분수는 $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x-y}$ 로 표현된다. 이때 분모에 등장한 $x+y$, $x-y$처럼 x와 y의 $\mathbb{Q}$-선형조합($\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합)으로 나타내어지는 수, 즉

$$ax+by\,(\text{단, } a,b\in\mathbb{Q})$$

형태의 수에게 "예쁜 수"라는 이름을 임시로 부여하자. 예를 들어 10, $2\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$는 각각 $10x+0y$, $0x+2y$, $3x+y$로 표현되므로 모두 예쁜 수이다. 자명하진 않지만 $\sqrt{3}$ 은 예쁜 수가 아님을 귀류법을 통해 어렵지 않게 증명할 수 있다. 또한 다음의 식

$$(a_1x+b_1y)+(a_2x+b_2y)=(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y,$$
$$(a_1x+b_1y)-(a_2x+b_2y)=(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y,$$
$$(a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)=(a_1a_2+2b_1b_2)x+(a_1b_2+a_2b_1)y$$

로부터, 예쁜 수들의 덧셈, 뺄셈, 그리고 곱셈의 결과 다시 예쁜 수를 얻는다. 그러면 예쁜 수들의 나눗셈의 결과 또한 다시 예쁜 수일까? 답은 긍정적이며, 이를 정당화하기 위하여 예쁜 수의 역수가 다시 예쁜 수임을 보이면 충분하다. 두 실수의 나눗셈 결과는 나누는 실수의 역수를 다른 실수에 곱한 것과 일치하기 때문이다.

예를 들어 예쁜 수 $x+y$ 의 역수 $\frac{1}{x+y}$ 가 예쁜 수일까? 분수 $\frac{1}{x+y}$ 는 표기상 예쁜 수의 형태를 지니지 않는다. 따라서 위 물음에 답하기 위해서 $\frac{1}{x+y}$ 을 예쁜 수 모양으로 변형시킬 방법, 즉 등식 $\frac{1}{x+y}=ax+by$ 를 만족하는 유리수 a와 b의 존재성을 규명해야 한다. 그런데 (식1)에 의하면 $\frac{1}{x+y}=-x+y$ 이므로 위 물음에 대한 대답은 긍정적이다. 일반적으로 임의의 유리수 a와 b에 대하여 분수 $\frac{1}{ax+by}$ (단 $ax+by\neq 0$)는 다음과 같이 변형가능하다.

$$\frac{1}{ax+by}=\frac{ax-by}{(ax+by)(ax-by)}=\frac{ax-by}{a^2x^2-b^2y^2}=\frac{ax-by}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}x+\frac{-b}{a^2-2b^2}y$$

그런데 a와 b가 모두 유리수이므로 $\frac{a}{a^2-2b^2}$ 와 $\frac{-b}{a^2-2b^2}$ 도 유리수이다. 즉, 임의의 예쁜 수의 역수는 다시 예쁜 수임이 확

인되었다. 따라서 예쁜 수들의 나눗셈의 결과는 다시 예쁜 수이며, 결과적으로 예쁜 수들 사이에 사칙연산이 자유롭다는 결론에 도달한다.

체론을 통한 분모의 유리화의 의미 분석

환 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *와 체* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *의 분석을 위한 분모의 유리화*

예쁜 수에 대한 논의는 현대대수학의 언어를 통해 더 분명하게 서술된다. 부정원(indeterminate)이 t 이고 계수가 환 R 에 속한 다항식 전체의 집합을 $R[t]$라 표기하자. 예를 들어 $\mathbb{Q}[t]$는 유리계수 다항식 전체의 집합을 의미한다. 이제 다항식 $p(t)=t^2-2$를 생각하자. 이 다항식은 $\mathbb{Q}[t]$의 원소이지만, 유리수체 $\mathbb{Q}$에서 근을 갖지 않는다. 다항식 $p(t)$의 두 근 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$가 모두 무리수이기 때문이다. 따라서 $p(t)$의 근이 모두 포함되도록 유리수체 $\mathbb{Q}$를 더 큰 체로 확대하는 대수적 과정은 매우 자연스럽다. 두 근 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$는 모두 무리수, 즉 실수이기 때문에 처음부터 $p(t)$를 실수계수 다항식 전체의 집합인 $\mathbb{R}[t]$의 원소로 간주한다면, $p(t)$의 모든 근이 다시 실수체 $\mathbb{R}$에 속하게 되어 앞서 제기된 문제의 해답을 제시하게 된다. 한술 더 떠서, $p(t)$를 $\mathbb{C}[t]$의 원소로 생각한다면, $p(t)$의 근의 모양을 따져볼 것도 없이 $\mathbb{C}$에서 근을 가질 것이며, 이는 대수학의 기본정리가 보장한다. 그러나 이와 같은 해답 제시는 마치 한 송이의 꽃을 심는 과정에서 건설기기를 동원하여 땅을 파는 것처럼 과격한 것이다. 실제로 다항식 $p(t)$의 두 근을 포함하는 $\mathbb{Q}$의 확대체를 찾기 위하여 거대한 확대체 $\mathbb{R}$을 제시한다면 $p(t)$의 근과는 직접적인 관련이 없어 보이는 $\sqrt{3}$이나 π와 같은 수까지 확대체에 포함되기 때문이다. 이는 유리수체와 실수체 사이의 간극이 지나치게 크다-예를 들어 두 집합은 기수부터 다른데, 실제로 비가산집합 $\mathbb{R}$는 가산집합 $\mathbb{Q}$보다 훨씬 많은 수의 원소를 포함한다-는 사실에 기인한다. 꽃을 심을 때, 모종삽으로 땅을 파면 충분한 것처럼, $\mathbb{Q}$의 확대체를 조금 더 효율적으로 제시할 수 있을 것이다. 이때 '효율적'이라는 조건은 구체적으로 아래의 조건을 만족하는 체 F를 찾는다는 것이다.

[조건1] F는 $\mathbb{Q}$의 확대체이다. 즉 F는 체이고 $\mathbb{Q}\subset F$이다. [조건2] F는 $p(t)$의 두 근을 포함한다. 즉, $\sqrt{2}\in F$, $-\sqrt{2}\in F$이다. [조건3] F는 [조건1]과 [조건2]를 만족하면서 크기가 가장 작다. 즉, [조건1]과 [조건2]를 만족하는 또 다른 체 K가 존재한다면, $F\subset K$이다.

위의 세 조건을 만족하는 체를 구체적으로 제시하기에 앞서, 먼저 그 존재성에 대한 질문을 던져야 한다. 효율적인 확대체를 찾겠다면서, 존재하지 않는 것과 씨름하는 것은 비효율의 모순을 낳기 때문이다. 실제로 [조건1]과 [조건2]를 만족하는 예제로 실수체와 복소수체가 존재한다. 한편 [조건1]과 [조건2]를 만족하는 모든 체의 교집합은 곧 다시 체가 되며 [조건3]을 만족한다. 이로부터 세 조건을 만족하는 체 F의 존재성이 유일성과 함께 확보되었다. 이제 F의 구조를 구체적으로 확인하여 위하여 F가 반드시 포함해야하는 원소의 정체를 규명한다. 우선 F는 [조건1]에 의해 $x=1$을 포함하며, [조건2]에 의해 $y=\sqrt{2}$를 포함한다. 따라서, [조건1]에 의해 F는 $ax+by$ 형태의 수 (단 $a,b\in\mathbb{Q}$)를 모두 포함한다. 결과적으로 F는 예쁜 수를 모두 포함해야 하며, 이는 F의 최소 규모를 결정한다. 그렇다면 예쁜 수 이외에 F가 추가로 가져야 할 원소가 있을까? 없다. 그 이유는 무엇일까? 우선, 예쁜 수 두 개를 더하거나 빼거나 곱한 결과는 다시 예쁜 수임을 확인하였다. 그렇다면 예쁜 수끼리의 나눗셈은 어떨까? 체에서 한 수를 다른 수로 나눈다는 것은 한 수에 "다른 수의 역수"를 곱한다는 것이다. 그런데 앞서 살펴본 분모의 유리화에 의하여, [예쁜 수의 역수]는 다시 예쁜 수가 된다. 따라서 [예쁜 수끼리 나눈다는 것]은 곧 [예쁜 수 두 개를 곱하는 행위]로 변경되므로, 결과물도 예쁜 수이다.

논의를 정리하자면, $\mathbb{Q}$의 확대체 중에서 다항식 $p(t)=t^2-2$의 근을 포함하는 가장 작은 것이 바로 "예쁜 수 전체의 집합"이라는 것이다. 현대대수학에서는 이를 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$라 표현하며, $\mathbb{Q}$에 $\sqrt{2}$를 첨가한 환이라 부른다. 그런데 앞선 논의에 따르면, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 원소들은 사칙연산이 자유롭다. 대수학적 언어를 이용한다면 환 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$가 곧 체의 구조를 지닌다는 의미가 되며, 이를 기호로

표현하면 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$이다. 즉, 환 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$과 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$가 대수적으로 동일한 구조임을 보일 때 사용된 가장 중요한 열쇠는 바로 "예쁜 수의 역수가 다시 예쁜 수"가 된다는 것이었으며, 그 과정에서 분모의 유리화의 역할이 재차 강조된다.

$\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$ 와는 다른 형태의 분모의 유리화

예를 들어 $a+b\sqrt{3}$ (단 $a,b\in\mathbb{Q}$)꼴의 수 전체의 집합을 생각하자. 분모의 유리화 결과

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{a-b\sqrt{3}}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=\frac{a}{a^2-3b^2}+\frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}$$

이 성립하며, $\dfrac{a}{a^2-3b^2}$ 와 $\dfrac{-b}{a^2-3b^2}$ 는 유리수이다. 따라서 $a+b\sqrt{3}$ 형태의 수의 역수가 다시 $a+b\sqrt{3}$ 형태를 띈다. 즉, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 논의와 동일한 이유에 의해 환 $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ 또한 체가 된다. 이때 $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$는 $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{3}$ 을 포함하는 가장 작은 체이다. 차이점이라면, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 논의에서는 다항식 $p(t)=t^2-2$를 사용했으나, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$의 논의에서는 $q(t)=t^2-3$과 그 근을 생각한다는 것이다. 이때 $p(t)$와 $q(t)$는 모두 유리계수 다항식이라는 공통점이 있으며, $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 은 그것들의 근이라는 점에서, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$와 $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$의 논의는 본질적으로 평행하다. 따라서 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ 와 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$ 의 분모를 유리화하는 과정은 대수학적인 의의를 공유한다.

이와 같은 흐름은 분모가 무리수가 아닌 경우에도 발견된다. 예를 들어 $a+bi$ (단 $a,b\in\mathbb{R}$)형태의 수를 임시로 "좋은 수"라 불러보자. 이때 i는 제곱했을 때 -1이 되는 수 중 하나, 즉 다항식 $r(t)=t^2+1$의 한 근이다. 물론 $r(t)$를 유리계수 다항식으로 볼 수도 있지만, 근 i는 이미 실수 바깥의 영역인 복소수체에 존재하기 때문에, 여기서는 $r(t)$의 계수가 복소수보다 한 단계 아래의 체, 즉 실수체에 존재하는 것으로 간주할 것이다. 한편 "좋은 수" 전체의 집합은 $\mathbb{R}[i]$로 표현되며, 이는 $\mathbb{R}$과 i를 포함하는 가장 작은 환이다. 그런데 $\mathbb{R}[i]$은 곧 체가 되기도 한다. 그 이유는 "좋은 수"들의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 그리고 나눗셈이 다시 "좋은 수"가 되기 때문인데, 이 중 나눗셈에 대한 논의는 결과적으로 다음 식

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

에 기인한다. "좋은 수"의 역수가 다시 "좋은 수"라는 것이다. 이때 위의 식 변형은 분모의 실수화이다. 그러므로 분모의 유리화와 분모의 실수화도 대수학적으로 동일한 의미를 갖는다.

분모의 유리화가 불가능한 형태

예를 들어 실수 $\dfrac{1}{1+\pi}$를 생각하자. 분모 $1+\pi$가 무리수이지만, 분모와 분자에 적절한 수를 곱하여 분모를 유리수로 바꿀 방법을 떠올리기 어렵다. 예쁜 수 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$의 경우에는 분모의 켤레 원소-이 경우에는 켤레 무리수-인 $1-\sqrt{2}$를 분자와 분모에 곱해주는 것으로 분모의 유리화가 완료되었으며, 좋은 수 $\dfrac{1}{1+i}$의 경우에도 분모의 켤레 원소-이 경우에는 켤레 복소수-인 $1-i$를 분자와 분모에 곱해주는 것으로 분모의 실수화가 완성된다. 그러나 $\dfrac{1}{1+\pi}$의 분모 $1+\pi$에는 켤레 원소의 개념이 존재하지 않는다. 이와 같은 현상이 발생한 이유는 π가 초월수이기 때문이다. 실제로 π는 어떠한 유리계수 방정식의 해도 되지 않으며, 그로 인해 환 $\mathbb{Q}[\pi]$는 앞 예제와는 달리 체가 되지 않는다. 즉, $\mathbb{Q}[\pi]$의 원소 $1+\pi$의 곱셈에 대한 역원이 다시 $\mathbb{Q}[\pi]$에 존재한다는 보장이 불가능해진 것이다. 따라서 $\dfrac{1}{1+\pi}$의 분모를 지금까지와 같은 방법으로 유리화하는 것은 불가능하며, 이는 "분모의 유리화"라는 명칭의 의미를 조심스럽게 고찰해야 하는 이유를 제시한다. 학교수학에서 제시하는 분모의 유리화는 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$과 같이 분모가 제한된 형태의 무리수인 경우에만 시행 가능함을 기억해야하며, 대수학적 해석을 통해서만 그 수학적 의의를 규명할 수 있음을 강조한다.

개선된 분모의 유리화의 적용 방안 제시

분모의 유리화의 새로운 정의 제시

학문수학에서의 정의

“분모의 유리화”라는 명칭에 따르면, 분모가 무리수인 분수는 모두 분모의 유리화의 대상이 되는 것으로 오해할 수 있다. 그러나, 예를 들어 $\frac{1}{1+\pi}$ 와 같은 분수는 분모의 유리화 대상이 아니었다. 따라서 학문수학에서 분모의 유리화는 아래와 같이 정의하는 것이 자연스럽다.

분모의 유리화: 대수적인 수 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $\mathbb{Q}[a]$의 분수체 $\mathbb{Q}(a)$는 곧 $\mathbb{Q}[a]$와 일치한다. 이때 $\mathbb{Q}(a)$의 원소 $\frac{x}{y}$ 를 $\mathbb{Q}[a]$의 원소로 바꾸어 표현하는 것을 분수의 유리화라 부른다.

예를 들어, $a=\sqrt{2}$ 일 때, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$의 원소 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 를 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 원소 $1-\sqrt{2}$ 로 바꾸어 적는 것이 곧 분수의 유리화이다. 한편, 무리수 π 는 대수적인 수가 아니므로, $\frac{1}{1+\pi}$ 와 같은 수는 분모의 유리화 대상이 되지 않는다.

학교수학에서의 정의

앞서 분석한 3종 교과서의 정의(Table 2)에 따르면, 분모의 유리화 대상을 “분모에 근호가 포함된 분수”로 어느 정도 제한하고 있으며, 유리화의 방법까지 제시한다. 정의에 따르면 $\frac{1}{1+\pi}$ 와 같은 대상은 분모의 유리화 대상에서 배제된다. 그러나 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 는 분모에 근호가 포함된 분수임에도 불구하고, 교과서의 정의에 따라 분모의 유리화를 진행할 수 없다. 물론 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 의 분자와 분모에 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 를 곱하여 $\frac{1\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}{1}$ 과 같은 계산을 수행하면 무리수였던 분모 $\sqrt{\pi}$ 가 유리수 1로 변하지만, 분자에 다시 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 가 등장하므로, 적절한 분모의 유리화 과정으로 볼 수 없다. 따라서 분자와 분모에 곱하게 될 ‘같은 수’에 대한 설명도 필요하다. 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 학교수학에서 분모의 유리화의 정의를 다음과 같이 구체적으로 서술할 필요가 있다.

분모의 유리화 수정안: 분수 $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$ (단 a,c는 실수이고, b는 완전제곱수가 아닌 자연수)의 분자와 분모에 $a-\sqrt{b}$ 를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 분모의 유리화라고 한다.

교사 교육을 위한 방향 제시

“분모의 유리화”라는 표현은 자칫 분모가 무리수인 분수는 모두 유리화의 대상으로 삼는 오해를 낳는다. 따라서, 그 이름의 범용성과는 다르게 분모의 유리화는 매우 제한적이고 특별한 모양의 분수에 한해서만 가능함을 교사가 먼저 인식해야 한다. 또한 제한적인 모양의 분수만 생각해야 하는 이유는, 대수적인 수와 유리수의 확대체에 대한 논의에 의해서만 비로소 본질적인 설명이 가능했기 때문임을 교사는 인식해야 한다. 분모의 유리화의 필요성에 대한 교과서 및 교사용 지도서의 설명은 어느 정도의 당위성을 확보하고 있으나, 그것이 분모의 유리화 지도의 본질적인 이유라 말하기 어렵다. 예를 들어, 무리수 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 직접 소수로 표현하는 대신 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 로 바꾸어 표현하는 것이 더 간단할 수 있으나, 실제로 학교수학에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 과 같은 무리수를 소수로 표현하는 일은 매우 드물기도 하며, 분모의 유리화를 모르더라도 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 소수표현은 가능하기 때문이다. 따라서 교사는 이와 같은 이유로 분모의 유리화의 타당성을 오롯이 주장하기 어려움을 이해하고 대수학적 설명의 가치를 인식해야 한다.

물론 교사가 학생들에게 대수학적 설명을 근거로 분모의 유리화의 필요성을 호소할 수는 없을 것이다. 오히려 수 표현의 "표준화"가 분모의 유리화 필요성을 가장 적절하게 설명할 수 있을 것으로 기대한다. 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$의 원소는 분모의 유리화 과정을 통해 환 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 원소 형태로 표현된다는 점에서, 환 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 원소의 모양을 표준적인 것으로 볼 수 있다. 앞서 언급하였던 "예쁜 수" 는 사실 "표준적인 형태의 수"였던 것이다. 이 표준화 과정은 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$의 원소를 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$의 원소로 재표현 한다는 점에서 대수학적인 본질을 담고 있으며, 동시에 교과서나 교사용 지도서에서 언급하고 있는 분모의 유리화의 장점도 어느 정도 설명할 수 있게 된다. 소수표현, 대수비교의 용이성은 모두 "표준적인 형태의 수"로 표현을 통일했기 때문에 얻게 되는 장점이기 때문이다. 이와 같이 표준화를 통하여 얻게 되는 장점은 수학의 여러 장면에서 등장한다. 예를 들어, 통계학에서는 확률변수 X가 정규분포 $N(\mu,\sigma^2)$를 따를 때, 새로운 확률변수 $\frac{X-\mu}{\sigma}$를 생각하여 표준정규분포로 변환할 수 있으며, 기하학(선형대수학)에서는 주어진 벡터 v에 노름(크기)의 역수를 스칼라곱 하여 단위벡터 $\frac{v}{\|v\|}$를 얻을 수 있다. 이와 같은 변환은 모두 어떤 수학적 대상의 표준화(normalize, standardize)라 불리는 과정이며, 표준화된 결과물은 공통된 기법을 통하여 손쉽게 분석할 수 있다는 장점이 존재한다. 분모의 유리화 역시 이와 같은 표준화의 개념으로 이해할 수 있다. 그리하여, 본 연구에서는 분모의 유리화의 표준화적 관점이 적어도 교사용 지도서에는 포함되어야 함을 주장한다. 교사 또한 이 관점을 인지한 상태에서 분모의 유리화를 지도해야 한다. 그리고 학생들로 하여금 분모를 유리화 하는 과정이 "표준적인 형태의 수"로 변환하는 과정이며, 이러한 표준화를 통해 얻게 되는 장점을 자연스럽게 인지할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 이 과정은 학생들이 분모의 유리화의 필요성을 알게 되는 것은 물론이며, 이후 교과과정에 등장하는 표준화의 개념을 쉽게 이해하고 그 수학적 가치를 인지할 수 있는 잠재력을 갖추는 것이다.

References

Choi, S. H. (1999). *A note on the instruction of the irrational numbers in middle schools*[Master's thesis, Chungnam National University].

Hur, M., Kim, S., Do, J. H., Cho, S. Y., Lee, K. E., Yang, S, Y., Lee, G. H., & Kim, S. Y. (215). *Middle school mathematics 3*. Daekyo.

Hwang, S. W., Kang, B. G., Han, G. J., Han, C. H., Kwon, H. C., Kim, E. S., Yoo, K. J., Jeong, J. S., & Kim, M. J. (2013). *Middle school mathematics 3*. Truebook Sinsago.

Jang, K. Y., Kang, H. Y., Kim, D. W., Ahn, J. M., Lee, D. H., Hong, E. J., Kim, M. J., Song, E. Y., Ha, S. S., Ji, Y. M., & Goo, N. Y. (2018). *Middle school mathematics 3-Teacher's guide book*. Jihak Publishing.

Joo, S. H. (2010). *The analysis of error about concept square roots and irrational numbers at middle school mathematics*[Master's thesis, Daegu University].

Kim, H. K., Na, G. S., Lee, M. R., Lee, A. K., & Kwon, Y. G. (2020). *Middle school mathematics 3-Teacher's guide book*. Truebook Sinsago.

Kim, H. Y. (2007). *The error analysis of concept, property and calculation process of an irrational number-with middle school 3rd grade students*[Master's thesis, Korea National University of Education].

Ok, D. H. (2014). *An analysis of 'Terminologies and Symbols' Included in the mathematics in middle school curriculum*[Master's thesis, Gyeongsang National University].

Roh, M. S. (2002). *A survey on the actual conditions of understanding for the concepts of square root and irrational number-Focused on the third graders in middle school*[Master's thesis, Korea National University of Education].

Ryu, H. C., Sunwoo, H. S., Shin, B. M., Jeong, D. S., Jang, Y. H., Sul, J. S, & Park, S. H. (2020). *Middle school mathematics 3-Teacher's guide book*. Chunjae Education.

Song, E. G. (2017). *A study on analyzing mathematical errors in constructed-response assessments and developing teaching methods*[Master's thesis, Inha University].

U, J. H., Park, K. S., Lee, J. H., Park, K. M., Kim, N. H., Nam, J. Y., Kwon, S. I., Kim, J. H., Kang, H. Y., Cho, C. M., Choi, E. J., Kim, J. S., Heo, S. H., Jeon, J. Y., Koh, H. J., & Lee, J. Y. (2013). *Middle school mathematics 3*. Dong-A Publishing.

Yun, M. O. (2016). *Methods of teaching the irrational numbers in the middle school under the 2009 revised curriculum*[Master's thesis, Pusan National University].