The Mathematical Education. Vol. 62, No. 1, 1-21
https://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.1.1

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

Splitting operation for composite units and construction of fractions as multipliers*

Yoo, Jin Young[1] · Shin, Jaehong[2]*
[1]Teacher, Wabu Middle School
[2]Professor, Korea National University of Education

*Corresponding Author: Jaehong Shin (jhshin@knue.ac.kr)

ABSTRACT

The purpose of this study is to explore how the student, who interiorized three levels of units, constructed fractions as multipliers by analyzing her ways of conceiving improper fractions with three levels of units and coordinating two three-levels-of-units structures. Among the data collected from our teaching experiment with two 4th grade students meeting 13 times for three months, we focus on how Seyeon, one of the participating students, wrote numerical expressions in the form of "× fraction" for the given situations using her splitting operation for composite units. Given the importance of splitting operation for composite units for the construction of fractions as multipliers, implications for further research are discussed.

Key words: multiplier, fraction concept, units-coordinating operation, three-levels-of-units structure, splitting operation for composite units

합성 단위에 대한 스플리팅 조작과 분수 곱셈 연산자 개념의 이해

유진영[1] · 신재홍[2]*
[1]와부중학교 교사 · [2]한국교원대학교 교수

*교신저자: 신재홍 (jhshin@knue.ac.kr)

초록

본 연구의 목적은 3수준 단위를 내재화한 학생이 가분수에 대해 3수준 단위를 다루는 것으로부터 두 3수준 단위를 조정하는 방식을 분석하고, 곱셈 연산자로서의 분수 개념의 발달과 어떠한 관련이 있는지를 탐구하는 것이다. 이를 위해 초등학교 4학년 학생을 대상으로 3개월 동안 13차시의 교수 실험을 하였고 본 논문에서는 세연의 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 두 3수준 단위를 조정하여 식(어떤 양×분수)으로 나타내는 과정에 주목한다. 양적 추론에 기반한 측정 활동을 바탕으로 학생의 곱셈 연산자로서의 분수 개념이 형성되는 사례를 보고함으로써 분수의 연산자 개념과 측정 개념의 관계를 조명하고 그에 따른 제언점을 제시한다.

주요어: 곱셈 연산자, 분수 개념, 단위 조정 조작, 3수준 단위 구조, 합성 단위에 대한 스플리팅 조작

1 본 논문은 제1 저자의 학위 논문 일부를 수정, 보완한 것임.

Received November 21, 2022 **Revised** December 06, 2022 **Accepted** December 06, 2022
2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

서론

학교 현장에서 다수의 학생은 분수 곱셈 문제를 해결하기 위해 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱하는 규칙을 암기하여 적용한다. 하지만 분수 곱셈에 대한 관계적 이해(Skemp, 1976)가 바탕이 되지 않은 채 연산 알고리듬을 형식화한 학생은 이후 분수를 포함한 곱셈적 추론이 요구되는 분수 나눗셈, 비례 추론, 대수적 추론 등에서 어려움을 겪게 된다(Hackenberg & Lee, 2015; Smith & Thompson, 2007; Thompson & Saldanha, 2003). 따라서 분수 곱셈을 처음 접할 때 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 구성하여 주어진 양과 분수의 관계를 이해하고 분수 배를 곱셈식으로 나타내는 능력은 후속 학습의 성취를 수월하게 하는 데 중요하다.

분수를 어떤 대상, 수, 집합에 작용하는 함수로 간주하는, '연산자(operator)'로서 분수에 주목했던 연구자들은 분수 곱셈 과정을 분자와 분모에 의해 곱셈적 조작이 두 번 수행되는 합성 조작으로 분석하고(Behr et al., 1983; Kieren, 1980), 그에 따라 도출될 수 있는 다양한 학생의 연산자 사용 모델을 유형화하여 제시하였다(Behr et al., 1993; Behr et al., 1997). 또한 본 연구가 따르는 조작적 관점은 어떤 양의 분수 배를 이해하고 어떤 양에 곱하는 수로 분수를 사용한다는 의미에서 연산자를 곱셈 연산자(multiplier)로 보다 구체적으로 정의하고(Hackenberg & Lee, 2015), 학생이 두 양(어떤 양과 그 양의 분수) 사이의 곱셈적 관계를 구성하는 데 필요한 다양한 단위의 구성과 이를 사용한 양적 조작에 주목하고 실제 학습 상황에서 학생의 수학적 행동을 관찰하여 그 특징을 분석하였다(Hackenberg, 2010, 2014; Hackenberg & Lee, 2015; Shin, 2010; Steffe & Olive, 2010). 하지만 그럼에도 불구하고 분수를 곱셈 연산자로 구성하지 않은 학생이 구성 과정에서 규칙적으로 보이는 행동/조작은 무엇이고, 어떻게 다른 행동/조작과 연결되며 그 원인은 무엇인지에 대해 체계적으로 밝히는 연구는 거의 없었다. 학생에게 실질적인 도움을 주기 위해서는 그 어려움의 원인과 상위 단계로 넘어가기 위한 인지적 요소가 무엇인지를 제시해야 하며 이를 위해 학생의 행동 방식을 세밀하게 분석할 필요가 있다.

이에 본 연구는 선행 연구를 미시적 측면에서 보완하고자 초등 및 중등 수학에서 분수 지식 발달 연구에 중요한 이론적 배경으로 사용되는 단위 조정 이론(Yoo & Shin, 2020, 2021; Shin et al., 2020; Steffe & Olive, 2010)을 토대로 학생의 분수 연산자와 관련한 곱셈적 사고를 분석하고자 한다.

단위 조정의 관점에서 어떤 분수량에 대해 '주어진 분수, 주어진 분수의 단위 분수, 주어진 분수가 파생된 기준 단위 1' 사이의 관계를 3수준 단위[2]로 구성하고 이해하는 것은 분수 곱셈 상황에서 분수를 합성하여 분수량의 분수를 구하고 분수를 곱셈 연산자로 사고하는 데 필수적이다(Shin, 2010; Steffe & Olive, 2010). 또한 3수준 단위를 주어진 자원(as given)으로 사용하는 것은 분배 분할 조작(distributive partitioning operation)의 구성과 함께 분수 연산자 개념의 형성과 관련이 있으나(Hackenberg, 2010, 2014; Shin, 2010) 학생이 3수준 단위를 구성하였더라도 분수 연산자 개념을 형성하는 데 제한이 있음을 고려하면(Hackenberg, 2010), 3수준 단위 조정 능력을 기반으로 분수 연산자 개념을 위해 더 구성해야 할 조작이 무엇인지 살펴볼 필요가 있다. 학생은 주어진 전체에 대해 단위 분수 $\frac{1}{n}$을 연산자로 인식하기 위해서 전체를 n부분으로 분할함과 동시에 그중 한 부분을 n번 반복하여 전체를 만들 수 있음을 이해해야 하며(Hackenberg, 2014) 이는 두 3수준 단위 구조의 조정이 요구된다(Hackenberg, 2010). 다수의 연구가 분배 분할 조작에 집중하여 학생의 분수 연산자 개념을 탐구하였던 바(Hackenberg & Tillema, 2009; Shin, 2010) 본 연구에서는 분배 분할 조작과 동등한 수준으로 분수 곱셈을 뒷받침할 수 있으면서 두 3수준 단위를 조정하는 주요 조작인 합성 단위에 대한 스플리팅 조작(Shin et al., 2020)에 주목하여 다루고자 한다.

이에 본 논문에서는 3개월간 13차시에 걸친 교수 실험에 참여한 두 명의 초등학교 4학년 학생 중 세연에 주목하여, 그의 분수 연산자 개념이 합성 단위에 대한 스플리팅 조작(splitting operation for composite units) 구성의 유무에 따라 어떻게 다른 양상을 보이는지 분석함으로써, 두 3수준 단위를 유연하게 변환하는 단위 조정 능력이 분수 연산자 개념 발달과 밀접한 관계가 있음을 보이겠다. 이를 통해 3수준 단위를 내재화한 학생이 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 이해하고 표현하는 능력을 갖추기 위한 핵심적인 조작의 역할을 살펴보고자 한다. 연구 문제는 다음과 같다.

1. 3수준 단위를 내재화한 세연의 합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 전의 곱셈 연산자로서의 분수 개념 이해는 어떠한가?
2. 3수준 단위를 내재화한 세연의 합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 후의 곱셈 연산자로서의 분수 개념 이해는 어떠한가?

---

2 이론적 배경에서 자세히 기술하였다.

이론적 배경

일반적 관점에서의 연산자 분수

일반적 관점에서 연산자 분수를 다루는 연구들은 분수를 일종의 함수로 간주한다. 그중 연산자 분수를 수학적 개념으로 정의한 연구자들은 집합(영역)이 다른 집합(영역)과 곱셈적으로 대응하는 메커니즘으로 보거나(Kieren, 1980), 분수 연산자가 작동하는 매체 및 상황에 따라 연산자 분수 개념을 분류하였다(Freudenthal, 1983). 또한 교환 함수로서 연산자 분수에 대한 의미론적 분석을 통하여 Duplicator/Partition-Reducer, Stretcher/Shrinker 등과 같이 학생의 단위 형성 모델을 제시하였다(Behr et al., 1993). 연산자 분수를 이해하기 위해서는 학생의 자연수 지식에 근거하여 학생의 활동을 도울 수 있어야 하며(Lamon, 1999), 연산자의 합성을 바탕으로 연산자 분수 개념을 형성하는 것은 유리수의 곱셈에 대한 기초를 제공할 수 있다(Kieren, 1980).

조작적 관점에서의 연산자 분수

조작적 관점에서 연산자 분수를 다룬 연구들은 학생이 구성한 연산자 분수 개념을 내재화된 정신적 행동인 조작(operation)으로 설명한다. 학생이 분수를 연산자로 인식하기 위해서는 분수 개념을 추상화할 필요가 있는데(Hackenberg, 2010, 2014), 예를 들면 어떤 양 a를 n번 반복하여 새로운 양 b를 만들고, a가 'b의 $\frac{1}{n}$'과 같다는 의미를 동시에 인식하는 학생은 두 양 a, b의 곱셈적 관계를 양방향으로 형성하여 양 b에 대해 단위 분수 $\frac{1}{n}$ 개념을 추상화한 것으로 볼 수 있다.

한편 Hackenberg와 Lee (2015)는 두 미지 양의 관계가 분수 배로 주어진 상황에서 미지 양에 곱셈 연산자로 자연수나 분수를 사용하고, 양적 의미를 설명할 수 있을 때 '미지 양에 대해 곱셈적으로 조작하는 것(operate on unknowns multiplicatively)'으로 보았다. 특히 그들은 덧셈 또는 곱셈에 작용하는 분수를 각각 구분하기 위해 분수 연산자 개념을 곱셈 연산자로 정의하였다. 본 연구에서는 발달적 측면에서 분수 연산 경험이 없는 학생이 '알려진 양'에 대해 분수를 어떻게 연산자로 이해하는지를 살펴보기 위해서 그들이 정의한 곱셈 연산자 개념을 활용하되 미지 양(unknowns)을 알려진 양(knowns)으로 그 범위를 정하였다. 이에 본 연구는 '알려진 양에 대해 곱셈적으로 조작하는 것(operate on knowns multiplicatively)'을 학생이 알려진 양의 분수에 해당하는 결과를 찾고, 양적 의미를 설명할 뿐만 아니라 곱셈식(알려진 양×분수)으로 표현하는 것으로 본다. 따라서 학생이 양 b에 대해 분수 $\frac{1}{n}$ 개념을 추상화한 것을 바탕으로 양 a를 곱셈식 $b \times \frac{1}{n}$로 나타낼 때 양 b에 대해 분수 $\frac{1}{n}$을 곱셈 연산자로 구성한 것으로 간주한다.

단위 조정

단위 조정(units-coordination)은 학생이 단위를 만들고, 만든 단위를 이용하여 단위 구조를 다양하게 형성하는 과정을 발달적 관점에서 다룬 이론이다(Lee & Shin, 2020; Steffe & Olive, 2010). 두 양의 관계를 구성하고 조정하는 단위 조정 활동 이전에 학생은 단위화 조작을 통해 단위 개념을 이해한다. '1-단위 네 개'를 '4-단위 한 개'와 같이 어떤 양(4)을 하나의 단위 개념으로 구성함으로써 1수준 자연수 단위를 시작으로 주어진 양을 합성 단위로 인식한다. 이후 학생은 합성 단위로 인식한 어떤 양에 대해 합성 단위의 합성 단위, 즉 단위의 단위의 단위(a unit of units of units)를 새롭게 구성함으로써 2, 3수준 자연수 단위 및 분수 단위를 만들 수 있다. 학생이 합성 단위를 반복해서 더하는 것이 아니라 합성 단위를 이루고 있는 각 단일 단위에 또 다른 합성 단위를 삽입하여 합성 단위의 여러 개인 양적 구조를 새롭게 구성한다면 두 합성 단위를 조정한(coordinating) 것으로 볼 수 있다(Steffe, 1992). 따라서 두 합성 단위를 조정하는 학생의 방식을 살펴본다면 학생이 어떤 종류의 단위를 이용하여 몇 수준의 단위 구조를 형성했는지를 파악하고 두 양의 관계를 어떻게 이해하는지 알 수 있다.

3수준 단위 구조

양을 3수준 단위를 사용하여 이해한다는 것은 주어진 양에 대해 세 개의 참조 단위(referent unit) '주어진 양의 단위(단위 분수), 단위 분수의 여러 개로 구성된 1 단위, 주어진 분수'를 기준으로 동시에 바라볼 수 있음을 의미한다. 예를 들면 가분수 $\frac{4}{3}$를 3수준 단위를 사용하여 이해하는 학생은 $\frac{4}{3}$에 대해 '$\frac{1}{3}$이 네 개' 단위, '$\frac{1}{3}$이 세 개'인 1 단위, '$\frac{4}{3}$가 한 개'인 세 수준의 단위로 동시에 이해

할 때 ‘$\frac{1}{3}$, $1\left(\frac{3}{3}\right)$, $\frac{4}{3}$’의 3수준 단위를 가진 양으로 인식한다. 그러나 실제 분할 활동 없이 3수준 단위를 내재화하는 능력은 쉬운 성취가 아니다. 3수준 단위를 주어진 자원으로 하여 양을 다루는 것은 가분수를 수로 인식할 뿐만 아니라 분수 곱셈 상황에서 분수를 합성하여 분수량의 분수를 구하고 분수를 곱셈 연산자로 사고하는 데 매우 중요하다(Hackenberg & Tillema, 2009).

합성 단위에 대한 스플리팅 조작

자연수량의 분수, 예를 들면 ‘4의 $\frac{1}{3}$’을 구할 때 전체 양(4)을 어떤 똑같은 미지 양의 세 부분으로 구성된 3수준 단위로 예상하는 학생은 주어진 전체가 3-부분으로 나눠 있지 않으므로 ‘1이 네 개’ 단위인 4에 대해 적절한 부분의 수를 갖는 새로운 양으로 만들기 위한 분할 조작을 수행한다. 학생은 4에 대해 4-부분(1이 네 개)이자 3-부분(‘4의 $\frac{1}{3}$’이 세 개)인 양으로 동시에 바라보기 위해 각 단일 단위(1)에 또 다른 자연수 합성 단위, 3을 분배하여 12-부분으로 만들어서 두 3수준 단위를 구성하고 조정한다. 즉 학생은 Figure 1과 같이 자연수(4)에 대해 ‘$\frac{1}{3}$의 세 개로 구성된 $1\left(\frac{3}{3}\right)$이 네 개’인 3수준 단위 구조(3-단위 네 개)로 만들고 이를 다시 ‘$\frac{1}{3}$의 네 개로 구성된 $\frac{4}{3}$가 세 개’인 또 다른 3수준 단위 구조(4-단위 세 개)로 유연하게 변환하여 결과($\frac{4}{3}$)를 찾을 수 있다.

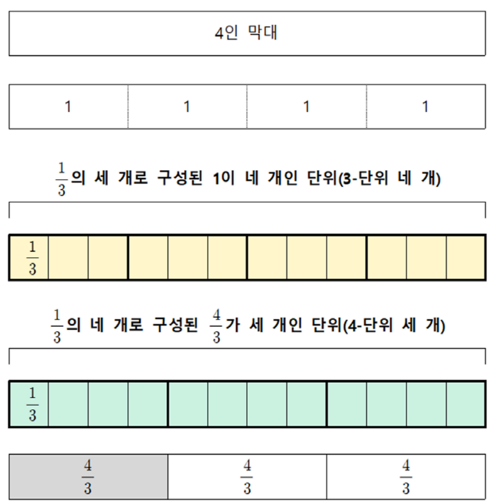


Figure 1. Coordination of ‘1 of 4’ and ‘$\frac{1}{3}$ of 4’

이러한 두 3수준 단위 구조의 조정을 통해 학생이 4에 대해 부분(1)의 부분($\frac{1}{3}$), 즉 가장 작은 부분(1의 $\frac{1}{3}$)을 열두 번 반복하여 전체(4)를 가역적으로 표상할 때 합성 단위 4에 대한 스플리팅 조작을 구성하였다고 볼 수 있다(Shin et al., 2020; Steffe & Olive, 2010). 이처럼 학생이 4에 대한 두 3수준 단위 구조를 형성하고 유연하게 변환하는 과정에서 학생이 부분(‘4의 $\frac{1}{3}$’에 해당하는 양)으로부터 전체(4)를 만든 것을 4에 대해 두 양 ‘1, $\frac{1}{3}$’의 관계를 형성하여 ‘4의 1’과 ‘4의 $\frac{1}{3}$’을 조정한 것으로 본다. 따라서 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 어떤 부분을 세 번 반복하여 전체(4)가 됨을 인식하고 그 부분이 ‘전체의 $\frac{1}{3}$’임을 동시에 이해하는 학생은 4에 대한 $\frac{1}{3}$의 개념을 추상화한 것이며 4에 대해 $\frac{1}{3}$을 곱셈 연산자로 사용할 수 있다.

한편 전체를 어떤 똑같은 미지 양의 세 부분으로 구성된 양으로 보고 전체(4)를 기준 단위로 하여 전체(4)의 $\frac{1}{3}$을 구하는 것과 달리 학생은 분배 분할 조작을 통해 Figure 2와 같이 4에 대해 4-부분(1이 네 개)으로 인식하고 단일 단위(1)에 주목하여 각 단일 단위(1)의 $\frac{1}{3}$을 찾을 수 있다. 이때, 학생이 네 개의 단일 단위의 $\frac{1}{3}$을 합한 결과가 전체(4)의 $\frac{1}{3}$이면서 단일 단위(1)의 $\frac{4}{3}$임을 이해하는 것은 학생이 수행한 분할 활동이 분배적(distributive) 특성을 갖는 증거가 될 수 있다. 그러나 실제 활동 전에 두 3수준 단위(3-단위 네 개, 4-단위 세 개)를 모두 예상해야 하는 합성 단위에 대한 스플리팅 조작과 달리 분배 분할 조작의 수행에는 실제 활동 전에 3수준 단위(3-단위 네 개)를 예측하는 것이 요구되며 이후 전체(4)의 $\frac{1}{3}$이면서 단일 단위(1)의 $\frac{4}{3}$가 얼마인지를 구하기 위해 두 3수준 단위(3-단위 네 개, 4-단위 세 개)의 조정이 필요하다(Shin et al., 2020).

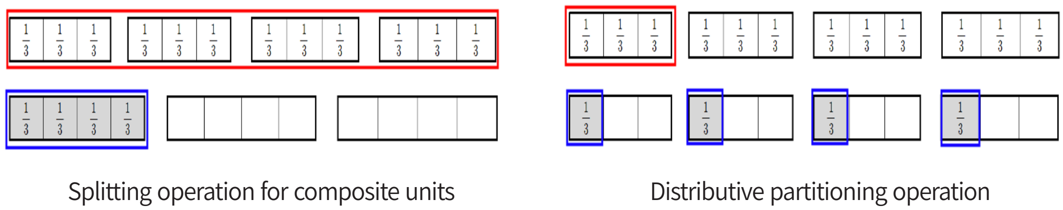


Figure 2. Two types of partitioning operations for finding $\frac{1}{3}$ of 4

재귀 분할 조작

단위 분수의 단위 분수 상황에서 학생이 전체와 관련하여 부분의 부분을 구하려는 의도를 갖고 자신의 분수 스킴을 활성화하여 자연수 곱셈에 의한 단위 조정 활동을 수행했다면 재귀 분할을 가용한 조작으로 구성한 것으로 볼 수 있다. 예를 들면 학생은 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$을 합성하는 상황에서 가장 작은 부분($\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$)을 반복하여 전체 1을 만들어서 전체를 ‘$\frac{1}{8}$($\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$)의 네 개로 구성된 $\frac{1}{2}$이 두 개’인 단위, 즉 ‘$\frac{1}{8}$이 여덟 개’인 3수준 단위로 구조화한다(Yoo & Shin, 2021). 따라서 재귀 분할 조작(recursive partitioning operation)은 합성 단위를 생성하고, 합성 단위를 여러 개 만드는 단위 조정 조작을 통해 전체에 대해 3수준 단위로 구성하는 정신적 활동이다(Steffe & Olive, 2010).

한편 재귀 분할 조작을 수행하는 학생이 단위 분수량에 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하기 위해서는 주어진 단위 분수량을 기준 단위로 하여 3수준 단위를 재구성할 필요가 있다. 예를 들어 ‘$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$’을 찾는 상황에서 두 3수준 단위를 조정하는 학생은 Figure 3과 같이 전체 1을 바탕으로 ‘$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$’을 조정한 결과, 즉 ‘$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\right)$, $1\left(\frac{8}{8}\right)$’ 사이의 관계(3수준 단위)를 $\frac{1}{2}$에 주목하여 ‘($\frac{1}{2}$의) $\frac{1}{4}$, ($\frac{1}{2}$의) 1, ($\frac{1}{2}$의) 2’ 사이의 관계(3수준 단위)로 새롭게 재조직한다.

이처럼 학생이 $\frac{1}{2}$에 대해 3수준 단위 구조($\frac{1}{8}$의 네 개로 구성된 $\frac{1}{2}$이 한 개인 단위)를 유지한 채 두 양 ‘1, $\frac{1}{4}$’의 관계를 형성한 것을 ‘$\frac{1}{2}$의 1’과 ‘$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$’을 조정한 것으로 본다. 학생은 $\frac{1}{2}$을 ‘$\frac{1}{8}$이 네 개’인 합성 단위인 동치 분수 $\frac{4}{8}$로 이해하고 단위 분수 연산자($\frac{1}{4}$)에 의한 크기 변화를 인식함으로써 $\frac{1}{2}$에 대해 $\frac{1}{4}$을 연산자로 사용할 수 있다.

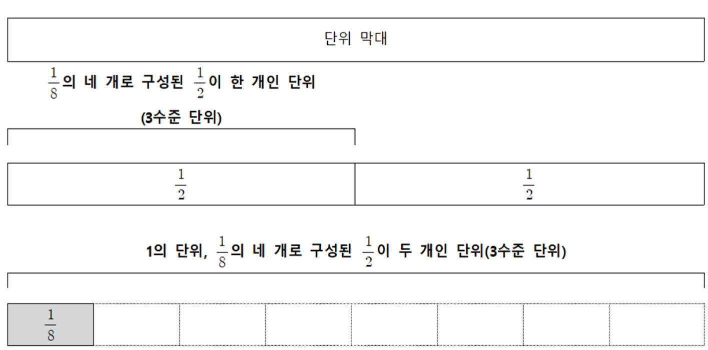


Figure 3. Coordination of ‘1 of $\frac{1}{2}$’ and ‘$\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$’

연구 방법

연구 방법 개관

본 논문에서 사용한 자료는 초등학교 4학년 학생 두 명을 대상으로 약 3개월(2021.6.~2021.8.)동안 총 13차시로 진행한 교수 실험 자료의 일부이다. 교수 실험은 교사-연구자의 의도를 반영한 과제를 제시하고 학생의 지식 구성 과정에 직접 참여함으로써 학생의 수학적 이해에 관한 가설을 수정하고 검증하면서 학생의 수학적 지식 이해와 발달을 설명하는 연구 방법으로, 내재화된 정신적 행동인 조작적 관점에서 학생의 수학적 이해와 발달에 대한 모델을 수립하는 것이 궁극적인 목적이다(Steffe & Thompson, 2000).

수행한 교수 실험의 목적은 단위 조정 수준에 따라 학생이 어떻게 분수 곱셈 연산자 개념을 구성하는지 탐구하는 것이었고, 본 논문에서는 특히 3수준 단위를 내재화한 학생의 곱셈 연산자로서의 분수 개념이 그의 단위 조정 조작과 관련하여 어떻게 발달하는지 초점을 맞추어 연구 결과를 제시하고자 한다. 교수 실험은 방과 후 또는 방학 중 시간을 활용하여 일주일에 1~2회 실시하되 수업의 집중도를 유지하기 위해 한 차시에 1시간 내외로 진행하였고, 제1 저자가 교사-연구자로서 학생들과의 교수 실험에 참여하였다.

연구 참여자 및 과제

본 연구의 목적이 학생의 수학 개념 발달 과정을 탐구하는 것이므로 정규 교육과정 또는 사교육 과정에서 관련 개념에 대한 학습 경험이 없는 학생을 선정해야 할 필요가 있다. 이를 위해 경기도 소재 W 초등학교 4학년 한 학급 총 29명의 학생들을 대상으로 자연수 및 분수 단위 간의 조정 등을 파악하는 사전 검사를 하여 교수 실험 참여에 요구되는 단위 조정 수준에 해당하면서 분수 연산 학습 경험이 없는 학생을 선발하였다.[3] 담임 교사를 통해 학생의 평소 학습 태도 및 수행 능력, 수학 과목에 관한 관심도, 분수 학습 경험 유무, 부모님의 촬영 동의 여부 등을 확인하는 과정을 거쳐 세연[4]이 자연수에 대한 3수준 단위를 다룰 수 있는 학생으로 최종 선정되었다. 본 연구에서는 세연의 발달 과정 중 가분수에 대해 3수준 단위를 사용하여 이해하는 것부터 두 3수준 단위를 조정하는 방식의 변화가 곱셈 연산자로서의 분수 개념의 발달과 어떠한 관련이 있는지에 대한 분석 결과를 제시하겠다.[5]

정규 교육과정에서는 분수의 덧셈과 뺄셈이 분수의 곱셈보다 앞서 지도되고 있으나 본 연구는 선행 연구(Yoo & Shin, 2021; Shin & Lee, 2018)에 근거하여 학생의 학년 요인보다 조작적 관점에서 가용한 단위 조정 수준에 방점을 두어 학생의 잠재적 구성 영역(Steffe, 1991)에 속한 과제로 판단되면 그 순서를 달리하여 제시할 수 있다고 본다. 이에 교사는 세연의 단위 조정 조작 방식에 초점을 두고 그에 따른 분수 개념을 면밀히 파악하고자 자연수량의 분수, 분수량의 분수 상황을 제시하였다.

본 논문에서는 교수 실험에서 사용한 과제 중 합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 전후에 따라 세연이 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 형성하는 데 어떠한 어려움이 있었고, 해당 조작을 통해 어떻게 분수 개념을 구성하는지를 살필 수 있는 네 개의 과제를 선별하여 세연의 문제 해결 과정을 분석하였다(Table 1 참고). 특히 Task 2와 Task 4는 단위 분수의 단위 분수 상황에서 두 3수준 단위를 조정하는 능력의 여부에 따라 세연이 단위 분수를 곱셈 연산자로서 인식하는 데 어떠한 차이가 있는지를 비교하는 목적에서 선정하였다. 가분수에 대해 3수준 단위를 사용하여 이해하는 세연은 자연수량의 단위 분수에 해당하는 양을 서로 다른 기준 단위(자연수, 1)에 대해 곱셈적으로 인식하였으나 분수량을 기준으로 사고하는 데 어려움이 있었다(Table 1의 Task 1 참고). 특히 단위 분수의 합성 상황에서 단위 분수량에 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하기 위해서는 전체 1에 대해 '단위 분수의 단위 분수, 단위 분수, 1'의 3수준 단위 구조를 구성할 뿐만 아니라 주어진 단위 분수량에 대한 3수준 단위를 새롭게 재구성할 필요가 있었다(Table 1의 Task 2 참고).

---

3 사전 검사 과제는 선행 연구(Hackenberg & Tillema, 2009; Steffe & Olive, 2010) 및 교과서를 참고하여 구성하였으며 부록에 제시하였다. 해당 검사는 학급 담임 교사가 정규 수업 시간 동안 학생들에게 검사지를 배부하여 실시하였고 제1 저자가 검사 결과지를 바탕으로 분석하였다. 분석 결과 29명의 학생 중에서 3수준 단위를 다루면서 관련 분수 학습 경험이 없는 학생은 두 명이었다.

4 연구에 참여한 학생의 이름은 가명을 사용하였다.

5 세연은 자연수에 대한 3수준 단위를 구성한 상태로 본 교수 실험에 참여하였다. 총 13차시의 교수 실험 동안 세연은 8차시 교수 실험에서 가분수에 대해 3수준 단위를 사용하여 이해하였고, 12차시 교수 실험에서 두 3수준 단위를 조정하였다. 본 논문은 가분수를 3수준 단위로 다루는 세연이 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 두 3수준 단위를 조정함으로써 자연수량, 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 인식하는 과정에 주목하므로 자료 분석의 범위를 Table 1과 같이 일부 차시의 과제로 설정하였다.

Table 1. Tasks used for this study

Class (Date)	Task	Multiplicative situation	Seyeon's units-coordination	
10th class (2021/08/05)	Task 1	Describe the situation of a bar of length 2 divided by 4 using '△ of 2', '△ of 1', '△ of $\frac{1}{2}$' Write numerical expressions for it	Three-levels-of-units structure for improper fraction	Coordination of '1 of 2' and '$\frac{1}{2}$ of 2' Coordination of '$\frac{1}{2}$ of 2' and '$\frac{1}{4}$ of 2'
11th class (2021/08/10)	Task 2	Describe the situation of finding '$\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$' using '△ of ◯' Explain why you chose the fractional expression as the best or the worst for the given situation		Coordination of '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$'
13th class (2021/08/17)	Task 3	Find '$\frac{1}{3}$ of 4' Write a numerical expression that fits the given situation	Two three-levels-of-units structures	Coordination of '1 of 4' and '$\frac{1}{2}$ of 4' Coordination of '$\frac{1}{2}$ of 4' and '$\frac{1}{4}$ of 4' Coordination of '$\frac{1}{4}$ of 4' and '$\frac{1}{12}$ of 4' Coordination of '$\frac{1}{12}$ of 4' and '$\frac{1}{3}$ of 4' Three-levels-of-units structure for $\frac{4}{3}$ Coordination of '$\frac{1}{3}$ of 4' and '1 of 4'
	Task 4	Find how many times you can subtract $\frac{1}{8}$ from $\frac{1}{2}$ and put a symbol of operation between $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$ to make $\frac{1}{8}$		Coordination of '2 of $\frac{1}{2}$' and '1 of $\frac{1}{2}$' Coordination of '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$' Coordination of '1 of $\frac{1}{2}$' and '$\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$' Coordination of '$\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$' and '1 of $\frac{1}{2}$'

한편 세연은 자연수량에 대해 두 3수준 단위를 구성하고 이를 유연하게 변형하기 시작하면서 자연수량의 단위 분수를 구하고 '자연수×단위 분수'로 표현하였다. 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 주어진 자연수량에 대해 여러 3수준 단위 구조를 구성하고, 구성한 3수준 단위 구조를 서로 유연하게 전환하여 부분(자연수량의 단위 분수)으로부터 전체(자연수량)를 가역적으로 표상하는 능력은 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 형성하는 데 필요한 요소로 보였다(Table 1의 Task 3 참고). 세연은 단위 분수량의 단위 분수 부분을 반복하여 단위 분수량과 전체 1을 각각 3수준 단위로 구성한 결과를 토대로 분수 연산자에 의한 크기 변화를 이해함으로써 단위 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 인식하였다. 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 주어진 양을 두 3수준 단위로 다루어 이를 서로 조정하는 단위 조정 능력은 주어진 양에 대한 단위 분수 개념을 추상화하는 데 중요한 역할을 하는 것으로 보였다(Table 1의 Task 4 참고).

자료 수집 및 분석

자료 수집을 위해 학생의 기록 행위를 담을 카메라 한 대, 학생의 언어적 표현과 행동, 교사와 학생의 대화 등 전체 교수 실험의 장면을 담을 카메라 한 대, 모두 두 대의 카메라를 사용하여 전 차시 수업을 촬영하였다. 촬영한 모든 수업은 전사하여 자료화하고, 학생의 학습지, 연구자의 기록 노트 등을 포함하여 분석 과정에서 종합적으로 활용하였다.

1차 진행 중 분석은 제작한 비디오 자료를 토대로 매 수업 종료 후 수행하였고, 주요 목적은 학생의 반응을 관찰하여 이해 정도를 파악하고 학생의 지식 구성을 촉진할 수 있도록 다음 차시 과제를 선정하는 것이었다. 2차 회고적 분석은 모든 교수 실험 수업이 끝나고 이루어졌으며 자료를 면밀하게 분석하여 학생이 수학적 개념을 구성하는 데 사용한 조작 방식을 일관성 있게 설명할 수 있는 요소를 찾아 학생의 수학적 사고에 대한 초기의 해석을 수정하거나 정교하게 다듬고자 하였다.

결과 분석

합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 전

가분수에 대해 3수준 단위를 사용하여 이해하는 세연은 2에 대해 '$\frac{1}{2}$, $1\left(\frac{2}{2}\right)$, $2\left(\frac{4}{2}\right)$' 사이의 관계(3수준 단위)를 구성하여 '2의 $\frac{1}{2}$'을 정확하게 언급하고 기술하였다. 이 절에서는 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 구성하기 전의 세연의 분수 연산자 개념을 중심으로 세연의 문제 해결 과정을 소개한다.

단위 분수를 기준 단위로 하여 분수량을 인식하는 데 어려움이 있는 세연

세연은 두 양의 곱셈 상황에서 자연수량이 아닌 분수량이 기준 단위로 주어질 때 그와 곱셈적 관계를 갖는 다른 하나의 양을 찾는 데 제한이 있었다. 다음은 세연이가 어떤 양을 '자연수량의 무엇' 또는 '분수량의 무엇'으로 나타내는 데 필요한 단위 조정 수준에 차이가 있음을 보여 주는 Task 1에 대한 세연의 문제 해결 과정과 그에 대한 분석이다.

Task 1. 길이가 2인 막대 그림이 주어져 있습니다. 다음 물음에 답하세요.

(1) 길이가 2인 막대 그림을 네 부분으로 나누었을 때 그중 한 부분의 크기를 색칠하세요.
(2) 색칠한 한 부분의 크기를 '○의 △'로 표현한다고 할 때, ○, △에 각각 알맞은 수를 구하세요.
(3) (1)에서 색칠한 한 부분의 크기가 2의 얼마인지 구하고, 풀이 과정을 나타내는 식을 다양하게 적으세요.
(4) (1)에서 색칠한 한 부분의 크기가 1의 얼마인지 구하고, 풀이 과정을 나타내는 식을 다양하게 적으세요.
(5) (1)에서 색칠한 한 부분의 크기가 $\frac{1}{2}$의 얼마인지 구하고, 풀이 과정을 나타내는 식을 다양하게 적으세요.

세연은 Figure 4와 같이 주어진 2인 막대를 4로 나누고 그중 한 부분을 색칠한 후 색칠한 부분의 크기를 '2의 $\frac{1}{4}$'로 나타낸 것으로 보아 문제 상황에서 곱셈적 관계를 갖는 두 양으로 2와 (2의) $\frac{1}{4}$을 먼저 찾은 것으로 보였다.

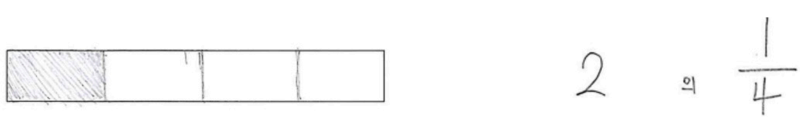


Figure 4. Seyeon's drawing and expression for Task 1

이후 세연은 세 번째 질문에 대해 $\frac{1}{4}$을 적고 '2의 $\frac{1}{4}$'에 대해 풀이 과정을 나타내는 식으로 Figure 5와 같이 제시하였는데, 이것으로 보아 2에 대해 '2의 $\frac{1}{4}$'에 해당하는 양을 네 번 덜어내는 의미로 뺄셈식과 나눗셈식을 세운 것으로 보인다.

세연은 자연수량의 단위 분수(2의 $\frac{1}{4}$)와 단위 분수($\frac{1}{4}$)를 구분하지 않고 식을 만들었는데 식에 대해 Figure 5와 같이 설명한 것으로 보아 세연의 $\frac{1}{4}$은 2를 네 개로 나눈 것 중의 하나(2의 $\frac{1}{4}$)인 의미를 내포하는 듯 보였다. 또한 세연은 네 번째 질문에서 색칠한 한 부분의 크기가 1의 얼마인지에 대해 $\frac{1}{2}$이라 답하고 Figure 6과 같이 설명하였다.

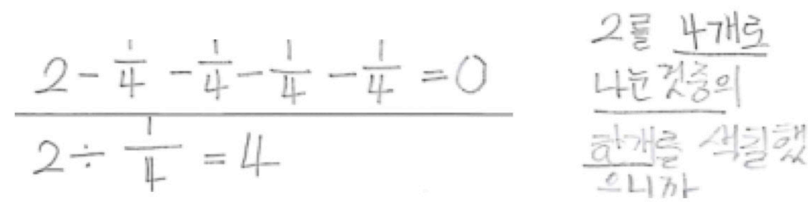


Figure 5. Seyeon’s first numerical expression and explanation for Task 1

Figure 6. Seyeon’s second numerical expression and explanation for Task 1

이때 세연이 ‘2의 반이 1이고.’라고 한 것은 2에 대해 ‘1, $\frac{1}{2}$’의 관계를 구성하여 ‘2의 1’과 ‘2의 $\frac{1}{2}$’을 조정한 것으로, ‘1은 두 조각이니까 $\frac{1}{2}$이다.’라고 한 것은 2에 대해 ‘$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$’의 관계를 형성하여 ‘2의 $\frac{1}{2}$’과 ‘2의 $\frac{1}{4}$’을 조정한 것으로 볼 수 있었다. 또한 색칠한 부분($\frac{1}{2}$)을 자연수(2)와 1을 각각 기준 단위로 하여 ‘2의 $\frac{1}{4}$’과 ‘1의 $\frac{1}{2}$’로 동시에 표현하였는데 이는 2에 대한 3수준 단위를 예측하였기 때문으로 추측되었다. 그러나 ‘무엇의 무엇’에 해당하는 두 양(2, $\frac{1}{4}$)을 찾았음에도 불구하고 Figure 5와 같이 여전히 두 양 사이의 연산 기호로 곱셈을 선택하지 않는 점으로 볼 때 ‘무엇×무엇’으로 나타내기 위해서 세연에게 3수준 단위 한 개를 구성하는 것 이상의 어떤 정신적 행동이 더 필요해 보였다.

한편 마지막 질문을 읽고 약 40초 동안 가만히 있었는데 분수량($\frac{1}{2}$)을 ‘$\frac{1}{2}$의 얼마’로 인식하는 것은 세연에게 쉽지 않은 것 같았다. 이에 교사가 ‘$\frac{1}{2}$의 얼마’에 해당하는 얼마인 수가 꼭 분수가 아니어도 된다고 하자[6] 답과 설명으로 1과 ‘2의 $\frac{1}{2}$은 1이다.’라고 적고 잠시 고민하는 듯하더니 지웠다. 다음은 교사와 세연의 관련 대화의 일부이다.

교사: $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{2}$의 얼마인지 구하는 건데 좀 이상해?
세연: (고개를 끄덕인다.)
교사: (Figure 5를 가리키면서) 세연이가 2를 네 개로 나눈 것 중의 하나를 2의 $\frac{1}{4}$이라고 했잖아. $\frac{1}{2}$을 기준으로 $\frac{1}{2}$을 생각하는 거지. $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{2}$이 몇 개 있는 걸까?
세연: …
교사: $\frac{1}{2}$이 몇 개 있다는 게 표현이 어색하니?
세연: 네.
교사: 2가 한 개인 것은 2잖아. 2가 $\frac{1}{2}$개인 것은?
세연: 1이요.
교사: 그래. 1이 $\frac{1}{2}$개인 것은?
세연: 0.5요.
교사: 맞아. $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{2}$이 몇 개 있는 것으로 생각할 수 있을까?
세연: 한 개? (어색한 듯 웃는다.)

6 교사는 세연이 교수 실험 동안 주어진 양보다 더 크거나 작은 양을 만들어 왔기 때문에 주어진 상황을 자신의 경험 상황으로 동화하는 데 어려움이 있다고 판단하여 해당 발문을 제시하였다.

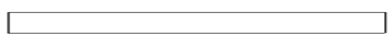
교사는 세연이 Figure 6과 같이 두 번 반복하여 1을 만들 수 있는 양으로 $\frac{1}{2}$을 인식하였고 Figure 5와 같이 '2의 $\frac{1}{4}$'에 대해 '2를 네 개로 나눈 것 중의 하나', 즉 '2의 $\frac{1}{4}$개'로 생각하였으므로 '$\frac{1}{2}$의 얼마'를 $\frac{1}{2}$이 몇 개 있는 것인지로 사고한다면 주어진 상황을 이해할 수 있을 것으로 판단하였다. 결과적으로 세연은 교사와의 상호작용을 통해 $\frac{1}{2}$을 '$\frac{1}{2}$이 한 개'인 양으로 인식하였으나 '$\frac{1}{2}$의 1'로 정확히 이해한 것인지는 확실하지 않았다. 종합해 보면 문제 상황에서 어떤 양을 인식할 때 자연수량과 분수량을 각각 기준 단위로 하는 것은 필요한 조작 수준이 달라 보였다. 또한 자연수량의 단위 분수와 단위 분수를 구분하지 못하는 것은 자연수량에 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하는 것이 내재화되지 않은 점과 관련되어 보였는데 이로부터 하나의 3수준 단위를 주어진 자원으로 이용하는 능력 이상이 요구됨을 추측할 수 있다.

분수량에 대해 분수를 곱셈 연산자로 인식하는 데 어려움이 있는 세연

교사는 Task 1에서 세연이 '$\frac{1}{2}$이 한 개'인 것을 $\frac{1}{2}$에 1이 연산자로 작용하는 '$\frac{1}{2}$의 1' 상황으로 연결하였는지를 확인하지 못하였으므로 단위 분수량에 대해 단위 분수를 어떻게 곱셈 연산자로 인식하는지를 좀 더 살펴보고자 하였다. 다음은 문제 상황에서 두 분수를 찾아 '분수량의 분수'로 표현하는 것이 두 양 사이의 관계를 곱셈적으로 인식하고 '분수×분수'로 나타내는 중요한 과정임을 보여 주는 Task 2에 대한 세연의 문제 해결 과정과 그에 대한 분석이다.

Task 2. 세연은 $\frac{1}{2}$kg의 설탕을 가지고 있습니다. 세연은 가지고 있는 설탕의 $\frac{1}{4}$을 빵을 만드는 데 사용하였습니다. 다음 물음에 답하세요.

(1) 아래 1 kg의 설탕 막대 그림을 이용하여 세연이가 빵을 만드는 데 사용한 설탕을 나타내는 부분을 색칠하고 얼마인지 구하세요.



(2) 색칠한 한 부분의 크기를 '○의 △'로 표현한다고 할 때, ○, △에 각각 알맞은 수를 구하세요.

(3) 주어진 상황과 첫 번째 또는 두 번째로 어울리는 식을 <보기> $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$에서 고르고 그 이유를 설명하세요.

(4) 주어진 상황과 첫 번째 또는 두 번째로 어울리지 않는 식을 <보기> $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$에서 고르고 그 이유를 설명하세요.

세연은 Figure 7과 같이 막대를 2로 나누고 나뉜 왼쪽 부분을 4로 나눈 후 그중 한 부분을 색칠하여 $\frac{1}{8}$을 구하였다. 이때 세연은 재귀 분할을 통해 전체 1을 바탕으로 '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$'을 조정하여 해결한 것으로 보였으나 색칠한 한 부분의 크기를 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'이 아닌 '1의 $\frac{1}{8}$'로 표현하였다.

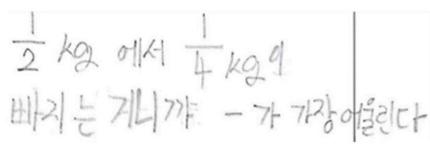
Figure 7. Seyeon's drawing and expression for Task 2

세연이 이번 과제에서 $\frac{1}{2}$을 기준 단위로 인식하여 $\frac{1}{2}$을 네 개로 나눈 것 중의 하나인 ‘$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$’로 답하지 못한 것은 Task 1에서 $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{2}$의 얼마인지를 구할 때 겪은 제한과 관련되어 보였다. 반면 재귀 분할을 가용한 조작으로 구성하여 ‘$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$’을 합성한 결과($\frac{1}{8}$)와 전체 막대(1)의 관계를 예상하였기 때문에 문제 상황에서 곱셈적 관계를 갖는 두 양으로 1과 $\frac{1}{8}$을 찾은 것으로 추측되었다.

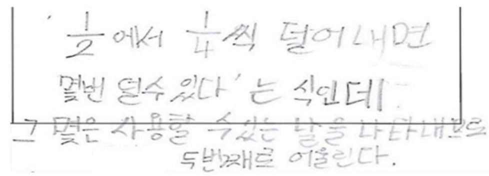
이후 세연은 주어진 상황과 어울리는 식과 어울리지 않는 식을 선택하였는데 ‘$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$’의 순서로 어울린다고 생각하고 그 이유를 Figure 8과 Figure 9와 같이 제시하였다. 교사는 네 개의 식에 대한 의미를 파악하고자 차례대로 질문하였는데 다음은 이에 대한 대화이다.

교사: (제시문에서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$을 가리키며) 세연이가 뺄셈식을 가장 어울린다고 생각한 이유가 뭘까?

세연: (Figure 8의 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$에 대한 설명을 가리키며) $\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{4}$을 사용하는 거니까 빼는 거예요.



Seyeon's explanation of choosing $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ as the best matching expression



Seyeon's explanation of choosing $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$ as the second-best matching expression

Figure 8. Seyeon’s first explanation for Task 2

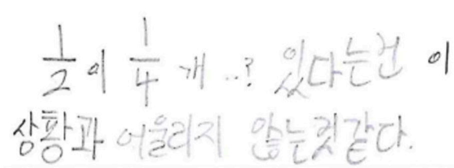
교사: $\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{4}$을 사용하는 걸까? 아니면 $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$을 사용하는 걸까?

세연: $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$이요.

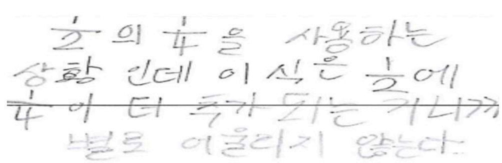
(중략)

교사: (제시문에서 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$을 가리키며) 이 식을 가장 어울리지 않는다고 생각한 이유는 뭐야?

세연: (Figure 9의 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$에 대한 설명을 가리키며) $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{4}$개인 것은 좀 뭔가…



Seyeon's explanation of choosing $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ as the most inappropriate expression



Seyeon's explanation of choosing $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ as the second-most inappropriate expression

Figure 9. Seyeon’s second explanation for Task 2

교사: $\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{4}$개인 것은 이상해?

세연: (고개를 끄덕인다.)

교사: 아~ 세연이한테는 2가 $\frac{1}{4}$개, 3이 $\frac{1}{2}$개 이런 것들은 익숙하고? 자연수의 분수 개는 익숙한데 분수의 분수 개는 이상한 거야?

세연: (고개를 끄덕인다.)

교사: (제시문에서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$을 가리키며) 그럼 덧셈식은?

세연: (Figure 9의 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$에 대한 설명을 가리키며) 사용하는 거니까 더해지는 것은 아닌 거 같아요.

세연은 두 단위 분수 사이의 연산 기호로 뺄셈과 나눗셈을 선택하였는데 Figure 8의 설명에서도 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'과 $\frac{1}{4}$은 명확히 구분되어 보이지 않았다. 이렇게 세연이 분수량의 분수와 분수를 구분하는 데 어려움이 있는 것에 대한 원인을 분석하면 다음과 같다. 세연은 1의 구조를 바탕으로 '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$'을 조정하여 '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\right)$, $1\left(\frac{8}{8}\right)$' 사이의 관계(3수준 단위)를 형성하여 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'을 구하였다. 그러나 주어진 상황에서 곱셈적 관계를 갖는 두 양으로 $\frac{1}{2}$과 ($\frac{1}{2}$의) $\frac{1}{4}$을 찾지 않고 '1의 $\frac{1}{8}$'로 표현한 것은 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'에 해당하는 양($\frac{1}{8}$)을 네 번 반복함으로써 $\frac{1}{2}$을 '$\frac{1}{8}$이 네 개'인 단위(3수준 단위)로 새롭게 만드는 데 주목하지 않았기 때문으로 보인다. 뿐만 아니라 $\frac{1}{2}$에 주목하지 않는 것은 자신의 풀이를 설명할 때나 식을 세울 때 $\frac{1}{4}$만을 언급하면서 그 기준 단위를 혼동하는 데 영향을 미치는 것으로 보였다. 또한 세연은 곱셈식($\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$)을 주어진 상황과 가장 어울리지 않는다고 하였는데 이는 $\frac{1}{2}$을 '$\frac{1}{8}$의 네 개로 구성된 $\frac{1}{2}$이 한 개'인 3수준 단위로 예측하여 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'을 '$\frac{4}{8}$의 $\frac{1}{4}$'로 인식하지 못하였음을 보여 준다.

종합해 볼 때 단위 분수량의 단위 분수 상황에서 단위 분수량에 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하기 위해서는 전체 1에 대해 '단위 분수의 단위 분수, 단위 분수, 1'의 3수준 단위를 구성한 결과를 바탕으로 주어진 단위 분수량을 기준 단위로 하여 3수준 단위로 새롭게 재조직하는 것이 필요하다.

합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 후

세연은 마지막 차시 교수 실험에서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$을 구하거나 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$의 크기를 비교할 때 곱셈적으로 중첩되지 않은 두 단위 분수의 관계를 구성하여 두 분수의 공통 측정 단위를 찾았다. 이 절에서는 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 구성한 이후 문제 해결 과정에서 드러난 세연의 분수 연산자 개념에 대해 소개한다.

자연수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하는 세연

분수 간의 두 3수준 단위 구조를 유연하게 전환하는 세연의 단위 조정 능력은 자연수량의 분수를 구하는 것은 물론 분수를 자연수량에 대해 곱셈 연산자로 사용하는 것과 연결되었다. 다음은 합성 단위에 대한 스플리팅 조작의 구성이 연산자 분수 개념의 형성과 관련이 있음을 보여 주는 Task 3에 대한 세연의 문제 해결 과정과 그에 대한 분석이다.

> **Task 3.** 세연은 4 kg의 흙을 가지고 있는데, 가지고 있는 흙의 $\frac{1}{3}$을 화분을 만드는 데 사용하였습니다. 다음 물음에 답하세요.
> (1) 세연이가 화분을 만드는 데 사용한 흙의 양이 얼마인지 구하는 그림을 그리고 풀이 과정을 설명하세요.
> (2) (1)과 관련한 풀이 과정과 가장 어울리는 분수식을 나타내고 왜 그러한 연산 기호를 사용하였는지 설명하세요.

세연은 Figure 10과 같이 흙 4 kg을 의미하는 막대 하나를 그려 3으로 나누고, 한가운데에 따로 표식을 하나 추가한 후 그중 한 부분을 2로 나타내었다. 이는 '4, 2'의 관계(2 : 1)를 이용하여 '4의 1, 4의 $\frac{1}{2}$'을 조정한 것으로 보였다.

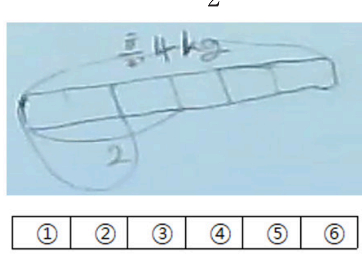


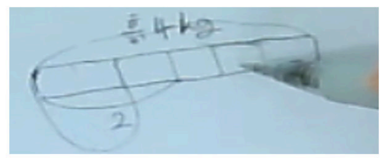
Figure 10. Seyeon's first drawing for Task 3 [7]

7 Task 3의 분석에서 편의상 Figure 10의 각 여섯 부분을 번호 ①~⑥으로 지칭하였다.

이후 세연은 3-부분으로 나누어진 막대 한 부분(①, ②)의 왼쪽 끝과 오른쪽 끝을 곡선으로 연결하고 두 부분(①과 ②, ⑤와 ⑥)을 각각 2로 나누었다. 막대를 3으로 나눈 부분들의 크기가 모두 같다는 사실을 이용하여 가운데 부분(③, ④)이 2-부분이므로 나머지 부분들(①과 ②, ⑤와 ⑥)도 똑같이 나눈 듯 보인다. 세연은 선으로 이은 부분(①, ②)과 2에 해당하는 부분(①, ②, ③)을 번갈아 가리키면서 한동안 가만히 그림을 응시하였다. 4인 막대에 대해 '세 부분으로 구성된 2의 두 개'인 3수준 단위를 형성하였으나 이를 이용하여 '4의 $\frac{1}{3}$'에 해당하는 양(①, ②)을 찾기 위해 막대에서 1인 부분(4의 $\frac{1}{4}$)을 찾으려 했던 것으로 추측되었다.

세연은 Figure 11과 같이 길이가 2인 왼쪽 부분(①, ②, ③)의 가운데 부분(②), 오른쪽 부분(④, ⑤, ⑥)의 가운데 부분(⑤)에 연한 세로선을 각각 차례대로 긋고 한 부분(①)을 2로 나누었다. ②와 ⑤를 각각 2로 나눈 행동은 주어진 막대를 '4의 $\frac{1}{4}$'인 양의 네 배로 이해하고 '4의 $\frac{1}{2}$, 4의 $\frac{1}{4}$'을 조정하여 1인 부분을 찾은 것으로 보이고, ①을 2로 나눈 것은 이미 구성한 ①과 ②의 관계(1 : 1), ②를 2로 나눈 결과를 모두 이용한 것으로 보였다.

Coordination of '$\frac{1}{4}$ of 4' and '$\frac{1}{12}$ of 4'
Dividing ② by 2

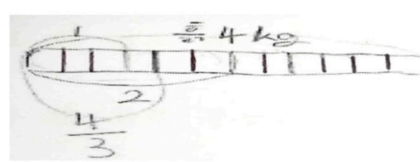


Coordination of '$\frac{1}{4}$ of 4' and '$\frac{1}{12}$ of 4'
Dividing ⑤ by 2

Figure 11. Seyeon's second drawing for Task 3

이후 세연은 Figure 12와 같이 왼쪽 부분(①, ②, ③)의 한가운데(②) 표식을 진하게 그린 후 세 부분(③, ④, ⑥)을 2로 차례대로 나누었다.[8] 이때 세연이 표식을 다시 그린 것은 '4의 $\frac{1}{4}$'에 해당하는 양에 가장 작은 부분(4의 $\frac{1}{12}$)이 세 개가 있음을 확인한 것을 바탕으로 세 부분(③, ④, ⑥)을 2로 나누면서 주어진 막대를 '가장 작은 부분의 세 개로 구성된 네 개'인 3수준 단위(3-단위 네 개)로 구성한 듯 보였다. 즉 '$\frac{1}{3}$, $1\left(\frac{3}{3}\right)$'의 관계(1 : 3), '$1\left(\frac{3}{3}\right)$, $4\left(\frac{12}{3}\right)$'의 관계(1 : 4)를 동시에 구성하여 '4의 $\frac{1}{4}$, 4의 $\frac{1}{12}$'을 조정한 것으로 볼 수 있다.

Coordination of '$\frac{1}{4}$ of 4' and '$\frac{1}{12}$ of 4'



Coordination of '$\frac{1}{12}$ of 4' and '$\frac{1}{3}$ of 4'

Figure 12. Seyeon's third drawing for Task 3

세연은 Figure 12와 같이 가장 작은 부분 세 개를 1로 표시하고 '4의 $\frac{1}{3}$' 부분(①, ②)을 표시하는 선 아래에 $\frac{4}{3}$라고 적었다. 이때 세연이 1인 부분에 주목하여 답을 구한 것은 '$\frac{1}{3}$, $1\left(\frac{3}{3}\right)$'의 관계를 바탕으로 가분수를 측정 가능한 양으로 인식함으로 가능한 것이었으며 3수준 단위를 주어진 자원으로 하여 '$\frac{1}{3}$, $1\left(\frac{3}{3}\right)$, $\frac{4}{3}$' 사이의 관계를 형성하여 가장 작은 부분(4의 $\frac{1}{12}$)의 네 개인 단위로 '4의 $\frac{1}{3}$'을 구한 것으로 볼 수 있었다. 이후 막대의 $\frac{2}{3}$ 지점과 $\frac{1}{3}$ 지점, 1인 부분의 표식을 차례대로 진하게 그렸는데 이는 세연이 앞에서

8 당시 ②의 부분, ⑤와 ①의 부분은 Figure 11에서 이미 2로 나누어진 상태였다.

‘3-단위 네 개’인 3수준 단위로 만든 12-부분 막대를 ‘4-단위 세 개’인 3수준 단위로 막대를 새롭게 구성한 결과, 즉 ‘4의 $\frac{1}{12}$, 4의 $\frac{1}{3}$’을 조정한 행동에 대한 반성의 결과라 할 수 있다.

교사는 세연이 부분의 부분(4의 $\frac{1}{12}$, 1의 $\frac{1}{3}$)을 열두 번 반복하여 전체(4)를 만들 수 있었던 것을 합성 단위 4에 대한 스플리팅 조작을 수행한 것으로 볼 수 있는지 확인하기 위해 풀이에 대한 설명을 요청하였는데 관련 대화는 다음과 같다.

교사: 세연이는 어떻게 막대를 이렇게 나눌 생각을 했어?
세연: 그냥 크기가 같으니까.
교사: 어떤 거랑 어떤 게 크기가 같아야 하는 거야?
세연: (Figure 12의 오른쪽 그림에서 2인 부분(①, ②, ③) 중 왼쪽 1인 부분과 오른쪽 1인 부분을 각각 가리키며) 이거랑 이거요.
교사: 아… (세연이 가리킨 두 부분을 각각 가리키며) 여기 두 군데가 개수가 같아야 한다는 거지?
세연: 네.
교사: (전체 막대의 $\frac{1}{3}$ 지점과 $\frac{2}{3}$ 지점 표식을 차례대로 가리키며) 이 선의 의미는 어떤 거야?
세연: 4를 세 개로 나눈 거예요.
교사: 아… (Figure 12에서 ①과 ②, ③과 ④, ⑤와 ⑥을 차례대로 가리키며) 여기 부분들도 개수가 같아야 하는 거야?
세연: (고개를 끄덕인다.)

세연은 ‘4의 $\frac{1}{3}$’을 구하고자 4인 막대에 분할을 여러 차례 수행한 것으로 보였는데 위의 대화에서 “그냥 크기가 같으니까.”라고 말한 것은 전체를 구성하는 여러 부분의 크기가 같다는 사실을 이용하려 했던 것으로 보인다. 세연은 교사의 요구에 구체적으로 그 예를 들었는데 2인 부분(①, ②, ③) 중 1인 부분과 나머지 1인 부분이 같다고 한 것은 ‘4의 $\frac{1}{4}$’(‘4의 $\frac{1}{12}$’이 세 개) 부분을 반복하여 전체(‘4의 $\frac{1}{12}$’이 세 개로 구성된 네 개 단위, 3-단위 네 개)를 인식하고 있음을 보여 준 것이며, 또한 3-부분 막대의 $\frac{1}{3}$ 지점과 $\frac{2}{3}$ 지점 표식에 대해 4를 세 개로 나눈 선으로 각 부분의 개수가 같다고 하였으므로 ‘4의 $\frac{1}{3}$’(‘4의 $\frac{1}{12}$’이 네 개) 부분으로부터 전체(‘4의 $\frac{1}{12}$’이 네 개로 구성된 세 개 단위, 4-단위 세 개)를 만들 수 있음을 보여 주었다. 이러한 세연의 행동은 합성 단위(4)에 대해 부분(1)의 부분($\frac{1}{3}$), 즉 가장 작은 부분(4의 $\frac{1}{12}$)을 열두 번 반복하여 전체(4)를 가역적으로 표상한 것으로 볼 수 있었다.

한편 교사는 전체를 두 3수준 단위로 구성하고 이를 유연하게 변환한 세연의 단위 조정 능력이 주어진 상황과 어울리는 분수식을 세울 때 어떻게 관련되는지를 살펴보고자 하였다. 세연은 약 90초 동안 생각하더니 Figure 13과 같이 식과 설명을 적었다.

$4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 4의 $\frac{1}{3}$은 $\frac{4}{3}$니까.

Figure 13. Seyeon’s numerical expression and explanation for Task 3

$\frac{1}{3}$을 4 안에서 반복 가능한 단위로 이해하는 세연은 ‘$\frac{1}{3}, 1\left(\frac{3}{3}\right), 4\left(\frac{12}{3}\right)$’ 사이의 관계(3수준 단위)를 ‘$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 4\left(\frac{12}{3}\right)$’ 사이의 관계(3수준 단위)로 새롭게 구성한 결과를 바탕으로 ‘4의 $\frac{1}{3}$’을 ‘$\frac{12}{3}$의 $\frac{1}{3}$’로 간주하여 $\frac{1}{3}$을 4에 대한 곱셈 연산자로 인식하였다. 즉 세연은 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 ‘4의 $\frac{1}{3}$, 4의 1’의 조정 활동을 수행하여 ‘4의 $\frac{1}{3}$’을 세 번 반복하여 전체(4)를 생성하고, 반복한 양이 전체의 $\frac{1}{3}$임을 동시에 이해함으로써 4에 대해 단위 분수($\frac{1}{3}$) 개념을 추상화한 것으로 볼 수 있었다.

정리하면 주어진 자연수량에 대해 구성한 여러 3수준 단위 구조를 서로 유연하게 변환할 수 있는 단위 조정 능력은 자연수량에 대한 단위 분수의 개념을 추상화하여 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 형성하는 기반이 됨을 보여 주었다.

단위 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 인식하기 시작한 세연

교사는 자연수에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용한 세연이 단위 분수의 합성 상황에서 단위 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 인식하는 과정에 대해 탐색하고자 하였다. 이를 위해 교사는 세연에게 분수량의 분수 부분을 반복하여 분수량을 만드는 측정 활동과 사칙 연산을 적용한 분수식의 계산 결과를 바탕으로 연산을 선택하는 두 활동을 계획하였다. 다음은 단위 분수를 연산자 분수로 사용하는 것은 주어진 양에 대해 단위 분수 연산자에 의한 크기 변화를 인식하는 것과 관련됨을 보여 주는 Task 4에 대한 세연의 문제 해결 과정과 그에 대한 분석이다.

Task 4.

(1) 분수 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{8}$씩 몇 번 덜어낼 수 있는지를 구하는 그림을 그리고 그 이유를 설명하세요.
(2) $\frac{1}{8}$을 '$\frac{1}{2}$의 △'로 표현한다고 할 때 △에 알맞은 수를 구하세요.
(3) □안에 사칙 연산(덧셈 +, 뺄셈 −, 곱셈 ×, 나눗셈 ÷) 기호 중에 하나를 골라 $\frac{1}{8}$을 만들려고 합니다.
아래 계산 결과를 바탕으로 가장 알맞은 연산 기호가 무엇일지 선택하세요.

$$\frac{1}{2}\Box\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$은 얼마일까요?　2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$은 얼마일까요?
3) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$은 얼마일까요?　4) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$은 얼마일까요?

세연은 Figure 14와 같이 막대 하나를 그리고 2로 나눈 후 전체 길이를 1로 표시하였다. 이후 2-부분 막대의 한 부분 길이에 해당하는 $\frac{1}{2}$-막대를 아래에 그리고 위 막대의 오른쪽 부분, 왼쪽 부분을 4로 차례대로 나누었다.

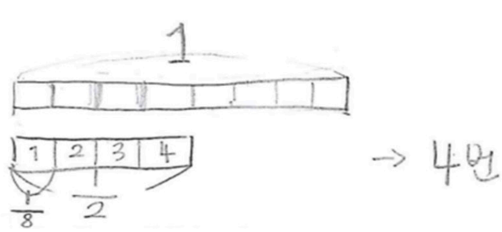


Figure 14. Seyeon's first drawing for Task 4

단위 막대와 $\frac{1}{2}$-막대를 그린 것은 $\frac{1}{2}$에 대해 '2, 1'의 관계를 구성하여 '$\frac{1}{2}$의 2'와 '$\frac{1}{2}$의 1'을 조정한 것으로 볼 수 있다. 또한 막대를 하나하나 8로 나누지 않고 2로 나누고 나뉜 두 부분을 각각 4로 나눈 것으로 보아 자연수 곱셈 지식($4 \times 2 = 8$)을 분수 문제 맥락에서 사용하고 그 결과 '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}(\frac{4}{8})$, $1(\frac{8}{8})$' 사이의 관계(3수준 단위)를 구성한 것으로 보였다. 이후 세연은 위 막대의 맨 왼쪽 한 부분($\frac{1}{8}$)만큼 $\frac{1}{2}$-막대에 표식을 표시하고 그 크기를 $\frac{1}{8}$로 나타낸 후 $\frac{1}{2}$-막대의 나머지 부분에도 두 표식을 추가하여 4-부분 막대로 만들었다. 특히 $\frac{1}{2}$-막대의 부분($\frac{1}{8}$) 하나하나에 숫자 '1, 2, 3, 4'를 쓰고 '4번'이라고 적은 것은 $\frac{1}{8}$을 네 번 반복하여 $\frac{1}{2}$을 구성하였음을 보여 준다.

또한 Figure 15의 설명으로부터 세연이 재귀 분할 조작을 통해 전체 1을 바탕으로 두 단위 분수 ‘$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$’을 조정한 결과를 이용하였음을 알 수 있었다.

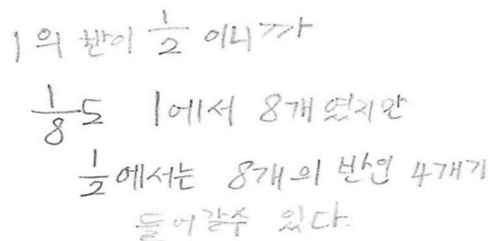


Figure 15. Seyeon’s explanation for Task 4

이후 세연은 $\frac{1}{8}$이 $\frac{1}{2}$의 얼마인지에 대해 $\frac{1}{4}$이라 답하였는데 이는 $\frac{1}{2}$을 동치 분수 $\frac{4}{8}$, 즉 ‘$\frac{1}{8}$이 네 개’인 합성 단위(3수준 단위)로 이해하고 ‘$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\right)$’의 관계(1 : 4)를 구성하였음을 뒷받침하는 것이다. 또한 1이 ‘$\frac{1}{8}$이 여덟 개’이고, $\frac{1}{2}$이 ‘$\frac{1}{8}$이 네 개’라고 말한 것은 단위 분수의 단위 분수 부분($\frac{1}{8}$)을 기준으로 주어진 양($\frac{1}{2}$)이 단위 분수($\frac{1}{4}$)에 의해 크기가 변화하였음을 인식한 것임을 보여 준다. 이후 세연은 덧셈식($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$)에 대해 Figure 16과 같이 그리고 $\frac{3}{4}$이라 답하였다.

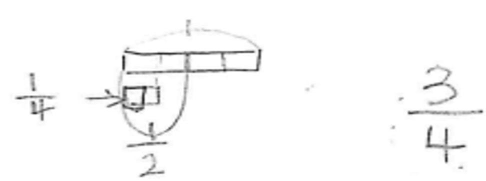


Figure 16. Seyeon’s second drawing for Task 4

또한 뺄셈식($\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$), 나눗셈식($\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$)에 대해서도 그 결과를 $\frac{1}{4}$, 2로 쉽게 구하였다. 이에 교사는 식($\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$)에 대한 의미를 물었는데 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{4}$씩 두 번 덜어낸 것이라고 표현하였다. 교사는 세연이 구한 덧셈식, 뺄셈식, 나눗셈식의 결과($\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, 2)와 $\frac{1}{8}$을 각각 비교하기 위해 계속 질문하였는데 다음은 이와 관련된 상황이다.

> 교사: ($\frac{1}{2}\square\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$의 □를 가리키며) 지금 세연이가 계산한 것에 의하면 덧셈도 뺄셈도 나눗셈도 아닌데 그렇다면 곱셈일까?
> 세연: (고개를 끄덕이며) 네.
> 교사: 왜 그런 것 같아?
> 세연: $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$이 $\frac{1}{8}$이라는 거니까. (Figure 15를 가리키며) 이것처럼. $\frac{1}{2}$안에 $\frac{1}{8}$이 네 개 들어가니까요.
> 교사: $\frac{1}{8}$이 $\frac{1}{2}$의 네 개 중 하나라고 생각할 수 있을까?
> 세연: (고개를 끄덕인다.)
> 교사: ($\frac{1}{2}\square\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$의 □를 가리키며) 여기에 곱셈 기호를 써도 될까?
> 세연: 네!

교사는 세연이 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$ 사이에 덧셈, 뺄셈, 나눗셈을 수행한 결과가 모두 $\frac{1}{8}$과 다름을 언급하고 □안에 곱셈이 들어가는 것이 어떠한지를 질문하였다. 결과적으로 세연은 곱셈을 선택하였는데 이러한 사고의 변화는 단순한 수치 계산 활동이 아닌 측정 활동에 기반한 것으로 보였다. 즉 위의 대화에서 "$\frac{1}{2}$ 안에 $\frac{1}{8}$이 네 개 들어가니까요.", "1에서 여덟 개였는데 $\frac{1}{2}$에서는 여덟 개의 반이니까 네 개라서."라고 말한 것과 같이 $\frac{1}{2}$이라는 분수량이 단위 분수 $\frac{1}{4}$에 의해 어떻게 크기가 변화되었는지를 명확하게 인식하고 $\frac{1}{2}$에 $\frac{1}{4}$이 연산자로서 작용한 결과가 $\frac{1}{8}$임을 이해한 것으로 볼 수 있었다.

정리하면 Task 4에서 세연이 '$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$'을 조정하여 1을 기준으로 '$\frac{1}{8}$, 1'의 관계(1 : 8)를 3수준 단위로 구성한 것은 1에 대해 $\frac{1}{8}$을 연산자로, 이와 더불어 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$의 1'을 조정하여 $\frac{1}{2}$을 기준으로 '$\frac{1}{4}$, 1'의 관계(1 : 4)를 새롭게 3수준 단위로 재조직한 것은 $\frac{1}{2}$에 대해 $\frac{1}{4}$을 연산자로 사고하는 것으로 각각 연결되었다. 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 두 3수준 단위를 구성하고 조정하는 능력은 주어진 분수량을 동치 분수인 합성 단위로 이해하고 단위 분수에 의해 분수량의 크기가 변화하였음을 인지하여 단위 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용하는 것과 관련이 있다.

결론 및 제언

결론

이 절에서는 세연이 자연수량 및 분수량에 대해 분수를 곱셈 연산자로 적용하고 식으로 표현하는 과정에서 어떠한 어려움이 있었고 그 어려움을 해결하기 위한 조작 방식이 무엇인지에 초점을 두어 기술하되 이를 결과 분석의 순서에 맞추어 합성 단위에 대한 스플리팅 조작의 구성 전·후로 구분하여 설명하도록 한다.

합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 전

첫째, 가분수를 3수준 단위로 내재화한 세연은 자연수량의 단위 분수 부분에 대해 자연수와 1을 기준 단위로 하여 곱셈적 관계를 갖는 다른 하나의 양으로 분수량을 적절히 찾을 수 있었으나, 분수량을 기준 단위로 하여 곱셈적 관계를 갖는 양을 구하는 데 제한이 있었다. 세연이 주어진 상황을 나타내는 식을 세울 때 여전히 자연수량의 단위 분수와 단위 분수를 구분하지 않거나 두 양 사이의 관계를 곱셈식(자연수×단위 분수)으로 표현하지 않은 것은 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용할 필요성을 스스로 인식하지 못한 것과 관련되었다. 이러한 세연의 행동은 자연수량의 단위 분수 부분을 반복하여 자연수를 만드는 가역적 추론, 즉 자연수에 대한 단위 분수 개념을 추상화하는 과정이 포함되지 않았기 때문이며 자연수량에 단위 분수를 곱셈 연산자로 나타내기 위해서는 가분수를 3수준 단위로 사용하고 이해하는 것 이상의 조작 능력이 요구됨을 알 수 있었다.

둘째, 세연은 단위 분수량의 단위 분수 상황에서 곱셈적 관계에 있는 양으로 두 단위 분수를 찾는 데 어려움을 겪었다. 세연은 두 단위 분수를 찾아 단위 분수량의 단위 분수로 나타내지 않고 1의 단위 분수[9]로 인식하였다. 가분수 개념의 구성은 두 단위 분수를 합성할 때 곱셈적 관계를 갖는 두 양으로 두 단위 분수를 찾는 것을 보장하지 않았는데 이는 분수량을 기준으로 사고하는 데 제한점을 보인 것과 관련이 있어 보였다. 이를 위해 '$\frac{1}{c}$의 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{c}$, 1' 사이의 관계(3수준 단위)를 단위 분수량($\frac{1}{c}$)을 기준 단위로 하여 '$\frac{1}{a}$, 1, c' 사이의 관계(3수준 단위)로 재구성할 필요가 있었지만 세연은 분수($\frac{1}{c}$)에 주목하지 않음으로써 문제 해결 과정을 설명하거나 식으로 나타낼 때 단위 분수($\frac{1}{a}$)만을 언급하면서 그 기준 단위를 혼동하였다.

따라서 세연이 단위 분수량에 주목하여 새로운 3수준 단위 구조를 재조직하기 위해서는 두 분수($\frac{1}{c}$의 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{c}$)가 곱셈적 관계를 갖는 양임을 인식하고 분수($\frac{1}{c}$)를 3수준 단위('$\frac{1}{c}$의 $\frac{1}{a}$'이 a개인 단위)로 예상하는 추가 조작의 구성이 필요함을 보여 주었다.

---

9 이때의 단위 분수는 단위 분수량의 단위 분수에 해당하는 양을 의미한다.

합성 단위에 대한 스플리팅 조작 구성 후

세연은 두 양의 곱셈 상황을 해결하기 위해 곱셈적 사고를 바탕으로 두 양에 대한 조정 행동을 연속적으로 수행하였다. 이러한 단위 조정 활동은 곱셈적 사고의 재귀적 수정(Shin, 2010) 과정으로 보였다. 특히 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 구성한 후의 세연은 부분으로부터 전체를 만드는 가역적 추론을 바탕으로 어떤 양의 분수를 구하기 위한 단위 조정 활동을 수행하면서 세 가지 특징을 보였다.

첫째, 어떤 양의 분수를 구하기 위해 먼저 주어진 양과 1을 조정하여 주어진 양을 3수준 단위로 구성하였다. 세연은 자연수량의 분수, '4의 $\frac{1}{3}$'을 구할 때 '4의 1, 4의 $\frac{1}{4}$'을 조정하여 막대를 '4의 $\frac{1}{4}$'인 양의 네 배로 이해하고 1인 부분을 찾았다. 또한 단위 분수($\frac{1}{2}$)의 분수 상황에서 막대 하나를 그리고 2로 나누어 $\frac{1}{2}$-막대를 찾은 후 막대 전체를 1로 나타내었는데 이는 $\frac{1}{2}$에 대해 '2, 1'의 관계를 구성하여 '$\frac{1}{2}$의 2'와 '$\frac{1}{2}$의 1'을 조정한 것으로 볼 수 있었다. 이처럼 어떤 양의 분수 상황에서 주어진 양에 대해 분수를 연산자로 적용하기 위해 주어진 양과 1과의 관계를 먼저 구성한 것은 '주어진 양, 주어진 양의 분수'의 조정을 바탕으로 주어진 양을 3수준 단위 구조로 인식하기 위한 출발점으로 보인다.

둘째, '어떤 양의 분수'와 주어진 양의 단일 단위를 나타내는 '어떤 양의 단위 분수'의 관계를 형성하여 주어진 양을 또 다른 3수준 단위로 만들었다. 세연은 '4의 $\frac{1}{3}$'을 구할 때 '4의 $\frac{1}{3}$'과 '4의 $\frac{1}{4}$'의 관계를 형성하기 위해 주어진 양(4)에 대해 4-부분이면서 3-부분인 양으로 동시에 바라보는 데 필요한 공통 측정 단위($\frac{1}{3}$)를 찾아 '$\frac{1}{3}$의 세 개로 구성된 1이 네 개'인 3수준 단위를 '$\frac{1}{3}$의 네 개로 구성된 $\frac{4}{3}$가 세 개'인 3수준 단위로 새롭게 변환하였다. 또한 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'을 구할 때 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'과 '$\frac{1}{2}$의 1'의 관계를 형성하기 위해 1에 대해 '$\frac{1}{8}$의 네 개로 구성된 $\frac{1}{2}$이 두 개'인 3수준 단위 구조로 구성한 것을 바탕으로 $\frac{1}{2}$을 '$\frac{1}{8}$의 네 개로 구성된 $\frac{1}{2}$이 한 개'인 3수준 단위로 재조직하였다.

한편 단위 분수량의 단위 분수($\frac{1}{c}$의 $\frac{1}{a}$)를 구할 때 분수($\frac{1}{c}$)를 양으로 인식하고 분수($\frac{1}{a}$)를 조작으로 사용할 필요가 있다(Olive, 1999). 분수량($\frac{1}{c}$)에 분수($\frac{1}{a}$)를 조작으로 사용하는 것은 분수량($\frac{1}{c}$)에 주목하여 부분($\frac{1}{c}$의 $\frac{1}{a}$)을 분수량($\frac{1}{c}$) 안에서 반복 가능한 단위로 인식하고, 1에 대해 '$\frac{1}{ac}$의 a개로 구성된 $\frac{1}{c}$이 c개'인 3수준 단위 구조로 구성하는 것임을 알 수 있었다.

셋째, 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 주어진 양에 대해 두 3수준 단위를 구성하고 조정하여 동치 분수인 합성 단위를 구성하였다. 세연은 '4의 $\frac{1}{3}$'을 구할 때 주어진 양(4)을 12-부분(3-단위 네 개, 4-단위 세 개)으로 구성한 결과를 분수 맥락으로 적용하고, 주어진 양의 동치 분수($\frac{12}{3}$)를 찾아 '4의 $\frac{1}{3}$'을 '$\frac{12}{3}$의 $\frac{1}{3}$'로 구하였다. 또한 1에 대해 8-부분(4-단위 두 개), $\frac{1}{2}$에 대해 4-부분(4-단위 한 개)으로 구성한 결과를 바탕으로 단위 분수량($\frac{1}{2}$)의 동치 분수($\frac{4}{8}$)를 찾아 '$\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{4}$'을 '$\frac{4}{8}$의 $\frac{1}{4}$'로 구하였다. 이처럼 두 3수준 분수 단위를 유연하게 변환하는 능력은 어떤 양의 분수를 구하기 위해 주어진 양을 동치 분수인 합성 단위로 적절히 인식할 수 있게 하였다.

세연은 동치 분수의 구성을 통해 자연수량의 분수, 자연수(c)에 연산자 분수($\frac{1}{a}$)를 적용하기 위해 어떤 부분을 a번 반복하여 전체(c)를 생성함으로써 그 부분이 'c의 $\frac{1}{a}$'임을 인식하고 곱셈식($c \times \frac{1}{a}$)을 표현하였다. 부분(자연수량의 단위 분수)으로부터 전체(자연수량)를 표상하여 자연수량에 대한 단위 분수의 개념을 추상화하는 것은 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 형성하는 데 필수적인 요소로 보였다. 위의 결과는 학생이 주어진 양에 대해 분수를 연산자로 사용하기 위해 분수 개념을 추상화할 필요성을 주장한 선행 연구(Hackenberg, 2010, 2014)와 합치하며 그 과정이 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 통해 주어진 양에 대해 동치 분수를 형성하여 주어진 양과 그 양의 분수를 조정하는 것임을 구체적으로 설명함으로써 기존 연구 결과를 확장하였다.

또한 세연은 두 분수($\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$) 사이에 넣을 적절한 연산 기호로 곱셈을 최종 선택하였는데 이는 두 분수의 덧셈, 뺄셈, 나눗셈 결과

가 합성 결과($\frac{1}{ac}$)와 다름을 인식했다기보다는 분수량($\frac{1}{c}$)이 분수($\frac{1}{a}$)에 의해 어떻게 크기가 변화되었는지를 명확하게 파악하고 $\frac{1}{c}$에 $\frac{1}{a}$이 연산자로서 작용한 결과($\frac{1}{ac}$)로 이해했기 때문에 가능한 것으로 보였다(Hackenberg & Tillema, 2009). 위의 결과는 학생이 단순히 사칙 연산을 수행한 계산 활동에 의해서가 아니라 수학적 활동과 조작이 개념적 기반이 되는 단위 조정 활동을 통해 곱셈 연산자로서의 분수 개념을 형성할 필요가 있음을 시사한다. 특히 이러한 사례는 알고리듬이 수학적 활동과 조작의 개념적 기반을 바탕으로 세워질 때 의미가 있다고 주장한 선행 연구(Olive, 1999; Shin & Lee, 2018)를 뒷받침한다.

이상 본 연구의 결론을 바탕으로 학생이 분수를 곱셈 연산자로 인식하고 표현하는 능력을 갖추기 위한 핵심적인 조작에 대해 정리하면 다음과 같다.

첫째, 학생이 분수를 곱셈 연산자로 인식하기 위해 주어진 양에 대한 3수준 단위 구조를 놓치지 않고 분수 부분을 반복하여 분수 개념을 추상화하는 가역적 조작이 필요하다. 학생이 두 양의 곱셈 상황을 명확하게 인식하지 못하는 것은 주어진 양의 분수 부분을 반복하지 못하는 것과 관련이 있다.

둘째, 학생이 분수를 곱셈 연산자로 표현하기 위해 주어진 양에 대해 여러 3수준 단위를 형성하고 이를 재귀적으로 조정하여 크기 변화를 인식할 수 있는 조작이 필요하다.

두 3수준 단위를 구성하고 이를 조정하는 능력인 합성 단위에 대한 스플리팅 조작은 양에 대해 분수 개념을 추상화하고 주어진 양의 크기를 조절하기 위해 동치 분수를 구성하여 곱셈을 해석한다는 점에서 어떤 양의 분수 상황에서 '어떤 양의 분수를 만드는 규칙'으로서 식(어떤 양×분수)을 나타내는 것을 뒷받침하는 주요 조작으로 보인다.

제언

본 교수 실험은 학생이 합성 단위에 대한 스플리팅 조작을 구성하여 알려진 양 중에서 자연수량과 단위 분수량에 대해 단위 분수를 곱셈 연산자로 사용한 것만을 확인하였다. 따라서 합성 단위에 대한 스플리팅 조작뿐만 아니라 분배 분할 조작에도 주목하여 두 양의 곱셈 상황에서 분수를 곱셈 연산자로 사용하는 과정을 알고리듬으로 일반화하는 연구를 수행할 필요가 있다. 또한 임의의 분수량뿐만 아니라 미지 양에 대해서도 곱셈 연산자로 분수를 사용하는 곱셈 알고리듬을 의미 있게 적용할 수 있다면 대수식 학습에 유용할 것이다. 본 연구가 분수 연산자 학습에 대한 학생의 모델을 확장하는 단초가 됨으로써 분수 교수 학습 현장 및 교과서 개발에 활용되고 관련 후속 연구가 수행되기를 기대한다.

References

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48-69. https://doi.org/10.2307/749663

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383-432. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.511565

Hackenberg, A. J. (2014). Musings on three epistemic algebraic students. In L. P. Steffe, K. C. Moore, & L. L. Hatfield (Eds.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing* (Vol. 4 of WISDOMe monographs, pp. 81-124). University of Wyoming Press.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research Mathematics Education, 46*(2), 196-243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.004

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct—Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lee, S. J., & Shin, J. (2020). Students' proportion problem solving with different units coordination stages. *Journal of Education Research in Mathematics, 30*(2), 245-279. http://doi.org/10.29275/jerm.2020.05.30.2.245

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithemetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 279-314. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0104_2

Shin, J. (2010). *Students' construction of fractional knowledge through modification of their generalized number sequence (GNS)* [Unpublished doctoral dissertation, The University of Georgia].

Shin, J., & Lee, S. J. (2018). The alignment of student fraction learning with textbooks in Korea and the United States. *Journal of Mathematical Behavior, 51*, 129-149. http://dx.doi.org/10.1016%2Fj.jmathb.2017.11.005

Shin, J., Lee, S. J., & Steffe, L. P. (2020). Problem solving activities of two middle school students with distinct levels of units coordination. *Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100793. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100793

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Erlbaum.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177–194). Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*(3), 259-309. https://doi.org/10.1016/1041-6080(92)90005-Y

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Steffe, L. P., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Yoo, J. Y., & Shin, J. (2020). A fourth grade student's units coordination for fractions. *Education of Primary School Mathematics*, *23*(2), 87–116. https://doi.org/10.7468/JKSMEC.2020.23.2.87

Yoo, J. Y., & Shin, J. (2021). Construction of recursive partitioning operation and fraction schemes with interiorized two levels of units. *School Mathematics, 23*(1), 1-31. https://doi.org/10.29275/sm.2021.03.23.1.1

Appendix

사전 검사지

번호	사전 검사 과제
1	선물용 사탕 상자 하나에는 사탕이 일곱 개씩 들어 있습니다. 남양이는 다섯 명의 남학생 친구들에게 상자를 하나씩 선물하였습니다. 이후 다른 세 명의 여학생 친구들에게 상자를 하나씩 추가로 선물하였을 때 다음 물음에 답하세요. (1) 남양이가 선물한 사탕의 총 개수는 얼마인지 구하세요. (2) 남양이가 선물한 사탕의 총 개수를 구하는 데 필요한 풀이 과정을 식을 사용하여 설명하세요.
2	길이가 1인 막대 그림입니다. 한 번에 12로 나누지 않고 막대의 $\frac{1}{12}$ 을 구하는 방법을 다양하게 생각하고 그 방법을 설명하세요.
3	길이가 $\frac{3}{5}$ 인 막대 그림입니다. 길이가 1인 막대를 그리고 그 방법을 설명하세요.
4	길이가 1인 막대 그림입니다. 길이가 $\frac{5}{3}$ 인 막대를 그리고 그 방법을 설명하세요.
5	길이가 $\frac{5}{3}$ 인 막대 그림입니다. 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 막대를 그리고 그 방법을 설명하세요.
6	6cm의 종이띠를 주어진 분수만큼 색칠한다고 할 때 다음 물음에 답하세요.  (1) 6cm의 $\frac{1}{3}$ 은 □ cm일 때, 안에 알맞은 수를 구하세요. (2) (1)에 대한 풀이 과정을 식으로 다양하게 나타내고 왜 그러한 연산 기호를 사용하였는지 설명하세요.
7	샌드위치 세 개를 네 명의 친구들이 똑같이 나누어 먹는다고 할 때 다음 물음에 답하세요. (1) 한 명의 몫이 전체의 얼마인지 구하세요. (2) 한 명의 몫이 전체의 얼마인지 구하는 그림을 그리세요. (3) (1)에 대한 풀이 과정을 식으로 다양하게 나타내고 왜 그러한 연산 기호를 사용하였는지 설명하세요.