



Research Article

Elementary school students' levels of quantitative reasoning of units: Using open number line tasks

Park, Jukyung¹ • Yeo, Sheunghyun^{2*}

¹Teacher, Seoul Haenghyun Elementary School

²Professor, Daegu National University of Education

*Corresponding Author: Sheunghyun Yeo (shyeo@dnue.ac.kr)

ABSTRACT

Measurement is an imperative content area of early elementary mathematics, but it is reported that students' understanding of units in measurement situations is insufficient despite its importance. Therefore, this study examined lower-grade elementary students' quantitative reasoning of units in length measurement by identifying the levels of reasoning of units. For this purpose, we collected and analyzed the responses of second-grade elementary school students who engaged in a set of length measurement tasks using an open number line in terms of unitizing, iterating, and partitioning. As a result of the study, we categorized students' quantitative reasoning of unit levels into four levels: Iterating unit one, Iterating a given unit, Relating units, and Transforming units. The most prevalent level was Relating units, which is the level of recognizing relationships between units to measure length. Each level was illustrated with distinct features and examples of unit reasoning. Based on the results of this study, a personalized plan to the level of unit reasoning of students is required, and the need for additional guidance or the use of customized interventions for students with incomplete unit reasoning skills is necessary.

Key words: quantitative reasoning of unit, unitizing, iterating, partitioning, unit coordination

초등학교 저학년 학생의 단위 추론 수준: 개방형 수직선 과제를 중심으로

박주경¹ • 여승현^{2*}

¹서울행현초등학교 교사 ²대구교육대학교 교수

*교신저자: 여승현 (shyeo@dnue.ac.kr)

초록

측정은 초등 수학의 핵심 영역이지만 중요도에 비하여 측정 상황에서 단위에 대한 학생들의 이해는 충분하지 않은 것으로 보고되고 있다. 이에 본 연구는 길이 측정 상황에서 초등학교 저학년 학생의 단위 추론에 대한 수준을 분석하여 이를 바탕으로 측정 영역에서 단위 추론을 지도하기 위한 방안을 모색하고자 하였다. 이를 위하여 개방형 수직선을 활용하여 길이 측정 과제를 적용한 초등학교 2학년 학생들의 응답을 수집 및 분석하였다. 연구 결과, 초등학교 저학년 학생들의 단위 추론 수준은 단위화, 단위 반복, 단위 분할 정도에 따라 1단위 반복하기, 주어진 단위 반복하기, 단위 사이의 관계 알기, 단위 변환하기의 4개의 수준으로 나타났다. 가장 많은 분포를 보인 수준은 길이 측정을 위해 단위 사이의 관계를 인식하는 수준이었으며 각 수준을 대표하는 단위 추론에 대한 학생들의 수준별 특징과 사례를 제시하였다. 본 연구 결과를 토대로 초등학교 저학년 학생들의 단위 추론 수준에 맞는 지도 방안이 요구되며, 불안정한 단위 추론 능력을 가진 친구들을 위한 추가 지도나 맞춤형 중재물의 활용이 필요함을 논의하였다.

주요어: 단위 추론, 단위화, 반복, 분할, 단위 조정

Received October 23, 2023

Revised November 06, 2023

Accepted November 26, 2023

2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

Copyright © 2023 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

측정은 수학을 학생들의 일상 생활과 밀접하게 관련시켜 수학의 가치를 인식하게 하며 다른 영역의 학습의 바탕이 되는 초등 수학의 주요 영역이다. 그러나 학년이 올라갈수록 측정에 대한 학업 성취도와 학생들의 추론 능력이 낮아진다는 연구 결과도 나타나고 있다(Pang & Ji, 2009). 이를 위하여 수학과 교육과정에서는 측정에서 양감을 키우는 활동을 지속적으로 강조해왔다(Pang et al., 2012). 최근 개정된 2022 수학과 교육과정에서는 “여러 가지 속성의 양을 비교하고 속성에 따른 단위를 이용하여 양을 수치화함으로써 여러 가지 현상을 해석하거나 실생활 문제를 해결” 하기 위한 핵심 아이디어를 통해 측정에서 단위의 이용을 강조하고 있다(Ministry of Education, 2022, p. 9).

측정할 속성의 구분과 해당 속성의 측정을 위해 사용하는 단위를 이해하는 것은 중요하다(NCTM, 2000). 교육과정에서 측정 감각의 향상을 바탕으로 한 길이 측정 지도가 필요함을 언급하고 있지만 실제 길이 측정 지도의 양상은 길이에 대한 표준 단위 제시 및 단위 환산과 연산 지도를 중심으로 이루어지고 있는 경우가 여전히 많다. 또한 수학 교과서에 양감을 강조하는 활동이 포함되어 있더라도 학생들은 단위를 깊이 있게 이해하지 못하여 측정 영역에서 학습 부진으로 이어지기도 한다(Ju & Kim, 2009).

측정 상황에서 단위는 수를 추상화하는 기본이자 단위의 양적 구조를 만들 수 있는 바탕이다. 단위 개념을 이해하기 위한 연구들은 단위화에 대한 지도가 선행될 필요가 있음을 말하며, 단위화의 의미와 우리 나라 교육 환경을 바탕으로 단위화의 지도 방향을 제시하거나(Park, 2017) 단위화 수업을 통해 학생들의 추론 전략이 증가하였음을 밝히고 있으며(Lee, 2019) 단위화 조작을 바탕으로 단위 반복, 분할 등을 포함하는 단위 조정을 주제로 다루기도 한 연구들도 이루어지고 있다(Lee & Shin, 2020; Steffe, 1991). 단위 조정에 관한 연구들은 분수, 비례, 함수 등의 문제해결 과정과 관련하여 학생의 단위 인식과 조작 정도에 따라 단계 또는 수준을 제시하며, 대상 학생이 해당하는 수준에서 단위를 이용하는 양상과 사용하는 단위 구조를 바탕으로 양의 관계에 주목하였다. 종합해보면 단위를 깊이 있게 이해하는 것이 곧 수를 추상화하고 양적 구조를 만들어 가는 기반을 형성함을 알 수 있다.

이처럼 수와 연산과 측정 영역과 같이 서로 다른 영역에서 사용되는 단위를 연결하여 영역을 통합적으로 접근할 수 있다. Saxe 외 (2013)는 수와 길이 단위의 연계를 통해 수와 측정을 연결하고자 하였다. 수의 단위는 합성과 분해를 통해 수를 다양하게 표현할 수 있으며 길이의 단위 또한 측정을 위해 반복한 결과를 수로 나타낼 수 있다. 이처럼 수와 길이의 단위는 다른 속성을 가지고 있지만 단위의 이름으로 통합할 수 있으며, 동시에 단위를 유연하게 사용하고 재구조화할 수 있는 단위 추론(quantitative reasoning with units) 능력의 발달을 이끌 수 있다(Lee & Pang, 2016).

한편 수직선 모델은 수학의 전 영역을 시각화하여 실제적, 조작적, 언어적, 기호적 표현을 연결하는 도구로 활용되며, 학생들이 사용하는 다양한 전략을 드러내고 이해하는 데 유용하다(Schneider et al., 2018). 특히, 측정 영역에서 수직선 모델은 기준점으로부터 단위 길이를 반복, 분할하여 수를 표현하는 방법으로 단위를 드러내는데 적합한 도구라는 점에서 학생들의 단위에 대한 적극적 조작 과정과 사고 과정을 바탕으로 한 이해도를 가늠할 수 있는 자료로 활용할 수 있다(Kim, 2022). 그 중에서도 개방형 수직선은 정형화되고 공식화된 방법 이외의 다양한 비형식적 전략을 표현하고 이해할 수 있는 효과적인 도구로서의 잠재력을 갖고 있다.

이에 본 연구는 개방형 수직선 과제를 활용한 길이 측정 상황에서 초등학교 2학년 학생들의 단위 추론 수준과 분포를 분석하여 학생들의 길이 측정에 대한 단위 추론 수준에 따라 나타나는 사례의 특징을 도출하고자 하였다. 이를 통해 길이 측정 상황의 개방형 수직선 과제에서 초등학생의 단위 추론 수준을 이해하고 단위 추론 수준에 근거한 측정 방향에 대한 시사점을 제공하고자 하였다. 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

1. 길이 측정 상황의 개방형 수직선 과제에서 초등학교 저학년 학생의 단위 추론 수준과 분포는 어떠한가?
2. 길이 측정 상황의 개방형 수직선 과제에서 초등학교 저학년 학생의 단위 추론 수준에 따른 특징은 어떠한가?

이론적 배경

길이 측정에서 학생들의 사고에 대한 연구

길이는 실생활과 기하에서 매우 중요하게 활용한다. 일상생활에서 학생들은 자연스럽게 자신의 키나 신발과 같이 성장에 따라 변화하는 신체의 일부를 재는 활동을 한다. 기하에서는 평면도형을 분류할 때 길이가 같은 변의 수에 따라서 삼각형을 이등변삼각형과 정삼각형으로 나누기도 하고, 사각형에서도 네 변이 같은 마름모와 정사각형처럼 도형에서 변의 길이를 분류의 중요한 기준으로 활용한다.

여러 가지 측정의 대상 중에서 길이는 학생들에게 다른 대상들에 비해서 직관적으로 구별이 쉽고 가장 쉽게 인지될 수 있다. 특히, 학생들의 보존의 개념도 길이, 넓이, 무게의 순서로 발달해 나간다는 점을 보면 길이에 대한 학습이 다른 측정 내용요소에 비해서 가장 기초적이면서도 핵심임을 알 수 있다(Pang & Ji, 2009).

우리나라의 초등수학 1-2학년교 교과서에서는 길이 측정 지도를 위해 단계적으로 비교와 측정을 활용하고 있다(Ministry of Education, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d). 비교는 시각적으로 두 물체의 길이를 비교하는 직관적 비교, 두 물체의 길이를 직접 맞대고 비교하는 직접 비교, 그리고 매개물을 활용하여 두 물체의 길이를 비교하는 간접 비교로 나뉜다. 측정은 뺄, 클립, 지우개와 같은 실생활의 도구를 단위로 활용하는 임의단위를 통한 측정과 cm와 m와 같은 표준단위를 통한 측정을 학습한다. 이후, 자와 같은 길이를 재는 도구를 바르게 사용하는 방법을 배우고 길이를 더하고 빼는 연산활동 등에 대한 내용을 체계적으로 제시하고 있다.

이처럼 길이 측정은 학생들의 측정에 대한 전반적인 사고를 개발하는 초석이 되고, 교육과정과 교과용 도서를 통해서 가장 강조되어 있는 내용 영역이다. 따라서, 학생들이 길이에 대한 사고과정에 대한 다양한 연구들이 진행되어 왔다. Sarama 외 (2011)는 길이에 대한 학습 경로(learning trajectory), 즉 학생들이 배워야 할 내용 영역에 관한 수학적 목표(mathematical goal), 단계적으로 학생들의 길이에 대한 학습이 나뉘어 설명하는 발전적 단계(developmental progression)와 단계들 사이에서 이동할 수 있도록 도와줄 수 있는 수업(instruction)을 강조하였다. 그는 Sarama와 Clements (2004)의 기존 분석틀을 바탕으로 학생들의 길이 측정에 대한 사고를 학습 경로로 나타내고, 길이 미인식(Pre-length quantity recognizer), 길이 인식(Length quantity recognizer), 길이 직접 비교(Length direct comparer), 간접 비교(Indirect length comparer), 전체 길이 측정(End-to-end measurer), 길이 단위 관계 및 반복(Length unit relater and repeater), 길이 측정(Length measurer)으로 학습 궤적을 세분화하였다. 각 단계의 의미와 예시는 Table 1과 같다. 이러한 단계는 학생들이 도달할 수 있는 단계들을 제시하여 학생들의 각 단계에서 지녀야 할 지식이나 기능들에 대해서 구분한다는 점이 특징적이다. 특정 단계에 있는 학생들은 기존의 지식을 바탕으로 교사가 준비한 교수 학습을 통해서 다음 단계로 도달할 수 있다(Sarama et al., 2011).

Table 1. Developmental progression for the learning trajectory for length measurement (Sarama et al., 2011, p. 670)

Developmental progression	Feature	Example
Pre-length quantity recognizer	Does not identify length as attribute	"This is long. Everything straight is long. If it's not straight, it can't be long."
Length quantity recognizer	Identifies length/distance as attribute using appropriate vocabulary	"I'm tall, see?"
Length direct comparer	Physically aligns two objects to determine which is longer or if they are of the same length	Stands two sticks up next to each other on a table and says, "This one's bigger."
Indirect length comparer	Compares the length of two objects by representing them with a third object	Compares the length of two objects with a piece of string
End-to-end length measurer	Lays units end to end. May not recognize the need for equal-length units or to avoid gaps.	Lays 9-in. cubes in a line beside a book to measure how long it is
Length unit relater and repeater	Measures by repeated use of a unit (but initially may not be precise). Relates size and number of units	"If you measure with cm, not inches, you'll need more, because each one is smaller."
Length measurer	Measures, knowing need for identical units, relationship between different units, partitions of unit, zero point on rulers, and accumulation of distance.	"I used a meter stick three times, then there was a little left over. So, I lined it up from 0 and found 14 centimeters. So, it's 3 meters, 14 centimeters in all."

Battista (2006)는 다양한 길이 측정 문제를 제공하고, 이를 바탕으로 길이 측정 추론에 대한 수준을 조사하였다. 이 때 길이 측정의 수준은 비측정 추론과 측정 추론으로 나누었다. 비측정 추론에서는 단위를 아직 활용하지 못하는 ‘전체적인 시각적 비교’, ‘직접 비교를 위한 부분들의 재배열’, ‘부분들의 일대일 대응’, ‘성질에 기초한 변환에 의한 비교’의 수준들이 나타났으며 측정 추론에서는 ‘단위 길이 반복과 연계되지 않는 수의 사용’, ‘부정확한 단위 길이 반복’, ‘정확한 단위 길이 반복’, ‘단위 길이 반복에 대한 수치적, 논리적 조작’, ‘길이 측정값에 대한 수치적, 논리적 조작’ 이 나타났다.

국내에서도 길이 측정에 대한 사고 능력에 대한 연구들이 꾸준히 진행되어 왔다. Pang과 Ji (2009)는 Battista (2006)에서 제시한 단위 길이 비교하기, 단위의 수세기, 단위 길이 예상하기, 길이 비교하기의 다양한 길이 측정 문제를 활용하여 우리나라 초등학교 2, 3학년 학생 375명의 길이 비교에 대한 추론 능력의 실태를 조사하였다. 단위 길이 비교하기와 단위의 수세기 유형에서 학생들이 전반적으로 높은 정답률을 보인 반면, 단위 길이 예상하기와 길이 비교하기 유형에서는 낮은 정답률을 보였다. 이러한 정답률과 오답 유형은 학생들의 길이 측정의 추론 수준과 관계가 있었다.

이와 같은 연구들을 통해서, 기존 연구들에서도 길이 측정에 대한 학생들의 사고 수준을 연구하기 위한 다양한 시도들이 있었고 이러한 수준을 우리 나라에도 반영하여 실태를 분석한 연구들도 있었음을 알 수 있다. 길이 측정에 대한 사고 수준은 보편적일 수 있으나, 수직선과 같은 특정한 길이 측정의 상황에서는 적용하기 어렵다는 단점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 우리 나라 학생들의 개방형 수직선 문제를 활용하는 과정에서 나타나는 사고 수준을 분석하여 이를 분석틀로 학생들의 단계별 특징과 사례를 제시하고자 한다.

길이 측정을 위한 필수적 이해

길이 측정은 다양한 개념 요소들로 구성이 된다. Lehrer 외 (2003)는 같은 단위, 반복, 덮기, 분할, 가법성, 영점, 정밀도를 제시하여 이러한 개념 요소들을 길이 측정을 위해서 길러야 할 것으로 강조하였다. Sarama와 Clements (2004)는 이를 보다 더 구체적으로 8가지의 필수 개념적 이해가 필요하다고 하였다. ‘속성(Attribute)’은 길이가 고정된 거리에 걸쳐 있다는 것을 이해하는 것과 관련이 있다. ‘보존성(Conservation)’은 물체를 움직여도 물체의 길이가 변하지 않는다는 것을 이해하는 것이고 ‘전이성(Transitivity)’은 물체 A의 길이가 물체 B의 길이와 같고 물체 B의 길이가 물체 C의 길이와 같으면 물체 A의 길이가 물체 C의 길이와 같다는 것을 이해하는 것이다. ‘등분(Equal partitioning)’은 물체를 동일한 부분 또는 단위로 나누는 정신적 행위를 말한다. ‘단위와 단위 반복(Units and unit iteration)’은 작은 단위의 길이를 측정하는 물체의 길이를 따라 반복적으로 배치하는 과정을 이해하는 것이 필요하다는 것이고, ‘거리의 누적(Accumulation of distance)’은 반복한 모든 단위를 계산할 때 측정의 결과가 전체 길이의 양을 의미한다는 것을 이해해야 한다는 것이다. ‘가법성(additivity)’은 길이가 합성되고 분해될 수 있다는 것을 이해할 수 있어야 한다는 것이며 ‘원점(Origin)’은 비율 눈금의 모든 점을 원점으로 사용할 수 있다는 이해가 포함된다. ‘수와 측정의 관계(Relationship between number and measurement)’에는 이산량을 세는 것이 측정의 기초가 된다는 사실을 포함하고 있다.

특히 수와 측정의 관계와 관련하여, Saxe 외 (2013)는 수의 단위와 길이의 단위를 연계하는 부분을 강조하였다. 수의 단위는 수의 합성과 분해와 같이 다양한 방법으로 표현할 수 있다. 예를 들어 3은 $4-1$, $2+1$, $3+0$ 과 같이 다양한 표현으로 나타낼 수 있지만 값은 같고, 길이의 단위는 길이를 재기 위해서 반복하는 것으로 몇 번이 반복되었는지에 대한 결과를 측정 결과로 제시한다. 이처럼 수와 길이의 단위는 다른 속성을 가지고 있다고 할 수 있다. 이러한 속성의 차이는 수직선을 통해서 두 가지를 통합하여 제시할 수 있다.

단위 사이의 관계를 강조하는 유사한 개념으로 단위 조정(unit coordination)이 있다. 단위 조정은 단위화(unitizing), 반복(iterating), 분할(partitioning), 분리(disembedding) 등의 능력을 포함한다(Steffe & Olive, 2010). 단위 조정의 구조적 측면은 단위 간의 가능한 관계와 필요한 관계를 정의하고 활용하는 것이다. 다음 Figure 1을 이용하여 단위 조정의 세 단계를 설명할 수 있다(Norton et al., 2015).

1단계에서는 항상 1이라는 단위에서 반복과 분할 활동을 수행한다. 1이라는 단위를 반복하고, 전체를 다시 1이라는 단위로 분할하는 활동을 수행할 수 있다. 2단계에서는 학생은 3개의 1을 하나의 3으로 단위화하여 두 단위 사이에 곱셈적인 3 대 1 관계를 설정할 수 있다. 이 단계의 학생들은 3의 복합 단위를 반복하여 Figure 1에 표시된 형태처럼 복합적인 단위를 만들 수 있다. 2단계의 학생들은 3의 단위에서 1의 단위를 분리하여 3의 일부로 구성 요소를 유지하면서 동시에 자체 단위로 취급할 수도 있다. 3단계의 학생은

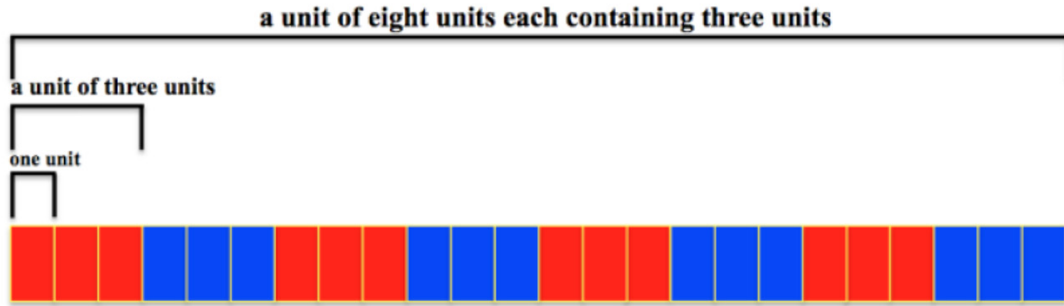


Figure 1. Representation of a structure for unit coordination (Norton et al., 2015)

24라는 단위에서 가장 작은 단위 중 1을 분리(disembedding)하고 해당 단위를 3번 반복하여 그 결과를 3개의 하나의 단위로 단위화한 다음, 해당 복합 단위를 8번 반복하여 24를 3개의 하나인 단위 8개(3단계의 단위)로 구현할 수 있다.

국내에서 단위 조정에 대한 연구는 초등을 중심으로 분수 영역과 관련하여 실제 학생들의 개념을 분석하거나(Lee & Lee, 2022; Yoo & Shin, 2020) 교과서를 분석하는 틀을 제시하기도 하였다(Lee, 2019). 예를 들어, Yoo와 Shin (2020)에서 등장하는 연구 대상 학생은 초기에 2수준인 학생으로 분수를 또 다른 형태의 자연수로 인식하였다. 4달에 걸친 교수 실험을 통해서 해당 학생은 3수준에 도달할 수 있었고, 진분수와 전체 1을 단위 분수의 배수로 동시에 인식하게 됨으로써 자연수와 분수의 차이를 이해할 수 있었다.

본 연구에서는 길이 측정의 필수 개념인 단위화, 단위 반복, 단위 분할을 중심으로 초등학생들의 개방형 수직선에서의 추론 능력을 살펴보고자 한다. 개방형 수직선에서는 학생들이 무엇을 단위로 할지에 대한 부분이 명확하지 않기 때문에 학생들의 다양한 단위화 전략을 확인할 수 있고 단위 반복의 양상을 살펴볼 수 있다. 단위 분할은 학생들이 주어진 단위를 관련된 다른 단위들로 변환할 수 있음을 의미하기 때문에 수직선 상황에서 수를 표시하는 표식에 따라 다양한 단위 분할의 양상을 기대할 수 있다. 단위화와 단위 분할을 통해서 만들어낸 다양한 단위들 사이에서 어느 정도에 대해 그 관계를 이해하고 각 단위를 활용할 수 있는지에 대한 능력도 분석할 수 있다.

연구 방법

연구참여자

본 연구는 측정에서의 단위 추론 수준 분석을 위하여 초등학교 2학년을 연구 참여자로 선정하였다. 단위에 대한 이해 부족으로 인해 학년이 올라감에 따라 측정 학업에 어려움을 겪는다는 선행 연구(Ju & Kim, 2009)에 근거하여 저학년을 연구대상으로 해야 할 필요가 있었다. 그 중 초등학교 2학년의 경우 수와 연산 영역에서 네 자리 수까지 수의 범위까지 학습하였고 측정 영역에서는 길이에 대한 직관적 비교부터 표준단위, 자와 같은 도구를 활용하는 방법까지 학습하였기 때문에 수와 길이를 통합할 수 있는 충분한 기초 지식을 가지고 있을 것으로 기대하였다. 또한 학생들이 가지고 있는 실생활에서 수와 측정에 관련된 비형식적 지식을 활용하여 주어진 길이 측정 상황의 과제를 해결할 수 있을 것으로 보았다.

연구 참여자가 소속된 초등학교는 대도시와 소도시 지역에 위치하고 있었다. 대도시 지역의 초등학교는 3곳이었으며 소도시 지역의 초등학교가 1곳이었으며 학급별 평균 학생 수는 21.75명이었다. 대도시 지역의 초등학교 3곳 중 2곳은 교육에 대한 관심과 열의가 높은 편으로 대부분의 학생들이 선행학습을 위한 사교육을 받고 있어 특수 교육 대상자인 학생 1명을 제외하고는 수학 부진 학생이 없는 곳이었다. 대도시 지역의 다른 초등학교 1곳은 교육에 대한 관심과 열의가 있으나 사교육을 받는 학생이 많지 않고, 학교에서 처음으로 개념을 학습하는 학생들이 분포되어 있었다. 소도시 지역에 위치한 초등학교 1곳 또한 학생들이 사교육을 통한 선행 학습 경험이 거의 없는 곳이었다.

길이 학습 내용

본 연구에 참여한 학생들은 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 중심으로 길이를 학습한 학생들이다. 연구참여자들의 길이 학습 내용은 Table 2와 같다(MOE, 2017a, 2017c, 2017d, 2017e). 학생들은 1학년 1학기에 여러 가지 속성 중 길이를 인식하고 직관적 비교 방법 및 직접 비교하는 방법을 탐구하고 비교하여 말하는 방법을 학습하였다. 2학년 1학기는 단위를 사용하여 길이를 비교하고 측정 학습을 본격적으로 시작하는 단계이다. 손가락, 뿔과 같은 신체를 이용하거나 클립, 지우개와 같은 도구를 사용하여 일정한 단위를 반복함으로써 길이를 측정하고, 이를 바탕으로 표준 단위로 1cm와 1m를 학습하였다. 또한 자를 이용하여 대상의 길이를 측정하는 방법을 학습하였다. 2학년 2학기에는 길이를 합하거나 길이 사이의 차이를 구하고, 2m, 3m, 10m 이상의 긴 길이를 어렵하였다. 이후 길이 학습은 초등학교 3학년까지 이어지는데, 3학년에서는 1cm보다 작은 단위로 mm를 도입하고, 1m보다 큰 단위인 km를 도입하여 길이와 거리를 어렵하고 측정하는 것을 학습한다. 본 연구는 수와 측정을 단위로 인식할 수 있는 연령을 대상으로 하고자 하였으므로 측정의 보다 작은 단위와 보다 큰 단위까지 학습하지 않은 초등학교 2학년으로 대상을 한정하였다. 연구에 참여한 학생들은 Table 2의 1, 2학년에 해당하는 길이 학습을 마친 상태였으며 손가락, 뿔 등의 신체 도구, 지우개, 클립 등의 생활 도구, 자와 같은 측정 도구를 이용하여 물건의 길이를 잴 수 있었으므로 단위를 이해하고 있을 것으로 판단되었다. 또한 해당 학생들은 1년 동안 2학년 학습을 이해하는 데 어려움이 없었으며 길이를 단위로 인식하고 측정할 수 있었으므로 검사지 작성에 어려움이 없을 것으로 기대하였다.

Table 2. Length measurement contents

Grade	Theme	Length measurement contents
1	Comparing	<ul style="list-style-type: none"> • Exploring and comparing intuitive • Direct comparison methods of length
2	Measuring Length(1)	<ul style="list-style-type: none"> • Introducing 1cm as an arbitrary unit and standard unit • Started measuring activities using a ruler
	Measuring Length(2)	<ul style="list-style-type: none"> • Introducing 1m, sum and difference of length • 2-3m, 10m, 20m, 30m estimation activities
3	Length and Time	<ul style="list-style-type: none"> • Units smaller than 1cm • Units larger than 1m • Estimating and measuring lengths and distances

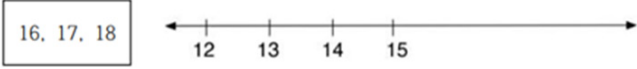




개방형 수직선 과제

본 연구의 자료 수집을 위해 선행 연구를 바탕으로 초등학교 2학년 학생이 길이 단위 활용 능력을 파악할 수 있는 문항을 바탕으로 과제로 만들었다. Saxe 외 (2013)의 과제를 변형한 초기 과제 제작 후 사전실험을 위해 수학 능력의 차이를 보이는 2학년 학생 3인에게 문항을 제공하여 해결하게 하였다. 적용 결과 제시된 발문을 이해하지 못하여 답을 기술하지 못하거나 구하는 것을 찾지 못하는 모습이 1명의 학생에게 나타났다. 이를 개선하기 위하여 학생들이 사용해 온 초등학교 1, 2학년 수학 교과서(MOE, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d)에 제시되는 수직선의 형태, 발문의 제시 방법을 다각도로 살펴 과제에 포함된 발문을 학생들이 이해하기 쉽게 수정하였다. 개방형 수직선을 활용한 과제의 경우 학생들이 교과서에서 익숙하게 보아 온 형태는 아니었으나 시각적인 단서를 통해 학생들이 충분히 문제해결의 실마리를 찾을 수 있었을 뿐만 아니라 수직선 과제의 필요 및 개방형 수직선의 필요를 제기한 Jang과 Kim (2013), Kim (2022)의 선행 연구를 바탕으로 우리나라 학생들에게 충분히 적용할 수 있는 형태라고 판단하였다. 또한 연구대상이 저학년 학생들임을 고려할 때 단문 형태로 발문을 제시함으로써 충분히 문제 상황을 인식할 수 있을 것으로 보았다.

최종 구성된 길이 측정 과제는 총 5개의 문항으로 구성하였으며 각 문항은 1단위, 2단위, 10단위, 4단위와 같이 단위가 한 가지로 고정되어 있는 것과 10단위와 5단위와 같이 두 가지 단위를 포함하여 변환이 필요한 유형을 의도적으로 포함하였다. 문항 1은 수직선 위에 제시된 보기의 수의 위치를 찾는 문항으로, 수의 배열에서 1단위를 찾고 이를 반복하여 어렵할 수 있는지 묻는 내용으로 구성하였다. 문항 2는 수직선에서 잘못 기술된 부분을 찾는 문항으로, 수의 배열에서 2단위를 찾고 이를 반복하여 어렵할 수 있는지 묻

는 내용으로 구성하였다. 문항 3은 수직선에서 0의 위치를 찾아 표시하는 문항으로, 20과 30 사이의 단위인 10단위를 찾고 이를 이용하여 10단위의 2배만큼 떨어진 0의 위치를 어림할 수 있는지 묻는 내용으로 구성하였다. 문항 4는 떨어진 곳에 위치한 □의 수를 찾는 문항으로, 10과 14를 이용하여 4단위를 발견하고 이를 바탕으로 4단위의 2배만큼에 해당하는 수를 찾는 내용으로 구성하였다. 문항 5는 떨어진 곳에 위치한 □의 수를 찾는 문항으로, 90과 100으로 10단위를 찾고 이를 바탕으로 5단위를 발견할 수 있는 내용으로 구성하였다. 구체적인 문항 내용 및 단위는 Table 3과 같으며 검사지에 제시된 문항 순서는 표에 제시한 순서와 다르다.

Table 3. Length measurement task

Items	Tasks	Units
1	Mark the position of the number on the number line. 	unit 1
2	Find the wrong part on the following number line, correct it, and write the reason for the mistake. 	unit 2
3	Find and mark the position of zero on the following number line and write how you located it. 	unit 10
4	Write the correct number in □ and explain how you found the number. 	unit 4
5	Write the correct number in □ and explain how you found the number. 	units 10, 5

자료 수집

본 연구는 초등학교 2학년 길이 측정 학습을 마친 학생 87명을 대상으로 자료를 수집하였다. 87명의 학생을 대상으로 수집한 자료 중 자료 분석 대상은 86건이었다. 분석에서 제외된 1건은 일반 학급에 통합되어 학습하는 특수 교육 대상자인 학생이 작성한 검사지로, 검사지에 어떠한 표시나 응답을 하지 않았기 때문에 분석 대상에서 제외하였다.

겨울방학을 전후한 12월부터 2월까지를 자료 수집 기간으로 하고, 연구참여자가 소속한 학교마다 겨울방학을 시작하고 끝나는 일정에 차이가 있었기 때문에 이를 고려하여 학교별로 자료 수집 일정을 다르게 설정하였다. 연구 시기에 검사가 가능한 학교를 편의 표집하여 최종 4개 학교 각 1개 반씩 총 4개 학급이 선정되었다.

과제는 수업 시간에 학생들에게 출력물 형태로 제공하였으며, 담임 교사는 연구자가 제공한 검사에 대하여 간단히 안내한 후 학생들이 과제를 해결할 수 있도록 하였다. 학생들이 과제를 완료하는데 걸리는 시간은 약 20분 내외였으며, 시간이 더 필요한 경우 충분한 시간을 제공하였다. 또한 학생들이 과제를 해결하는 과정에서 자와 같은 측정 도구를 자발적으로 필요로 하는 경우가 있었는데, 이 때에는 자신이 필요하다고 생각하는 측정 도구를 자유롭게 선택하여 해결할 수 있도록 안내하였다. 검사지는 일괄 수집 후 분석을 위한 컴퓨터 파일의 형태로 변환하였다.

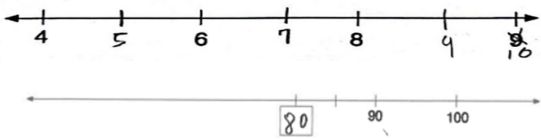
자료 분석

자료 분석은 학생들이 검사지에 표기 및 서술한 내용을 바탕으로 하였으며 학생 자신이 선택한 측정 방법에 대한 설명식 서술뿐만 아니라 수직선에 그린 그림, 표시 등도 활용하였다. 분석은 길이 측정 수준을 제시한 Chernyavskiy 외 (2023) 및 Sarama와 Clements

(2004)의 연구 결과를 토대로 한 세 가지 요소인 단위화, 단위 반복, 단위 분할을 분석의 중점으로 선정하였다. 단위화(unitizing)는 하나 또는 여러 단위를 주어진 상황으로부터 정하는 것을, 단위 반복(iterating)은 주어진 길이를 측정하기 위해서 하나의 단위를 이용하여 반복하는 것을, 단위 분할(partitioning)은 주어진 단위를 상황에 따라서 더 작은 단위로 나누는 것을 의미한다. 이와 같은 세 가지 요소에 해당하는 학생들의 측정 방법을 묶어 범주를 형성한 후, 이를 다시 원자료와 대조하며 문항 하나하나에 대하여 분석적 메모하기를 시행하였다. 이 과정에서 학생들의 측정 방법에 대한 설명과 수직선에 그린 그림과 표시 등의 의미를 깊이 있게 이해할 수 있었으며 이를 바탕으로 다시 초기 형성한 범주를 수정 및 보완하였다. 2인의 연구자는 한 학생에 대하여 독립적으로 수준을 도출하였으며 이후 검토를 통해 결과를 비교하였다. 만약 각기 다른 수준을 도출한 경우, 더 높은 수준이 도출된 문항 응답 반응을 중심으로 코딩하였으며 학생들이 표기한 것과 설명의 차이가 있을 경우에는 설명에 더 큰 비중을 두고 표기를 참고하여 코딩하였다.

분석 결과, 사용한 단위에 따라 학생들의 반응이 다르게 분포하고 있어 단위 반복의 특징을 갖는 수준을 보다 세분화할 필요가 제기되었다. 이를 반영하여 단위 반복에 대하여 1단위의 문제를 해결할 수 있는 경우와 그 외의 단위들(2단위, 4단위, 10단위)을 사용하여 해결할 수 있는 경우로 세분화하여 코딩하였다. 또한 두 수준 사이에 주어진 단위를 이용하여 측정할 수 있으나 과제를 해결하지 못하거나 드물게 성공하는 경우를 새로운 수준으로 생성하였다. Table 4는 단위화, 단위 반복, 단위 분할에 따라 최종 도출된 분석틀을 보여준다.

Table 4. Final coding scheme

Code	Description	Examples
Unitizing (Lamon, 1994; Steffe & Olive, 2010)	The given situation be reinterpreted as one or more units.	"4, 6, and 8 increase by 2, and 8 to 9 increase by 1."
Iterating (Lehrer et al.,2003; Sarama & Clements, 2004)	The given length be measured with repeated unit 1.	
	The given length be measured with repeated multiple units.	
Partitioning (Norton et al., 2015)	The given units are partitioned into partial units.	"One space between □ and 90 is 5."

최종 분석틀에 제시된 단위화, 단위 반복, 단위 분할을 바탕으로 도출된 초등학생의 단위 추론 수준은 단위 반복을 통한 단위 추론, 단위의 관계를 알고 분할하거나 변환을 통한 단위 추론으로 나타났다. 저학년 학생들의 경우 단위 반복을 통한 단위 추론이 다양한 형태로 발견되어 이를 보다 세분화할 필요가 있었다. 이는 기본 형태인 1단위를 반복하는 것과 그 외의 단위를 반복할 수 있는 경우로 구분하였다. 단위의 관계를 바탕으로 분할과 변환을 통한 단위 추론은 자유로운 분할과 변환을 할 수 있는 경우와 그렇지 않은 경우로 구분할 수 있었다.

연구 결과

길이 측정 상황에서 단위 추론 수준 및 분포 양상

연구 결과 초등학교 2학년의 단위 추론은 4개의 수준으로 나타났다. Table 5는 길이 측정 상황에서 학생들의 단위 추론 각 수준과 수준별 분포 양상을 제시하였다.

첫째, 1단위 반복하기 수준은 학생들이 1단위를 이해하고 활용하여 측정할 수 있는 수준이다. 이 수준의 학생들은 1단위를 사용하여 문제를 해결하려고 시도하며 다른 단위를 사용해야 하는 문제에 대해서도 1단위를 지속하여 사용하는 양상을 보여주었다. 둘째, 주어진 단위 반복하기 수준은 주어진 단위로 측정할 수 있고, 1단위가 아닌 다른 주어진 단위를 찾아 길이를 측정하는 데 사용할

수 있었다. 그러나 때로 아직 서로 다른 단위를 사용하는 데 유연하지 못하여 단위 사이의 관계나 상황에 알맞은 단위를 사용하는 문제를 해결하는 데 오류를 범하였다. 셋째, 단위 사이의 관계 알기 수준의 학생들은 주어진 단위의 관계를 알고 측정할 수 있었다. 이 수준의 학생들은 1단위 외에도 2, 4, 10단위 등 다양한 주어진 단위를 찾아 이를 사용하여 측정할 수 있었다. 또한 단위가 지정되지 않은 경우 길이를 측정하기 위해 자체적으로 단위를 분할해야 할 필요를 인식하였다. 넷째, 단위 변환하기 수준의 학생들은 길이를 측정하는 단위를 자유롭게 선택할 수 있으며, 단위 간의 관계를 인식하고 필요한 단위를 적절하게 분할하여 표현할 수 있었다. 학생들은 스스로 문제 상황에 맞는 단위를 찾거나 추론을 사용하여 단위를 변환함으로써 문제를 해결하였다.

수준별 분포 양상을 보았을 때 전체 학생 중 가장 많은 비중을 차지한 수준은 세 번째 수준으로, 단위 사이의 관계 알기 수준이다. 그 다음으로는 두 번째인 주어진 단위 반복하기 수준이며, 네 번째인 단위 변환하기 수준, 마지막으로 첫 번째인 1단위 반복하기 수준이 나타났다. 즉, 대부분의 2학년 학생들이 길이 측정에 관한 교육과정 학습을 마치고 나면 평균적으로 47%에 해당하는 학생들이 단위 사이의 관계를 아는 정도에 도달할 수 있음을 알 수 있다. 다음으로 분포가 높았던 수준은 두 번째 수준으로, 주어진 단위 반복하기 수준이었다. 이 수준의 학생들은 제공된 단위를 능동적으로 발견하여 측정을 시도하거나 단위를 분할해야 할 필요를 찾지 못하였거나 수직선과 표식으로 제공된 단위의 크기를 짐작하지 못하는 수준이었다.

Table 5. Students' unit reasoning levels in length measurement

Units	Levels	Description	Frequency(%)
Single unit	Iterating unit one	Iterating only unit one to measure the length	8(9.2%)
Multiple units	Iterating a given unit	Iterating a given unit to measure the length	22(25.28%)
	Relating units	Relating units to measure the length	41(47.13%)
	Transforming units	Transforming multiple units to measure the length and recognizing relationships between units	15(17.24%)

길이 측정 상황에서 단위 추론 수준별 특징 및 사례

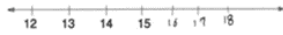
학생들의 수직선에서 단위화 수준에 따라 학생들의 특징 및 측정 전략의 차이가 어떻게 나타났는지 구체적인 사례에 따른 특징을 분석하였다. 학생들의 이름은 모두 가명을 사용하였다.

1단위 반복하기

1단위 반복하기 수준의 학생은 길이 측정 상황에서 1단위를 중심으로 단위를 인식하였다. Figure 2는 1단위 반복하기 수준 학생 현수의 사례를 제시한 것이다. 현수는 수직선에서 오른쪽으로 갈수록 수가 커지고, 왼쪽으로 갈수록 수가 작아지는 특성을 이해하고 이를 바탕으로 1씩 커지는 수를 수직선에 표현할 수 있었다(문항 1). 1단위를 중심으로 길이 단위를 파악하는 것은 2단위를 초점으로 하는 문항 2에도 그대로 적용되었다. 먼저 4와 6사이의 비어 있는 공간에 5를, 6과 8사이의 비어 있는 공간에 7을 표시하였고 이후 8을 기준으로 1단위만큼 오른쪽에 9를 표시하였다. 4단위를 찾아 빈 칸의 수를 찾는 문항 4의 경우에도, 현수는 10과 14사이의 공간을 1단위 4개로 나누고 이 때 사용한 1단위를 중심으로 빈 칸의 수를 찾으려는 경향을 보였다. 이는 2가지 단위를 복합적으로 사용할 수 있는지를 묻는 문항에도 동일하게 적용되었다(문항 5). 빈 칸의 수를 찾기 위하여 현수는 90에서 1단위를 2번 사용하여 각각의 표식에 89, 88을 표기하였다. 그는 수직선에 이미 주어진 90과 100이 10차이를 나타내고 있음을 알고 있었지만 문제를 해결하기 위하여 10차이를 나타내는 '넓은 간격'에 비하여 더 '좁은 간격'으로 보이는 1단위를 선택하였고 이를 활용하여 문제를 해결하였다.

1단위 반복하기 수준의 학생들은 수직선에 자연수를 크기 순서대로 나열하였다. 그림 1의 문항 2와 문항 5에서 현수는 '너무 많이 떨어져 있는' 것과 '10씩 떨어져 있는 건 조금 넓은 간격'이라고 표현했고, 4와 6사이의 공간에 대하여 '(수가) 없다'는 표현을 사용하기도 하였다. 이는 그가 1단위보다 큰 단위인 경우를 표현한 것으로, 길이 측정 상황에서 자연수가 순서대로 나열된 1단위가 길이 측정을 위한 기본 단위로 지속적으로 활용되고 있음을 보여준다. 같은 수준의 다른 학생이 응답한 문항 2의 사례를 살펴보면, 4와 6 사이 단위 크기에 집중하기보다 단위 크기가 자신이 사용하는 단위에 비하여 지나치게 크며 모든 자연수가 수직선에 순서대로 표

현되지 않는 점에 관심을 기울였음을 확인할 수 있었다. 이러한 관심은 누락된 5와 7을 표시함으로써 수직선에 모든 자연수를 나열하는 행동으로 이어졌으며, 90과 100 사이의 ‘큰’ 단위보다 ‘조금 좁은’ 것처럼 보이는 단위 크기를 1단위로 인식시켰다. 결과적으로 수직선에 모든 자연수를 나열하는 데 관심을 기울였으며 이 때 단위 크기 차이는 정밀한 수준으로 고려되지 않았다. 이는 모든 수가 표식과 함께 제시된 문항 1과 문항 2뿐만 아니라, 표식 1개와 빈 칸이 함께 제시된 문항 4, 숫자 없이 제시된 표식이 1개 더 포함된 문항 5에서도 동일하게 나타났다.



Question 1

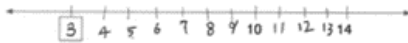


There are too many spaces and some are *missing* in the middle.

Question 2



Question 3



I found the number by estimating.

Question 4



A space of 10 is a *little wider*, while a space of 1 is a *little narrower*.

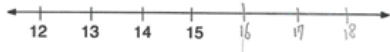
Question 5

Figure 2. Example of Hyunsu using iterating unit one

주어진 단위 반복하기

주어진 단위 반복하기 수준의 학생은 길이 측정 상황에서 주어진 단위를 인식하고 적용할 수 있었다. 학생들은 수직선 위에 모든 자연수를 순서대로 나열하지 않고 1단위보다 큰 단위를 인식하였으며 이를 문제 해결 과정에 사용할 수 있었다. Figure 3에 제시한 주어진 단위 반복하기 수준의 학생인 정민이는 문항 2에서 9를 10으로 수정하였다. 이는 4와 6사이, 6과 8사이의 간격을 2단위로 인식하고 이를 8과 10사이 간격에 적용한 것으로 2단위를 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 보여준다. 학생의 서술 중 ‘2씩’ 수가 커진다는 설명에서도 이를 확인할 수 있다. 마찬가지로 문항 3에서도 30과 20사이의 단위를 인식하여 ‘10씩’ 작아짐을 발견하여 10단위를 활용하여 문제를 해결하였으며 문항 4의 경우에는 10과 14사이의 단위로 4를 인식하여 빈 칸의 수를 찾았다. 정민이는 이와 같은 주어진 단위를 찾아 사용하는 전략을 문항5에도 적용하였다. 90과 100사이에서 10단위를 발견하고 이를 적용하여 90에서 80, 80에서 70으로 빈 칸에 들어갈 수를 구하였다.

주어진 단위 반복하기 수준의 학생은 수직선에 제시된 수 사이의 차이를 인식하여 1단위 이외의 2, 4, 10과 같은 단위를 발견할 수 있음을 알 수 있다. 이 수준의 학생들은 주어진 단위에 대한 발견을 통해 수직선 위의 수를 수정하거나(문항 2) 제시되지 않은 수의 위치를 찾아 표시하거나(문항 3) 표식만 제시된 경우 빈 칸에 들어갈 수를 찾으려고 하였다(문항 4). 또한 주어진 단위 크기를 고려하여 보다 정밀한 측정을 위해 노력하기도 하였다. 문항 3의 경우 주어진 10단위를 2번 세기 위하여 0과 20사이에 표식 1개와 10을 열게 표시하였다. 문항 4의 경우에는 주어진 4단위를 이용하여 10에서 왼쪽에 6을 표시하는 과정에서 위치를 재조정함으로써 주어진 단위 크기를 정확하게 나타내고자 하였다. 그러나 주어진 단위 반복하기 수준의 학생들은 주어진 단위 크기가 달라지는 경우 이를 분할하여 적용하는 데 어려움을 겪었다. 단위 변환이 필요하지 않은 문항은 손쉽게 해결하였으나 다른 단위 크기가 동시에 제시되는 문항 5의 경우 응답을 70으로 나타냈다. 이는 서로 다른 단위 크기보다는 표식의 개수에 집중함으로써 문제를 해결하고자 하였음을 보여준다.



Question 1



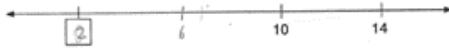
Question 2

The number increases by 2 as you move to the right on the number line. If you add 2 to 8, you get 10, but this is because 9 is written on the number line.



Question 3

As you move to the left on the number line, it gets smaller by 10, so you find 30, 20, 10, 0.



Question 4

As you move to the right, the numbers increase by 4, so you find 2, 6, 10, and 14.



Question 5

As you move to the left on the number line, it decreases by 10, giving you 100, 90, 80, and 70.

Figure 3. Example of Jungmin using iterating a given unit

단위 사이의 관계 알기

단위 사이의 관계 알기 수준의 학생은 다양하게 주어진 단위를 이용하여 길이 측정의 문제를 해결할 수 있었고, 2가지 서로 다른 단위가 동시에 제시되는 경우에도 단위 차이를 인식하고 이를 변형하여 사용할 수 있었다. Figure 4의 문항 2에서 지호는 수직선 위의 4, 6, 8에서 2씩 커지는 수의 규칙을 발견하였으며 이를 이용하여 문제를 해결하였다. 10단위를 활용하는 문항 3의 경우에도 30에서 20사이의 단위인 10을 발견하고 이를 수직선 왼쪽 부분에 적용하여 0의 위치를 찾아 내었다. 이와 같은 방법으로 문항 4에서도 10과 14의 차이를 이용하여 4단위를 찾아내고, 이를 수직선 왼쪽에 적용하여 6과 2를 발견하였다.

주어진 단위 반복하기 수준의 학생들이 해결하는 데 어려움을 겪었던 문항 5의 경우, 지호는 90과 100 사이의 간격에서 10단위를 발견하였지만 10단위의 크기와 왼쪽에 위치한 표식의 단위가 같지 않음을 깨달았다. 그는 90 옆의 표식 1개는 그대로 놓아둔 채 빈 칸과 90사이의 단위에 주목하였다. 즉, ‘90과 100사이의 거리가 □와 90사이의 거리와 같다’는 것을 인식하여 $90 - 10 = 80$ 의 식을 세웠고 빨섬의 결과 도출된 80을 빈 칸의 수로 표현하였다. 주어진 단위 반복하기 수준 학생들은 표식의 개수뿐만 아니라 주어진 단위 크기의 차이를 인식할 수 있었으며 이를 이용하여 단위를 변형하거나 필요 없는 정보를 스스로 제거함으로써 문제를 해결하였다.

단위 변환하기

단위 변환하기 수준의 학생은 수직선 위에 다양하게 주어진 단위를 인식할 수 있었을 뿐만 아니라 단위 사이의 관계를 명시적으로 드러낼 수 있었다. Figure 5의 문항 2를 살펴보면, 윤성이는 주어진 2단위를 인식하여 문제를 해결할 수 있었으나 9를 10으로 수정하지 않고 9아래에 x표시를 한 후, 9의 위치를 8보다 1단위만큼 오른쪽으로 조정하는 모습을 보여준다. 이를 통해 주어진 2단위와 이를 변환한 1단위를 동시에 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 알 수 있다. 문항 3과 문항 4의 경우 주어진 단위를 발견한 후 ‘간격을 두 번만큼 반복하여’, 또는 같은 단위를 수식으로 빼는 과정을 통해 문제를 해결하였다. 2가지 단위를 복합적으로 사용하는 문항 5의 경우 다른 수준의 학생들과 다르게 □와 표식의 거리를 구체적으로 설명하였다. 즉, ‘□와 90 사이 거리의 한 칸(□와 표식 사이의 단위)이 5’임을 제시하고 해당 단위의 2배가 90와 100사이 단위와 같음을 제시함으로써 단위 관계를 명확하게 인식하고 있을 뿐만 아니라 이를 구체적인 용어로 표현할 수 있음을 확인하였다.



Question 1



The rule for this number line is 'the further to the right it gets, the bigger it gets by 2', but at the end, $8+2=10$, but 9 came out, which is wrong.

Question 2



As it goes to the left, it gets smaller by 10, so it comes out as shown above.

Question 3



This number line gets smaller by 4 as it goes to the left, so $10-4=6$ and $6-4=2$.

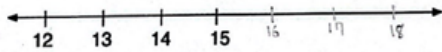
Question 4



The distance between 90 and 100 is the same as the distance between \square and 90, so $90-10=80$.

Question 5

Figure 4. Example of Jiho using relating units



Question 1



4, 6, and 8 increase by 2, and 8 to 9 increase by 1. The space similar to 1 and 2 is wrong.

Question 2



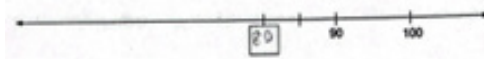
Considering the order 30, 20, 10, 0, the interval between 20 and 30 is 10, so the distance of repeating that interval twice is the position of 0.

Question 3



$14-10=4$. If you mark in the middle, it becomes $10-4=6$, and if you mark it one more time, it becomes $6-4=2$.

Question 4



The distance between \square and 90 is 5. This is because the distance between 2 and the distance between 90 and 10 are similar. $90-10=80$.

Question 5

Figure 5. Example of Yunseong using transforming units

결론 및 논의

본 연구에서는 길이 측정 상황의 수직선 과제에서 초등학교 저학년 학생들의 단위 추론 수준을 도출하고 각 수준에 따른 분포를 살펴보았으며, 각 수준별 사례와 특징을 알아보았다. 이를 바탕으로 측정 영역에서 단위 추론에 관한 지도 방향에 대하여 논의하면 다음과 같다.

첫째, 개방형 수직선을 활용한 길이 측정 상황에서 초등학교 2학년 학생들의 단위 추론은 4개의 수준으로 나타났으며, 학생들이 가장 많이 분포한 수준은 세 번째 수준인 단위 사이의 관계 알기 수준이었다. 이는 정규 수학과 교육과정을 이수하는 경우 학생들의

단위를 선택하고 이를 반복하거나 분할할 수 있는 수준의 단위 추론 능력을 갖게 됨을 의미하며 네 개의 카테고리 중 세 번째 수준으로, 상대적으로 높은 수준에 도달하게 된다. 단위 조정의 측면에서 보면 단위 사이의 관계 알기는 2수준 이상의 능력을 가지는 것으로 1단위와 주어진 단위 등 다양한 단위를 선택적으로 활용하고 관계를 이해할 수 있는 능력이다(Norton et al., 2015). 단위화, 단위 반복, 단위 분할의 개념들이 종합적으로 학생들의 단위 추론의 능력과 연결되어 있으므로, 학생들의 단위 추론은 한 과제에서만 나타나는 것이 아닌 다양한 과제를 해결하는 과정에서 지속적으로 나타나는 특성이 있었다.

둘째, 본 연구를 통해 첫 번째와 세 번째 사이의 불완전한 단위 추론 능력을 가진 학생들의 수준을 도출할 수 있었다. 즉, 두 번째 수준인 주어진 단위 반복하기 수준의 학생들은 단위를 찾고 분할의 필요성을 알고 있었으나 단위가 가진 원래 크기나 분할한 단위가 가진 크기에 관계없이 이 두 가지를 동일한 단위로 인식하여 문제를 해결하였다. 이 수준의 학생들처럼 완전하지 않은 단위 추론 능력을 가지고 있는 경우 이후 단위 추론과 관련한 후속 분수 연산, 비례 추론 등의 학습에서 어려움을 겪게 될 수 있다. 이는 다시금 추후 단위 추론을 활용할 수 있는 수학적 내용을 학습하는데 영향을 줄 수 있으므로 이 수준에 해당하는 학생들에 대한 추가 지도나 맞춤형 중재물의 활용이 필요함을 알 수 있다.

셋째, 길이 측정 상황에서 도출한 학생들의 단위 추론 수준을 바탕으로 각 수준에 맞는 학생들을 지도하기 위한 방안이 마련되어야 한다. 초등 1, 2학년에서는 국정으로 수학 교과용 도서들이 활용되는데 교과서와 익힘책을 기반으로 하여 유사하게 학습한 학생들일지라도 서로 다른 능력 수준을 가지고 있었다. 따라서, 1단위를 반복하는 학생에서부터 단위를 변환하는 학생까지 상이한 각 단계의 학생 모두가 현재의 수준을 보다 향상할 수 있도록 맞춤형의 교수학적 지원 프로그램이 제공될 필요가 있다. 이를 위하여 수업 시간에 추상적인 단위 추론의 개념을 퀴즈네어 막대와 같은 구체적 교구를 통해 시각적으로 탐구 및 탐색할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 예를 들어, 다양한 퀴즈네어 막대를 단위로 선정할 수 있는 자유를 주고 주어진 길이를 측정하는 과정을 통해서 다양한 단위가 가능하고 이들 사이의 연결성에 대해서 학생들이 배울 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 퀴즈네어는 수량화가 되어 있지 않아 학생들이 나름의 기준으로 주어진 길이에 단위를 부여할 수 있는 점에서 보다 유연한 단위 간의 변환관계에 대해서 탐구할 수 있다. 또한, 자유롭게 단위를 조작하고 이와 길의 측정 상황에서의 관계를 탐색할 수 있는 다이내믹한 공학도구를 활용하는 방법을 고안해볼 수 있다(Yeo & Webel, 2022). Dynamic Ruler를 활용한 Yeo와 Webel (2022)는 학생들이 스스로 길이를 측정하는 기준 단위를 드래깅을 이용하여 선택할 수 있도록 연속적인 단위 전환 과정을 학생들이 경험할 수 있도록 기회를 제시하였다. 이와 같이 실물 교구나 공학도구를 활용하여 학생들의 현재 수준에서 보다 높은 수준에 도달할 수 있는 구체적인 활동을 개발하고, 이러한 프로그램 개발을 통해서 초등학생들의 단위 추론에 관한 개념적 이해와 절차적 활용을 체계적으로 도와줄 수 있다(Yeo, 2021).

넷째, 개방형 수직선을 활용한 과제는 다양한 단위 추론 수준을 가진 학생들의 생각을 확인할 수 있는 유용한 도구로 활용될 수 있다. 특히, 학생들은 어림 전략, 도구 활용, 연산활용 등을 통해서 다양한 방법으로 개방형 수직선을 활용할 수 있었다. 이는 수직선이 사고를 발전시켜주고 측정에 대한 개념적 절차적 이해를 높여준다는 Jang과 Kim (2013), Kim (2022)의 연구 결과와 맥을 같이 한다. 기존에 제시되어 온 전형적인 수직선을 활용하여 단위 추론에 대한 능력을 살펴보는 것도 가능하지만, 개방형 수직선의 과제의 구조는 학생들이 자신이 활용하고 싶은 단위를 정하고 표현하게 하는 새로운 인식의 창으로서 역할을 하게 된다. 따라서, 개방의 정도에 따라서 학생들의 반응하는 정도의 차이에는 어떠한 차이가 있는지에 대한 후속 연구도 필요하다.

마지막으로, 가장 높은 단위 변환을 통해서 단위 간의 관계에 대해서 명확하게 이해하는 학생들은 측정의 단위에 대해서 가장 고차원적으로 사고하면서도 수 체계에서도 단위에 대한 이해가 높을 수 있다. 즉, 측정에서 높은 수준으로 사고한다면, 이후 학습하게 될 수와 연산에서 여러 자리의 수나 유리수의 개념으로 확장하여 사고할 수 있을 것으로 기대한다. 1, 2학년에서 자연수의 백의 자리 수 까지의 개념을 학습하게 되며 3학년에서는 네 자리 수는 물론 1보다 작은 단위를 가지는 수인 분수와 소수에 대해서도 학습하게 된다. 학생들이 수의 계열이 점점 확장되어 가는 변화의 상황에서도 단위만 조정되고 있음을 인식한다면 이후 학습하게 될 확장된 수체계에서도 용이하게 접근할 수 있을 것이다. 예를 들어, 분수의 한 가지 의미 중 하나인 측정으로서의 분수는 단위분수를 기준으로 해당하는 만큼 반복된 의미로 분수를 정의한다. 이와 같이 측정과 수와 연산 영역은 서로 밀접하게 연결되어 있다. 따라서, 향후 학생들의 단위 추론 수준에 따른 분수의 개념에 대한 지식이나 단위 조정 수준과 연결하여 어떠한 상관관계가 있는지에 대해 연구하는 것도 가능하다.

본 연구 결과에서 제시된 ‘단위 사이의 관계 알기’와 ‘단위 변환하기’를 구분하는 것은 문항 5의 풀이에 기인한다. 본 연구에서는 검사지 형태로 수집된 자료의 한계로 인하여 5와 10단위 사이의 관계를 인식하고 있으나 문제해결 과정에서 다양한 이유로 이를 반영하지 못한 학생들의 가능성을 배제하였다. 이는 학생 인터뷰 및 보다 장기적인 연구를 통해 보완할 수 있을 것으로 기대한다. 또한 본 결과는 2학년을 대상으로 한 연구 결과임을 고려할 필요가 있다. 이와 같은 단위 추론 수준은 학생들의 학습 내용과 학년에 따라 크게 영향을 받을 수 있다. 예를 들면, 교육과정에서 다루는 길이에 대한 내용 요소들은 1, 2, 3학년에 걸쳐 있기 때문에 학습한 내용에 따라서 반응할 수 있는 단위 추론 능력에 차이가 생길 수 있다. 따라서, 다양한 학년에게 개방형 수직선 과제를 적용해보고 현 상태에서 학생들의 가지고 있는 지식을 고려하여 단위 추론 능력의 차이를 살펴보는 후속 연구가 필요하다.

뿐만 아니라 본 연구에서는 학생들이 문제해결 과정을 검사지에 서술된 자료를 중심으로 수집하여 분석하였다. 물론, 학생들의 전반적인 길이 측정에 대한 단위 추론을 한눈에 파악하는데는 효과적이지만, 학생들이 문제해결 과정에서 보여 주는 여러 가지 생각을 알아보기 위해서는 구체적인 해결 과정에 대한 인터뷰나 실제 수업 장면에 대한 자료를 추가로 확보하여 학생들의 단위 추론에 관한 생각을 보완해 나갈 필요가 있다. 또한, 일부 지역의 2학년 학생들을 대상으로만 검사를 수행하여 초등학생들의 전반적인 개방형 수직선에 대한 추론 능력을 조사한 것이 아니므로 보다 다양한 지역의 많은 학생들의 자료 수집을 통해 수준이 더욱 세분화되거나 수준의 확장이 이루어질 수 있을 것이다. 본 연구의 제한점을 보완하여 개발된 분석틀이 보다 다양한 대상에게 적용되어 학생들의 단위 추론에 대한 이해를 교사들이 파악하는데 도움이 되고, 본 연구를 바탕으로 초등학생들의 단위 추론 능력을 신장시킬 수 있는 효과적인 프로그램이 개발되는데 기반이 되길 희망한다.

References

- Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140-146. <https://doi.org/10.5951/TCM.13.3.0140>
- Chernyavskiy, P., Kutaka, T. S., Keeter, C. L., Sarama, J., & Clements, D. H. (2023). *Modeling kindergarten students' problem-solving strategy sophistication for length-measurement: The hurdle model approach*. <https://doi.org/10.31234/osf.io/p4qjf>
- Jang, J. Y., & Kim, S. J. (2013). A study on using number lines in the measure area, focusing on the elementary mathematics curriculum. *Journal of Research in Curriculum Instruction*, 17(2), 297-321. <http://doi.org/10.24231/rici.2013.17.2.297>
- Ju, Y. H., & Kim, S. J. (2009). A study of underachieving students' error factors and teaching methods in measurement domain. *Research Institute of Curriculum & Instruction*, 13(4), 717-736.
- Kim, J. W. (2022). A comparative analysis on use of the number line in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, Singapore and the United States: Focused on concept of fractions and addition and subtraction of fractions. *The Korea Society of Elementary Mathematics Education*, 26(4), 283-310. <http://doi.org/10.54340/kseme.2022.26.4.1>
- Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). State University of New York Press.
- Lee, J. A. & Lee, S. J. (2022). Exploring fraction knowledge of the stage 3 students in proportion problem solving. *The Mathematical Education*, 61(1), 1-28. <http://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.1.1>
- Lee, J. Y. (2019). A study on introducing fractions in mathematics textbooks: Focused on stages of units coordination. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 23(3), 323-345.
- Lee, J. Y., & Pang, J. S. (2016). Reconsideration of teaching addition and subtraction of fractions with different denominators: Focused on quantitative reasoning with unit and recursive partitioning. *School Mathematics*, 18(3), 625-645.
- Lee, S. J., & Shin, J. H. (2020). Students' proportion problem solving with different units coordination stages. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 30(2), 245-279. <http://doi.org/10.29275/jerm.2020.05.30.2.245>
- Lehrer, R., Jashow, L., & Curtis, C. (2003). Developing understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). NCTM.
- Ministry of Education (2017a). *Mathematics 1-1*. Visang Education.

- Ministry of Education (2017b). *Mathematics 1-2*. Visang Education.
- Ministry of Education (2017c). *Mathematics 2-1*. Visang Education.
- Ministry of Education (2017d). *Mathematics 2-2*. Visang Education.
- Ministry of Education (2017e). *Mathematics 3-1*. Visang Education.
- Ministry of Education (2022). Mathematics curriculum. Bulletin of MOE No.2022-33 [Seperate Volume #8].
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Norton, A., Boyce, S., Phillips, N., Anwyll, T., Ulrich, C., & Wilkins, J. L. (2015). A written instrument for assessing students' units coordination structures. *IEJME-Mathematics Education*, 10(2), 111-136. <https://doi.org/10.29333/iejme/295>
- Pang, J. S., & Ji, H. E. (2009). A survey on the second and the third graders' reasoning ability of length. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 19(2), 321-340.
- Pang, J. S., Kim, S. K., & Choi, I. Y. (2012). A comparative analysis of the 7th and the current mathematics textbooks and workbooks on the measurement domain: Focused on the degree of guidance and key learning elements. *The Korea Society of Elementary Mathematics Education*, 16(2), 227-252.
- Park, J. Y. (2017). *The exploration of teaching directions of unitizing at the elementary mathematics* [Master's thesis, Gyeongin National University of Education].
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2004). Building blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 181-189. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.014>
- Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J., Van Dine, D. W., & McDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM*, 43, 667-680. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0326-5>
- Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Gearhart, M., & Haldar, L. C. (2013). Coordinating numeric and linear units: Elementary students' strategies for locating whole numbers on the number line. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(4), 235-258. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.812510>
- Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development*, 89(5), 1467-1484. <https://doi.org/10.1111/cdev.13068>
- Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and Individual Differences*, 3(1), 61-82. [https://doi.org/10.1016/1041-6080\(91\)90004-K](https://doi.org/10.1016/1041-6080(91)90004-K)
- Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.
- Yeo, S. (2021). Semiotic mediation through technology: The case of fraction reasoning. *The Mathematical Education*, 60(1), 1-19. <http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.1>
- Yeo, S., & Weibel, C. (2022). Elementary students' fraction reasoning: a measurement approach to fractions in a dynamic environment. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-27. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2025639>
- Yoo, J., & Shin, J. (2020). A fourth grade student's units coordination for fractions. *Education of Primary School Mathematics*, 23(2), 87-116. <http://doi.org/10.7468/jksmec.2020.23.2.87>

Authors' Information

Jukyung Park, Seoul Haenghyun Elementary School, Teacher, 1st Author.

Sheunghyun Yeo, Daegu National University of Education, Professor, Corresponding Author.