The Mathematical Education. Vol. 62, No. 4, 473-490
https://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.4.473

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

A construction of a time-speed function in the time-distance function of students with chunky reasoning

Lee, Donggun
Teacher, Jam-Il Highschool

*Corresponding Author: Donggun Lee (jakin7@hanmail.net)

ABSTRACT

Previous studies from domestic and abroad are accumulating information on how to reason students' continuous changes through teaching experiments. These studies deal with scenes in which students who make 'smooth reasoning' and 'chunky reasoning' construct mathematical results together in teaching experiments. However, in order to analyze their results in more detail, it is necessary to check what kind of results a student reasoning in a specific way constructs for the tasks of previous studies. According to the need for these studies, the researcher conducted a total of 14 teaching experiments on one first-year high school student who was found to make 'chunky reasoning'. In this study, it was possible to observe a scene in which a student who makes 'chunky reasoning' constructs an output similar to 'a mathematical result constructed by students with various reasoning methods(smooth reasnoning or chunky reasoning) in previous studies.' In particular, the student who participated in this study observed a consistent construction method of constructing the function of 'time-speed' from the function of 'time-distance'. The researcher expected that information on this student's distinctive construction methods would be helpful for subsequent studies.

Key words: average speed, chunky reasoning, time−distance function, time−speed function, teaching experiment

덩어리 추론을 하는 학생의 시간-거리함수에서 시간-속력함수 구성에 대한 연구

이동근
잠일고등학교 교사

*교신저자: 이동근 (jakin7@hanmail.net)

초록

국내외 선행연구들에서는 교수실험을 통하여 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론 방식에 대한 정보를 축적해가고 있다. 이들 연구에서는 연속적인 변화를 매끄러운 추론과 덩어리 추론을 하는 학생들이 교수실험에서 함께 수학적 결과물을 구성해가는 장면들을 다루고 있는데, 이들의 결과를 보다 세밀하게 분석하기 위해서는 특정 방식으로 연속적인 변화를 추론하는 학생이 이전 선행 연구들에서의 과제들에 대하여 어떠한 결과물을 구성해가는지 확인할 필요가 있다. 이러한 연구의 필요에 따라, 연구자는 덩어리 추론을 하는 것으로 확인된 고등학교 1학년 학생 한 명을 대상으로 총 14차시의 교수실험을 진행하였다. 본 연구에서는 덩어리 추론을 하는 학생이 '이전 선행연구에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다양한 학생들이 구성하였던 수학적 결과물'과 유사한 산출물을 구성해가는 장면을 관찰할 수 있었다. 특히 본 연구에 참여한 학생에게서 '시간-거리함수에서 시간-속력함수를 구성하는 일관된 구성 방식'이 관찰되었으며, 이러한 학생의 독특한 구성 방식에 대한 정보가 후속 연구에 도움이 될 것이라 기대하였다.

주요어: 평균속력, 덩어리 추론, 시간-거리함수, 시간-속력함수, 교수실험

Received August 28, 2023 **Revised** September 27, 2023 **Accepted** October 17, 2023
2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

서론

물체의 운동은 ‘거리, 시간, 속력’의 연속적인 변화와 그들 변수 사이의 관계로 나타내어질 수 있다. Boyer (1959)는 물체의 운동에서 속도가 변할 때 이동 거리가 증가한다는 것을 기하적 도형과 연결지어 다루는 장면에 주목하였다. Boyer (1959)는 물체의 운동에 따른 변화를 기하적인 연속성을 이용하여 연속적인 변화의 양적 규칙을 설명하는 과정을 소개하고 있는데, 특히 등속도 운동과 등가속도 운동에서 속도함수의 그래프 아래 넓이의 양적인 변화를 이용하여 물체의 운동에 따른 변화를 설명하는 장면이 나온다. 본 연구에서 언급한 ‘연속적인 변화’ 역시 물체의 운동에 따른 변화를 나타내는 변수인 ‘거리’, ‘시간’, ‘속력’을 이용하여 이들 사이의 관계로 설명되는 물체의 운동에 따른 변화를 뜻한다. Lee와 Shin (2017)이나 Lee (2021) 등의 국내 연구에서는 물체의 운동과 관련된 과제 상황을 중심으로 교수실험을 진행한 다음, 학생들이 연속적으로 변하는 두 변수들의 관계 속에서 변화를 어떻게 추론하고 표현하는지에 대한 정보를 제공하였다. 이때 물체의 운동에서 학생들의 ‘연속 변수들 사이의 변화 관계에 대한 이해’를 연구하기 위해서는, 더 근본적으로 학생들이 연속적인 변화를 어떻게 추론하고 표현하는지에 대한 연구가 필요하다.

이러한 측면에서 볼 때, 변화를 추론하는 방식에 대한 연구를 수행한 Castillo-Garsow (2012)의 연구는 본 연구에 시사해주는 바가 있다. Castillo-Garsow (2012)는 연속적인 변화에 대한 인식에 대하여 매끄러운 추론(smooth reasoning)과 덩어리 추론(chunky reasoning)을 이용하여 설명하였다. 매끄러운 추론은 연속적인 변화를 설명할 때 순간의 변화들을 이용하여 전체 변화를 추론하는 방식이며, 덩어리 추론은 구간을 쪼개어 구간들에서의 변화로 전체 변화를 추론하는 방식으로 볼 수 있다. 따라서 매끄러운 추론과 덩어리 추론 방식은 연속적인 변화를 관찰할 때 서로 다른 방식으로 표현될 수 있고, 추론 방식의 차이에 따라 학생들이 내놓는 수학적인 결과물에서도 차이가 발생할 수 있다.

국내에서는 Lee와 Shin (2017)의 연구에서 연속적인 변화에 대한 학생들의 설명 방식이 서로 다르게 나타나는 것을 드러낸 바 있다. Lee와 Shin (2017)은 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 진행한 교수실험을 통하여, 학생들이 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 따르는 운동에서의 변화를 설명할 때 아래와 같이 세 가지 다른 방식으로 설명하는 것을 관찰하였다.

▶ 한 점에서의 기울기의 변화를 이용하여 설명하는 방식

▶ 원점을 고정점으로 하여 그래프 위의 다른 점들과 선분을 구성하여 해당 선분들의 기울기로 변화를 설명하는 방식

▶ 전체 정의역 구간을 여러 개로 등분할 하여 각 구간에서의 끝점들을 이은 선분들의 기울기로 변화를 설명하는 방식

Lee와 Shin (2017)의 연구는 이들 각각을 ‘한 점에서의 기울기’, ‘누적 변화율’ 및 ‘구간 변화율’이라는 용어로 구분하여 설명하면서, 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론 방식에 대하여 더 관심을 가지고 연구할 필요가 있다고 주장하였다. Lee와 Shin (2017)의 연구 이후에, 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 서로 다른 학생들이 $y=x^2$ 또는 $y=2^x$ 을 따르는 물체의 운동과 관련된 과제 상황을 함께 해결해가는 장면에 대한 연구 결과들(Lee, 2017; Lee, Yang & Shin, 2017; Lee, 2021)이 소개 되었다.

이들 연구 결과들은, ‘연속적인 변화에 대한 추론 방식이 서로 다른 학생들’이 주어진 과제를 함께 해결해가는 과정에 대한 정보를 제공해주고 있다. 학교 수학 수업에서는 ‘연속적인 추론 방식이 서로 다른 학생들’이 함께 수업에 참여한다는 점을 고려할 때, 이들 연구 결과들은 현장 수업 장면에서 나타날 수 있는 실제적인 정보를 제공해주었다는 점에서 의미가 있다.

다만 매끄러운 추론 및 덩어리 추론과 관련하여 교수실험에 의한 실험적 근거에 의하여 이를 이론적으로 발전시켜가는 국내외 연구들(Castillo-Garsow et al., 2013; Ellis et al., 2020; Thompson & Carlson, 2017; Lee, 2017; Lee et al., 2017; Lee, 2021)을 살펴보면, 교수실험에 참여한 여러 명의 학생들이 함께 구성해가는 결과물을 대상으로 하여 분석하고 있다는 점에 주목할 필요가 있다.

이들 연구 결과물들은 학생들 사이의 상호작용을 통하여 과제를 해결해나가는 과정에서의 정보를 제공해주고 있다. 따라서 이전 연구들에서 제공된 정보들은 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 서로 다른 학생들의 정보가 혼재되어 있는 것으로 볼 수 있다. 이에 연구자는 혼재된 정보들 속에서 매끄러운 추론 혹은 덩어리 추론과 같은 특정한 추론 방식을 가지고 있는 학생들에 대한 정보를 구분하는 작업이 필요하다고 보았다.

이러한 연구의 필요에 따라, 연구자는 선행연구들에서 ‘학생들의 연속적인 추론 방식이 다양하다는 것이 보고되었다는 점’과 ‘이들이 함께 공동의 과제를 수행하는 과정에서의 정보가 소개되었다는 점’에 주목하였다. 즉, 연구자는 이전과 달리 이제는 앞서 언급

한 연구의 필요성에 따른 연구 수행이 가능해졌다고 판단하였다. Castillo-Garsow (2012) 및 Lee와 Shin (2017)의 연구 결과를 이용하여 덩어리 추론을 하는 학생을 선정할 수 있게 되었고, 이렇게 선정한 학생을 대상으로 Lee (2017a)와 Lee (2021)에서 적용한 과제들을 참고하여 교수실험을 진행하는 것이 가능해졌기 때문이다.

이에 연구자는 덩어리 추론을 하는 것으로 확인된 고등학교 1학년 학생 한 명을 대상으로 총 14차시의 교수실험을 진행하였으며, 다음과 같은 연구 문제를 중심으로 논의를 진행하였다.

■ 덩어리 추론을 하는 학생은 시간-거리함수 $y=x^2$을 따르는 물체의 운동에서 변화의 세기를 이용하여 어떻게 시간-속력함수를 구성하는가?

■ 덩어리 추론을 하는 학생은 시간-거리함수 $y=\dfrac{1}{3}x^3$을 따르는 물체의 운동에서 변화의 세기를 이용하여 어떻게 시간-속력함수를 구성하는가?

이론적 배경

변화의 정도를 표현하는 두 가지 방법

Lee (2017a)에서는 학생들이 물체의 운동을 '거리=시간×속력'이라는 표현을 이용하여 '거리, 시간, 속력'의 연속적인 변화와 그들 변수 사이의 관계로 나타내는 장면이 소개되었다. 이때 Lee (2017a)은 학생들이 문제 해결 과정에서 거리, 시간, 속력 중 미지수로 표현된 하나의 값을 다른 두 값을 통하여 구하는 대수적 관계로 이해하여 문제를 해결하고 있음을 언급하면서, 각각 연속적으로 변하는 양인 거리, 시간, 속력의 변수를 인식하지 못하고 있음을 지적하였다. 특히 해당 연구에서는 교수실험 과정에서 학생들이 거리, 시간, 속력의 변수들이 변하는 양이라는 것을 이용하여 '거리=시간×속력'라는 표현을 '거리=시간×평균속력'으로 수정하여 표현하는 장면을 소개하고 있다. 이 과정에서 학생들은 시간-거리함수에서 연속적으로 변하는 두 양 사이의 관계로 표현된 그래프에서 또 다른 변수인 속력의 변화가 설명 가능하다는 것을 표현하였다. 또한 이러한 속력의 변화 정도를 어떻게 나타낼 것인지 고민하는 장면 속에는 변화량과 변화율을 이용하여 학생들이 속력의 변화 정도를 설명하는 과정이 담겨 있다.

물체의 운동이 함수로 표현되었을 때 학생들이 변화의 정도를 표현하는 방법에는, '변화의 크기'와 '변화의 세기'라는 두 가지 방법이 관찰되었다(Lee et al., 2015). 이때 함수적 상황에서 '변화의 크기'는 함숫값 자체의 변화로 변화를 인식하는 것이라면, '변화의 세기'는 정의역의 변화와 함숫값의 변화를 함께 고려하여 변화의 정도를 인식하는 것이라 할 수 있다. '변화의 크기'와 관련된 예를 Ellis (2011)의 연구에서도 찾아볼 수 있다. Ellis (2011)는 $y=x^2$과 $y=2^x$에서의 변화를 비교하면서 덧셈적 사고와 곱셈적 사고로 설명하고 있는데, 학생들이 $y=x^2$에서의 변화를 설명하는 과정에서 $x=1,2,3,\cdots$을 순서대로 대입해가면서 함숫값 y가 $y=1,4,9,\cdots$로 변해가는 것으로 표현하는 장면이 있다. 이때 x 값이 1만큼씩 변하고 있기 때문에 결과적으로는 함숫값의 변화로 함수에서의 변화를 설명하는 것처럼 보이게 된다. 이와 같이 함숫값만의 크기 변화로 변화를 설명하는 것이 '변화의 크기'로 설명한 예로 볼 수 있다. 한편 '변화의 세기'와 관련된 예는 Lee 외 (2015)에서 살펴볼 수 있다. Lee 외 (2015)에서는 함수 $f(x)=x^2$을 따르는 함수적 상황을 제시한 과제에서, 서로 구간의 폭이 다른 두 개의 구간 $[1,2]$와 $[2,2.5]$을 제시한 다음, 변화의 정도가 더 큰 것을 묻고 있다. '변화의 크기' 입장은 $f(2)-f(1)>f(2.5)-f(2)$이므로 구간 $[1,2]$에서의 변화가 더 크다고 보아야 하지만, '변화의 세기' 입장은 $\dfrac{f(2.5)-f(2)}{2.5-2}>\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$이므로 구간 $[2,2.5]$에서의 변화의 정도가 더 크다고 설명하게 된다. Lee 외 (2015)에서는 변화의 정도를 양적으로 표현할 때 변화량을 변화의 크기로 연결 지었고, 변화율을 변화의 세기로 연결 지어 설명하였다. 본 연구에서도 학생들이 물체의 운동과 관련된 함수적 상황에서 변화의 정도를 '변화의 세기'인 변화율로 설명하는 장면을 다루고 있다.

연속적인 변화에 대한 추론

Hauger (1995)는 함수에 대한 변화율 지식의 유형을 총제적 변화율, 구간에서의 변화율, 한 점에서의 변화율로 구분하여 제시하였

다. 이는 학생이 변화의 정도를 인식함에 있어 변하는 구간을 총체적으로 보는지 아니면 구간 혹은 한 순간으로 인식하는지에 따른 구분으로 볼 수 있다. Castillo-Garsow (2012)와 Lee와 Shin (2017)의 연구도 학생들이 연속적인 변화를 어떻게 표현하는지 관찰한 연구이지만, 이들 연구는 국소적인 부분에서의 변화에 대한 인식에 근거하여 전체적인 변화를 설명하고 있다는 점에서 Hauger (1995)의 연구와 구분된다.

Castillo-Garsow (2012)는 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론과정을 덩어리적인 이미지로 변화를 인식하는 것과 매끄러운 이미지로 변화를 인식하는 방식의 두 가지로 제시하였다. 매달 1일에 TV 한 달 수신료로 2000원을 낸다고 할 때, 수신료를 처음 내기 시작한 순간부터 그 이후 10달 동안 지불한 수신료의 총 합을 묻는 과제를 예로 살펴보자. Castillo-Garsow (2012)는 이러한 과제에 대하여 학생들이 아래와 같이 서로 다르게 반응하는 것을 제시하였다.

▶ 시간의 변화를 이산적으로 보고 한 달, 두 달, 세 달과 같이 시간이 변해갈 때마다 2000원씩을 더해가는 방식으로 지불한 수신료의 합을 구하는 경우

▶ 시간의 변화를 이산적으로 보는 것은 동일하나 좌표평면에 수신료를 지불한 이후 몇 달째인지를 x 좌표로 표현하고 그 때까지 지불한 수신료의 총합을 y 좌표로 하여 점을 구성해서 좌표평면에 찍은 후에 그 점들을 오른쪽 위로 향하는 연속적인 직선으로 구성하는 경우

▶ 비연속적인 계단 형태의 그래프로 구성하여 제시하는 경우

Figure 1은 세 가지 방식에 대한 결과물을 대략적인 그래프로 제시한 것이다.

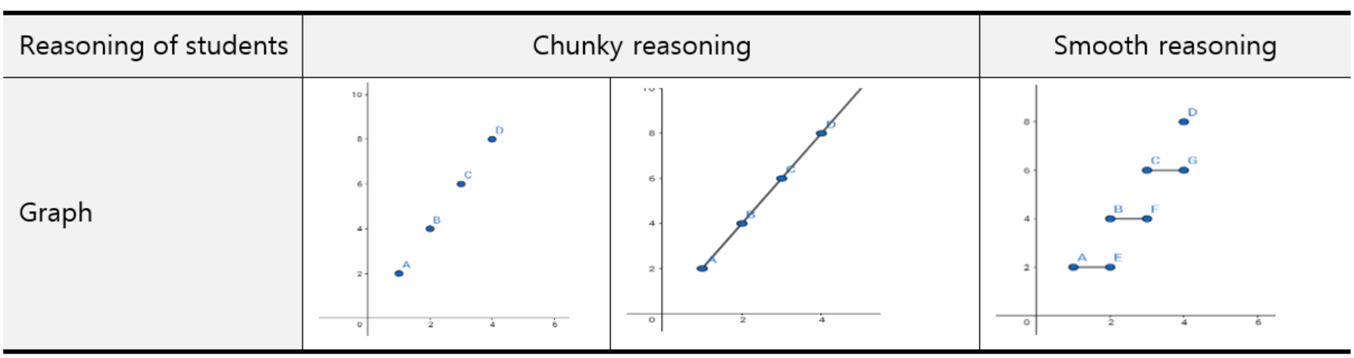

Figure 1. The graph results of chunky reasoning and smooth reasoning about the task of obtaining the sum of TV license fees.

한편 Lee와 Shin (2017)은 연속적인 변화를 담고 있는 함수적 상황을 그래프로 제시하였을 때, 구간을 소구간으로 쪼개는 방식에 따라 덩어리 추론을 하는 학생들의 설명 방식이 다양할 수 있음을 관찰하였다. Lee와 Shin (2017)에서 연구자는 덩어리 추론을 하는 학생들과 매끄러운 추론을 하는 학생에게 거리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 제시한 다음, 그래프를 이용하여 변화를 설명할 수 있는지를 물어보았다. 학생들은 모두 "거리함수 $y=\sqrt{x}$를 따르는 물체의 속력의 빠른 정도가 점점 느려진다."는 표현을 하였다. 그러나 자신들의 표현을 그래프를 이용하여 설명하는 방식에 있어서는 서로 다른 점이 관찰되었는데, 세 학생의 표현을 제시하면 다음과 같다.

S1 : 원점과 그래프 위의 점들을 이은 선분의 기울기들이 감소하고 있어요.

S2 : 소구간 마다 구간의 끝점들을 이은 선분의 기울기들이 감소하고 있어요.

S3 : 점마다 접선의 기울기가 감소하고 있어요.

Figure 2는 이들 세 학생이 자신들의 방식을 설명하는 과정에서 제시한 것을 Lee (2021)에서 재정리하여 학생별로 제시한 것이다.

Castillo-Garsow (2012)의 구분 방식에 의하면 S1과 S2는 연속적인 변화를 추론할 때 소구간들로 쪼개어 변화를 인식하는 학생들이었으며 덩어리 추론을 하는 학생들로 볼 수 있다. 반면 S3는 연속적인 변화를 추론할 때 매 순간의 변화를 인식하는 학생으로서 매

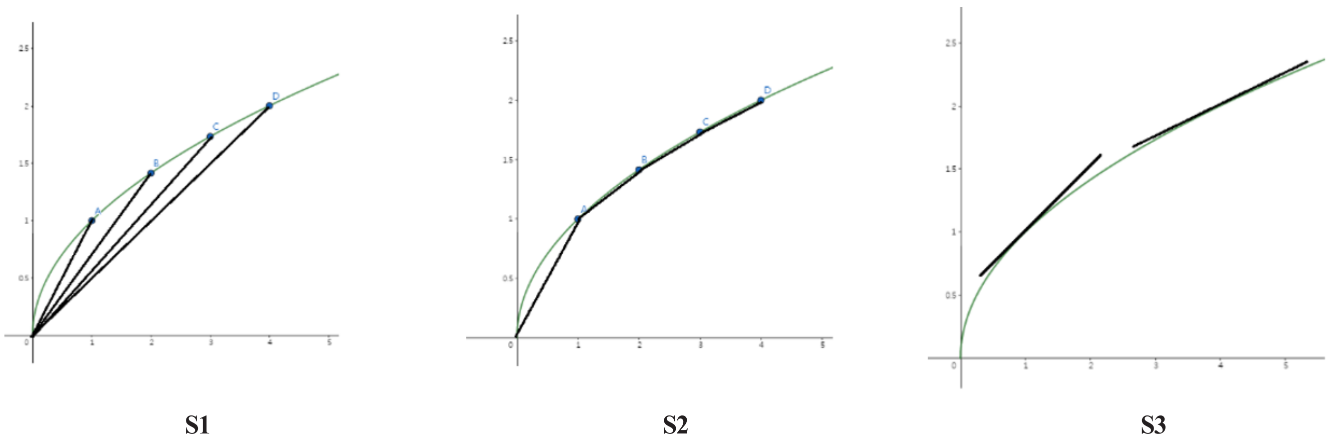

Figure 2. Student-specific explanatory data on the change of the graph of the time–distance function y=√x.

끄러운 추론을 하는 학생으로 볼 수 있었다. 그러나 이들 학생들 중 덩어리 추론을 하는 S1과 S2는 그래프를 이용하여 연속적인 변화를 설명하는 과정에서 쪼개는 방식을 두고 차이를 보여주었으며, 학생들이 보여준 방식의 차이는 Lobato 외 (2012)에서 물체의 운동을 관찰할 때 거리함수를 표로 구성하는 과정에서 변화를 누적적으로 인식하는 방식과 구간별로 인식하는 학생들이 있음을 지적한 것과 같은 맥락에서 이해할 수 있다.

지금까지의 살펴본 바에 의하면, 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론은 인식 방식에 따라 덩어리 추론과 매끄러운 추론(Castillo-Garsow, 2012)으로 접근할 수 있으며, Lee와 Shin (2017)의 연구에 의하면 덩어리 추론의 경우 소구간을 쪼개는 방식에 따라 S1방식과 S2방식으로 살펴볼 수 있음을 알 수 있었다. 이때 Castillo-Garsow (2012)의 덩어리 추론이나 Lee와 Shin (2017)의 S2 학생의 방식은 국소적인 구간에서의 변화에 대한 인식으로 전체적인 변화를 설명하는 학생들의 방식이 그래프로 표현된 것으로 볼 수 있으며, 이렇게 표현된 결과물 속에 담긴 학생들의 구성 방식에 대한 보다 세밀한 관찰이 필요할 것으로 보인다.

교수실험을 통한 연속적인 변화에 대한 국내 연구

Lee (2021)에서는 한국에서 연속적인 변화에 대한 학생들의 표현을 관찰한 교수실험 관련 연구들을 정리하여 제시하고 있다. 이들 중 본 연구를 이해하는데 필요한 연구들을 소개하고자 한다. Lee 외 (2015)은 고등학교 2학년 학생 세 명을 대상으로 8차시의 교수실험을 진행하였다. Lee 외 (2015)에서는 $y = x^2$을 따르는 물체의 운동에서 학생들이 변화를 설명할 수 있는 새로운 함수를 구성해가는 과정에 대하여 소개하고 있다. 이 과정에서 학생들은 변화의 정도를 '변화의 세기'를 이용하여 설명하고자 하였으며, 정의역을 구간의 폭이 1인 구간들로 등분할 하였다. 이후 학생들은 등분할 된 구간에서의 평균속력의 값을 구한 다음 구간에서의 평균속력의 값을 해당 구간에서의 함숫값으로 가지는 계단 형태의 새로운 그래프를 구성하였다. 또한 학생들은 이러한 방식에 근거하여 구간의 폭을 점차적으로 줄여가면서 계단 형태의 함수 그래프를 변형해갔으며, 최종적으로는 점들로 구성된 직선 형태의 그래프를 결과물로 구성하여 제시하였다. Figure 3은 Lee (2021)에서 Lee 외 (2015)에서의 학생들의 결과물을 재구성하여 제시한 그림이다.

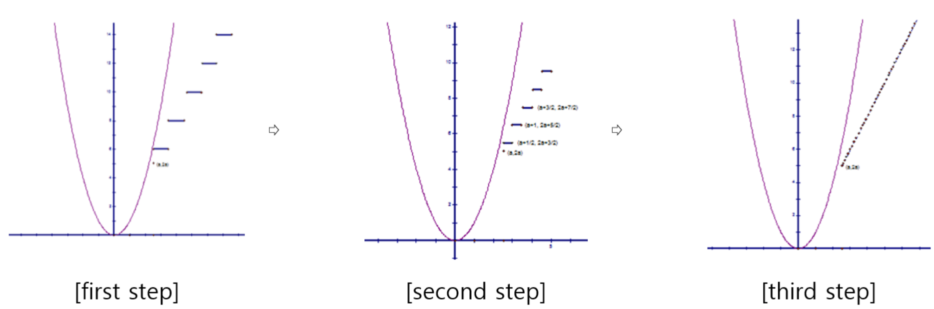

Figure 3. Stairway graphic construction steps for the variation of secondary functions.

Lee (2017a)에서는 S1방식, S2방식, 매끄러운 추론을 하는 세 명의 학생을 대상으로 20차시의 교수실험을 진행한 결과 중 일부를 분석하여 제시하고 있다. 해당 연구에서는 Lee 외 (2015)의 연구를 발전시켜서, 학생들이 $y=x^2$을 따르는 함수에서의 변화를 변화의 세기를 이용하여 설명하는 방식으로 $y=\frac{x^3}{3}$ 을 따르는 함수에서의 변화를 설명하는 장면이 소개되었다. 이 과정에서 S1방식과 S2방식과 같이 덩어리 추론을 하는 학생들은 Lee 외 (2015)에서의 학생들과 유사한 방식으로 구간에서의 평균속력을 계산하여 그 값을 구간에서의 함숫값으로 가지는 계단 형태의 그래프를 결과물로 구성하였다. 그러나 매끄러운 추론을 하는 학생은 이들과 달리 연속적으로 표현된 그래프를 결과물로 구성하여 제시하였는데, 이는 연속적인 변화에 대한 추론 방식의 차이가 수학적 결과물을 구성하는데도 영향을 줄 수 있음을 보여주는 사례이다. Figure 4는 Lee (2021)에서 Lee (2017a)에서의 결과물을 소개한 그림이다.

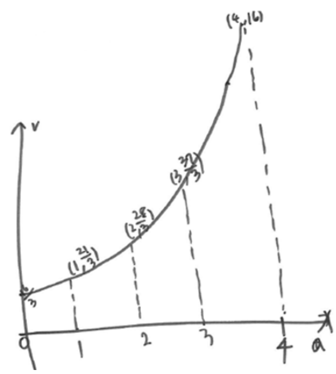

Figure 4. Graph of the mean velocity function showing the change of the mean velocity in the interval $[a, 4]$ of the distance function $y=\frac{x^3}{3}$

Lee (2017a)에 의하면 Figure 4에서 학생은 자신이 구성한 그래프 위의 점 $\left(1, \frac{21}{3}\right)$에 대하여 " 1초에서 4초까지의 평균속력이 $\frac{21}{3}$ " 이라고 답을 하였다고 제시하였다. 마찬가지로 자신이 구성한 그래프 위의 점 (4, 16)에 대하여는 " 4초 직전과 4초 직후에서의 평균속력"이라는 표현을 하였다. 해당 연구는 본 연구와 관련하여 덩어리 추론을 하는 학생들이 연속적인 변화를 설명할 때, '변화의 세기'를 이용하여 구간에서의 평균속력 값을 구간에서의 함숫값으로 가지는 계단 형태의 새로운 그래프를 구성할 수 있다는 정보를 제공하여 준다.

한편 Lee (2021)에서는 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 서로 다른 세 명의 학생들을 대상으로 진행한 20차시 교수실험 중에서, $y=x^2$의 변화를 설명한 경험을 가지고 있는 상태에서 지수함수 $y=2^x$를 따르는 물체의 운동에서의 변화를 설명하는 과정에 대한 정보를 제시하고 있다. 특히 Lee (2021)의 연구에서는 S2방식으로 변화를 설명하는 학생을 중심으로 결과물이 구성되어가는 과정을 소개하고 있다는 점에서 본 연구를 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

이처럼 연속적인 변화에 대한 학생들의 표현을 관찰하는 교수실험이 진행되어왔고 후속 연구에 기여할 수 있는 정보를 제공하여 왔으나, 해당 교수실험들은 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 서로 다른 학생들을 함께 모아서 교수실험을 진행하였다는 점에 주목할 필요가 있다. 이는 학생들의 연속적인 추론 방식의 차이가 있음을 드러내기 위한 과정 중에서의 연구였기 때문으로 보이며, 이제는 학생들의 연속적인 추론 방식의 차이에 대한 정보가 축적된 만큼 덩어리 추론 방식 혹은 매끄러운 추론 방식의 학생에 대하여 심도있는 관찰이 가능해졌음을 보여준다.

연구 방법 및 절차

연구 참여자

연구 참여자는 교수실험 진행 기준으로 연구자가 소속된 서울 시내 고등학교에 재학 중인 1학년 학생이었다. 연구자는 해당 학생의 담임교사이자 동아리 담당 교사로서 학생을 관찰할 시간을 가질 수 있었다. 일반계 고등학교에서는 교사들이 학생의 학교 생활과 교과 수업 및 동아리 활동으로 구분하여 학생을 만나게 된다. 담임교사는 학생의 학교 생활을 담당하고 교과 담당 교사는 교과 수업 때 학생을 만나며, 동아리 담당 교사는 1년에 34시간 정도의 동아리 활동 시간에 학생을 만나게 된다. 물론 모든 담임교사는 자신의 교과 수업을 동시에 담당하고 또 대부분 동아리 활동 담당 교사를 담당하기 때문에 경우에 따라서는 본 연구에 참여한 학생과 연구자와의 관계처럼, 한 명의 교사가 특정 학생의 '담임교사, 교과 담당 교사, 동아리 담당 교사' 역할을 동시에 담당하는 경우도 있다.

해당 학생은 전국단위 학력평가의 수학 과목에 대하여 1등급에서 9등급까지의 9개의 등급으로 분류하는 기준에 따랐을 때, 2등급이 나온 학생으로서 해당 학생의 지필고사에 따른 학업 성취도는 높은 것으로 볼 수 있다. 또한 평소 수학 문제 해결시에 계산 속도도 빠른 학생으로 보여졌다. 다만 본 연구에서는 연구 참여자 선정 시 학업 성취나 계산 능력을 고려하지는 않았다. 한편 본 연구에 참여한 학생은 문제 해결과정에서 계산을 통하여 답이 구해지더라도 자신이 그러한 과정을 설명하는데 있어서 확실하지 않으면 '잘 모르겠다.'라고 표현하는 학생이었으며, 자신이 상대에게 표현할 수 있을 때에야 비로소 '이해했다.'라고 표현하는 학생이었다.

연구자는 2021년에 '수학 개념 탐구 동아리'를 개설하였고, 연구참여 학생을 포함하여 총 6명의 학생이 동아리에 신청하여 활동하였으며, 이들 6명을 대상으로 Castillo-Garsow (2012)에서 제시되었던 과제와 Lee와 Shin (2017)에서 제시된 과제를 수행하였다. 2021년 5월 14일에 수행한 Lee와 Shin (2017)의 과제에 대하여 연구 참여자는 S2방식의 산출물(선행연구들에서는 구성 과정에서 학생이 제시한 결과를 '수학적 결과물' 혹은 '결과물'로 칭하였으나, 본 연구에서는 학생이 구성 과정에서 연구자에게 제시한 결과를 '산출물'로 표현하기로 한다. 이는 본 연구에서 학생이 구성과정에서 제시한 결과의 경우 수학적 용어나 개념과 다른 '학생만의 고유한 언어'로 제시한 경우들까지 포함하여 다루고 있기 때문이다. 다만, 이전 선행연구들에서 '수학적 결과물' 혹은 '결과물'로 표현한 것은 그대로 인용하였다.)을 제시하였고, 2021년 6월 4일에 수행한 Castillo-Garsow (2012)의 과제에 대하여는 Figure 1에서의 직선으로 표현된 덩어리 추론 결과물과 같이 점을 찍은 다음 이러한 점들을 직선으로 이어서 표현하는 반응을 보여주었다. 이러한 결과물에 근거하여 연구자는 덩어리 추론과 S2방식의 반응을 보여준 연구 참여자에게 연구 참여 의사를 확인해서, 14차시의 교수실험을 진행하게 되었다. 다만, 이때 연구 참여 학생을 덩어리 추론을 하는 학생으로 보았다는 표현은, '연구자가 보기에 선행연구에 근거하여 덩어리 추론을 하는 학생으로 볼 수 있다는 것'이지, 실제 학생이 덩어리 추론만을 사용한다는 것을 뜻하지는 않는다. 한편 연구에 참여한 학생은 12차시의 교수실험에서 자신이 $y = x^3$의 그래프를 그려본 경험이 없다고 하였으며, '미분', '적분', '극한' 등의 용어를 들어본 적이 없다고 답하였다. 즉, 본 연구에서 제시한 학생의 구성 산출물은 학생이 '삼차함수', '미분', '적분', '극한' 등에 대한 사전 지식이 없는 상태에서 구성한 것으로 볼 수 있다.

연구에서 제시된 과제

연구자는 최초 교수실험 수행 이전에 수학교육 현장 전문가 1인과 수학교육 이론 전문가 1인과의 논의를 거쳐 Lee (2021)에서의 과제를 교수실험에 적용할 기본 과제로 선정하였다. 이는 본 연구가 Lee (2021)의 연구에 기초하여 덩어리 추론을 하는 학생의 구성 과정에 대한 정보를 수집하는데 있었기때문이다. 다만 최초 과제를 Lee (2021)에서의 과제로 설정하기는 하였지만, 교수실험의 특성상 연구 참여 학생의 반응에 따라 적용 여부가 달라질 수 있고 적용하는 과제의 순서가 조정될 수도 있다. 또한 학생과의 활동에서 제기된 문제 상황들에 따라 새로운 과제가 제시될 수도 있다. 본 연구에서의 교수실험에서는 총 10개의 과제가 이용되었는데, 1번 과제는 Lee (2021)에서 소개한 교수실험에서 6번째로 이용되었던 과제로서 당시 교수실험에서 시간-거리 함수를 다루는 과제로서는 처음으로 제시된 과제였다. 2번과 3번 과제는 Lee 외 (2015)와 Lee (2017a)에서 다루었던 과제였다. 연구자는 해당 과제를 통하여 연구 참여 학생이 변화의 정도를 '변화의 세기'를 이용하여 구성하는 경험을 제공하고자 하였다. 8번과 9번 과제는 Lee (2021)에서

다루었던 과제로서 시간-거리 함수에서 시간-속력 함수를 구성한 이후 학생들에게 시간-속력 함수에서 시간-거리 함수를 구성하는 경험을 제공하는 과제였다. 10번 과제의 경우도 Lee (2017a)에서 소개된 과제로서 $y = x^2$ 의 변화를 설명할 수 있는 산출물을 구성한 다음 $y = \frac{x^3}{3}$ 에서는 어떻게 변화를 설명하는지 관찰할 수 있는 과제였다. 특히 Lee (2017a)의 연구에서는 $y = x^2$ 의 변화를 설명하는 산출물이 학생에게서 반복적으로 관찰 가능한 지식으로 구성된 것인지 확인할 수 있는 과제로 활용되었다. 이와 같이 1, 2, 3, 8, 9, 10번의 과제는 선행 연구에서 이용되었던 과제를 본 연구에서의 교수실험에 적용한 과제라면, 그 외의 4번, 5번, 6번, 7번의 과제는 본 연구에서 이전 교수실험에서 파생된 과제이었다. 해당 과제들은 이전 차시의 교수실험 과정에서 연구자와 연구 참여 학생 사이의 합의에 의하여 제시되기도 하였고, 차시 종료 이후 연구자가 다음 차시 교수실험을 준비하기 위하여 분석하는 과정에서 제시하게 된 과제이기도 하였다. Table 1은 본 연구의 교수실험에서 이용된 과제를 차시별로 구분하여 제시한 것이다.

참고로 과제에 대한 학생의 활동은 사전에 학생이 휴대한 스마트 폰에 내재된 계산기를 이용할 수 있다고 하였으나, 학생은 계산기를 이용하기 보다는 직접 계산하려 하였다. 연구자는 연구 참여 학생이 과제에 따라 분수에 대한 거듭 제곱을 반복적으로 수행해야하는 번거로움이 있음에도 학생의 방식을 존중하여 계산 시간을 충분히 제공하는 방식으로 교수실험을 진행하였다. 다만 학생이 초반에 소수를 이용하여 계산하려 하였을 때 연구자는 학생에게 직접 계산할 거면 분수로 계산하는 것이 좋을 것 같다는 의견을 제시하였으며, 이는 결과적으로 해당 학생이 분수 계산을 수행하면서 자신이 수행하는 계산 속에서 규칙을 찾아내는 기회를 제공하는 역할을 하였다.

Table 1. List of tasks by round used in the teaching experiments.

Round	Date	Task
1	2021.12.16	[Task 1] Draw a graph of $y = x^2$. [Task 2] Suppose an object moves along $y = t^2$ when the distance traveled over time t is y. For the change in motion of this object, choose which section has the greater change in motion in intervals $1 \le t \le 2$ and $2 \le t \le 2.5$ and explain why. [Task 3] For the motion of an object in Task 2, draw a graph showing the speed of the motion of the object in Section $0 \le t \le 2$ and explain why.
2	2021.12.20	Same as the first round
3	2021.12.21	[Task 4] For the motion of an object in Task 2, draw a graph showing the velocity of the motion of the object in Section $0 \le t \le 2$ and explain why. In particular, explain the results of your consideration focusing on how to solve the part where the jump occurs in the graph of time and speed drawn in the last lesson.
4	2021.12.22	[Task 5] The student speculated that if the width of the section was construed as limitless among the results of the previous task 4, the appearance of the broken stair case of the speed function would disappear and appear as a straight line. Organize and express your current thoughts on guesses, and think about how to check the guesses.
5	2021.12.30	[Task 6] Consider what 10 means in the motion of an object, which is the result of substituting $x = 5$ in the time–speed function $y = 2x$ constructed during the activity process according to Task 5.
6	2021.12.31	[Task 7] Consider how you can find information about the distance an object has traveled in the motion of an object along the time–speed function $y = 2x$, and organize the found 'information about the distance traveled' in an equation.
7	2022.01.03	Same as the 6th round
8	2022.01.04	Same as the 6th round
9	2022.01.07	Same as the 6th round
10	2022.01.10	[Task 8] Construct the information about the distance an object has traveled in the motion of an object along the time–speed function $y = 2x$ as a function of time–distance.
11	2022.01.11	[Task 9] Explain the commonalities and differences between the motion of an object following the time–speed function $y = 2x$ and the motion of an object following the time–speed function $y = 2x + 1$ with the motion of the object.
12	2022.01.12	[Task 10] Construct a time–speed function in the motion of an object that follows the time–distance function $y = \frac{1}{3}x^2$.
13	2022.01.13	Same as the 12th round
14	2022.01.14	Same as the 12th round

교수실험

교수실험은 학습자가 수학 개념을 구성해가는 활동에 대한 지속 가능한 모델을 확립하기 위한 연구 방법이다. 교수실험은 기존의 수업방식이나 교육과정에 의한 구속을 받지 않지만, 선행연구 자료를 중요한 자료로 참고하기 때문에 학습자에게 제시되는 상황 대부분은 기존 교육과정일 가능성이 높다. 또한 교수실험 과정은 미리 예견된 계획에 의하여 진행되지 않고 과제에 대한 학생의 반응에 따라 구성되기 때문에 실험적인 성격이 강하다.

교수실험에서는 연구자 간의 협의 하에 최초 과제를 선정하게 되며, 이후부터는 실험 참여 학생과의 대화나 행동 방식에 의하여 단계적으로 과제를 구성하여 제시하는 방식으로 진행한다. 본 연구에서의 교수실험에서도 매 차시 실험 종료 이후 ‘진행 중 분석’ 과정을 거쳐 연구자들 사이의 협의에 의하여 다음 실험을 진행하였다. 즉, 교수실험은 피 실험자의 반응과 연구자들 간의 일치된 합의 과정에 따른 다음 과제의 투입이 반복적으로 이루어지면서 진행된다(Glasersfeld, 1995, p. 46).

‘교수실험 진행→진행 중 분석→다음 차시 과제 결정’이라는 순환과정의 반복을 거쳐 교수실험이 종료되면 연구자는 최종적으로 전체 교수실험에 대한 자료(학생 반응지, 연구자간 회의 일지, 교수실험 영상 및 전사자료)를 이용하여 종합적인 분석을 하게 되며 이러한 과정을 회고분석이라고 한다. 회고분석을 거쳐 연구자는 연구 주제와 관련된 의미 있는 시사점을 찾아내게 된다(Steffe & Thompson, 2000, 2020에서 재인용).

본 연구에서는 덩어리 추론을 하는 것으로 보이는 고등학교 1학년 학생 한 명을 대상으로 총 14차시(차시 당 실험 시간은 70분 내외)의 교수실험을 진행하였다. 교수실험은 겨울 방학 기간에 주로 매일 아침 7시에 Zoom을 이용하여 온라인 상에서 진행하였다. Zoom을 이용하게 된 배경은 COVID-19 시기에 학교 수업에서 온라인 수업 툴로 Zoom을 이용해왔기 때문에 연구자와 연구 참여 학생 모두에게 익숙하다는 점을 고려하였다. Zoom으로 교수실험을 진행할 때, 세 개 혹은 네 개의 기기로 접속을 하였다. 학생이 접속하는 기기가 두 개였는데 하나는 학생 본인의 얼굴이 나오게 하였고 다른 하나는 학생의 활동지가 나오도록 하였다. 연구자가 접속하는 기기도 두 개였는데, 하나는 연구자의 얼굴이 나오는 것이었고 다른 하나는 Zoom 전체 화면을 녹화하는 기기였다. 다만 기기의 접속 상태에 따라서 네 개의 기기 중 일부가 사용되는 경우도 있었으며, 그러한 경우에도 학생의 활동지 장면과 연구자의 모습이 담긴 장면은 항상 녹화되었다.

자료 수집 및 분석 방법

Zoom으로 진행한 교수실험은 모두 녹화되었고, 녹화된 영상에 근거하여 14차시의 교수실험 자료를 전사하였다. 전사된 자료는 1차적으로 차시별로 10분 단위를 기준으로 대화를 구분하여 표로 정리하였으며 각 대화 문구 마다 시작 시각을 표시하였다. 전사자료의 1차 정리 이후 코딩을 진행하였다. 코딩은 대화 문구마다 ‘차시, 타임구간의 시작값, 연구자와 학생의 구분, 질문과 답 구분’와 같은 네 개의 정보를 기준으로 코딩화 하였다. 예를 들어 2차시 교수실험에서 연구자가 학생에게 질문을 한 것이고 질문의 시작 시점이 11분 20초였다면, 해당 문장 말미에 [2, 11:20, T, Q]로 코딩한 결과를 표시하였다. 타임 구간의 시작값을 기록한 것은 대화 과정에서 다음 대화가 이어지기까지 고민하거나 활동을 진행한 시간에 대한 정보를 제공해줄 수 있었다. 한편 연구자와 학생의 구분과 질문과 답에 대한 구분은 전사록을 통하여 연구자가 의사소통에 대한 내용과 흐름을 시간의 흐름에 따라 파악하는데 도움이 되었다. 전사와 코딩 작업이 끝난 이후 해당 자료와 학생이 활동한 활동지 및 진행 중 분석 과정에서 연구자가 고민한 현장 노트들을 수합하여 회고 분석 자료로 활용하였다. 또한 영상자료를 통하여 학생의 비언어적인 표현(제스쳐, 표정)에 대한 정보도 수집하였다. 이러한 자료들에 근거하여 연구자는 교수실험 중에서 연구에 참여한 학생이 산출물을 구성하는 과정에서 자신이 구성한 산출물을 수정하거나 재구성하는 것에 대한 정보들을 수집할 수 있었다.

본 연구에서는 이전 Lee (2017a)의 연구에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다양한 학생들이 시간-거리함수에서의 변화를 설명할 수 있는 산출물을 구성해가는 과정과 비교하여 덩어리 추론을 하는 학생이 유사한 과제에 대하여 어떠한 산출물을 구성해가는지를 중심으로 분석하였다. 또한 Lee (2017a)의 연구를 발전시킨 Lee (2021)의 연구를 참고하였다. 이와 같이 본 연구에서는 덩어리 추론에 대한 Castillo-Garsow (2012)의 논의와 Lee (2021)에서 소개한 교수실험에서의 산출물의 구성 과정에 대한 정보를 본 연구에서의 중요한 분석틀로 활용하여 교수실험 결과를 분석하였다.

결과 및 분석

변화의 세기를 이용하여 $y = x^2$을 따르는 물체의 운동에서의 변화 표현

학생은 2차시 까지의 과정을 거친 이후, 시간-거리함수 $y = x^2$에서의 변화를 설명하기 위해서 구간의 폭을 1로 하여 등분할한 여러 구간들에서의 평균속력값을 구하였다. 또한 Figure 5와 같이 구간들에서의 평균속력값을 그 구간에서의 함숫값으로 대응시킨 새로운 계단 형태의 그래프를 구성하였다. 이후 학생은 자신이 구성한 새로운 계단 형태의 그래프를 이용하여 시간-거리함수 $y = x^2$의 변화를 “구간들에서의 평균속력 값들이 점점 커지고 있다.”는 표현으로 설명하였다. Figure 5는 3차시 이전에 학생이 구성한 계단 형태의 산출물을 나타낸 것이다.

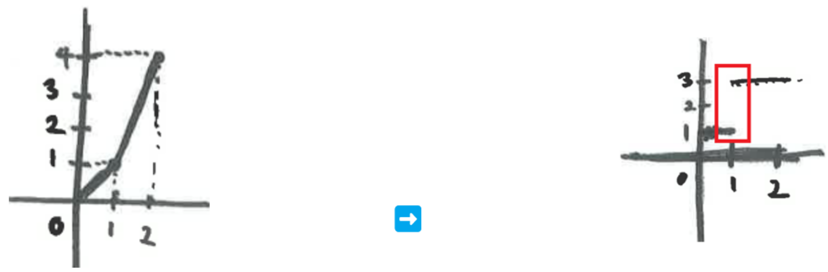

Figure showing the change in the slope of the line segment with the width of the section as 1

Stairway figure showing the change in the average speed value when the width of the section is set to 1

Figure 5. Mathematical deliverables in the form of stairs constructed by the student prior to the 3rd round.

Figure 5에서 학생이 구성한 계단 형태의 산출물은 시간-거리함수 $y = x^2$로 표현된 물체의 운동을 해석하기 위하여 학생의 고유한 표현으로 나타낸 산출물이라는 점에서 주목할 필요가 있다. 물론 이러한 산출물은 기존의 수학적 표현과는 차이가 있다. 학생은 구간에서의 평균속력에 해당하는 값을 구간에서의 함숫값으로 대응시킨다고 표현하면서, 구간의 양 끝점에서 어떻게 대응이 되는지에 대하여는 고민하는 모습을 보이지 않았다. 이러한 학생의 반응을 고려하여 본 연구에서는 ‘계단 형태의 그래프’로 표현하였다. 이는 점으로 표현되는 대응관계가 아니라 ‘정의역의 구간과 치역의 한 원소’가 대응되는 관계로 읽어야하기 때문에 기존 수학과 구분되는 학생만의 독특한 표현이지만, 연구자는 학생의 표현에 대하여 Hauger (1995)의 함수에 대한 변화율 지식의 유형 중에서 구간에서의 변화율 또는 Lee (2021)에서의 S2학생의 표현과 맥락상 통하는 부분이 있다고 판단하였기에 학생의 표현에 근거하여 교수실험을 이어 갔다. 한편 학생이 구성한 산출물은 Castillo-Garsow (2012)의 과제에서 학생이 구성한 계단 형태의 결과물과 구분할 필요가 있다. Castillo-Garsow (2012)의 과제에서 제시된 계단 형태의 결과물은 smooth reasoning을 하는 학생이 구성한 결과물로서 실제 점프가 발생하는 현상에 대하여 계단 형태의 그래프로 설명한 것이라면, 본 연구에서 학생이 구성한 계단 형태의 산출물은 실제 연속적으로 변하고 있는 현상을 점프가 발생하는 계단 형태의 그래프로 설명한 것이기 때문이다. 연구자가 보기에 3차시까지의 교수실험에서 ‘학생이 평균속력 값을 구해서 구간에서의 함숫값으로 대응시키는 과정’은 학생이 구간 내부에서의 순간적인 변화들을 고려하지 않고 구간을 하나의 덩어리로 본 다음 덩어리들을 대표하는 값들을 구한 것으로 보였다. 이는 Thompson (1994)에서 학생이 65mph를 표현할 때, 순간속력이 65mph이라고 설명하지 않고, 한 시간에 65마일을 이동한 것으로 표현한 것과 유사한 장면으로 볼 수 있다.

3차시에서 연구자는 학생이 구성한 계단 형태의 그래프를 보면서, 학생에게 Figure 5에서 표시된 부분과 같이 점프가 일어나는 부분에 대한 문제를 어떻게 해결할 것인지 질문하였다. 즉 교사는

“실제 물체의 운동은 연속적으로 빨라지고 있는데 학생이 구성한 산출물로 해석을 하면 툭툭 끊어지면서 평균속력이 빨라지는 것으로 해석된다. 이를 어떻게 생각하는가?”

라는 질문을 하였다.

3차시 교수실험에서 학생은 교사의 질문 이후 구간의 폭을 1에서 1/2와 1/4로 줄여가면서 평균속력 값을 구간에 할당한 새로운 계단 형태의 그래프를 산출물로 구성하게 되었다. 특히 이 과정에서 학생은 구간의 폭을 반으로 줄였을 때, 이전 계단 형태의 그래프에서 점프가 발생한 부분의 중간에 새로운 계단 판을 끼어 넣는 방식으로 새로운 계단 형태의 그래프를 구성하였다고 답하였다. Figure 6은 학생이 구간의 폭을 줄여가면서 새로 구성한 계단 형태의 그래프를 구성한 산출물을 제시한 것이다. 그래프에서 가로축은 시간이고 세로축은 거리이다. 이때 빨간색 그래프는 구간의 폭이 1일 때이고, 구간의 폭이 1/2인 것은 검정색으로 구간의 폭이 1/4일 때는 파란색의 계단 형태 그래프로 표현되어있다. 학생은 빨간색, 검정색, 파란색의 순서로 계단 형태 그래프를 구성하였다.

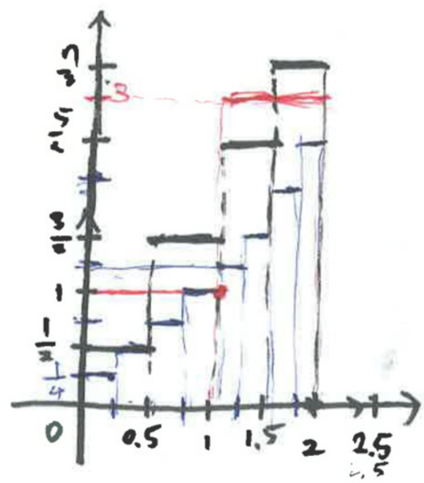

Figure 6. Results of constructing a newly constructed stair-like graph while reducing the width of interval.

또한 학생은 이처럼 구간의 폭을 점점 줄여 나가게 되면 끊어져서 점프가 일어나는 곳들이 촘촘하게 보여지게 되고, 결과적으로 하나의 직선처럼 보이게 될 것이라는 추측을 제시하였다. 연구자가 보기에 학생의 구성방식은, 학교 수학 수업에서 미분 개념 학습을 할 때와 차이가 있어보였다. 학교 수학 수업에서 미분 개념 학습은 한 점에서의 순간변화율 $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$을 이용하여 전체 도함수 $y = f'(x)$를 구성하는 방식이라면, 본 연구에서의 학생은 $y = x^2$의 변화를 설명하기 위하여 전체 상황에서의 변화에 대한 정보를 담고 있는 계단 형태의 그래프를 구성한 다음 이 계단 형태의 골격 안에서 점점 촘촘하게 틈을 채워가는 방식으로 구성해가고 있기 때문이다. 즉, 점들이 모여서 직선이 되는 것이 아니라 계단 형태의 그래프의 틈이 점점 채워져서 직선 형태로 변해가는 것으로 구성하였다는 점에서 차이가 있어보였다.

4차시 교수실험에서는 3차시 교수실험 말미에 학생이 제시한 추측에 대하여 탐구하는 과제를 제시하였다. 과제에 대하여 고민을 하던 과정 중에 학생은 구간의 폭을 1, 1/2, 1/4, 1/8로 조정해가면서 각 구간에서의 중점들이 하나의 직선 위에 존재한다는 것을 발견하였다. 그러면서 학생은 “구간의 폭을 반으로 줄이면 이전 줄이기 전 계단 형태의 그래프에서 계단 사이 틈에 새로운 계단 판이 채워지는 방식으로 새로운 계단 형태의 그래프가 그려지게 되는데, 그렇게 점점 틈이 채워진다고 하였을 때 구간의 중점들이 하나의 직선 위에 존재하는 것 같다.”고 표현하였다. 그러면서 학생은 자신이 구성한 최종 산출물에 대하여 수많은 점들이 모여서 $y = 2x$과 같은 직선으로 보이기는 하지만 각 점들은 아주 작은 구간을 대표한다고 표현하였다. Figure 7은 학생이 3차시 말미에 자신이 추측한 것에 대한 탐구 산출물로 제시한 것으로서, 시간-거리함수 $y = x^2$에서의 변화를 설명할 수 있는 새로운 산출물 $y = 2x$의 그래프를 제시한 것이다. 그래프에서 가로축은 시간이고 세로축에 대하여는 학생은 속력이라고 표현하였다. 다만 이때 학생은 자신이 표현한 속력에 대하여 아주 작은 구간에서의 평균속력 값이라고 하였다.

이상과 같이 학생이 구성한 산출물은 Lee (2017a)에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다양한 학생들이 함께 구성한 산출물과 유사한 결과로 보인다.

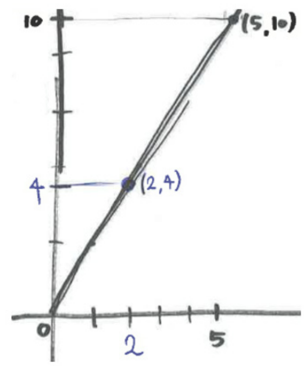

Figure 7. Graph of the final output $y=2x$ that explains the change in the time–distance function $y=x^2$

변화의 세기를 이용하여 $y=\frac{1}{3}x^3$을 따르는 물체의 운동에서의 변화 표현

4차시 교수실험 이후 학생은, 5차시에서 9차시까지를 통하여 '시간-거리함수 $y=x^2$의 변화를 설명하기 위하여 구성한 $y=2x$에서 $x=5$에서의 함숫값의 의미'가 무엇인지 고민하였다. 이를 통하여 학생은 시간-속력함수 $y=2x$에서 시간-거리함수를 구성하는 과정을 거쳤다. 또한 10차시에서 11차시까지의 교수실험에서는 시간-속력함수 $y=2x$와 시간-속력함수 $y=2x+1$를 물체의 운동과 관련지어 해석해보는 경험을 하면서 상수항이 물체의 처음 출발점에서의 초기 속력의 의미를 가지고 있다는 것을 표현하였다. Lee (2017b)에서는 학생들이 시간-거리함수에서 상수항의 의미를 물체의 운동과 연계하여 출발점의 위치로 설명하는 장면을 소개하고 있는데, 본 연구에 참여한 학생은 시간-속력함수에서의 상수항의 의미를 물체의 운동에서 초기 속력으로 표현하였다는 차이가 있다. 이후 연구자는 12차시에서 학생에게 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$의 변화를 설명하는 과제를 제시하였다. 이 과제는 Lee (2017a)와 Lee (2021)에서도 소개된 과제이다. Lee (2021)에서는 연속적인 변화에 대한 추론방식이 다양한 세 명의 학생을 대상으로, 시간-거리함수를 제시할 때 이차함수를 거쳐 삼차함수를 제시한 이후 지수함수까지 제시하여 교수실험을 진행하였다. 이 과정에서 Lee (2017a)에서의 교수실험을 소개하고 있는데, Lee (2017a)에서는 시간-속력함수 $y=x^2$에서 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$를 구성한 이후, 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수 $y=x^2$을 구성하는 순서로 진행하였다. 본 연구에서도 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 과제를 학생에게 제시하였다. 본 연구에서 해당 과제를 제시한 목적은 학생이 앞서 시간-거리함수 $y=x^2$에서 시간-속력함수 $y=2x$를 구성하였던 방식을 일관되게 적용하는지 확인하기 위해서였다.

처음 과제를 제시받았을 때 학생은 자신이 어떻게 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서의 변화를 설명하는 산출물을 구성할 것인지에 대하여, 자신의 전략을 Dialog에서와 같이 표현하였다.

Dialog

연구자: 그 다음에 학생 전략대로 한 번 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에 대해서 시간-속력함수를 구성해 보는 것을 하려고 하거든. 학생의 기본 전략은 어떻게 할 건지 한 번 먼저 이야기를 해 볼래요? 어떻게 전략을 짤 건지? [12,02:00,T,Q]

학 생: 일단은 제가 그냥 기본적으로 시간-거리함수에서... [12,02:22,S,A]

⋮ (침묵)

학 생: 그 기울기 구하는 느낌으로 한 번 해보려고 해요. [12,02:28,S,A]

⋮ (침묵)

연구자: 기울기를 구한다? [12,02:37,T,Q]

학 생: 그 다음에 그냥 그것을 속력이라해서 계단 형태의 그래프를 먼저 그린 다음에 거기에서 다시 그 중점들을 연결을 해서 직선 형태의 그래프를 구하려고요. [12,02:40,S,A]

이후 학생은 자신이 표현한 전략대로 이전에 시간-거리함수 $y=x^2$에서 시간-속력함수를 구성하는 방식에 따라 접근을 시작하였

다. 구간의 폭을 1로 하여 구간마다의 평균속력 값을 구하였고, 다음에는 계단 형태의 그래프에서 각 계단 판 위에 놓여있는 중점들을 구해서 기록으로 남기기 시작하였다(이후부터는 ‘계단 판 위에 놓여있는 중점’은 ‘구간별 중점’이라는 표현으로 사용하기로 한다). 이어서 학생은 자신이 구한 구간별 중점들의 좌표들이 하나의 직선 위에 놓여있을 것이라 생각하고, 구간의 폭이 1일 때 구해놓은 여러 개의 중점의 좌표들 중 두 개를 선택하여 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하였다. 연구자가 보기에 학생이 서로 다른 두 점이 하나의 직선을 결정한다는 사실을 학교 수업에서 학습하였기 때문에 이러한 학생의 접근 방식이 학생에게는 자연스러운 접근 방식이라 보였다. 그러나 이후 학생은 그 두 점을 제외한 다른 점을 해당 직선의 방정식에 대입하는 작업을 거치면서 구간별 중점들이 한 직선 위에 존재하지 않음을 확인하였다.

이를 확인한 학생은 마찬가지로 구간의 폭이 1/2일 때의 구간별 중점들에 대하여도 이들 점들이 한 직선 위에 놓여있지 않음을 확인하였다. 이에 학생은 자신의 계산에 오류가 있다고 생각하여 중점의 좌표들을 다시 계산하는 과정을 거쳤지만, 계산에 이상이 없다는 것을 확인한 이후에는 한 동안 말 없이 고민하는 모습을 보여주었다.

한참을 고민하던 학생은 답답함을 토로하였고, 이에 연구자는 Geogebra를 이용해서 학생이 구한 구간별 중점들의 좌표를 좌표 평면위에 나타내어 보여주었다. 학생은 이 과정에서 자신이 구해 놓은 구간별 중점들의 좌표가 직선이 아닌 곡선 형태로 찍힌 것을 확인하였고, 학생은 이러한 곡선 형태를 보면서 구간별 중점들이 이차함수 위에 존재한다는 추측을 연구자에게 제시하였다. 연구자가 왜 그렇게 추측하였는지 질문하였는데, 학생은 이 질문에 “좌표 평면에 찍힌 점들의 모습을 보면서 그러한 생각을 하게 되었다.”고 답하면서, 이차함수의 일반적인 표현인 $y = ax^2 + bx + c$를 적고 계산을 시작하였다. 학생은 구해 놓은 구간별 중점의 좌표들 중 세 개를 대입하여 a, b, c값을 구해서 시간-속력함수의 식을 구성하려고 하였다. Figure 8은 학생이 구간의 폭이 1일 때와 구간의 폭이 1/2일 때 구간별 중점을 계산하여 기록으로 남긴 것과 연구자가 구간의 폭이 1일 때의 중점의 좌표들과 구간의 폭이 1/2일 때의 중점의 좌표들을 Geogebra를 이용해서 좌표 평면에 각각 파란색 점들과 빨간색 점들로 표현해서 제시한 장면을 나타낸 것이다.

학생은 12차시 교수실험 말미에 자신의 처음 전략을 수정하여 중점들의 좌표가 이차함수의 그래프 위에 놓여 있을 것이라 생각하였고, 13차시 교수실험에서는 자신의 수정된 전략에 따라 구간의 폭이 1일 때의 시간-속력함수를 $y = x^2 + \frac{1}{12}$로 제시하였다. 또한 같은 방식으로 구간의 폭이 1/2일 때의 시간-속력함수를 계산을 통하여 $y = x^2 + \frac{1}{48}$로 구하였고, 구간의 폭이 1/4일 때는 시간-속력함수를 계산을 통하여 $y = x^2 + \frac{1}{192}$로 제시하였다. 이 과정을 거치면서 학생은 시간-거리함수 $y = x^2$에서 시간-속력함수를 구성할 때와 다르다는 것을 표현하였다. 시간-거리함수 $y = x^2$에서 시간-속력함수를 구성할 때는 구간의 폭을 달리 해도 구간별 중점들이 모두 하나의 동일한 직선 위에 놓여있었던 반면에, 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성할 때는 구간의 폭이 동일한 경우에는 구간별 중점들이 하나의 이차함수 그래프 위에 놓여있기는 하지만, 구간의 폭이 달라지면 점들이 더 촘촘하게 찍히게 되면서 이전에 구한 것과 다른 이차함수의 그래프 위에 구간별 중점들이 놓이게 된다는 사실을 제시한 것이다. 이어서 학

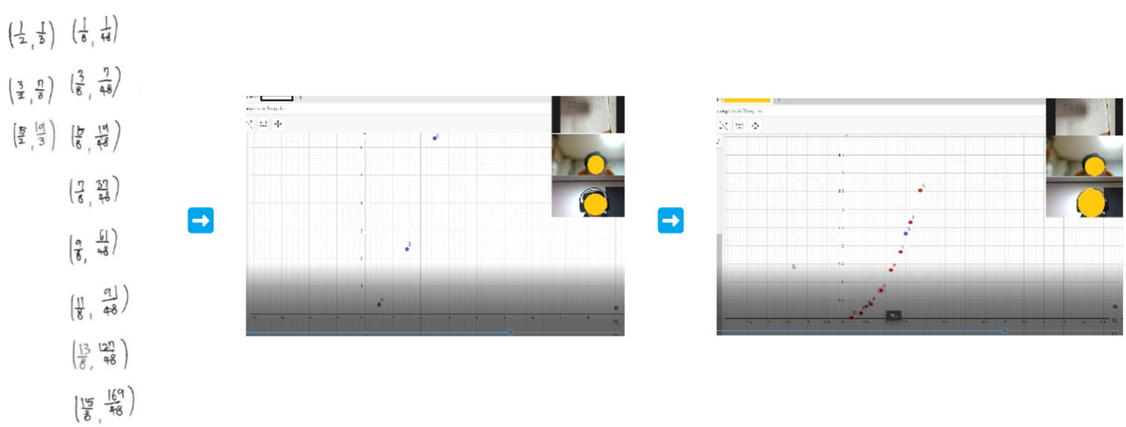

Figure 8. The coordinates of the focus of each section obtained by the student and the figure presented by the researcher on the coordinate plane.

생은 그 차이를 $y = x^2 + c$로 표현하였을 때 상수항 c 가 달라진다는 것으로 표현하였다. 이후 학생은 구간의 폭을 몇 번 반으로 줄여 나가는지에 따라 상수항 c 의 변화가 어떻게 되는지를 표현하려고 하였으며, 그 결과 구간의 폭이 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 일 때 시간-속력함수가 $y = x^2 + \frac{1}{12 \times 4^{k-1}}$가 된다는 것을 연구자에게 제시하였다. 이때 학생은 구간의 폭이 줄어들면 상수항이 매우 작아진다는 것을 표현하였고 결과적으로 0에 가까워진다는 것을 표현하였다. 연구자는 회고분석에서 학생이 10차시와 11차시의 교수실험을 통하여 시간-속력함수에서의 상수항이 물체의 운동에서 출발점에서의 초기 속력을 뜻하고 있다는 사실을 구성한 경험이 있었기 때문에 결과적으로 물체의 운동과 연계시켜 고민하는 과정에서 0이라고 표현하였을 것으로 보았다. Figure 9는 학생이 구간의 폭이 1/2일 때의 중점의 좌표들이 $y = x^2 + \frac{1}{48}$위에 놓여 있다는 것을 구성해가는 과정을 제시한 그림과 학생이 구간의 폭에 따른 시간-속력함수의 식을 일반화하여 표현한 것을 나타낸 것이다.

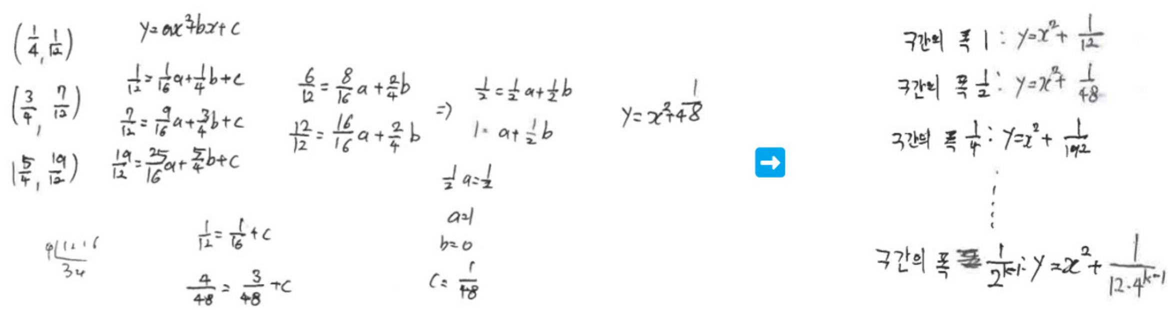

Figure 9. The process by which students generalize the expression of the time–speed function according to the width of interval.

본 연구에서 학생의 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성해가는 과정은 Lee (2017a)에서 소개한 구성 방식과는 다르다. 앞서 기술한 바 있듯이, Lee (2017a)에서 소개한 장면에서는 학생들이 시간-속력함수 $y = x^2$에서 구간별로 넓이를 소프트웨어를 이용하여 구해서 얻은 구간별 넓이에 해당하는 값을 일반화하여 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$을 구성하였다. 그렇기 때문에 Lee (2017a)에서 학생들은 동일한 물체의 운동에 대하여 이를 시간-속력함수로 표현한 것이 $y = x^2$이고 시간-거리함수로 표현한 것이 $y = \frac{1}{3}x^3$이라는 것을 알고 있었고, 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 것에 대하여 별다른 고민 없이 $y = x^2$으로 답할 수 있는 상황이었다.

반면에 본 연구에서는 학생이 Lee (2017a)에서 소개한 구성 방식과는 달리, 시간-거리함수에 대하여 구간별로 평균속력 값을 구해서 계단 형태의 그래프를 구성한 다음, 구간별 중점의 좌표를 이용하여 시간-속력함수를 구성하는 전략을 사용하고 있었다. 또한 연구자는 이러한 학생의 방식에 따라 교수실험을 진행하였기 때문에, 학생이 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 장면은 Lee (2017a)에서는 관찰되지 않은 장면이었다.

본 연구에서는 회고분석 과정에서 학생이 시간-거리함수 $y = x^2$에서 시간-속력함수 $y = 2x$를 구성한 전략을 따라서 시간-거리함수 $y = \frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 과정에서 학생은 두 번 당황하는 모습에 주목하였다. 하나는 구간의 폭에 따른 구간별 중점들의 좌표를 구하였지만, 예상과 달리 그 점들이 한 직선 위에 놓여있지 않다는 사실을 발견하였을 때였다. 다른 하나는 해당 점들이 직선 위에 놓여있지 않았을 때 자신의 전략을 어떻게 수정해야 할지 찾지 못하였을 때였다. 특히 중점의 좌표들이 하나의 직선 위에 놓여있지 않다는 것을 깨달았을 때, 학생은 자신이 구해 놓은 수많은 중점의 좌표들에 대한 정보를 더 이상 유용한 자료로 받아들이는 것이 아니라 오히려 방대한 자료 속에 파묻혀버려서 당황하는 모습을 보여주었다. 이때 연구자가 학생이 구해 놓은 구간별 중점들의 좌표를 좌표 평면 위에 찍어서 보여준 것이 학생에게 도움이 된 것으로 보인다. 이 과정 이후 학생은 중점의 좌표가 찍힌 모양이 직선이 아니라 이차함수의 그래프인 것으로 추측을 하였고 자신의 추측에 따라 중점들의 좌표를 이용한 계산을 통하여 시간-속력함수를 제시하는 모습을 보여주었기 때문이다.

연구자는 13차시 교수실험 분석을 거치면서, 만약 이 장면에서 학생이 중점들의 좌표를 좌표 평면에 찍어놓은 곡선 형태의 그래프가 이차함수라는 추측을 하지 못하였다면 결과가 어떻게 되었을지 고민해보았다. 과제상황을 달리하여 학생의 구성방식을 따르는

다고 하였을 때, 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 시간-속력함수를 구성하기 위해서는 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 구간의 폭에 따른 중점들의 좌표가 삼차함수 그래프 위에 놓일 것이라는 추측을 하는 것이 중요할 것이다. 그런데 본 연구에 참여한 학생은 삼차함수의 그래프를 구성한 경험이 없다고 하였기 때문에 학생은 이러한 구성방식을 이용해서 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$의 시간-속력함수 구성에 어려움을 겪게 될 것으로 보였다. 만약 학생이 해당 과제를 해결한다면 어떻게 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 구한 구간별 중점들이 놓이게 되는 곡선의 식을 구성해가는지에 대한 정보를 얻을 수 있을 것으로 기대하기도 하였다. 이에 14차시에서 연구자는 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 시간-속력함수를 구하는 과제를 제시하여 이를 확인하기로 하였다. 그러나 이 과제에 대하여 학생은 구간의 폭에 따른 구간별 중점들을 구해서 좌표 평면 위에 찍기는 하였으나, 그 형태가 삼차함수로 표현될 수 있다는 것을 언급하지는 못하였고 결과적으로 시간-속력함수를 식으로 표현하지는 못하였다.

학생은 자신의 이전 구성 방식대로 구간의 폭을 1, 1/2, 1/4 등으로 하여 계단 형태의 그래프를 구성하고, 구간별 중점의 좌표들을 구해서 규칙을 찾으려 하였다. 이전과 다르게 학생 스스로가 구간별 중점의 좌표들을 좌표 평면 위에 찍기는 하였으나, 그러한 그래프의 모양이 삼차함수를 따른다는 사실을 추측하지 못하였다. 만약 학생이 삼차함수를 따른다는 사실을 추측하였다면, 이전 학생의 구성 방식에 따라 $y=ax^3+bx^2+cx+d$의 식에 구간별 중점의 좌표들 중 네 개의 점을 대입해서 식을 구하는 방식으로 접근하였을 것으로 예상할 수 있다.

결과적으로 학생은 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 시간-속력함수를 식으로 구성하지는 못하였다. 그러나 학생의 구성 방식에서 주어진 시간-거리함수의 식 $y=\frac{1}{4}x^4$를 이용하여 구간별 평균속력 값을 구해서 구간별 중점의 좌표를 구한 다음 이후 그 중점의 좌표들을 좌표 평면 위에 찍는 방식으로의 변화가 관찰되었으며, 학생은 시간-거리함수의 식 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 시간-속력함수의 식을 구성하지 못했을 뿐이지 덩어리 추론에 의한 산출물인 구간별 중점들로 표현된 시간-속력함수의 그래프를 구성하는 자신만의 방식을 표현한 것으로 볼 수 있다.

결론 및 제언

덩어리 추론을 하는 학생의 시간-거리함수 $y=x^2$을 따르는 물체의 운동에서 시간-속력함수의 구성과정

Lee (2017a)에서는 덩어리 추론을 하는 학생이 매끄러운 추론을 하는 학생과의 상호작용을 통하여 계단 판의 시작점들끼리 연결하여 직선을 구성한 다음, 구간의 폭을 줄여 나감에 따라 그러한 직선들이 어떻게 변해가는지를 살펴보았다. 반면 본 연구에서 덩어리 추론을 하는 학생은 다른 학생들과의 상호 작용 없이 혼자 고민하는 상태에서, 구간의 폭을 줄여 나가면서 계단 형태의 그래프들을 구성해가는 방식으로 새로운 계단 형태의 그래프가 어떻게 구성되어가는지 관찰하였고 그 결과 계단의 중점들이 하나의 직선 위에 놓이게 된다는 것을 식으로 표현하여 산출물을 제시하였다. 본 연구에서 학생이 산출물을 구성해 가는 과정이 Lee (2017a)에서 학생들이 상호작용을 거쳐 결과물을 구성해가는 과정과 똑같은 것은 아니다. 그렇지만 본 연구에서 덩어리 추론을 하는 학생이 상호작용이 없는 상태에서도 시간-거리함수 $y=x^2$에서의 변화를 설명하기 위해서 계단 형태의 산출물을 구성하는 과정을 관찰할 수 있었다. 또한 학생이 그러한 산출물로는 연속적인 물체의 운동에서의 변화를 설명하는 것에 문제가 있다는 점을 깨닫고 이를 해결하기 위하여 구간의 폭을 줄여 나가는 방법을 반복적으로 적용하여 Lee (2017a)에서 학생들의 최종 결과물과 유사한 직선 형태의 산출물을 구성해가는 장면을 관찰할 수 있었다. 이는 앞서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다른 학생들을 대상으로 진행한 선행 연구들(Lee et al., 2015; Lee, 2017; Lee, 2021)에서의 구성 결과와 유사한 것으로 보이며, 본 연구에서는 덩어리 추론을 하는 학생의 구성 과정과 산출물을 관찰하였다는 점에서 의미가 있다. 또한 학생은 점들이 모여서 직선이 되는 것이 아니라 계단 형태의 그래프의 틈이 점점 채워져서 직선 형태로 변해가는 것으로 구성하였는데, 이러한 학생의 독특한 구성방식은 학교 수업에서 미분 개념 학습 시 미분계수로 도함수를 구성하는 방법과 차이가 있어 보였다.

덩어리 추론을 하는 학생의 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$을 따르는 물체의 운동에서 시간-속력함수의 구성과정

Lee (2017a)에서 학생들은 시간-속력함수 $y=x^2$에서 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$를 구성한 경험을 가지고 있기 때문에, 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 것에 대한 정보가 본 연구에서와는 다르게 관찰되었다. 즉, 본 연구에서 학생이 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서 시간-속력함수를 구성하는 장면은 Lee (2017a)에서는 관찰되지 않은 장면이다.

특히 본 연구에서는 학생이 시간-거리함수에 대하여 구간별로 평균속력 값을 구해서 계단 형태의 그래프를 구성한 다음, 구간별 중점의 좌표를 이용하여 시간-속력함수를 구성하는 전략을 사용하고 있었고, 연구자는 이러한 학생의 방식에 따라 교수실험을 진행하였다.

본 연구에서 학생은 시간-거리함수 $y=x^2$에서 시간-속력함수 $y=2x$를 구성하였던 자신의 방식을 따라 접근하였다. 그러나 자신의 방식에 따라 구성을 해가면서 두 번 당황하는 모습이 관찰되었다. 학생의 방식대로라면 구간별 중점들이 하나의 직선 위에 놓여있어야 하는데, 시간-거리함수 $y=\frac{1}{3}x^3$에서 구한 구간별 중점들은 하나의 직선 위에 놓여있지 않았었다. 또 다른 장면에서는 자신이 구한 구간별 중점들을 어떠한 식으로 표현해야 하는지에 대하여 고민하는 모습이 관찰되었다. 연구자에 의하여 학생이 구한 구간별 중점의 좌표들을 좌표 평면 위에 찍힌 것이 제공되었을 때, 학생은 구간별 점들이 이차함수의 그래프 위에 놓여있다는 추측을 제시하였고 이를 이용하여 구간의 폭에 따른 구간별 점들을 하나의 식으로 표현하였다. 다만, 이때 시간-속력함수의 형태를 $y=x^2+c$로 표현하고, 구간의 폭에 따라 상수항이 변해간다고 설명하였다. 이 과정에서 학생은 구간의 폭이 매우 좁아진다면 최종적으로 시간-속력함수의 식이 $y=x^2$으로 될 것이라 예상하였다. 연구자는 회고분석 과정에서 이 장면을 학생의 이전 경험에 따른 표현으로 해석하였다. 즉, 학생이 이전 교수실험을 거치면서 시간-속력함수에서의 상수항이 물체가 운동을 시작하는 출발점에서의 초기 속력에 해당하는 정보라는 것을 구성한 경험에 따라 시간-속력함수의 형태를 $y=x^2+c$에서 $y=x^2$로 제시한 것으로 보았다. 학생이 '자신의 구성 산출물이 결국에는 물체의 운동을 설명하는 것이기 때문에 출발점을 원점에서 시작해야하는 것'으로 보아야 하고, 그렇다면 시간-속력함수의 형태를 $y=x^2+c$가 아닌 $y=x^2$로 제시했어야 했을 것으로 연구자는 해석하였다.

13차시 교수실험 분석 과정에서 연구자는 학생이 만약 구간별 중점이 이차함수에 놓여있을 것이라는 추측을 하지 못하였다면 어떠하였을 지에 대한 질문을 갖게 되었고, 14차시에서는 이러한 질문에 따라 시간-거리함수 $y=\frac{1}{4}x^4$에서 시간-속력함수를 구성하는 과제를 제시하였다. 이 과제에 대하여 학생은 구간의 폭에 따른 구간별 중점들을 구해서 좌표 평면 위에 찍기는 하였으나, 그 형태가 삼차함수로 표현될 수 있다는 것을 언급하지는 못하였고 결과적으로 시간-속력함수를 식으로 표현하지는 못하였다.

그러나 연구자가 학생의 입장에서 생각해볼 때, 학생은 어떠한 시간-거리함수의 식이 주어진다 하더라도 앞서 구성한 방식에 따라 구간별 평균속력의 값을 구하고 이후 구간별 중점의 좌표를 구해서 좌표 평면에 해당 점들을 찍을 수 있을 것이다. 또한 학생은 해당 점들이 구간의 폭을 줄여 나감에 따라 더욱 촘촘하게 그려질 것을 알고 있을 것이다. 따라서 학생이 그렇게 얻어진 그래프의 식이 무엇인지 표현하지 못한다 하더라도 자신이 구성한 산출물이 주어진 시간-거리함수의 변화를 설명할 수 있는 시간-속력함수에 해당한다는 것을 표현할 수 있을 것으로 보였다.

제언

본 연구에서 시간-거리함수에서 시간-속력함수를 구하는 과제에 대하여 학생이 산출물을 구성해가는 과정은 학생만의 독특한 방식이기 때문에 교수-학습 상황에 바로 적용할 수는 없다. 그러나 미분 개념 학습 이전의 학생이 물체의 운동과 관련된 연속적인 변화를 나타낸 시간-거리함수에서 시간-속력함수를 구성해가는 학생의 독특한 구성 과정에 대한 정보는 추후 미분 개념 관련 연구에 도움이 될 것으로 보인다. 또한 본 연구에서의 중요한 목적은 '덩어리 추론을 하는 학생이 시간-거리함수에서 시간-속력함수를 구성해가는 장면을 이전 선행연구들에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다양한 학생들이 함께 구성하는 과정을 분석틀로 하여 살펴보는 것'에 있었다. 이에 대하여 본 연구에서는 덩어리 추론을 하는 학생 혼자서도 이전 선행연구에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식이 다양한 학생들이 함께 구성한 산출물을 구성하는 것을 확인할 수 있었다. 또한 혼재된 정보가 아닌 덩어리 추론을 하는 학생의 구성 과정에 대한 정보와 그에 따른 해석을 시도할 수 있었다.

특히 본 연구는 Castilo-Garsow (2012)와 Lee와 Shin (2017)의 연구 등의 선행연구와 관련하여 교수실험을 통한 실증적 자료를 제시하였다는 점에서 의미를 갖는다. Hauger (1995)의 변화율에 대한 세 가지 인식에 대한 연구를 통하여 학생들이 변화의 정도를 변화율 개념으로 표현할 수 있는 다양한 방법들이 있다는 것이 확인되었고, Castilo-Garsow (2012)와 Lee와 Shin (2017)의 연구에서는 국소적인 변화에 대하여 다양한 변화율 방식으로 접근한 학생들이 전체적인 변화를 설명하는데 있어서도 다양한 결과물을 구성할 수 있다는 실증적 근거를 제시하였다. 그러나 학생들이 이러한 다양한 결과물을 어떻게 구성해가는지에 대한 정보가 제시되지는 않았기 때문에 이에 대한 후속 연구가 필요하였다. 이러한 필요에 대하여, 본 연구는 덩어리 추론과 S2 학생의 방식으로 국소적인 부분에서의 변화를 표현한 학생이 전체적인 변화를 어떻게 설명할 수 있는지에 대한 사례를 교수실험에 근거하여 제시하였다는 점에서 의미가 있다. 이러한 본 연구에서의 결과는 현재 교육과정 상에서의 미분 학습 (현 교육과정 상에서의 미분학습은 국소적인 변화를 순간 변화율로 인식하는 상태에서 전체적인 변화를 설명하는 방식으로 볼 수 있다.) 구성 방식과도 차이가 있다.

이상의 논의에 따르면, 본 연구에서의 결과와 같이 학생들의 국소적인 변화에 대한 인식의 차이에 따른 전체적인 변화를 표현하는 방식의 차이가 어떠한 지에 대하여 살펴보는 것은 미분학습 관련 연구에 도움이 될 수 있을 것으로 보인다. 다만, 후속 연구에서는 교수실험에서 학생의 자연스러운 구성방식을 지원할 수 있는 환경에 대한 고민이 필요할 것으로 보인다. 본 연구에서는 학생의 구성 과정에서 '반복된 분수의 거듭제곱 계산'을 거치게 되었는데, 학생의 필요를 충족하지 못할 경우 교수실험을 통한 정보 수집에 장애가 발생할 수 있다는 점에서, 공학용 도구를 포함한 교수실험 환경에 대한 고민이 필요할 것으로 보인다.

References

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding, Wisdome monographs* (Vol. 2, pp. 55-73). University of Wyoming.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai& E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp.215-238). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_13

Ellis, A., Ely, R., Singleton, B., & Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: Supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 104*(1), 87-103. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09951-6

Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Studies in Mathematics Education Series: 6. The Falmer Press. https://doi.org/10.4324/9780203454220

Hauger, G. S. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. p. 49. Washington, D.C. : ERIC Clearinghouse microfiches. ED392598.

Lee, D. G. (2017a). *A study on 1st year high school students' construction of average speed concept and average speed functions in relation to time, speed, and distance* [Unpublished Doctoral dissertation, Korea National Education University].

Lee, D. G. (2017b). Study of students' perception and expression on the constant of distance function in the relationship between distance function and speed function. *The Mathematical Education. 56*(4), 387-405. http://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.4.387

Lee, D. G. (2021). A study on the process of constructing speed-time function from distance-time function y=2^x by students with different reasoning methods for continuous change. *Journal of Educational Research in Mathematics, 31*(2), 153-177.

Lee, D. G., Moon, M. J., & Shin, J. H. (2015). A student's conceiving a pattern of change between two varying quantities in a quadratic functional situation and its representations: The case of Min-Seon. *The Mathematical Education. 54*(4), 299-315. https://doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.4.299

Lee, D. G. & Shin, J. H. (2017). Students' recognition and representation of the rate of change in the given range of intervals. *The Journal of Educational Research in Mathematics. 27*(1), 1-22.

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(2), 85-119. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.656362

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Kluwer.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). State University of New York Press.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Authors' Information

Donggun Lee, High School, Teacher, 1st Author. https://orcid.org/0000-0001-6437-8852