

비구조화된 불확실성과 시변 지연시간을 갖는 이산 시변 구간 시스템의 안정조건

Stability Condition for Discrete Interval Time-Varying System with Unstructured Uncertainty and Time-Varying Delay Time

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

본 논문에서는 시변 지연 시간이 있는 선형 이산 시변 구간 시스템에 비구조화된 불확실성이 존재하는 경우에 대하여 안정조건을 다룬다. 구간 시스템은 시스템 행렬들이 구간행렬의 형태로 주어지는 시스템으로 본 논문에서는 이러한 구간 시스템 행렬과 상태변수의 지연 시간이 시변인 특성을 갖는 시스템에 대하여, 비선형성을 포함하며 그 크기만을 알 수 있는 비구조화된 불확실성이 존재하는 경우에 대한 시스템의 안정조건을 제안한다. 안정조건의 유도는 리아프노프 방정식의 상한 해를 이용하는 기존 결과와는 다르게 리아프노프 안정 조건을 기반으로 이루어지며, 간단한 부등식의 형태로 표현되어 안정성 판단에 편리하게 적용될 수 있는 장점을 갖는다. 또한, 제안된 안정조건은 기존에 발표된 다양한 선형 이산 시스템에 대한 안정 조건을 포함할 수 있는 포괄적이고 강력한 것으로, 시변 지연시간 변동 크기, 불확실성의 크기와 구간행렬의 범위를 모두 조건식에 포함하게 된다. 새로운 조건의 우수성은 유도과정에서 증명되어지며 수치예제를 통하여 제안된 조건의 효용성과 우수성을 검증한다.

[Abstract]

In this paper, we deal with the stability condition of linear time-varying interval discrete systems with time-varying delays and unstructured uncertainty. For the time-varying interval discrete system which has interval matrix as its system matrices, time-varying delay time within some interval value and unstructured uncertainty which can include non-linearity and be expressed by only its magnitude, the stability condition is proposed. Compared with the previous result derived by using an upper bound solution of the Lyapunov equation, the new result is derived by the form of simple inequality based on Lyapunov stability condition and has the advantage of being more effective in checking stability. Furthermore, the proposed condition is very comprehensive, powerful and inclusive the previously published conditions of various linear discrete systems, and can be expressed by the terms of magnitudes of the time-varying delay time and uncertainty, and bounds of interval matrices. The superiority of the new condition is shown in the derivation, and the usefulness and advantage of the proposed condition are examined through numerical example.

Key word : Discrete system, Stability condition, Time-varying delay, Time-varying interval, Unstructured uncertainty.

<http://dx.doi.org/10.12673/jant.2022.26.6.504>



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Received 22 November 2022; **Revised** 1 December 2022
Accepted (Publication) 19 December 2022 (30 December 2022)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

I. 서론

시스템의 특성에 영향을 미치는 다양한 요소에 대한 시스템 안정성을 판단하기 위하여 다양한 연구가 진행되어왔으며, 강력한 안정조건을 구하기 위하여 시스템의 수학적 모델을 여러 가지 형태로 고려하고 해당 모델에 대한 안정조건을 연구하여 왔다[1]-[3]. 선형 이산시스템에 대하여 고려되는 시스템 모델은 시스템 행렬의 시변/시불변 특성, 상태 지연에 영향을 주는 지연 시간의 시변/시불변 특성, 불확실성의 포함 여부 등으로 구분하여 다양한 경우에 대한 연구 결과가 발표되었다[4]-[6]. 구간행렬에 속한 임의의 행렬이 시스템 행렬로 정의되는 시스템 모델에 대하여 시스템 안정성을 연구한 결과들도 제시되었다[7]-[10]. 그러나, 기존 결과에서 고려된 구간 시스템의 수학적 모델은 여러 한계점을 갖는다. 시불변 시스템 행렬에 대한 것만 고려[7][8], 시변 지연시간까지 함께 고려하거나[9] 구간 시스템이 아닌 일반 시스템에 대하여 불확실성까지 포함한 경우[10] 등의 결과가 있다. 특히, [11]에서는 구간 시변 시스템 행렬에 대하여 안정 조건을 제안하였고, [12]에서는 구간 시불변 시스템에 대하여 비구조화 불확실성을 고려한 결과도 발표되었다.

본 논문에서는 기존의 연구에서는 고려되지 못한 시변 구간 시스템 행렬을 갖는 선형시스템에 비구조화된 불확실성과 시변 지연시간이 동시에 존재하는 경우에 대하여 시스템 안정조건을 제시한다. 이는 시변, 지연시간, 불확실성의 세가지 중요 요인들에 대하여 모두 고려하지 못하고 한두가지 요인만 고려하여 연구되었던 기존의 결과들을 통합할 수 있는 가장 포괄적인 안정조건이며, 다양한 기존의 결과들을 포함하는 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 기존 결과를 요약하고, III장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하며, IV장에서 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

본 논문에서 사용하는 기호로는 $R^{n \times m}$ 는 실수 행렬 요소를 갖는 $n \times m$ 행렬이며, $\|X\|$ 는 행렬 X 의 스펙트럴 노름(spectral norm), ($\|X\|: X^T X$ 행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X > 0$ 는 대칭행렬 X 가 양의 정칙(positive definite), $A = [a_{ij}]$ 는 행렬 요소 값 a_{ij} 로 구성된 행렬. $|A| = [|a_{ij}|]$, $A \leq_e B$ 는 행렬 요소별 부등식을 나타내며, I_n 는 $n \times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

II. 기존의 안정 조건 결과

식 (1)과 같은 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A(\cdot)x(k) + B(\cdot)x(k-d(\cdot)) + f(x(k), k) + f_1(x(k-d), k) \quad (1)$$

여기서, A 는 시스템 행렬, B 는 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이며, $f(x(k), k), f_1(x(k-d), k)$ 는 비선형 불확실성을 나타낸다. $A(\cdot), B(\cdot), d(\cdot)$ 의 시간에 따른 특성에 따라 다수의 결과가 발표되었다[4]-[6]. 특히, [6]에서는 식 (2)와 같이 비선형 불확실성을 포함한 시불변 시스템에 대하여 리아프노프 방정식의 상한해를 이용하여 안정조건을 다루었다. 이 경우에는 지연시간도 시불변으로 고려하였음을 주목한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d) + f(x(k), k) + f_1(x(k-d), k) \quad (2)$$

여기서, $A, B \in R^{n \times n}$ 는 시불변 시스템 행렬이며, $f(x(k), k), f_1(x(k-d), k)$ 는 식 (3)의 조건을 만족하는 비선형 불확실성을 나타낸다.

$$\|f(x(k), k)\| \leq \eta \|x(k)\|, \|f_1(x(k-d), k)\| \leq \gamma \|x(k-d)\| \quad (3)$$

기존 결과 1[6]: 식 (2), (3)를 만족하는 이산시스템은 식 (4)의 조건을 만족하면

$$((\|A\| + \|B\| + \eta + \gamma) (\frac{A^T A}{\|A\|} + \frac{B^T B}{\|B\|} + \eta I_n + \gamma I_n) < I_n \quad (4)$$

점근안정하다.

위의 결과는 시불변 시스템 행렬과 시불변 지연시간에 대한 조건으로 조건식 유도가 리아프노프 상한해를 이용하여 이루어지므로, 구간 시스템 행렬을 갖는 시스템, 시변 지연시간으로 모델링 되는 시스템과 같은 다양한 시스템 모델에는 적용이 어렵다. 이와는 다르게, 기존 결과 [11]에서는 다음 식과 같이 시변 구간 시스템 행렬과 시변 지연 시간을 갖는 시스템에 대한 결과가 제시되었다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) \quad (5)$$

$$0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M \quad \forall k$$

$$A(k) \in [A^-, A^+] \subset R^{n \times n}$$

$$A^- \leq_e A \leq_e A^+ (a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+) \quad \forall i, j \quad (6)$$

$$B(k) \in [B^-, B^+] \subset R^{n \times n}$$

$$B^- \leq_e B \leq_e B^+ (b_{ij}^- \leq b_{ij} \leq b_{ij}^+) \quad \forall i, j$$

$$F = [f_{ij}^-], f_{ij}^- = \max(|a_{ij}^-|, |a_{ij}^+|) \quad \forall i, j$$

$$G = [g_{ij}^-], g_{ij}^- = \max(|b_{ij}^-|, |b_{ij}^+|) \quad \forall i, j \quad (7)$$

기존 결과 2[11]: 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (5),(6)은 안정하다.

$$\|F\| + \sqrt{1 + d_M - d_m} \|G\| < 1 \quad (8)$$

위의 결과는 시변 구간 시스템 행렬 $A(\cdot), B(\cdot)$ 에 대한 것으로 [6]의 결과를 확장한 것이나, 식(1)과 [6]에서 고려된 불확실성에 대한 영향이 포함되지는 않은 것이다. 최근의 결과 [12]에서는 불확실성을 안정조건에 포함한 결과를 다음과 같이 제시하였다. 그러나, 이 경우에는 식(5)의 시변 구간 시스템이 아닌 시불변 구간 시스템 행렬에 대한 안정조건임에 주목한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d(k)) + f(x(k),k) \tag{9}$$

$$\|f(x(k),k)\| \leq \eta \|x(k)\| \tag{10}$$

$$0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M \quad \forall k \tag{11}$$

식(7)에 정의된 행렬을 이용하여 다음의 결과를 얻는다.

기준 결과 3[12] : 식(9),(10)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 구간 시스템은 식(7)의 행렬에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$D \equiv 1 + d_M - d_m \\ (\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\| < 1 \tag{12}$$

보조정리 1 ([11],[12]) : 임의의 벡터 x, y 와 양의 상수 ϵ 에 대하여 식(13)가 성립한다.

$$2x^T y \leq \epsilon^{-1} x^T x + \epsilon y^T y \tag{13}$$

보조정리 2 ([13,491쪽]) : $|x| \leq_e Y$ 를 만족하는 정방행렬 X, Y 에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$\|X\| \leq \|X\| \leq \|Y\| \tag{14}$$

III. 새로운 안정 조건

본 장에서는 불확실성을 갖는 시변 구간시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) + f(x(k),k) \tag{15}$$

$$\|f(x(k),k)\| \leq \eta \|x(k)\| \tag{16}$$

$$0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M \quad \forall k$$

$$A(k) \in [A^-, A^+] \subset R^{n \times n}$$

$$A^- \leq_e A \leq_e A^+ \quad (a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+) \quad \forall i, j \tag{17}$$

$$B(k) \in [B^-, B^+] \subset R^{n \times n}$$

$$B^- \leq_e B \leq_e B^+ \quad (b_{ij}^- \leq b_{ij} \leq b_{ij}^+) \quad \forall i, j$$

여기서, 식(15)는 시변 지연시간을 갖는 선형 이산시스템이며, 기존 연구들[6]-10],[12]에서 다루지 못한 시변 구간 시스템에 대한 것이며, 또한 시변 구간 시스템에 대한 결과인 [11]에서도 다루지 못한 비구조화 불확실성을 포함한 것으로, 앞장에서 제시된 기존 결과들을 모두 포함할 수 있는 시스템이다.

위의 시스템(15)에 대하여, 리아프노프 함수를 식(18)와 같이 정의한다.

$$V(x(k)) = x^T(k)x(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \tag{18} \\ + \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = V_1 + V_2 + V_3$$

여기서, 대칭행렬 R 은 양의 정칙행렬로 $R > 0$.

보조정리 3: 식(15)의 시스템은 식(18)에 정의된 리아프노프 함수와 식(7)과 $\epsilon > 0, d_M - d_m \geq 0$ 에 대하여 식(19)의 관계식을 만족한다.

$$D \equiv 1 + d_M - d_m \\ V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\ \leq x^T(k) \left((1 + \epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|}) \|F\|^2 I_n - I_n + DR + (r^2 + \eta \|F\| + \eta \|G\|) I_n \right) x(k) \\ + x^T(k-d(k)) \left((1 + \epsilon + \frac{\eta}{\|G\|}) \|G\|^2 I_n - R \right) x(k-d(k)) \tag{19}$$

$$\text{증명: } V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$x_d(k) \equiv x(k-d(k)) \\ \Delta V_1 = x^T(k+1)x(k+1) - x^T(k)x(k) \\ = x^T(k)(A(k)^T A(k) - I_n)x(k) + 2x_d^T(k)B(k)^T A(k)x(k) \\ + 2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k) + 2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \\ + x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k) + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \tag{20}$$

$$\Delta V_2 = \sum_{i=k+1-d(k+1)}^k x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ = x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \tag{21}$$

참고문헌 [9]에서와 같이 식(22)을 만족한다.

$$\Delta V_3 = \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} (x^T(k)Rx(k) - x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\ = (-d_m + 1 - (-d_M + 2) + 1)x^T(k)Rx(k) \\ - (x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1) - \dots \\ - x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\ = (d_M - d_m)x^T(k)Rx(k) - \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \tag{22}$$

보조정리 1,2와 대칭행렬의 성질 $A(k)^T A(k) \leq \|A(k)\|^2 I_n$
 $\leq \|F\|^2 I_n, B(k)^T B(k) \leq \|B(k)\|^2 I_n \leq \|G\|^2 I_n, f^T f \leq \eta^2 \|x(k)\|^2$ 을 이
 용하면 식 (23)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & 2x_d^T(k)B(k)^T A(k)x(k) \\
 & \leq \frac{1}{\epsilon} x^T(k)A(k)^T A(k)x(k) + \epsilon x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k), \\
 & 2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k) \\
 & \leq \frac{\|G\|}{\eta} f^T f + \frac{\eta}{\|G\|} x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k) \\
 & \leq \eta \|G\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|G\|} x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k), \\
 & 2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \leq \frac{\|F\|}{\eta} f^T f + \frac{\eta}{\|F\|} x^T(k)A(k)^T A(k)x(k) \\
 & \leq \eta \|F\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|F\|} x^T(k)A(k)^T A(k)x(k)
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 & V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\
 & \leq x^T(k)(A(k)^T A(k) - I_n + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\
 & + x_d^T(k)(B(k)^T B(k) - R)x_d(k) \\
 & + 2x_d^T(k)B(k)^T A(k)x(k) + 2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k) \\
 & + 2f^T(x(k),k)A(k)x(k) + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\
 & \leq x^T(k)(A(k)^T A(k) - I_n + DR)x(k) \\
 & + x_d^T(k)(B(k)^T B(k) - R)x_d(k) \\
 & + \frac{1}{\epsilon} x^T(k)A(k)^T A(k)x(k) + \epsilon x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k) \\
 & + \eta \|G\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|G\|} x_d^T(k)B(k)^T B(k)x_d(k) \\
 & + \eta \|F\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|F\|} x^T(k)A(k)^T A(k)x(k) \\
 & + \eta^2 x^T(k)x(k) \\
 & \leq x^T(k)((1+\epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|})A(k)^T A(k) - I_n + DR \\
 & + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|)I_n)x(k) \\
 & + x_d^T(k)((1+\epsilon + \frac{\eta}{\|G\|})B(k)^T B(k) - R)x_d(k) \\
 & \leq x^T(k)((1+\epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|})\|F\|^2 I_n - I_n + DR + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|)I_n)x(k) \\
 & + x_d^T(k)((1+\epsilon + \frac{\eta}{\|G\|})\|G\|^2 I_n - R)x_d(k)
 \end{aligned} \tag{24}$$

위의 보조정리3을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 수식 (15),(16),(17)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시변 구간 시스템은 식 (7)의 행렬과 $D \equiv 1+d_M-d_m$ 에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$-R = \frac{(1+\epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|})\|F\|^2 I_n - I_n + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|)I_n}{1+d_M-d_m} < 0 \tag{25}$$

$$(\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\| < I_n \tag{26}$$

증명: 식 (25)와 같이 행렬 R 을 선택하여 식(19)에 대입하면 식 (27)이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 & V(x(k+1)) - V(x(k)) \\
 & \leq x_d^T(k)((1+\epsilon + \frac{\eta}{\|G\|})\|G\|^2 I_n - R)x_d(k)
 \end{aligned} \tag{27}$$

따라서, 식(25)와 (27)에 의해서 다음이 성립한다. 즉,

$$\begin{aligned}
 & (1+d_M-d_m)(1+\epsilon + \frac{\eta}{\|G\|})\|G\|^2 I_n + (1+\epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|})\|F\|^2 I_n - I_n \\
 & + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|)I_n < 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

이 되면 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여, ϵ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon = \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\|G\|} > 0 \tag{29}$$

로 정하고 식(29)를 식(28)에 대입하면 식 (30)이 된다.

$$\begin{aligned}
 & (1+d_M-d_m)(1 + \frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\|G\|} + \frac{\eta}{\|G\|})\|G\|^2 I_n \\
 & + (1 + \frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\|G\|}{\|F\|} + \frac{\eta}{\|F\|})\|F\|^2 I_n + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|)I_n < I_n
 \end{aligned} \tag{30}$$

$D \equiv 1+d_M-d_m$ 로 하고 식(30)을 정리하면 식 (31)이 된다.

$$\begin{aligned}
 & (\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 \\
 & - \eta\sqrt{D}\|G\| - \eta\sqrt{D}\|G\| + \eta D\|G\| + \eta\|G\| \\
 & = (\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\| < 1
 \end{aligned} \tag{31}$$

위의 부등식을 만족하면 식(19)의 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 이 만족된다.

따름정리 I: 수식 (15),(16),(17)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시변 구간 시스템은 다음을 만족하면 점근안정하다.

$$(\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\| < 1 \tag{32}$$

증명: 정리1의 안정 조건 식 (25)의 조건은 다음의 조건과 같다.

$$(1+\epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|F\|})\|F\|^2 + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|) < 1 \tag{33}$$

여기서 식(29)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|G\| + \eta}{\|F\|}\right)\|F\|^2 + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|) \quad (34)$$

$$= (\|F\|^2 + \sqrt{D}\|G\|\|F\| + \eta\|F\|) + (\eta^2 + \eta\|F\| + \eta\|G\|) < 1$$

식(32),(34)의 좌변항을 각각 α, β 로 두면 다음과 같다.

$$\alpha - \beta = D\|G\|^2 + \sqrt{D}\|F\|\|G\| + \eta D\|G\| > 0 \quad (35)$$

$$\alpha > \beta$$

즉, 식(32)의 조건을 만족하면 식(25)의 조건을 만족한다.

위의 따름정리의 조건은 불확실성이 없는 경우($\eta=0$)의 식으로 고려하면 기존결과 2[11]의 것과 동일하게 된다. 또한, 시변 구간 시스템이 아닌 시불변 구간 시스템 경우로 고려하게 되면 기존결과3[12]의 안정조건과 동일하게 된다. 구간 시스템이 아닌 고정 시스템에 대한 [6]의 결과와도 매우 유사한 수식으로 고려될 수 있으며, 이 경우 새로운 결과는 시변 지연시간을 고려하여 새로운 항(\sqrt{D} 에 관련된) 이 안정조건에 추가된 것을 확인할 수 있다. 기존 결과 [6]의 제한점을 보완한 매우 유연한 결과임을 알 수 있다.

IV. 새로운 조건의 수치 예제 적용

수치예제를 통하여 제안된 안정조건에 대하여 기존 결과와의 비교를 수행한다.

예제 [12]: 식 (15),(16),(17)과 같이 표현되는 시스템을 고려한다. [12]에서는 시불변으로 고려하였으나 본 예제에서는 시변 구간 시스템으로 확장하여 고려하고 다음과 같이 불확실성을 포함한다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) + f(x(k),k)$$

$$A^- = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$B^- = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$$

식 (7)의 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (37)$$

따름정리 1의 조건을 시변 지연시간인 $d_M-d_m=2$ 인 경우에 대하여 적용하면, $\eta=0.13$ 인 경우 식 (32)의 $(\|F\| + \sqrt{D}\|G\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)\|G\| = 0.9999 < 1$ 이 되어 이 경우에도 안정함을 알 수 있다. 위의 경우에 $\eta=0.1$ 에 대하여 상태변수 초기 상태 [3 -2], 지연 시간이 $d_M=4, d_m=2$ 로 하여 시스템 상태 행렬의 변화, 시변지연시간과 불확실성

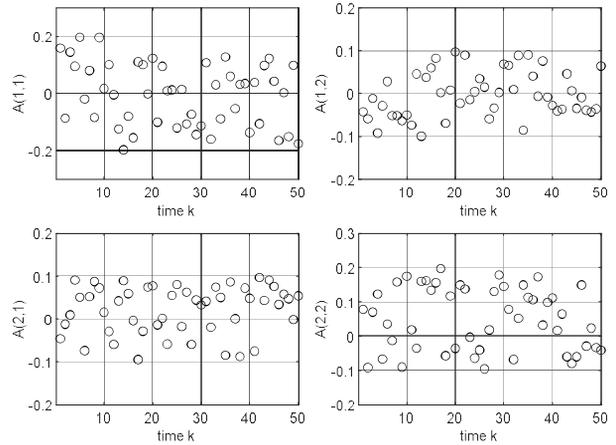


그림 1. 지연 없는 상태변수 상태행렬의 시변 요소값 궤적
Fig. 1. Trajectory of time-varying parameters of state matrix of non delayed state vector.

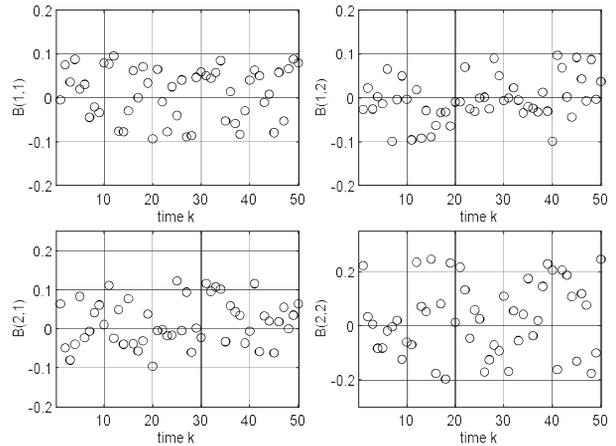


그림 2. 지연 상태변수 상태행렬의 시변 요소값 궤적
Fig. 2. Trajectory of time-varying parameters of state matrix of delayed state vector.

크기 및 상태 변수를 도시한 그림이 그림 1-3에 도시된다. 그림에서 다양한 시변 요소에 대하여 상태변수는 안정되게 0으로 수렴해 가는 것을 확인할 수 있다.

위의 예제와 같이 제안된 안정조건들로 시변 구간 시스템 행렬에 대하여 시변 지연시간과 불확실성이 포함된 시스템의 안정성을 판단할 수 있으며, 기존의 결과를 포함하여 확장된 안정조건임을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 일정 구간 내에 속하는 시변 지연시간을 가지며, 시스템 행렬 또한 일정 구간에서 시간에 따라 변화하는 구간행렬로 정의되는 선형 이산 시스템에 비구조화된 불확실성

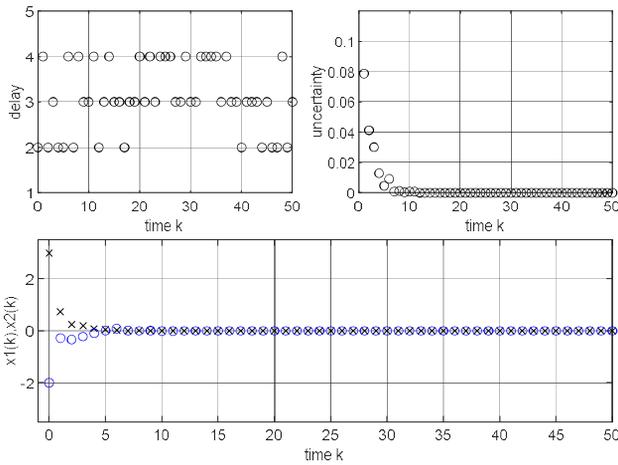


그림 3. 시변 지연 시간 $d(k)$, 불확실성 $f(x(k),k)$ 크기, 상태변수 $x(k)$ 의 궤적

Fig. 3. Trajectory of time-varying delay time $d(k)$, norm of uncertainty $f(x(k),k)$ and state vector $x(k)$.

이 있는 경우에 대한 안정성 해석을 시도하였다. 안정 조건은 리아프노프 안정성 이론에 기초하여 새로운 조건식으로 유도 되고, 기존에 발표된 안정조건들을 포함할 수 있는 매우 포괄적인 조건임을 보이며, 이를 수치예제를 통하여 확인하였다. 추 후 연구에서는 유도된 안정조건을 각각의 요소별로 그 안정크 기를 알아낼 수 있는 방법에 대한 연구가 진행될 예정이다.

References

[1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, “The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview,” *Scientific Technical Review*, Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, “Stability on time delay systems: A survey,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol. 20, No. 3, pp. 289-297, Mar. 2014.

[3] J. Chen, J.H. Park, S. Xu, B. Zhang, “A survey of inequality techniques for stability analysis of time-delay systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 32, No. 11, pp. 6412-6440, July. 2022.

[4] S. Xu, J. Lam, B. Zhang and Y. Zou, “A new result on the

delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 16, pp. 2512-2521, Oct. 2014.

[5] C. H. Lee, “Sufficient conditions for robust stability of discrete large-scale interval systems with multiple time delays,” *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 5, No. 4, pp. 759-765, Apr. 2017.

[6] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, “Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation,” *Innovative Computing Information and Control Express Letters*, Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May. 2011.

[7] P. L. Liu and W.-J. Shyr, “Another sufficient condition for the stability of grey discrete-time systems,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 342, No. 1, pp. 15-23, Jan. 2005.

[8] J. Fang Han, J. Qing Qiu and J. Hua Zhai, “Stability analysis for perturbed discrete dynamic interval systems with time delay,” in *Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC 2007)*, Kumamoto: Japan, pp. 587-587, Sep. 2007.

[9] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval system with interval time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 19, No. 6, pp. 574-580, Dec. 2015.

[10] H. S. Han, “Stability condition of discrete system with time-varying delay and unstructured uncertainty,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 22, No. 6, pp. 630-635, Dec. 2018.

[11] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

[12] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval system with unstructured uncertainty and time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 25, No. 6, pp. 551-556, Dec. 2021.

[13] R. A. Hornand and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1985.



한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
 1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
 1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
 1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
 ※관심분야 : 유도제어, 검실제어, 센서 응용 시스템