

SHAPE 알고리즘을 이용한 사인파 주파수 변조 펄스의 상호간섭 억제⁺

(Mutual interference suppression of the sinusoidal frequency
modulated pulse using SHAPE algorithm)

김 근 환¹⁾, 이 동 화^{2)*}

(Guenhwan Kim and Donghwa Lee)

요 약 SHAPE 알고리즘은 펄스의 스펙트럼 형태를 원하는 대로 성형하면서, 이 외의 특성에는 왜곡을 발생시키지 않도록 설계할 수 있다는 장점이 있어 기존의 능동소나 펄스 설계에 활용되었다. 본 논문에서는 다중상태 소나 시스템을 위한 펄스를 설계할 때, 주파수 대역에서 인접한 펄스 간의 상호상관도를 감소시키면서도 펄스 자체의 성능 저하를 방지하기 위해 SHAPE 알고리즘을 적용한 펄스 신호 설계 기법을 제안한다. 이를 위해서 SHAPE 알고리즘의 경계함수를 펄스 대역폭으로 제한하도록 설정하였다. 제안하는 설계 기법을 사인파 주파수 변조 펄스 신호에 적용한 결과 상호상관도를 의미하는 peak cross-correlation level (PCCL)이 44.23 dB 감소하였다. PCCL이 수십 dB 감소하였음에도 모호성 함수의 변화가 크게 관찰되지 않았으며, 부엽의 평균값을 의미하는 integrated sidelobe level (ISL)이 11.64 dB 증가하였다.

핵심주제어: 다중상태 능동소나 시스템, SHAPE 알고리즘, 송신직접파 간섭 억제

Abstract The SHAPE algorithm has the advantage of being able to shape the pulse spectrum as desired and design it not to distort other characteristics, so it was used in the active sonar pulse design. In this paper, we propose a pulse design using the SHAPE algorithm for a multi-static sonar system to reduce the cross-correlation between frequency-adjacent pulses and prevent the performance degradation of the pulses themselves. The boundary function of the SHAPE algorithm is set to be limited to the pulse bandwidth. As a result of applying the proposed design method to the sinusoidal frequency modulated pulse, the peak cross-correlation level (PCCL), which means the degree of cross-correlation, was reduced by 44.23 dB. Although the PCCL decreased by several tens of dB, no significant change in the ambiguity function was observed, and the integrated sidelobe level (ISL), which means the average value of the side lobe, increased by 11.64 dB.

* Corresponding Author: Donghwa Lee (leedonghwa@daegu.ac.kr)

+ 이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2019R1F1A1058434).

Manuscript received August 02, 2022 / revised September 23, 2022 / accepted September 30, 2022

1) 세종대학교 해양시스템융합공학과, 제1저자

2) 대구대학교 AI학부, 교신저자

1. 서 론

최근 소나 연구 분야에서 다중상태 (Multi-static) 소나 시스템에 대한 관심이 증가하고 있다. 이는 송수신기가 동일한 플랫폼에서 운용되는 기존의 단상태 (mono-static) 소나 시

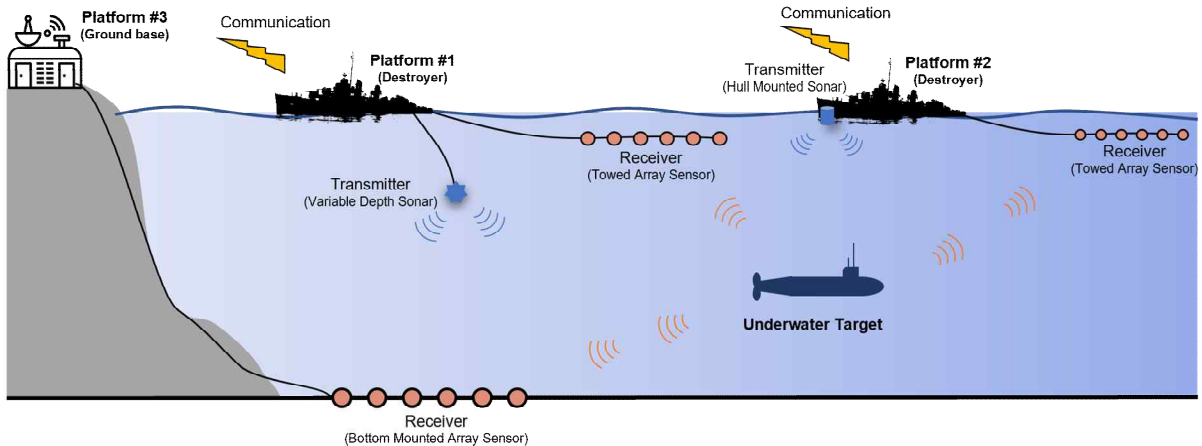


Fig. 1 Scheme of the multi-static sonar system

시스템과 달리 다중상태 소나 시스템은 여러 플랫폼이 송수신 정보를 공유하면서 표적의 정보를 다수 획득할 수 있으며, 송수신기가 이격되어 있어 길이가 긴 신호를 송신할 수 있기 때문이다. 그러나 서로 다른 송신 펄스로 인한 강한 송신직접파(direct blast)로 인해 표적 신호가 마스킹될 수 있고, 잔향이 기존 단상태 소나 시스템보다 복잡하게 수신되는 문제가 있다. 따라서 다중상태 소나 시스템에서 사용되는 송신 펄스를 설계할 때에는 펄스 간의 상호상관도를 최소화하는 것이 중요하다(R. V. Vossen et al., 2011; P. C. Hines, 2013; Xu, Luzhou et al., 2015; Gianelli, Christopher et al., 2015; Kim, Hyeon-su, et al., 2021).

상호상관도를 최소화하기 위해 다중상태 소나 시스템은 송신 펄스를 설계할 때 주파수 스펙트럼이 겹치지 않도록 격리하는 방식을 사용한다. 그러나 설계 파라미터에서 주파수를 격리하도록 지정하더라도 스펙트럼의 누출과 도플러 효과가 발생하기 때문에 주파수 상에서 인접한 펄스 간의 상호상관도가 여전히 높게 나타나는 문제가 발생한다. 이를 해결하기 위해서 창함수를 사용하거나 펄스의 대역폭을 감소시키면, 시간 영역의 포락선(envelope), 모호성 함수 등이 왜곡되면서 탐지 성능이 저하되는 부작용이 발생한다(D. A. Hague and J. R. Buck, 2015; J. B. Soli, 2017).

본 논문은 인접한 펄스 간의 상호상관도를 감소시키면서도 펄스 자체의 성능 저하를 방지하기 위해 SHAPE 알고리즘을 적용한 펄스 설계 기법을 제안한다. SHAPE 알고리즘은 임의의 시간 영역 포락선과 주파수 영역의 스펙트럼 형태를 성형(shaping)하는 효과적인 알고리즘으로 펄스의 대역폭을 설계 파라미터에서 지정한 값으로 강제하면서 동시에 시간 영역의 포락선과 모호성 함수가 크게 왜곡되지 않도록 설계할 수 있다(Rowe, William, 2014).

본 논문의 구성은 다음과 같다. 1 장의 서론에 이어 2 장에서 다중상태 능동소나 시스템의 펄스 설계에 대한 문제를 설정하고, 3 장에서 SHAPE 알고리즘을 이용한 펄스 설계 기법을 제안한다. 4 장의 시뮬레이션에서 제안하는 펄스 설계 기법을 검증하고 5 장에서 결론을 맺는다.

2. 문제 설정

2.1 다중상태 능동소나 시스템

다중상태 능동소나 시스템은 서로 다른 플랫폼들이 서로 다른 펄스를 동시에 송수신한다. Fig. 1에 다중상태 능동소나 시스템으로 운용되는 하나의 예시를 그림으로 제시한 것이다. 첫

번째 플랫폼은 구축함(destroyer)으로 송신기로 가변심도소나(variable depth sonar)를 사용하고 수신기로 견인배열센서(towed array sensor)를 사용한다. 두 번째 플랫폼 역시 구축함으로 수신기는 첫 번째 플랫폼과 동일하게 견인배열센서를 사용하지만 선체고정형소나(hull mounted sonar)를 송신기로 사용한다. 세 번째 플랫폼은 지상 기지이며 해저고정형배열(bottom mounted array sensor)를 이용하여 신호를 수신한다. 파란색 파형은 두 개의 송신기 송신되는 서로 다른 펄스를 의미하며, 주황색 파형은 수중의 표적에서 반사되어 세 개의 수신기로 수신되는 신호를 의미한다. 노란색 번개 표시는 구축함에서 수집되어 통신 시스템을 이용하여 지상 기지로 보내지는 정보를 의미한다. 최종적으로 서로 다른 플랫폼에서 수집된 신호를 종합하여 표적을 탐지한다. Fig. 1에 제시한 그림은 예시를 제시한 것이며 플랫폼과 소나 시스템의 조합에 따라 다양한 다중상태 능동소나 시스템이 존재할 수 있다.

다중상태 능동소나 시스템은 서로 다른 플랫폼에서 운용되는 다양한 송신기와 수신기를 사용할 수 있기 때문에 기존의 단상태 소나 시스템에 비해서 탐지 영역이 넓어지고 탐지, 추적, 식별 성능이 우수하다. 그러나 서로 다른 펄스를 운용할 때 발생하는 송신직접파에 의한 강한 간섭 문제 때문에 표적 신호가 마스킹(masking)되는 문제가 발생한다. 따라서 다중상태 능동소나 시스템을 위한 송신 펄스를 설계할 때에는 송신직접파의 간섭을 최소화하기 위해 서로 다른 펄스가 직교성을 가지도록 설계해야 한다.

n 번째 송신기의 송신 펄스 신호 모델은 다음과 같다.

$$s_n(t) = e^{j\varphi(t)} e^{j2\pi f_n t}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

여기서 $\varphi(t)$ 는 펄스의 위상 함수(phase function)로 펄스의 특성을 결정하고, f_n 는 n 번째

송신 펄스의 중심주파수를 의미한다.

다중상태 능동소나 시스템의 성능을 평가하기 위해서는 특정 펄스에 대한 성능을 평가하는 자가 모호성 함수(auto ambiguity function)와 서로 다른 펄스 간의 상호상관도를 평가하는 상호 모호성 함수(cross ambiguity function)를 함께 확인해야 한다(Kim, Geunhwan, et al., 2021; Collins, Timothy., 1996; Nielsen, Richard O., 1991). n 번째 송신 펄스의 자가 모호성 함수는 아래의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\chi_{n,n}(\tau, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_n(t) s_n^*(\eta(t+\tau)) dt \quad (2)$$

여기서 $s_n(t)$ 는 n 번째 송신기의 송신 펄스 신호, τ 는 시간지연을 나타내고, η 는 도플러 인자를 나타낸다. 계산된 모호성 함수의 형태를 분석하여 거리, 도플러 해상도나 부엽의 영향 등을 평가할 수 있다. 자가 모호성 함수의 부엽 크기를 나타내는 integrated sidelobe level (ISL)은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$ISL = \sum_{\tau, \eta \in SLL} 10 \log |\chi_{n,n}(\tau, \eta)|^2 \quad (3)$$

상호 모호성 함수는 아래의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\chi_{m,n}(\tau, \eta) = \sqrt{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_n^*(\eta(t+\tau)) dt \quad (4)$$

여기서 $s_n(t)$ 는 n 번째 송신기의 송신 펄스 신호, $s_m(t)$ 는 m 번째 송신기의 송신 펄스 신호를 나타낸다. 상호 모호성 함수를 이용하면 서로 다른 두 펄스가 주고 받는 상호상관도를 평가할 수 있다. 상호 모호성 함수를 이용하여 상호상관도를 정량적으로 평가할 수 있는 척도인 peak cross-correlation level (PCCL)을 아래와 같이 정의할 수 있다(Kim, Geunhwan, et al., 2021).

$$PCCL = \max \{ 10 \log |\chi_{n,m}(\tau, \eta)|^2 \} \quad (5)$$

2.2 기존 펄스 설계 기법의 문제점

기존의 다중상태 능동소나 시스템을 위한 펄스 설계 연구는 시간-대역폭 곱(time-bandwidth product)를 최대화하기 위해 펄스의 대역폭을 넓히고, 겹쳐지는 대역에 대한 직교성을 확보하기 위해 펄스의 위상 함수를 개선하는 방향으로 진행되었다(J. B. Soli, 2017; Rowe, William, 2014). 그러나 위상 함수를 이용하여 얻을 수 있는 직교성은 그 성능에 한계가 있으며, 따라서 송신직접파를 억제할 수 있는 널 제한 범형성(Van Trees, Harry L., 2014) 또는 적응형필터(Lourey, S., 2017) 등의 전처리 기법이 필수적이다. 그러나 전처리 기법 역시 실제 해상환경에서는 이론적으로 계산된 것보다 송신직접파 억제 성능이 낮을 수 있다. 따라서 실질적인 운용 환경을 가정할 경우 펄스의 대역폭을 서로 격리하여 직교성을 최대화하도록 펄스를 설계하는 것이 선호될 수 있다.

그러나 펄스의 대역폭을 완전히 격리하여 펄스를 설계하더라도 송신직접파의 간섭 문제를 완전히 해결하지 못한다. 이는 펄스의 에너지가 설계 주파수 대역폭에서 누설(leakage)되기 때문이다(J. B. Soli, 2017; Kim, Geunhwan, et al., 2021). 이에 더해 표적이 이동할 경우 도플러에 의한 주파수 스펙트럼 천이 효과도 발생하며, 따라서 펄스 대역폭 사이에 일정 범위의 마진(margin)이 필요하다. 그러나 마진을 설정하기 위해 창함수를 사용하거나 펄스의 대역폭을 감소시키면, 시간 영역의 포락선 혹은 모호성 함수가 왜곡되거나 해상도 및 탐지 성능이 저하된다. 따라서 성능 저하를 최소화하면서 송신직접파의 간섭 역시 억제할 수 있는 새로운 펄스 설계 기법이 필요하다.

3. SHAPE 알고리즘을 이용한 펄스 설계 기법

기존의 스펙트럼 형태 최적화 기법은 대역의 깊이, 폭, 개수 등에 대한 제한이 있고 스펙트럼 형태를 성형할 때 자유도가 낮은 단점이 있었다. 하지만 SHAPE 알고리즘은 펄스의 스펙트럼 형태를 원하는 대로 성형하면서, 동시에 일정한 크기의 진폭을 가지고 자가 모호성 함수에 왜곡을 발생시키지 않도록 설계할 수 있다는 장점이 있다. 이번 장에서는 상호상관도를 최소화하도록 펄스의 스펙트럼을 성형하면서 동시에 펄스 자체의 성능을 유지할 수 있는 SHAPE 알고리즘을 이용한 펄스 설계 기법을 제안한다.

펄스의 스펙트럼 성형 문제는 다음의 식과 같이 최소자승법(least square)으로 나타낼 수 있다(Rowe, William, 2014).

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\mathbf{x}, \theta} \|\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{y} \odot e^{j\theta}\|_2^2 \\ & \text{subject to } |x_i|^2 = h_i, \text{ for } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 \odot 는 요소별 곱을 의미하며, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 는 실수의 집합으로 설계하고자 하는 펄스의 시간 영역 수열(sequence)을 의미한다. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_0^+^{N \times 1}$ 는 성형하고자 하는 스펙트럼의 크기 성분, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 은 단일 푸리에 행렬을 그리고 $\theta \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 는 위상을 의미한다. 시간 영역 수열에 대한 시간 포락선 제약조건은 $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ 로 표현된다. 일반적으로 \mathbf{h} 는 창함수와 관련된 값을 가진다. Eq. (6)의 문제는 행렬 \mathbf{F} 가 유니터리 행렬(unitary matrix)이기 때문에 아래의 식과 같이 반복적인 과정을 통해 최적화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Given } \mathbf{x} : \hat{\theta} &= \arg\{\mathbf{F}^H \mathbf{x}\} \\ \text{Given } \theta : \hat{\mathbf{x}} &= \sqrt{\mathbf{h}} \odot e^{j \times \arg\{\mathbf{F}(\mathbf{y} \odot e^{j\theta})\}} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\sqrt{\cdot}$ 는 요소별 제곱근 연산을 의미한다. 그러나 위의 식을 통해 스펙트럼이 수렴하더라도 \mathbf{y} 의 형태를 중심으로 진동할 수 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해서, 스펙트럼 모양

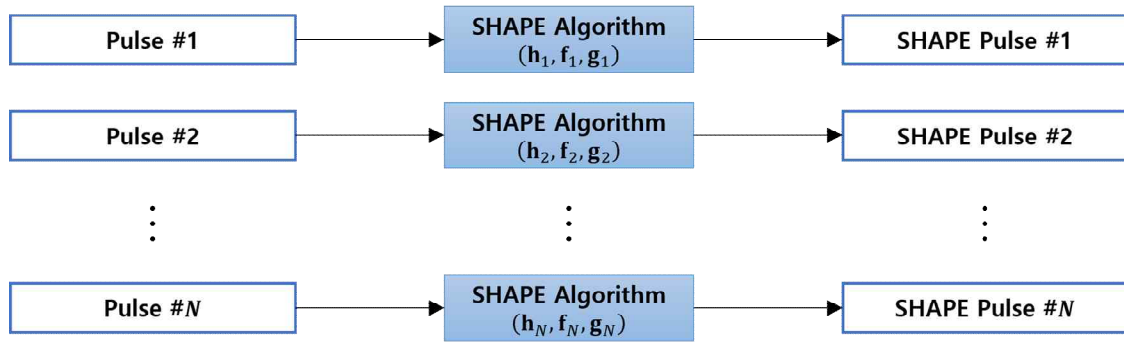


Fig. 2 Scheme of the proposed pulse design method using SHAPe algorithm.

에 더 많은 자유도를 부여하는 SHAPe 알고리즘이 제안되었다(Rowe, William, 2014).

SHAPe 알고리즘은 Eq. (7)의 특정한 \mathbf{y} 를 찾는 문제를 경계 조건을 만족하는 스펙트럼의 수열을 찾는 문제로 변경한다. 이때 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ 와 $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T$ 는 각각 주파수의 상한과 하한 경계함수이다. SHAPe 알고리즘은 아래 식과 같은 반복적인 과정을 통해 최적화한다 (자세한 최적화 과정은 부록 참조).

$$\text{minimize}_{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \alpha} \|\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}\|_2^2 \quad (8)$$

$$\text{subject to } |x_i|^2 = h_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

$$|z_i|^2 \leq f_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

$$|z_i|^2 \geq g_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

다중상태 소나 시스템을 위한 펄스를 설계할 때 요구되는 조건은 펄스의 대역폭 밖으로 누출되는 스펙트럼을 최소화하여 펄스 간의 상호상관도를 최소화하면서 시간 영역 신호의 시간 포락선은 일정하게 유지하는 것이다. 따라서 n 번째 펄스에 적용되는 SHAPe 알고리즘의 시간 포락선 제약조건 \mathbf{h}_n 은 기존에 설계된 n 번째 펄스의 창함수를 따르도록 설정한다. n 번째 펄스에 적용되는 경계함수 \mathbf{f}_n 은 펄스의 대역폭에 해당하는 경우에는 1로 설정하고, 그렇지 않으면 송신직접파를 제거하기 위해 시스템이 요구하는 낮은 값 (통상 -40 dB 이하)으로 설정한

다. 경계함수 \mathbf{g}_n 은 본 논문의 목적과 무관하므로 설정하지 않는다. 제안하는 SHAPe 알고리즘을 이용한 펄스 설계 흐름도를 정리하여 Fig. 2에 나타내었다.

4. 시뮬레이션

제안하는 SHAPe 알고리즘을 이용한 펄스 설계 기법의 유용성을 검증하기 위해서 중심 주파수가 다르고 대역폭이 겹치지 않는 두 개의 사인파 주파수 변조 (sinusoidal frequency modulated, SFM) 펄스(Collins, Timothy., 1996)를 설계하고 SHAPe 알고리즘을 적용하여 나타나는 결과를 비교 분석하였다(시뮬레이션에서 두 개의 펄스에 대해서 결과를 검증하면 두 개 이상의 펄스를 송수신하는 다중상태 능동소나 시스템으로 쉽게 확장할 수 있다). SFM 펄스의 중심 주파수는 각각 3kHz, 3.4kHz이고 대역폭은 400Hz, 길이는 1 s 이다. SHAPe 알고리즘의 경계 조건은 -60dB, 최대 반복횟수는 10,000회로 설정하였다.

Fig. 3 (a)와 (b)에 생성된 SFM 펄스의 시간-전압 파형을 나타내었으며, Fig. 3 (c)와 (d)에는 SHAPe 알고리즘이 적용되었을 때 시간-전압 파형을 나타내었다. SHAPe 알고리즘이 적용되어 스펙트럼을 변형시키더라도 크게 왜곡되지 않기 때문에 송신효율이 우수할 것으로 기대할 수 있다.

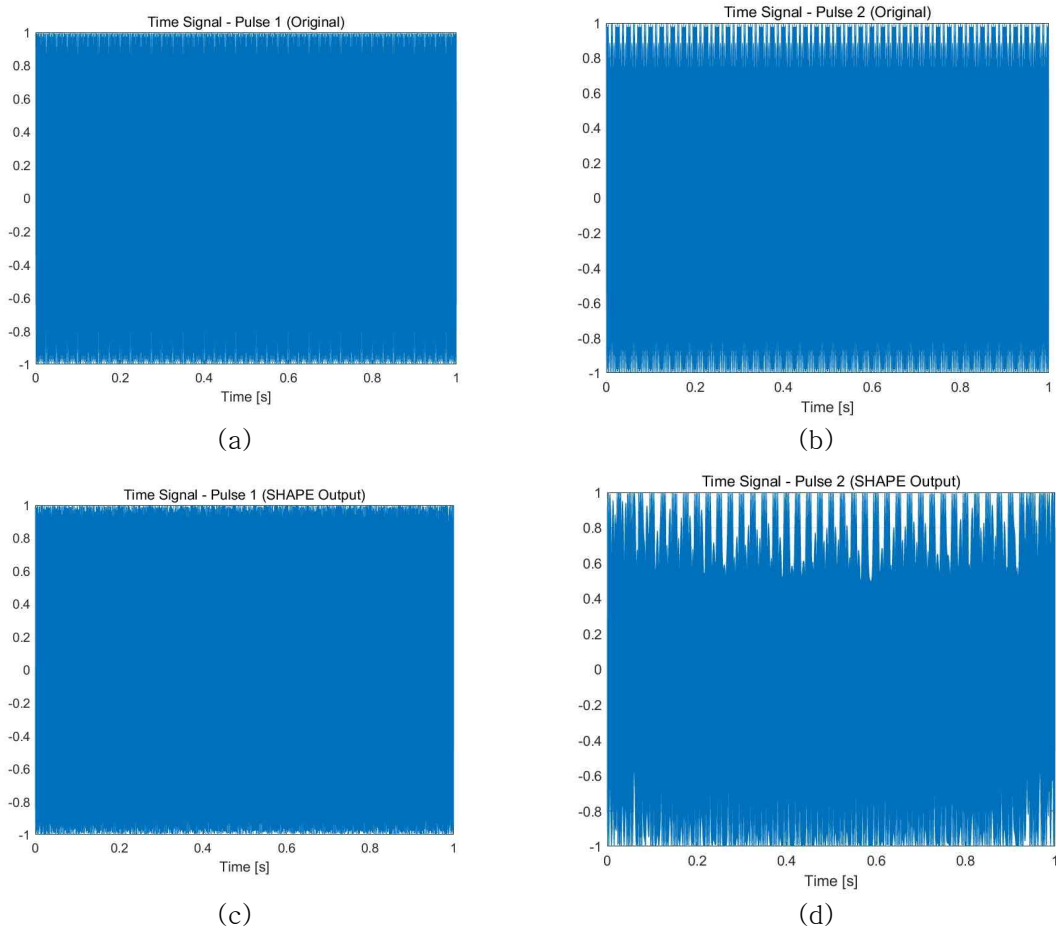


Fig. 3 The time-voltage waveform of (a) 1st SFM pulse, and (b) 2nd SFM pulse. The time-voltage waveform when SHAPE algorithm is applied of (c) 1st SFM pulse, and (d) 2nd SFM pulse.

Fig. 4 (a)와 (b)에서 주파수 스펙트럼을 확인할 수 있으며, SFM 펄스를 생성할 때 설정한 주파수 대역을 빨간색 세로 선으로 나타내었다. SFM 펄스의 특성상 스펙트럼의 누출이 심한 것을 확인할 수 있으며, 따라서 두 SFM 펄스 간의 상호상관도가 높을 것으로 예측할 수 있다. Fig. 4 (c)와 (d)의 자가 모호성 함수에서는 도플러 5 m/s 위치에서 낮은 부엽을 가지는 것을 확인할 수 있으며 SFM 펄스가 가지는 빗살 스펙트럼 (comb spectrum)의 특성으로 인한 결과이다.

Fig. 5에는 SHAPE 알고리즘이 적용된 SFM 펄스에 대한 주파수 스펙트럼과 자가 모호성 함

수를 나타내었다. Fig. 5 (a)와 (b)에서 대역폭 외의 주파수에서 스펙트럼의 크기가 -60 dB 이하로 성형된 것을 확인할 수 있다. Fig. 5 (c)와 (d)의 자가 모호성 함수를 확인해보면 도플러 5 m/s 위치에서 부엽 크기가 증가한 것을 확인할 수 있다. 이는 SHAPE 알고리즘으로 인해 누출된 스펙트럼의 톤(tonal) 성분이 제거되어 SFM 펄스의 특성을 일부 잃었기 때문이다.

Fig. 6에 SHAPE 알고리즘 적용 여부에 따른 상호 모호성 함수를 비교 분석하였다. Fig. 6 (a)에서 SHAPE 알고리즘 적용 이전의 SFM 펄스에 대한 상호 모호성 함수는 전체적으로 크기

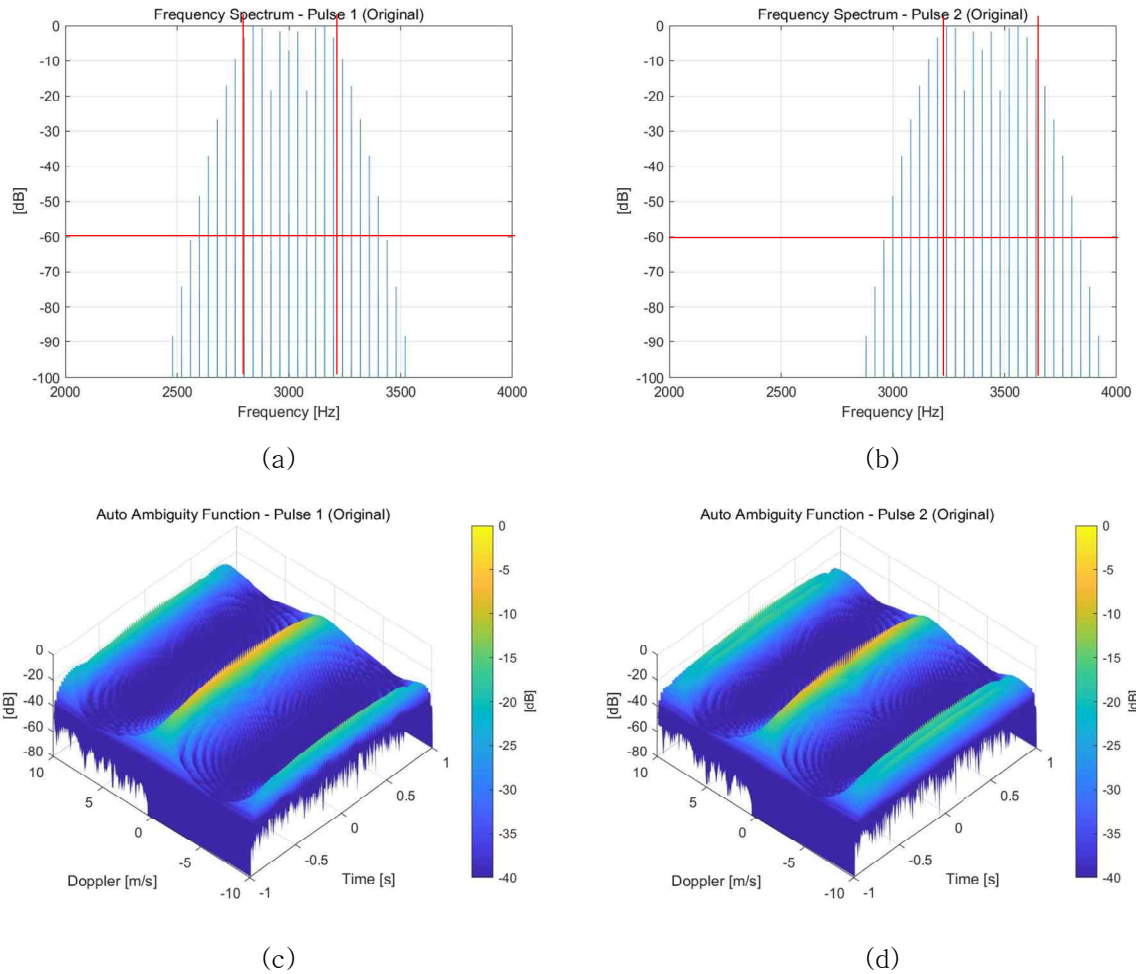


Fig. 4 The characteristics of two SFM pulse. (a) Spectrum of 1st SFM pulse. (b) Spectrum of 2nd SFM pulse. (c) Ambiguity function of 1st SFM pulse. (d) Ambiguity function of 2nd SFM pulse

가 높게 나타나지만 Fig. 6 (b)에서 SHAPE 알고리즘 적용 이후의 SFM 펄스에 대한 상호 모호성 함수는 전체적으로 낮은 값을 가지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 4에서 Fig. 6까지 모호성 함수를 이용하여 정성적으로 분석된 결과를 정량적으로 평가하기 위해 ISL과 PCCL을 계산하여 Table 1에 나타내었다. SHAPE 알고리즘을 적용할 경우가 모호성 함수에서 왜곡이 발생하였기 때문에 부엽의 크기를 의미하는 ISL이 적용하지 않은 경우보다 11.64 dB 증가했지만, 대역폭 밖으

로 누출되는 스펙트럼을 감소시킬 수 있었기 때문에 상호상관도를 평가하는 PCCL이 적용하지 않은 경우보다 약 44.23 dB 감소된 것을 확인할 수 있다. 따라서 SHAPE 알고리즘을 이용하여 SFM 펄스를 설계하면 펄스의 성능을 일부 손해 보더라도 상호상관도를 낮춰 다중상태 소나 시스템에서 발생하는 송신직접파의 영향을 억제할 수 있다.

5. 결 론

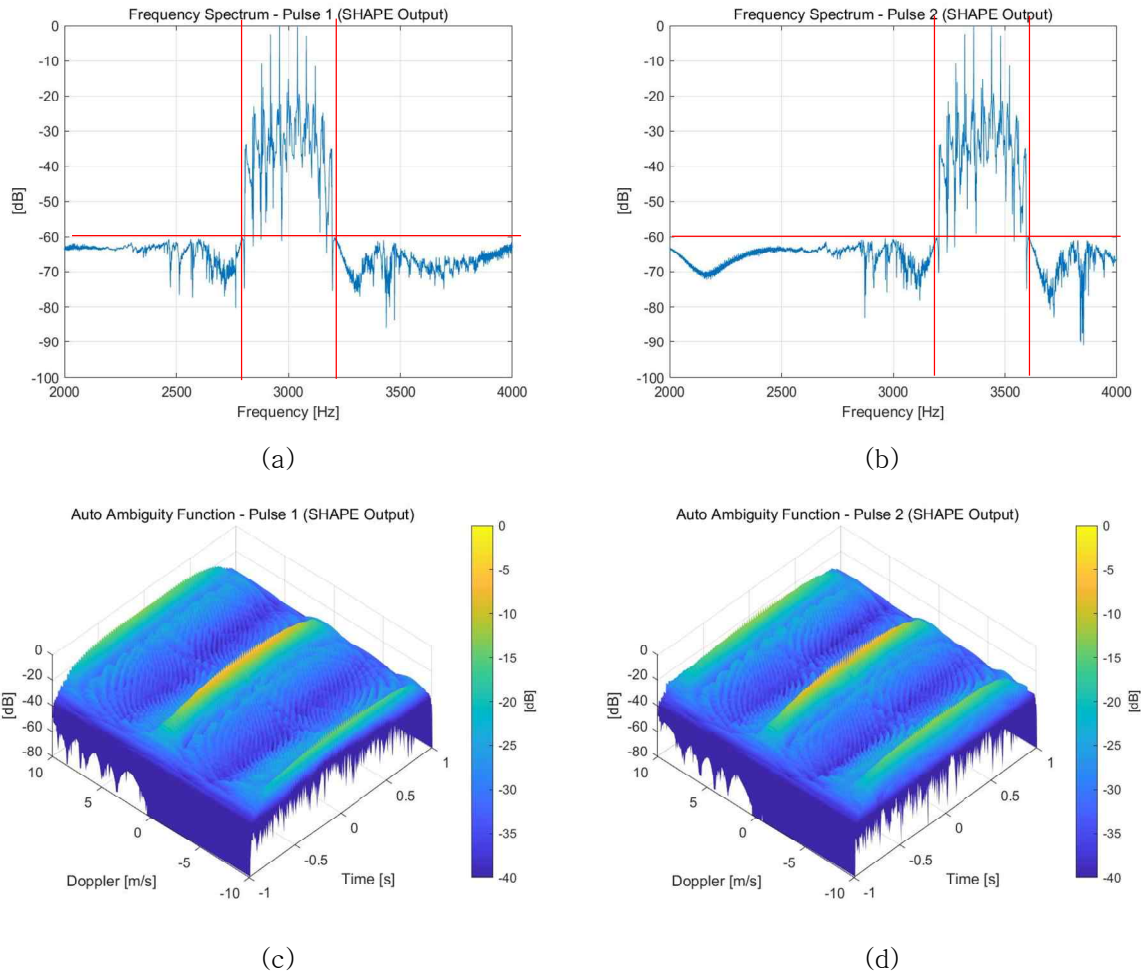


Fig. 5 The characteristics of two SFM pulse when SHAPE algorithm is applied. (a) Spectrum of 1st SFM pulse. (b) Spectrum of 2nd SFM pulse. (c) Ambiguity function of 1st SFM pulse. (d) Ambiguity function of 2nd SFM pulse

본 논문은 SHAPE 알고리즘을 이용한 다중상태 소나 시스템의 펄스 설계 기법을 제안하였다. 제안한 기법은 SHAPE 알고리즘이 펄스의 스펙트럼 형태를 원하는 대로 성형하면서, 동시에 시간 영역 신호와 모호성 함수에 왜곡을 발생시키지 않도록 펄스를 설계할 수 있다는 장점을 이용한다. 따라서 SHAPE 알고리즘을 이용하여 설계된 펄스는 주파수 스펙트럼이 인접한 펄스 간의 상호상관도가 낮으면서 펄스의 자체적인 성능은 유지할 수 있는 장점이 있다. 시뮬레이션을 통해 SFM 펄스에 SHAPE 알고리즘

을 적용한 결과 ISL이 적용하지 않은 경우와 비교해서 11.64 dB 증가했지만 PCCL이 44.23 dB 감소하여 송신직접파의 영향을 효과적으로 억제할 수 있음을 검증하였다.

부록: SHAPE 알고리즘

SHAPE 알고리즘은 세 가지 단계를 반복하여 Eq. (8)을 최적화한다(Rowe, William, 2014). 첫 번째 단계는 (α, \mathbf{x}) 가 주어져 있을 때 제약조건

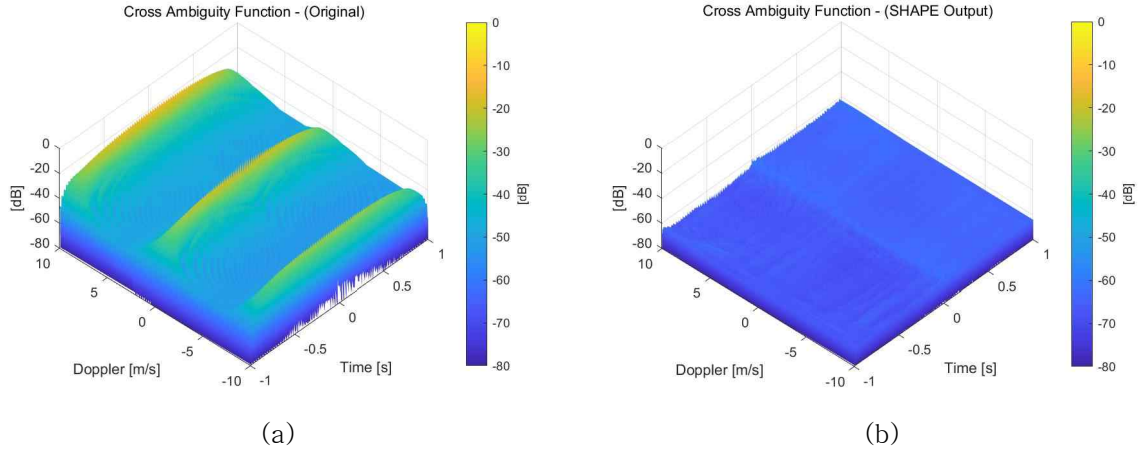


Fig. 6 The comparison of cross ambiguity function. (a) Original (b) SHAPE

Table 1 The comparison of ISL and PCCL of SFM pulse depending on whether SHAPE algorithm is applied or not.

	ISL	PCCL
Original	-40.44 dB	-13.76 dB
SHAPE	-28.80 dB	-57.99 dB

을 만족하도록 \mathbf{z} 를 최적화하는 것이다. 시간 영역 수열 \mathbf{x} 와 크기 인자 α 를 충족하는 스펙트럼 벡터 \mathbf{z} 를 찾는 과정은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{minimize}_{\mathbf{z}} \|\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}\|_2^2 \quad (9)$$

$$\text{subject to } |z_i| \leq f_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

$$|z_i| \geq g_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

\mathbf{z} 에 대한 제약조건이 없다면 단순히 $\mathbf{z}_{\text{opt}} = \tilde{\mathbf{x}}/\alpha$ 또는 $(z_i)_{\text{opt}} = (|\tilde{x}_i|)/(|\alpha|)e^{j(\phi_{x_i} - \phi_\alpha)}$ 가 된다. 이때 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^H \mathbf{x}$ 이다. Eq. (9)의 비용함수를 $c_1(\mathbf{z})$ 라고 하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$c_1(\mathbf{z}) = (\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \alpha \mathbf{z})^H (\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}) \quad (10)$$

$$= \mathbf{x}^H \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{x} + |\alpha|^2 \mathbf{z}^H \mathbf{z} - 2 \text{Re} \{ \alpha^H \mathbf{z}^H \mathbf{F}^H \mathbf{x} \}$$

이를 다시 쓰면 다음의 식으로 표현된다.

$$c_1(|z_1|, \phi_{z_1}, \dots, |z_N|, \phi_{z_N}) \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^N (|\tilde{x}_i|^2 + |\alpha|^2 |z_i|^2 - 2|\alpha||z_i||\tilde{x}_i| \text{Re} \{ e^{j(\phi_{x_i} - \phi_\alpha - \phi_{z_i})} \})$$

이때

$$|\tilde{x}_i|, |\alpha|, |z_i| \geq 0$$

이고

$$-1 \leq \text{Re} \{ e^{j(\phi_{x_i} - \phi_\alpha - \phi_{z_i})} \} \leq 1$$

이기 때문에 $c_1(\mathbf{z})$ 의 최솟값은

$$\text{Re} \{ e^{j(\phi_{x_i} - \phi_\alpha - \phi_{z_i})} \} = 1$$

이 된다. 이는 제약조건이 없는 최적의 해 $\phi_{z_i} = \phi_{x_i} - \phi_\alpha$ 와 같은 위상을 가진다. 이 최적의 위상을 $c_1(\cdot)$ 에 적용하면 각각의 $|z_i|$ 에 대한 2차 함수가 생성된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (|\tilde{x}_i|^2 + |\alpha|^2 |z_i|^2 - 2|\alpha||z_i||\tilde{x}_i|) \quad (12) \\ & = \sum_{i=1}^N (|\tilde{x}_i| - |\alpha||z_i|)^2 \end{aligned}$$

각각의 는 $|\tilde{x}_i|/|\alpha|$ 일 때 제로 비용 가치를 가지지만, 이는 실현 가능한 집합 $[g_i, f_i]$ 에 존재하지 않을 수 있다. 만약 $|\tilde{x}_i|/|\alpha| < g_i$ 이면 비용 함수의 최솟값은 $|z_i| = g_i$ 일 때가 된다. 마찬가지로 만약 $|\tilde{x}_i|/|\alpha| > f_i$ 이면 비용 함수의 최솟값은 $|z_i| = f_i$ 일 때가 된다. 따라서 Eq. (10)의 해는 Eq. (13)과 같다.

$$\tilde{z}_i = \begin{cases} f_i e^{j(\phi_{z_i} - \phi_\alpha)} & : |\tilde{x}_i|/|\alpha| > f_i, \\ g_i e^{j(\phi_{z_i} - \phi_\alpha)} & : |\tilde{x}_i|/|\alpha| < g_i \\ \frac{\tilde{x}_i}{\alpha} & : \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

두 번째 단계는 주어진 (\mathbf{x}, \mathbf{z}) 에 대해 α 를 최적화하는 과정이며 아래의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\text{minimize}_{\alpha} \|\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \alpha \mathbf{z}\|_2^2 \quad (14)$$

제약조건이 없으므로 두 번째 단계의 해는 간단하게 아래의 식으로 계산될 수 있다.

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{z}^H \mathbf{F}^H \mathbf{x}}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \quad (15)$$

세 번째 단계는 주어진 (α, \mathbf{z}) 에 대해 \mathbf{x} 를 최적화한다. \mathbf{x} 는 \mathbf{z} 가 주어지고 \mathbf{x} 가 원하는 포락선 모양을 갖도록 한다. 비용함수는 다음과 같다.

$$\text{minimize}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \alpha \mathbf{F} \mathbf{z}\|_2^2 \quad (16)$$

$$\text{subject to } |x_i|^2 = h_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, N$$

이 식에서 \mathbf{F} 는 단일 푸리에 행렬이며, 행렬 노름이 단일 변환에 변하지 않는다는 사실을 활

용하면 $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{F} \mathbf{z}$ 일 때 비용함수의 위상을 최적화하는 해는 $\phi_{x_i} = \phi_{z_i} + \phi_\alpha$ 이다. x_i 의 진폭은 제약 조건에 의해서 고정되기 때문에 해는 다음과 같다.

$$\tilde{x}_i = \sqrt{h_i} e^{j(\phi_{z_i} + \phi_\alpha)}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

References

- Collins, Timothy. (1996), Active sonar pulse design. Diss. University of Birmingham.
- D. A. Hague and J. R. Buck (2015), The generalized sinusoidal frequency modulated waveform for continuous active sonar, OCEANS 2015-Genova. IEEE.
- Gianelli, Christopher, Luzhou Xu, and Jian Li. (2015), Active sonar systems in the presence of strong direct blast, OCEANS 2015-Genova. IEEE.
- J. B. Soli (2017), High resolution continuous active sonar, Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Comput. Eng., Duke Univ., Durham, NC, USA.
- Kim, Geunhwan, et al. (2021), A Study on Pulse Train Waveforms for High Duty Cycle Sonar Systems: Optimization Scheme and Relationship Between Orthogonality and Bandwidth. IEEE Access 9, 119800-119817.
- Kim, Hyeon-su, et al. (2021), A method for setting coherent processing interval of continuous active sonar based on correlation of GSFM pulse, The Journal of the Acoustical Society of Korea 40.5 401-407.
- Lourey, S. (2017), Adaptive filtering for enhanced detection of continuous active sonar signals. Proceedings of the Underwater Acoustics Conference & Exhibition.
- Nielsen, Richard O. (1991), Sonar signal

- processing. Artech House, Inc.
- P. C. Hines (2013), Experimental comparison of continuous active and pulsed active sonars in littoral waters, in 1st Int. Conf. Exhib. Underwater Acoust., 7.
- R. V. Vossen, S. Beerens, and E. Spek (2011), Anti-submarine warfare with continuously active sonar, Sea Technol. 52.11, 33.
- Rowe, William, Petre Stoica, and Jian Li. (2014), Spectrally constrained waveform design, IEEE Signal Processing Magazine 31.3, 157-162.
- Van Trees, Harry L. (2014), Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory. John Wiley & Sons, 2004. Processing Magazine 31.3.
- Xu, Luzhou, Jian Li, and Akshay Jain. (2015), Impact of strong direct blast on active sonar systems, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 51.2 894-909.



김 근 환 (Geunhwan Kim)

- 정회원
- 경북대학교 전자공학부 학사
- 경북대학교 전자공학부 석사
- 경북대학교 전자공학부 박사
- (현재) 세종대학교 해양시스템

융합공학과 박사후연구원

- 관심분야: 소나 신호처리, 펄스 설계, 탐지이론, 딥러닝



이 동 화 (Donghwa Lee)

- 정회원
- 경북대학교 전자전기공학 학사
- 경북대학교 전자전기컴퓨터 석사
- KAIST 건설및환경공학 박사
- (현재) 대구대학교 AI학부

부교수

- 관심분야: 지능로봇시스템, 인공지능, 소나 신호처리