



Numerical analysis of shallow-water flow over the square-edged broad-crested weir

Hwang, Seung-Yong^{a*}

^aResearch Fellow, Korea Institute of Civil Engineering and Building Technology, Goyang, Korea

Paper number: 22-076

Received: 14 September 2022; Revised: 28 September 2022; Accepted: 30 September 2022

Abstract

Accuracy of a numerical model with the Hwang's scheme of directly analyzing discontinuous topography could be enhanced by introducing a flux correction coefficient that accounted for the deviation of actual pressure from hydrostatic distribution acting on the front of discontinuous topography. The optimal coefficient was determined from 218 experimental runs for square-edged broad-crested weir and simulation with it showed good agreement with another two square-edged broad-crested weir experiments and an unsteady side-weir experiment. This enabled accurate numerical simulation of shallow-water flow over the discontinuous river structure, such as square-edged broad-crested weir, without alleviating discontinuous topography with refined meshes or imposing internal boundary conditions.

Keywords: Square-edged broad-crested weir, Discontinuous topography, Shallow-water flow, Numerical simulation, Hwang's scheme

직각 광정 위어를 지나는 천수 흐름의 수치 해석

황승용^{a*}

^a한국건설기술연구원 연구위원

요 지

불연속 지형 전면에 작용하는 정수압 분포에 실제 압력과 차이를 해명하는 흐름을 보정 계수를 도입하여 불연속 지형을 직접 해석하는 Hwang의 기법이 적용된 수치 모형의 정확도를 높일 수 있었다. 218개 실험 시행으로 직각 광정 위어의 월류량에 가장 적합한 계수를 결정하였으며, 이것을 별도의 두 가지 직립 광정 위어 실험과 측면 위어 부정류 실험에 적용해보니 실험과 모의에서 월류량이 서로 잘 일치하였다. 이로써 조밀한 격자로 불연속 지형을 완화하거나 내부 경계를 부여하지 않고도 직각 광정 위어와 같은 불연속 하천 구조물을 지나는 천수 흐름의 정확한 수치 모의가 가능해졌다.

핵심용어: 직각 광정 위어, 불연속 지형, 천수 흐름, 수치 모의, Hwang의 기법

1. 서 론

위어의 치수를 바닥에서 마루까지 위어 높이(H_w), 흐름 방향의 위어 길이(L_w), 그것에 직각 방향의 위어 폭(B_w)으로 둔다면, Fig. 1에 보인 광정(broad-crested) 위어는 하도의 조절 단면(control section)이 되는 마루 길이, 곧 위어 길이가 비교적 긴 형태의 하천 구조물이다(Reclamation, 2001).

위어 길이가 긴 광정 위어의 기하 특징 때문에 마루 위 수면 변화가 상류에서 피압 수두(piezometric head), h_0 에 달려있음에 착안하여 Tracy (1957)는 상류 수두와 위어 길이의 비(h_0/L_w)가 0.4보다 크면 단(short), 0.08보다 작으면 장(long), 두 한계 사이를 정(normal) 위어로 구분하였다. Reclamation (2001)에 따르면, '진정한' 광정 위어 흐름은 정 위어 범위를 약간 벗어난 0.05와 0.5 사이에 있을 때 나타난다. Govinda Rao and Muralidhar (1963)는 Tracy (1957)보다 좀 더 세분하여 0.1보다 작으면 장정(long-crested), 그보다 크고 0.4보다

*Corresponding Author. Tel: +82-31-910-0653
E-mail: syhwang@kict.re.kr (Hwang, Seung-Yong)

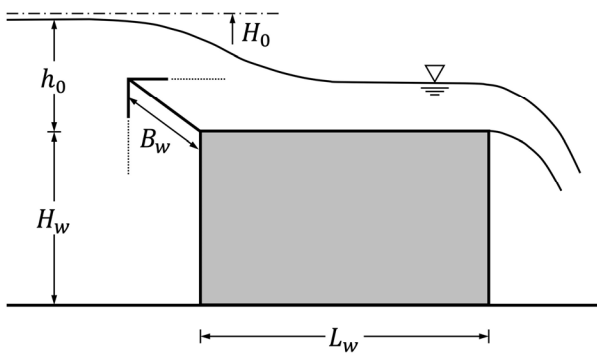


Fig. 1. Definition sketch of broad-crested weir

작으면 광정, 0.4보다 크고 1.5 내지 1.9보다 작으면 협정 (narrow-crested), 그보다도 크면 예연 위어로 두었다. Hager and Schwalt (1994)는 위어 상류에서 피압 수두 대신 에너지 수두(H_0)를 이용하여 위어의 상대 길이, $\xi_w \equiv H_0/L_w$ 로 정의하고, 위어 유형을 $0 < \xi_w \leq 0.1$ 이면 장정, $0.1 < \xi_w \leq 0.4$ 이면 광정, $0.4 < \xi_w \leq 0.5$ 이면 단정(short-crested), 끝으로 $\xi_w > 1.5$ 이면 예연 위어로 분류하였다.

Horton (1907)은 19세기 말 Henry Bazin을 비롯한 프랑스 실험 수리학자들이 수행한 실험이 규모가 크고 합당한 기준 아래 이루어져 결과를 신뢰할 수 있을 정도로 상당한 가치가 있다고 평가하였다. Rafter (1900)는 Henry Bazin의 실험 결과를 영미 단위로 재계산하여 소개하고 자신의 실험에서 유량 규모를 키우고 수두를 더 높게 설정하여 Henry Bazin의 실험을 확충하였다. Horton (1907)도 Henry Bazin의 실험을 참고하여 그보다 훨씬 넓은 실험 수로에서 유량 규모를 큰 폭으로 바꾸면서 다양한 형상의 위어와 모형 댐을 시험하였다.

광정 위어가 수리 계측기기로 활용된다면, 형상에서 상류 전면은 직립, 마루 모서리는 직각(square-edged), 표면은 수평이어야 한다(Hager and Schwalt, 1994). 직각 광정 위어 실험 경우는 앞서 소개한 Henry Bazin의 실험은 물론, Rafter (1900)와 Horton (1907)의 실험에도 이미 포함되어 있으며, 이후에도 직각 광정 위어를 대상으로 다양한 물리/수치 실험 연구가 있었다(Doeringsfeld and Barker, 1941; Moss, 1970; Sarker and Rhodes, 2004; Paik and Lee, 2015).

Doeringsfeld and Barker (1941)는 직각 광정 위어 흐름에 적용된 운동량 원리에서 유량 계수를 유도하고, 상류 수두와 마루 위 수심의 비를 실험실 실험으로 결정하였다. Moss (1970)는 기존 포텐셜 이론에서 더 나아가 직각 광정 위어의 상류 마루 끝에서 시작되는 흐름 박리(separation)를 고려한 해석 모형을 개발하고 실험실 실험으로 검증하였다. Hager and Schwalt (1994)는 유량 측정 구조물로서 효용을 실험으로 검토하였으

며, 위어 유형이 광정 위어이고 하류 수위에 잠기지 않는 조건에서 직각 광정 위어가 권장된다고 결론지었다. Goodarzi *et al.* (2012)은 실험실 수로에 설치된 직각 광정 위어 전면에 다양한 경사를 도입하여 위어를 지나는 흐름의 수면 변화와 유량 계수를 검토하였다.

실험 실험과 함께 직각 광정 위어를 지나는 흐름 구조와 난류 특성 파악하려고 수치 실험도 병행하였는데, 20세기까지는 주로 흐름을 이상 유체로 가정하여 연직 2차원 평면에서 유속 포텐셜이나 유선 함수의 Laplace 방정식을 풀었다(Moss, 1970; Vanden-Broeck and Keller, 1986). 이후 상업용 CFD (Computational Fluid Dynamics) 패키지 보급이 늘면서 직각 광정 위어 흐름을 온전한 3차원 모형으로 해석하거나(Sarker and Rhodes, 2004; Hargreaves *et al.*, 2007), 한 차원 줄여 연직 2차원 평면으로 두었다(Kirkgoz *et al.*, 2008; Paik and Lee, 2015).

직각 광정 위어의 월류량 계산에 Saint-Venant 방정식이나 천수 방정식처럼 단면이나 수심 적분 모형이 적용된 사례를 찾아보기 어렵는데, 이는 천수 이론(shallow-water theory)에 따라 도입된 바닥 경사(곧, 표고의 공간 미분)가 연속이 아닌 공간에서 정의되지 않기(즉, 미분 불가능이기) 때문이다(Hwang, 2015). 따라서 불연속 지형을 경사면으로 완화하거나, 가상의 내부 경계 조건으로 미리 결정된 월류량 공식을 부여하고 흐름 양상에 따른 별도 처리로 정확도 향상을 도모한다(Jun, 1996; Morales-Hernández *et al.*, 2013; Echeverribar *et al.*, 2019)

수심 적분 모형으로 불연속 지형을 직접 해석하려는 시도로서 Zhou *et al.* (2002)은 불연속 지형의 흐름 저항을 흐름 단면의 급축소(abrupt contraction)에 따른 수두 손실로 보고 저항 응력(resistance stress) 생성항(source term)을 천수 방정식에 더했으며, Lee (2020)는 같은 식에 난류 응력(turbulent stress) 항을 더하여 DG (Discontinuous Galerkin) 음해법(implicit method)으로 풀었다. Prokof'ev (2005)는 불연속 지형에 따른 흐름 저항 규명보다는 수치 해법의 선평형성(well-balancedness) 충족에 주안점을 두고 바닥의 반작용(reaction)을 정수압으로 두었다. Hwang (2015)은 직각 광정 위어와 같은 불연속 하천 구조물을 지나는 천수 흐름에서 구조물 때문에 흐름 저항이 지배적인 전면과 그에 비해 거침없이 지나가는 그 위로 구분하여 흐름률(flux)을 계산하는 새로운 기법을 제시하였다.

Hwang (2015)의 기법 덕분에 생성항의 추가 없이 불연속 지형을 경사로 완화하지 않고 직접 해석할 수 있으며, 계산 격자의 수나 모의 시간도 획기적으로 줄일 수 있다(Hwang, 2019; Hwang and Kim, 2021). 이 연구에는 Hwang (2015)의 기법이 채택된 2차원 수심 적분 모형으로 직각 광정 위어의 월류 현상을 모의하고 실험 결과와 비교한다.

2. 이론

2.1 지배 방정식

지배 방정식은 다음과 같이 보존형으로 나타낸 천수 방정식이다(Weiyan, 1992).

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (1a)$$

여기에서 아래 첨자 t , x 와 y 는 각각 시간과 공간(평면 2차원) 편미분이고 보존 변수 벡터, \mathbf{U} , 각각 x 와 y 방향의 흐름률 벡터, \mathbf{F} 와 \mathbf{G} , 그리고 생성항 벡터, \mathbf{S} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = [h, hu, hv]^T \quad (1b)$$

$$\mathbf{F} = [hu, hu^2 + gh^2/2, huv]^T \quad (1c)$$

$$\mathbf{G} = [hv, hvu, hv^2 + gh^2/2]^T \quad (1d)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_f \quad (1e)$$

여기에서 h 는 수심, u 와 v 는 각각 x 와 y 방향의 유속, g 는 중력 가속도이고, \mathbf{S}_0 와 \mathbf{S}_f 는 각각 바닥 경사와 마찰 생성항으로 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_0 = [0, -ghb_x, -ghb_y]^T \quad (1f)$$

$$\mathbf{S}_f = [0, -n^2gh^{-1/3}u\sqrt{u^2+v^2}, -n^2gh^{-1/3}v\sqrt{u^2+v^2}]^T \quad (1g)$$

여기에서 b 는 바닥 표고이고 n 은 Manning의 조도 계수이다.

2.2 수치 해법

임의의 검사 체적, Ω 에 대해 Eq. (1)을 적분하고 Gauss의 발산 정리를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\iint_{\Omega} \mathbf{U}_t d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\mathbf{U})] \cdot d\mathbf{n} = \iint_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \quad (2)$$

여기에서 \mathbf{n} 은 경계, $\partial\Omega$ 에서 외부로 향하는 단위 법선 벡터이다. k 개 변으로 이루어진 2차원 계산 격자, i 에 Eq. (2)를 적용하고 천수 방정식의 회전 불변성(rotational invariance)을 이용하여 다음과 같이 유한 체적법을 위한 이산 방정식을 얻을 수 있다(Lee and Lee, 1998).

$$\dot{\mathbf{U}}_i = -\frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^k \mathbf{T}^{-1}(\theta_{ij}) \mathbf{F}_{ij}(\hat{\mathbf{U}}) L_{ij} + \mathbf{S}(\mathbf{U}_i) \quad (3)$$

여기에서 A 는 격자의 면적, L 은 변의 길이, θ 는 변에서 외부로 향하는 법선이 x 축과 이루는 각도, (\cdot) 는 시간 도함수, $(\hat{\cdot})$ 은 변에서 외부로 법선 방향 성분이고, $\mathbf{T}(\theta)$ 는 회전 행렬로 다음과 같다.

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Fig. 2는 삼각형 계산 격자의 사례인데, 그림에서 보이듯이, 격자의 한 변에서 국부 좌표계(\hat{x}, \hat{y})를 생각할 수 있다. 결국, Riemann 문제는 쌍곡선형 미분방정식의 초기치 문제이므로 변에서 정의된 국부 좌표계에서 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{U}}_t + [\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})]_{\hat{x}} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{U}}_i & \text{when } \hat{x} < 0 \\ \hat{\mathbf{U}}_j & \text{when } \hat{x} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

여기에서 j 는, Fig. 2에서 보이듯이, i 와 변을 공유하는 이웃 격자이고 $\hat{\mathbf{U}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{U}}_j$ 는 초기 조건인 자료(data)이다.

$\hat{\mathbf{U}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{U}}_j$ 처럼 자료가 격자 내에서 상수이면 해법의 정확도는 1차이다. 보다 높은 정확도를 확보하려면, 두 격자의 중심에서 상수인 자료를 선형이나 더 고차의 자료 재구축(data reconstruction)으로 변($\hat{x}=0$)의 왼쪽과 오른쪽에 각각 재구축된 자료, $\hat{\mathbf{U}}_{ij}$ 와 $\hat{\mathbf{U}}_{ji}$ 를 이용한다. 이 연구에 사용한 자료 재구축 기법은 van Leer (1979)가 제안한 MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)이다. 단, 보존 변수인 수심 대신 수위를 재구축하는 Zhou *et al.* (2001)의 SGM (Surface Gradient Method)을 적용하였다.

Riemann 해법은, Eq. (5)에 보인 Riemann 문제를 풀 때, 적용되는 방법에 따라 정확 해법과 근사 해법으로 나뉜다. 어떤 Riemann 해법을 R 로 두면, $\hat{\mathbf{U}}_{ij}$ 와 $\hat{\mathbf{U}}_{ji}$ 로부터 흐름률, \mathbf{F}_{ij} 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

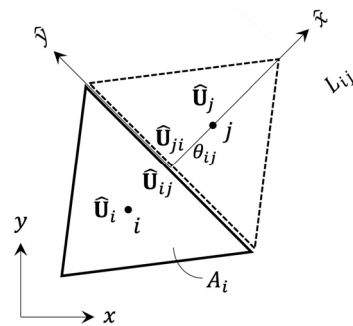


Fig. 2. Local coordinate system (\hat{x}, \hat{y})

$$\mathbf{F}_{ij} = R(\hat{\mathbf{U}}_{ij}, \hat{\mathbf{U}}_{ji}) \tag{6}$$

이 연구에는 근사 Riemann 해법 중 하나인 HLLL (Harten-Lax-van Leer-Linde) 기법(Linde, 2002; Hwang and Lee, 2012)을 적용한다.

삼각형 격자의 자료 재구축에서 최대 원리(maximum principle)가 충족되도록 Batten *et al.* (1996)이 제시한 제약 조건은 계산 격자 전반에서 다음과 같다.

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{A_i}{3 \max_j |\hat{\lambda}_{ij} L_{ij}|} \right) \tag{7}$$

여기에서 Δt 는 시간 간격이고 $\hat{\lambda}$ 는 특성파(characteristic wave) 속도이다.

2.3 Hwang의 기법

Fig. 3은 직각 광정 위어 전면에 배치된 계산 격자를 나타낸 측면도로 구조물의 저항이 지배적인 위어 전면과 마루 위로 지나는 흐름 영역으로 구분한다. Hwang (2015)에 따라 직립 구조물 전면에 밀착하여 배치한 두 이웃 계산 격자, i 와 j 사이에서 흐름률을 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{F}_{ij} = \bar{\mathbf{F}}_{ij} + \mathbf{F}_{ij} \tag{8}$$

여기에서 윗줄과 아랫줄은 각각 계단 위와 아래를 의미하며, $\bar{\mathbf{F}}_{ij}$ 는 Eq. (6)을 적용하여 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{F}}_{ij} = R(\bar{\mathbf{U}}_{ij}, \mathbf{U}_{ji}) \tag{9}$$

한편, $\mathbf{F}_{ij} = [0, F_{ij}, 0]^T$ 로 둘 때, Hwang (2015)은 F_{ij} 를 다음과 같이 잠긴 구조물 전면에 작용하는 정수압으로 두었다.

$$F_{ij} = \frac{1}{2} g \Delta b (2h_{ij} - \Delta b) \tag{10}$$

여기에서 $\Delta b = b_j - b_i$ 이다.

실제로는 ‘진정한’ 광정 위어 흐름에서도 정수압 가정이 엄밀하게 유지되기 어려운데, 직립 구조물 때문에 흐름 단면이 줄어 유선 곡률을 피하기 어렵고 마루 전면의 직각 형태 때문에 생기는 박리와 난류 경계층이 마루 위 흐름에 미치는 영향도 무시할 수 없다(Moss, 1970). Ramamurthy *et al.* (1988)은 광정 위어의 월류량 공식 유도에서 가정한 정수압 분포와 실제 압력의 차이를 해명하는 압력 계수를 제안하였으며, 실험으로 값을 결정하였다. 압력 계수 덕분에 정수압 분포가 마루 전면의 곡면에 작용하는 실제 압력으로 보정되는 Ramamurthy *et al.* (1988)의 연구에 착안하여 Eq. (10)에도 그와 유사하게 보정 계수를 도입하여 나타내면 다음과 같다.

$$F_{ij}^C = \frac{1}{2} g C_f \Delta b (2h_{ij} - \Delta b) \tag{11}$$

여기에서 C_f 는 흐름률 보정 계수이고 F_{ij}^C 는 보정된 흐름률이다.

3. 직각 광정 위어 흐름의 수치 실험

3.1 흐름률 보정 계수 결정

Henry Bazin (Horton, 1907), Rafter (1900), Horton (1907)의 실험 중에서 직각 광정 위어 실험 경우 그리고 Doeringsfeld and Barker (1941)와 Goodarzi *et al.* (2012)의 실험 결과를 이용하여 Eq. (11)에 보인 흐름률 보정 계수(C_f) 값을 결정한다. 위어 유형이 예연 위어에 해당하는 흐름은, Tracy (1957)가 지적한 바와 같이, 마루 앞에서 흐름이 박리된 채로 지나쳐 버리므로 수심 적분 모형을 적용하는 의의를 찾기 어렵다. 그래서

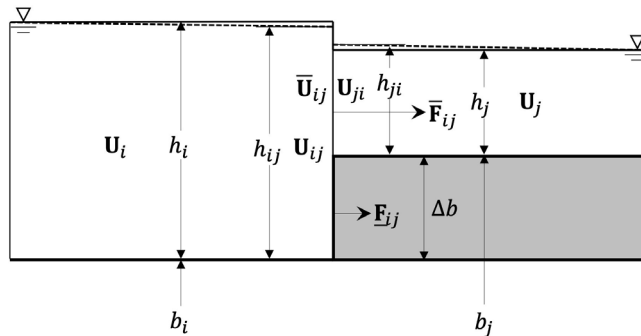


Fig. 3. Computational cells fitted to the front of square-edged broad-crested weir

위어 유형이 예연 위어인 경우를 제외하고 장정, 광정, 단정 위어인 경우를 추렸으며, Table 1에 실험 명칭, 일련(Series) 번호와 시행(Run) 번호, 위어 폭, 위어 높이, 위어 길이, 상류 수두, 월류량(Q) 등 여덟 가지 항목으로 정리하였다.

Henry Bazin의 실험 중에서 직각 광정 위어 실험 경우는 일련번호 86(18), 89(21), 113(19), 114(17), 115(19) 등 모두 다섯 가지이다(Horton, 1907). 괄호 안의 숫자는 각 실험 경우에서 유량과 수두를 달리하여 실시한 시행 횟수이다. 그중에서 위어 유형이 예연 위어인 경우를 제외하고 79개 시행을 표에 실험명 'B1896'으로 묶어 두었다(Table 1). 위어 폭은 수로 폭과 같아 2.00 m이고 높이는 0.75 m로 모든 경우에서 동일하다. 위어 길이는 실험 경우마다 달라 일련번호 86부터 순서대로 0.10 m, 0.20 m, 0.40 m, 0.80 m, 2.00 m이다.

Rafter (1900)가 수행한 여러 모양의 위어 실험 중에서 직각 광정 위어 실험 경우는 일련번호 10(5), 12(4) 등 두 가지이다. 그중에서 위어 유형이 장정, 광정, 단정 위어로 분류되는 7건을 표에서 실험명 'R1900'으로 표시하였다(Table 1). 위어 폭, 높이는 각각 2.00 m, 1.39 m이고 위어 길이는 0.80 m와 2.00

m이다.

Horton (1907)이 폭 4.87 m의 실험 수로에서 실시한 실험 중에서 직각 광정 위어인 경우는 일련번호 40부터 47까지 여덟 경우이고 각 실험 경우에서 시행 횟수는 11회로 동일하다. 위어 길이는 일련번호 40부터 순서대로 각각 0.15 m, 0.50 m, 3.73 m, 4.97 m, 2.74 m, 1.79 m, 0.97 m, 0.28 m이고 높이는 3.43 m로 동일하다(Horton, 1907). 위어 유형이 예연 위어인 경우를 제외한 시행은 모두 76개이며, 실험명 'H1907'로 구분하였다(Table 1).

Doeringsfeld and Barker (1941)는 폭이 0.51 m인 실험 수로에서 길이가 0.69인 직각 광정 위어를 설치하고 위어 높이가 0.095 m, 0.162 m, 0.238 m, 0.294 m, 0.383 m, 0.434 m 등 여섯 가지 실험 경우로 나누어 실험하였다. 위어 유형을 따져보니 장정과 광정 위어로 나뉘었다. 표에 51개 시행을 실험 경우에 맞추어 묶고 실험명 'DB1941'로 표시하였으며, 위어 길이의 유효 숫자로 일련번호를 부여하였다(Table 1).

Goodarzi *et al.* (2012)의 실험 중에서 폭과 높이가 0.25 m로 동일하고 길이가 0.6 m인 직각 광정 위어 실험 경우는 모두 광

Table 1. Summary of experiments for square-edged broad-crested weir

Test	Series	Run	B_w (m)	H_w (m)	L_w (m)	h_0 (m)	Q (m ³ /s)	C_f (mean)	No. meshes
B1896	86	1~11	2.00	0.75	0.10	0.055~0.145	0.040~0.207	0.992	838
	89	1~13			0.20	0.063~0.294	0.049~0.604	0.988	631
	113	1~19			0.40	0.063~0.402	0.047~0.876	0.991	611
	114	1~17			0.80	0.062~0.422	0.042~0.835	0.992	676
	115	1~19			2.00	0.060~0.447	0.036~0.891	0.995	648
R1900	10	3~5	2.00	1.39	0.80	0.617~1.110	1.516~4.170	0.959	950
	12	1~4			2.00	0.663~1.546	1.466~5.731	1.079	710
H1907	40	1~4, 10~11	4.87	3.43	0.15	0.038~0.198	0.058~0.748	0.984	634
	41	4~11			0.50	0.064~0.616	0.123~4.081	0.968	378
	42	1~11			3.73	0.051~1.327	0.081~11.182	0.995	681
	43	1~11			4.97	0.095~1.351	0.212~11.316	0.991	871
	44	1~11			2.74	0.048~0.932	0.074~6.382	0.995	545
	45	1~11			1.79	0.053~0.608	0.094~3.379	0.995	493
	46	1~11			0.97	0.058~0.904	0.100~6.742	0.995	474
	47	1~3, 8~11			0.28	0.050~0.374	0.081~1.949	0.995	667
DB1941	95	1~5	0.51	0.69	0.095	0.033~0.170	0.005~0.061	0.967	638
	162	1~26			0.162	0.021~0.179	0.002~0.061	0.984	
	238	1~5			0.238	0.047~0.179	0.008~0.060	0.981	
	294	1~5			0.294	0.044~0.166	0.007~0.053	0.981	
	383	1~5			0.383	0.045~0.184	0.007~0.058	0.986	
	434	1~5			0.434	0.041~0.167	0.007~0.052	0.981	
GFS2012	-	1~5	0.25	0.25	0.60	0.115~0.195	0.015~0.035	1.010	576

정 위어로 분류되며, 5건의 시행을 표에 실험명 ‘GFS2012’로 나타내었다(Table 1).

평면 2차원 사각형 계산 영역을 삼각형 격자로 분할하였으며, Table 1의 마지막 열에 사용된 계산 격자의 개수를 보였다. 위어 쪽을 좌·우 경계로 삼고 상류 수위 측정 위치를 상류 경계로, 위어 하류 끝에서 하류로 조금 띄워 하류 경계로 두었다. 상류 경계에 수위만 부여하여도 모의가 충분하나, 흐름률 보정 계수 결정에는 실험과 모의에서 월류량 차이가 표적(target)이 되므로 상류 경계에 유량도 함께 부여하여 최적해에 빠르게 도달할 수 있도록 도왔다. 하류 끝을 개방 경계로 두고 수로 좌·우 측면을 벽 경계로 설정하였다. Manning의 조도 계수 값은 수로와 위어 재질에 따라 0.010~0.012의 범위에 있었다.

수치 모의는 2절에서 소개한 수치 해법에 따라 이루어졌으며, 월류량이 보정 계수에 단조 감소함을 미리 확인하였다. 즉, 정수압 분포가 정 아래 월류량을 기준으로 계수 값이 1보다 작으면 그보다 늘어나고, 크면 줄어든다. 218개 시행마다 실험과 모의에서 월류량의 차이가 최소가 되는 흐름률 보정 계수를 찾았으며, 여기에 도함수 없이 해를 찾을 수 있는 Brent 방법(Press *et al.*, 1992)을 적용하였다. Table 1의 아홉 번째 열에 각 실험 경우에서 결정된 보정 계수의 평균치를 보였다. 결정된 모든 값을 산술 평균하면 0.994이며, 정수압 분포가 정 아래 월류량보다 약간 크다.

3.2 흐름률 보정 계수 적용

3.1절에서 결정된 흐름률 보정 계수를 적용한 수치 모형(2절 참조)을 Moss (1970)와 Hager and Schwalt (1994)의 직각 광정 위어 실험과 Kim (2013)이 수행한 직립 측면 위어 실험에 적용하여 월류량을 비교한다.

Moss (1970)는 폭이 0.61 m, 길이가 약 2.1 m인 금속(metal) 재질 실험 수로에 직각 광정 위어를 높이가 152 mm이고 길이가 152 mm, 381 mm, 762 mm 등의 아크릴 수지로 제작하고, 세 가지 위어 모형을 바꾸어 가며 공급 유량에 따른 수위, 유속, 압력 분포 등을 측정하였다. 위어 길이가 152 mm인 경우를 일련번호 ‘152’(9), 381 mm를 일련번호 ‘381’(12), 762 mm를 일련번호 ‘762’(12)로 이름 붙이고 흐름률 보정 계수 적용 여부에 따른 월류량을 세 실험 경우와 비교하였다. 평면 2차원 사각형 계산 영역을 삼각형 격자로 분할하였으며, 일련번호 ‘152’, ‘381’, ‘762’에 각각 652, 882, 856개를 사용하였다. 경계 조건으로 상류 경계에 수위만 부여하여도 충분하였으며, 나머지를 보정 계수 결정 경우와 동일하게 두었다. Manning의 조도 계수 값은 수로와 위어 재질을 고려하여 0.010으로 결정하였다(Henderson, 1966).

Willmott *et al.* (2012)은 모형의 성능 지표로 널리 알려진 일치 지표(index of agreement)를 다음과 같이 보다 정교하게 개선하였다.

$$d_r = \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{l=1}^N |P_l - O_l|}{2 \sum_{l=1}^N |O_l - \bar{O}|}, & \text{when } \sum_{l=1}^N |P_l - O_l| \leq 2 \sum_{l=1}^N |O_l - \bar{O}| \\ \frac{2 \sum_{l=1}^N |O_l - \bar{O}|}{\sum_{l=1}^N |P_l - O_l|} - 1, & \text{when } \sum_{l=1}^N |P_l - O_l| > 2 \sum_{l=1}^N |O_l - \bar{O}| \end{cases} \quad (12)$$

여기에서 d_r 은 Willmott의 일치 지표, O 와 P 는 각각 측정치와 모형의 예측치, $\bar{O} = (1/N) \sum_{l=1}^N O_l$, $l = 1, 2, \dots, N$ 이다. 모형의 예측치를 대응 짝인(pair-wise matched) 측정치와 비교하여 신뢰도를 판정한다. d_r 은 [-1, 1] 범위 내에서 그 값이 클수록 측정치에 근접하므로 모형 성능의 우열을 가릴 수 있고, 1이면 완벽한 모형이다.

Fig. 4는 실험과 모의 월류량을 각각 가로축과 세로축에 두고 1:1 직선과 비교한 그림으로 흐름률 보정 계수 적용 전(□)과 후(○) 월류량을 함께 표시하였다. 보정 계수 덕분에 Willmott의 일치 지표는 일련번호 ‘152’, ‘381’, ‘762’에 대해 각각 0.94에서 0.98로, 0.93에서 0.98로, 0.93에서 0.99로 완벽에 가깝게 개선되었다(Fig. 4).

Hager and Schwalt (1994)는 측면이 유리로 이루어진 폭, 499 mm, 길이, 약 7 m의 PVC 실험 수로에 401 mm 높이와 500 mm 길이의 직각 광정 위어를 PVC로 제작하여 설치하고 열네 가지 서로 다른 공급 유량마다 수위, 유속, 압력 분포 등을 측정하였다. 사각형 계산 영역을 674개 삼각형 격자로 분할하였으며, 경계 조건을 이전과 동일하게 두었다. Manning의 조도 계수 값은 수로와 위어의 재질에 맞게 0.010으로 두었다(Henderson, 1966).

흐름률 보정 계수 적용 여부에 따른 차이를 Fig. 5에서 확인할 수 있으며, 적용 전(□)과 후(○) Willmott의 일치 지표는 각각 0.95와 0.98로서 역시 거의 완벽한 모형으로 개선되었다.

Kim (2013)은 직립한 측면 위어로 연결된 수로와 저류지 모형을 제작하고 부정류 공급장치로 단일 침투의 종 모양(bell-shaped) 수문 곡선(침투 유량, 0.1 m³/s)에 맞추어 1,560 s 동안 흐름을 조절하였다. 측면 위어의 길이와 폭은 각각 0.18 m와 2.0 m이고, 마루 표고는 0.282 m이다(Kim, 2013). 수로 상류 끝(C16)에서 유량이 공급될 때, 초음파 수위계가 적용된 측정

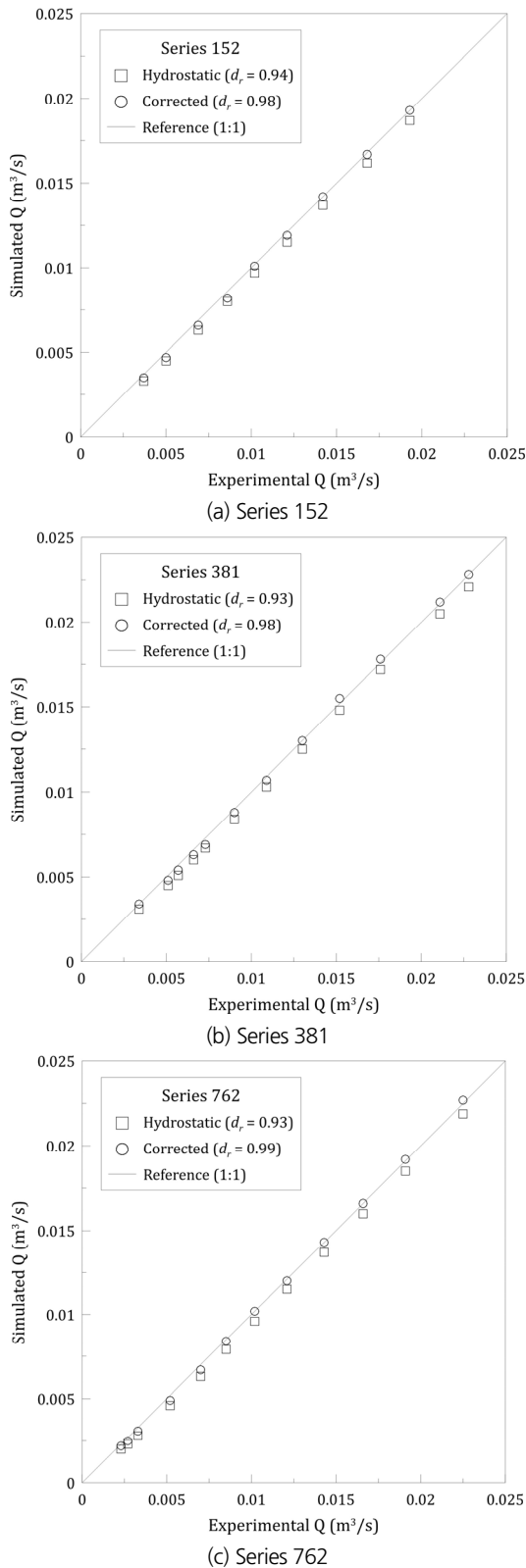


Fig. 4. Comparisons of overflows between simulation and experiment of Moss (1970)

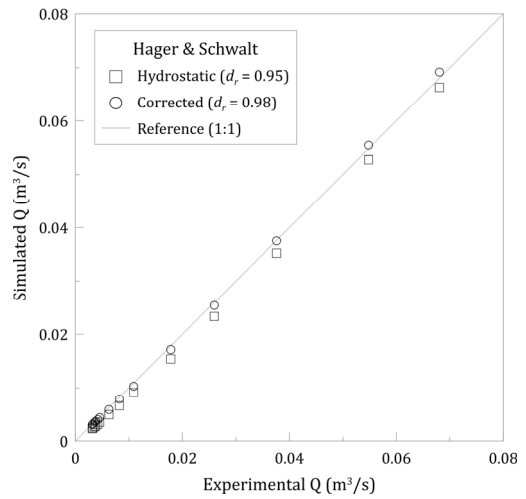


Fig. 5. Comparison of overflows between simulation and experiment of Hager and Schwalt (1994)

은 수로에서 측면 위어 중앙(C6), 측면 위어 하류(C3), 하류 끝(C0) 등 3개 정점이고, 저류지에서 측면 위어 앞(S1), 저류지 중앙(S2), 저류지 상류 구석(S3), 하류 구석(S4) 등 4개 정점이다(Fig. 6).

Kim (2013)은 정상류 실험도 병행하여 유량 규모에 따른 수위-유량 관계와 유량 계수를 결정하려고 수로 하류 끝에서 초음파 수위계로 수위, 저류지 배수로 끝에서 표준 위어로 유량을 각각 측정하였다. 또한, 세 가지 서로 다른 유량으로 수행한 정상류 실험 결과에 가장 근접하는 부정류 계산 결과는 Manning의 조도 계수를 0.014로 둔 경우였다(Kim, 2013). 수치 모의에서도 이 값을 사용하였다.

여기에서 비교하는 실험 경우는 부정류 실험 Case 2로서 수문 곡선에 맞추어 증가된 흐름 때문에 측면 위어가 위치한 수로 단면에서 수위가 위어 마루 표고보다 상승하여 측면 위어를 통해 저류지로 단순 월류가 시작된다. 측면 위어를 통해 넘어간 흐름은 손실 없이 고스란히 저류지 안에 누적되어 수위로 나타나므로 월류량의 정확도 비교에 유리한 경우이다. 월류가 이루어지는 시간은 약 10분 정도로 전체 시간(1,560 s)에 비해 39% 정도이다. 월류가 이루어지는 동안 측면 위어 단면 중앙(C6)에서 수위 변화에 따른 위어 유형을 따져보면, 월류 시작과 종료 즈음에 장정(30%), 월류가 한창일 때 광정(70%) 위어에 해당하였다. Hwang (2019)은 위어 유형을 단정 위어로 분류하였으나, 이는 오류이다.

직립 구조물을 급경사로 두어서라도 지형으로 모의하려면 계산 격자를 조밀하게 배치할 수밖에 없으므로 계산 시간이 오래 걸릴 수 있고, 격자 형상이나 크기가 적절하지 않으면 전혀 다른 결과가 도출될 우려도 있다(Schubert and Sanders, 2012;

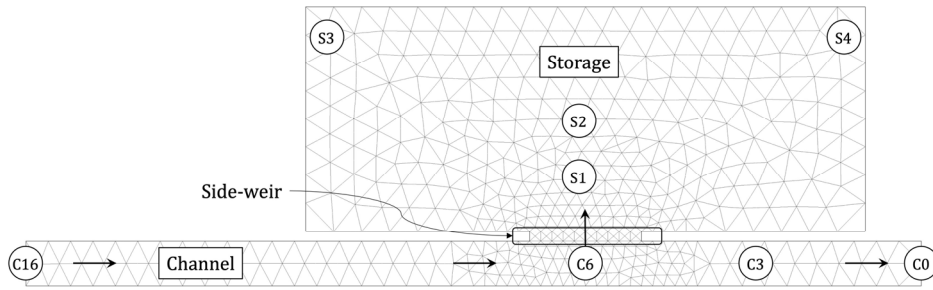


Fig. 6. Computational domain for case 2 in experiment of Kim (2013)

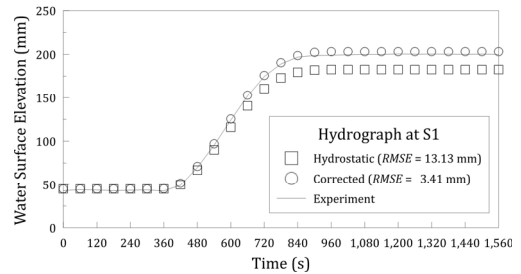
Echeverribar *et al.*, 2019). 그러나 Hwang (2015)의 기법 덕분에 직립의 측면 위어를 경사로 완화하지 않아도 되므로 정확도의 심각한 저하나 계산 비용의 증대 걱정 없이 격자를 구성할 수 있었다. 계산 영역 분할에 882개 삼각형 격자를 사용하였으며, 수로와 저류지에 각각 280개와 562개, 나머지를 측면 위어에 적용하였다(Fig. 6). 참고로 직립 측면 위어를 78° 경사로 완화하는 경우, Hwang (2019)은 측면 위어 근처만 조밀하게 배치했음에도, 약 780개의 계산 격자가 더 필요하고 계산 시간도 네다섯 배 더 걸린다고 보고하였다.

개방 경계인 수로 상류 끝에서 흐름 조건으로 유량 수문 곡선을, 하류 끝에서 경계 조건으로 수위-유량 관계를 부여하고 그 외 계산 영역 외곽을 폐쇄 경계인 벽으로 두었다. 즉, 측면 위어에 어떠한 경계 조건도 부여하지 않았다. 수로와 저류지, 양쪽으로 직립한 측면 위어의 마루와 바닥 표고를 실제처럼 서로 다르게 설정하여 실험 모형의 지형을 그대로 살렸다.

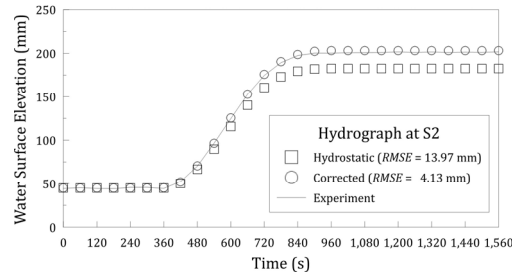
Fig. 7에 저류지의 네 정점에서 흐름을 보정 계수의 적용 전 (□)과 적용 후(○) 모의 결과를 측정치(—)와 비교하였으며, 수위의 평균 제곱근 오차(RMSE)도 함께 보였다. 흐름을 보정 계수 적용 전에는 과소 추정되던 모의 월류량이 적용 후에 RMSE가 3.4 mm~5.7 mm의 범위에 있으며, RMSE와 최종 수위의 비가 3% 미만일 정도로 실험과 잘 일치하였다(Fig. 7).

Kim (2013)은 정상류 실험을 통해 측면 위어 단면 중앙(C6)에서 수위와 저류지 배수로 끝에서 유량을 측정하여 측면 위어의 유량 계수를 1.35로 결정하였다. 정상류 모의로 유량 계수를 결정하고자 Fig. 6의 저류지 안에서 측면 위어에 이웃한 격자 10개를 제외한 모든 격자를 털어내고, 모두 330개의 삼각형 계산 격자로 수로와 측면 위어만으로 이루어진 계산 영역을 분할하였다. 부정류 모의와 유사하게 경계 조건을 수로 상류 경계에서 공급 유량으로, 하류 끝에서 수위-유량 관계로, 외곽에서 벽으로 설정하였다. 부가된 저류지 쪽 측면 위어 아래 개방 경계에서 흐름 정보가 완전히 빠져나갈 수 있도록 사류 경계 조건을 부여하였다.

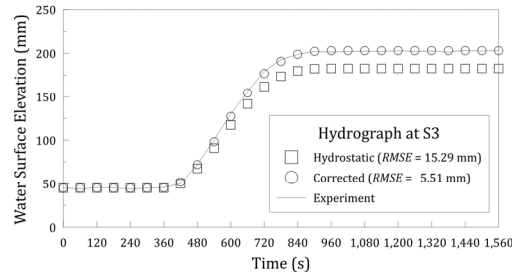
Fig. 8에 유량 계수(그림에서 C_i) 결정에 사용된 실험 자료



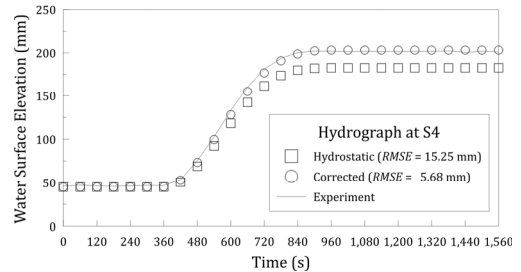
(a) S1



(b) S2



(c) S3



(d) S4

Fig. 7. Comparisons of stages in storage between simulation and experiment of Kim (2013)

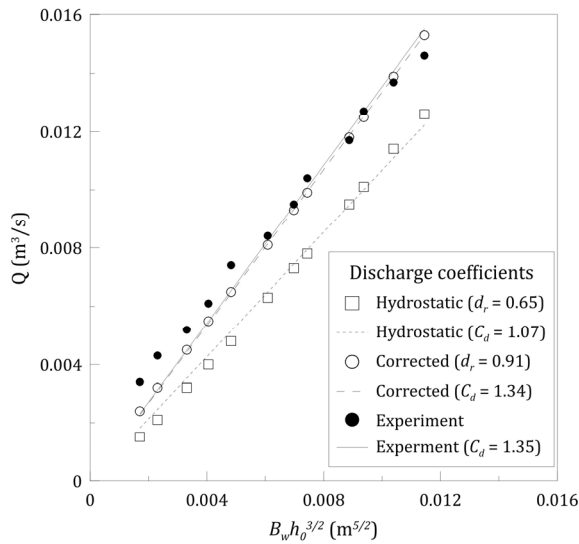


Fig. 8. Comparison of discharge coefficients between simulation and experiment of Kim (2013)

($B_w h_0^{3/2}$ 대 Q)를 채운 원(●), 원점을 지나는 선형 회귀 직선을 실선(—)으로 보였다. 그리고 흐름률 보정 계수 적용 여부에 따른 모의 자료를 각각 빈 원(○)과 네모(□), 회귀 직선을 각각 파선(- - -)과 점선(—)으로 표시하였다. 흐름률 보정 계수 덕분에 실선과 파선이 거의 겹칠 정도로 실험 결과에 매우 근접하고(모의 유량 계수, 1.34; 결정 계수, 0.99995), Willmott의 일치 지표도 보정 계수 적용 전의 0.65에서 적용 후 0.91로 확실하게 개선되었다(Fig. 8).

4. 결론

다섯 가지 직각 광정 위어 실험에서 위어 유형이 장정, 광정, 단정 위어인 실험 시행, 218개를 추려 Hwang (2015)의 기법이 채택된 수심 적분 모형으로 흐름률 보정 계수를 결정하였다. 두 가지 직각 광정 위어 실험에 결정된 흐름률 보정 계수를 적용하여 검증해보니, 적용 전에 비해 거의 완벽에 가까운 정도로 모형의 성능이 개선됨을 Willmott의 일치 지표로 확인할 수 있었다.

Hwang (2019)은 Kim (2013)의 부정류 실험 경우 Case 2에 Eq. (10)을 적용했을 때, 모의 월류량이 실험에 비해 과소 추정됨을 확인하고 정수압 분포의 보정 필요성을 언급한 바 있다. 이번에 결정된 흐름률 보정 계수 덕분에 저류지의 네 정점에서 측정치와 비교한 모의 수위의 RMSE가 6 mm 미만일 정도로 측면 위어를 통한 월류량을 정확하게 모의하여 Hwang (2019)이 제기한 문제를 해결하였다. 정상류 실험과 동일한 조건으

로 모의하여 결정된 유량 계수 값은 실험 결과에 비해 상대오차가 1%를 크게 밑돌 정도로 잘 일치하였다.

직각 광정 위어나 직립 측면 위어를 지나는 천수 흐름의 수치 모의에서 Hwang (2015)의 기법 덕분에 수심 적분 모형으로도 불연속 지형을 경사로 완화하지 않고 직접 계산하는 것이 가능해졌으며, 이 연구에서 도입한 흐름률 보정 계수로 내부 경계 조건 부여 없이 월류량의 정확도를 대폭 개선할 수 있었다. 유량 계수가 알려지지 않거나 파악이 곤란한 월류 구조물을 지나는 천수 흐름의 모의에서 조밀한 격자를 구성하려는 부담이나 내부 경계 부여를 위한 별도 처리 없이 정확한 모의가 가능해졌다.

흐름률 보정 계수 결정에 주력하다 보니, 하류 수위로 생기는 직각 광정 위어의 잠긴 월류(submerged overflow)까지 검토하지 못했다. Hwang (2019)이 Kim (2013)의 측면 위어 실험 경우 중에서 잠긴 월류에 해당하는 부정류 실험 경우 Case 6에 수심 적분 모형을 적용한 바 있으나, 향후 연구로서 적용 사례를 더 다양하게 확충할 필요가 있다.

위어 유형이 예연 위어인 경우, 흐름이 마루 위를 흐르지 않으므로 수심 적분 모형 적용의 실익이 적을 것이다. 게다가 실제 위어 길이가 얇은 예연 위어라면 극단적 격자 세분 없이 격자 기반 모형의 적용이 거의 불가능하므로 적절한 내부 경계 조건 부여가 관건이다(García-Alén et al., 2021). 내부 조건 없이 예연 위어를 지나는 천수 흐름의 정확한 모의가 가능한 수심 적분 모형의 개발이 기대된다.

감사의 글

이 연구는 환경부 재원으로 한국환경산업기술원 가뭄 대응 물관리 혁신기술개발사업의 지원(과제 번호: 2022003610003)에 의한 것이다.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflict of interest.

References

- Batten, P., Lambert, C., and Causon, D.M. (1996). "Positively conservative high-resolution convection schemes for unstructured elements." *International Journal for Numerical Methods in*

- .*Engineering*, Vol. 39, No. 11, pp. 1821-1838.
- Bureau of Reclamation (Reclamation) (2001). *Water measurement manual*. A Water Resources Technical Publication, United States Department of the Interior, Washington, D.C., U.S.
- Doeringsfeld, H.A., and Barker, C.L. (1941). "Pressure-momentum theory applied to the broad-crested weir." *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, ASCE, Vol. 106, No. 1, pp. 934-946.
- Echeverribar, I., Morales-Hernández, M., Brufau, P., and García-Navarro, P. (2019). "Use of internal boundary conditions for levees representation: Application to river flood management." *Environmental Fluid Mechanics*, Vol. 19, No. 5, pp. 1253-1271.
- García-Alén, G., García-Fonte, O., Cea, L., Pena, L., and Puertas, J. (2021). "Modelling weirs in two-dimensional shallow water models." *Water*, MDPI, Vol. 13, No. 16, 2152.
- Goodarzi, E., Farhoudi, J., and Shokri, N. (2012). "Flow characteristics of rectangular broad-crested weirs with sloped upstream face." *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, Vol. 60, No. 2, pp. 87-100.
- Govinda Rao, N.S., and Muralidhar, D. (1963). "Discharge characteristics of weirs of finite-crest width." *La Houille Blanche*, Vol. 49, No. 5, pp. 537-545.
- Hager, W., and Schwalt, M. (1994). "Broad-crested weir." *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 1, pp. 13-26.
- Hargreaves, D.M., Morvan, H.P., and Wright, N.G. (2007). "Validation of the volume of fluid method for free surface calculation: The broad-crested weir." *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, Taylor & Francis, Vol. 1, No. 2, pp. 136-146.
- Henderson, F. (1966). *Open channel flow*, Macmillan Publishing Co., Inc., NY, U.S.
- Horton, R.E. (1907). *Weir experiments, coefficients, and formulas*. Water-Supply and Irrigation Paper No. 200, Geological Survey, United States Department of the Interior, Washington, D.C., U.S.
- Hwang, S.-Y. (2015). "A novel scheme to depth-averaged model for analyzing Shallow-water flows over discontinuous topography." *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, KSCE, Vol. 35, No. 6, pp. 1237-1246.
- Hwang, S.-Y. (2019). "Flow resistance by discontinuous topography in simulating Shallow-water flow." *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, KSCE, Vol. 39, No. 1, pp. 175-181.
- Hwang, S.-Y., and Kim, H.S. (2021). "Numerical simulation and laboratory experiment of flooding on a perpendicular floodplain with dam-break flows." *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, KSCE, Vol. 41, No. 3, pp. 219-227.
- Hwang, S.-Y., and Lee, S.H. (2012). "An application of the HLLL approximate Riemann solver to the shallow water equations." *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, KSCE, Vol. 32, No. 1B, pp. 21-27.
- Jun, K.S. (1996). "A study on unsteady flow model including weir flow simulation." *Journal of Korea Water Resources Association*, KWRA, Vol. 29, No. 2, pp. 153-165.
- Kim, S. (2013). *Analysis on flood-control effect of side-weir detention basin considering the flow pattern over the weir*. Master's Thesis, Myongji University.
- Kirkgoz, M.S., Aköz, M.S., and Oner, A.A. (2008). "Experimental and theoretical analyses of two-dimensional flows upstream of broad-crested weirs." *Canadian Journal of Civil Engineering*, CSP, Vol. 35, No. 9, pp. 975-986.
- Lee, H. (2020). "Implicit discontinuous Galerkin scheme for discontinuous bathymetry in shallow water equations." *KSCE Journal of Civil Engineering*, KSCE, Vol. 24, No. 9, pp. 2694-2705.
- Lee, K.S., and Lee, S.-T. (1998). "Two-dimensional finite-volume unsteady-flow model for shocks." *Journal of Korea Water Resources Association*, KWRA, Vol. 31, No. 3, pp. 279-290.
- Linde, T. (2002). "A practical, general-purpose, two-state HLL Riemann solver for hyperbolic conservation laws." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, No. 3-4, pp. 391-402.
- Morales-Hernández, M., Murillo, J., and García-Navarro, P. (2013). "The formulation of internal boundary conditions in unsteady 2-d shallow water flows: Application to flood regulation." *Water Resources Research*, Vol. 49, No. 1, pp. 471-487.
- Moss, W.D. (1970). *Flow over a square-edged broad-crested weir*. Doctoral dissertation, University of Surrey, Guildford Surrey, U.K.
- Paik, J., and Lee, N.J. (2015). "Numerical modeling of free surface flow over a broad-crested rectangular weir." *Journal of Korea Water Resources Association*, KWRA, Vol. 48, No. 4, pp. 281-290.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T. (1992). *Numerical recipes in c: The art of scientific computing, second edition*, Cambridge University Press, NY, U.S.
- Prokof'ev, V.A. (2005). "Two-dimensional horizontal numerical model of open flow over a bed with obstacles." *Water Resources*, Vol. 32, No. 3, pp. 252-264.
- Rafter, G.W. (1900). "On the flow of waer over dams." *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, ASCE, Vol. 44, pp. 220-398.
- Ramamurthy, A.S., Tim, U.S., and Rao, M.V.J. (1988). "Characteristics of square-edged and round-nosed broad-crested weirs." *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 61-73.
- Sarker, M.A., and Rhodes, D.G. (2004). "Calculation of free-surface profile over a rectangular broad-crested weir." *Flow Measurement and Instrumentation*, Vol. 15, No. 4, pp. 215-219.
- Schubert, J.E., and Sanders, B.F. (2012). "Building treatments for urban flood inundation models and implications for predictive skill and modeling efficiency." *Advances in Water Resources*, Vol. 41, pp. 49-64.
- Tracy, H.J. (1957). *Discharge characteristics of broad-crested weirs*. Geological Survey Circular 397, Geological Survey, United States Department of the Interior, Washington, D.C., U.S.
- van Leer, B. (1979). "Towards the ultimate conservative difference

- scheme. V. a second-order sequel to Godunov's method." *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, No. 1, pp. 101-136.
- Vanden-Broeck, J.-M., and Keller, J.B. (1986). *Weir flows*. MRC Technical Summary Report, 2919, Mathematics Research Center, University of Wisconsin-Madison, WI, U.S.
- Weiyan, T. (1992). *Shallow water hydrodynamics*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherland.
- Willmott, C.J., Robeson, S.M., and Matsuura, K. (2012). "A refined index of model performance." *International Journal of Climatology*, Vol. 32, No. 13, pp. 2088-2094.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Ingram, D.M., and Mingham, C.G. (2002). "Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 38, No. 8, pp. 769-788.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G., and Ingram, D.M. (2001). "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations." *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, No. 1, pp. 1-25.