Journal of Korean Society of Industrial and Systems Engineering
https://doi.org/10.11627/jksie.2022.45.3.078

Vol. 45, No. 3 : 78-89, September 2022
ISSN : 2005-0461 / EISSN : 2287-7975

Preventive Policy With Minor Failure Under Age and Periodic Replacement

Jinpyo Lee†

School of Business Administration, Hongik University

경미한 고장을 수반하는 시스템에 대한 노화 및 예방적 교체 정책

이 진 표†

홍익대학교 경영대학 경영학과

The purpose of this study was to propose useful suggestion by analyzing preventive replacement policy under which there are minor and major failure. Here, major failure is defined as the failure of system which causes the system to stop working, however, the minor failure is defined as the situation in which the system is working but there exists inconvenience for the user to experience the degradation of performance. For this purpose, we formulated an expected cost rate as a function of periodic replacement time and the number of system update cycles. Then, using the probability and differentiation theory, we analyzed the cost rate function to find the optimal points for periodic replacement time and the number of system update cycles. Also, we present a numerical example to show how to apply our model to the real and practical situation in which even under the minor failure, the user of system is not willing to replace or repair the system immediately, instead he/she is willing to defer the repair or replacement until the periodic or preventive replacement time. Optimal preventive replacement timing using two variables, which are periodic replacement time and the number of system update cycles, is provided and the effects of those variables on the cost are analyzed.

Keywords : Preventive Replacement, Minor Repair, Major Repair, Age and Periodic Replacement

1. 서 론

시스템이 멈춰서 사용이 더 이상 불가능한 작동 불능 상태를 중고장(major failure)이라고 한다. 일상에서 사용하는 상당히 많은 시스템에서는 이런 중고장이 아닌 경우, 일정 부분 성능 하락이 불편을 야기는 하지만 작업 진행을 위한 작동에는 문제는 없는 경우가 많다. 중고장이 아닌 경우 바로 수리나 교체를 할 경우 고비용이 발생하기 때문에 대대적인 교체 시점까지 기다렸다가 시스템을 전체 또는 부품 교체를 진행하는 경우가 많다. 비용이 많이 발생하는 수리 또는 교체 없이도 작동은 하지만 시스템 사용자에게는 성능의 저하 등으로 불편을 야기하는 상태를 경미한 고장(minor failure)이라고 한다. 즉 경미한 고장의 경우 수리나 교체 없이 대대적인 시스템 수리 또는 교체의 시점까지 기다리는 경우가 많다. 예를 들어 자동차 시스템의 소모 부품의 경우 일정 기간 또는 주행거리 마다 교체 보증을 해주고 있는데 사용자들은 이 교체 기간 전에 소모 부품을 교체해야 하는 경우 비용을 내야 하므로 운전 중에 조심해야 하는 등의 불편(브레이크 패드 마모로 인한 소음, 전조등 조기 노화로 인한 흐림 현상, 와이퍼의 조기 노화로 인하여 작동 시 물 번짐 등)을 감수하면서 교체 보증 시점까지 기다렸다

Received 8 August 2022; Finally Revised 21 September 2022; Accepted 22 September 2022
† Corresponding Author : jinpyo.lee@hongik.ac.kr

가 교체하는 경우를 들 수 있다. 또한 교체 보증과는 별도로 불규칙적으로 시스템(하드웨어 또는 소프트웨어)의 업데이트를 진행하게 되는데 시스템을 사용하는 사용자나 이를 제공하는 기업의 입장에서는 업데이트마다 비용이 발생하므로 최적의 업데이트 주기 시점을 선택해야 하는 문제가 발생한다. 따라서 안정적이고 만족스러운 시스템 운영을 위해서는 경미한 고장으로 인한 불편 또는 시스템 업데이트로 인한 비용을 고려하여 예방적(preventive)으로 시스템을 적정 시점에 교체하여 운영하는 것이 시스템 사용자 또는 시스템을 보증하는 기업의 입장에서 유리하다. 시스템 수리 또는 교체에는 상당한 비용의 발생 뿐만 아니라 수리나 교체로 인한 시스템 중지는 사용자 뿐만 아니라 일정 기간 마다 보증 수리 또는 교체를 제공하는 기업 입장에서 높은 비용이 발생한다. 따라서 경미한 고장을 수반하는 시스템에 대한 체계적인 예방적 교체를 위한 정책을 수립하는 것은 상당히 중요한 문제이다.

정기적인 교체 또는 유지 보수가 필요한 시스템에 대한 최적의 보수 또는 교체 정책에 대한 기존의 연구 결과는 상당히 많이 있으나 그 중에서 본 연구와 유사한 연구 결과들을 중심으로 살펴 보면 다음과 같다. 시스템에 대한 전통적인 노화 교체 정책(age replacement policy)은 시스템의 노화로 인하여 발생하는 중고장으로 인한 비용을 최소화하기 위해서 정책을 결정하는 문제를 소개하였다[1, 7]. 기존의 정기적인 교체 정책(periodic replacements policy)은 경미한 고장이 발생할 때마다 시스템을 멈추고 수리를 하면서 발생하는 비용을 최소화하기 위한 정기 교체 기간을 최적화하는 내용을 소개하고 있다[1, 7, 13]. 정기 교체 기간이 아닌 랜덤하게 정비를 진행하는 랜덤 정비 정책(random maintenance policy)에 대한 연구에서는 랜덤 교체 정책으로 인한 정기 교체 기간의 기대값을 계산할 수 있는 모형을 제공하였다[10, 11]. 또한 시간에 따라 비용이 증가하는 시스템에서는 중고장 발생 시 최소한의 수리만을 진행하는 모형에 대한 연구가 진행되었으며 이러한 연구에서는 최소한의 수리 후 시스템이 고장 전과 같은 고장율을 유지한다는 가정을 하였다[12]. 교체를 정기 시점 또는 일정한 수의 고장 시점 중 먼저 도래하는 시점에 진행하는 모형을 고려하는 연구에서는 교체 주기 사이에 발생하는 고장은 최소한의 수리만 진행을 하게 되는데 이후 고장율은 고장 전과 동일하다는 가정을 사용하였다[8, 9]. 정기 교체 시점 사이에 발생하는 고장의 강도를 측정하는 것이 불가능하다는 가정 하의 연구에서는 최소한의 수리 또는 교체 중에서 랜덤하게 선택하여 진행하는 교체 정책을 제시하였다[5]. 수리 가능 또는 불가능한 고장을 반복하는 시스템의 연구에서는 노화를 기반으로 교체 여부를 결정하는 모형을 사용하였다. 이 연구에서는 노화 기반 교체와 동시에 불규칙한 작업이 일정한 횟수를 반복하는 시점에서도 교체를 고려하는 정책을 동시에 고려하였다[2]. 불완전한 수리를 고려한 연구에서는 불완전한 수리 후에도 시스템이 상당한 정도로 정상 작동한다는 점을 고려하여 불완전한 최소한의 수리만으로도 시스템 사용에 크게 문제가 없다는 주장을 제시하였다[3]. 예방적 교체에 대한 연구로는 작업 주기가 사전에 정한 반복 횟수를 마치는 시점에 예방적 교체를 진행하고 교체 시점 사이에 발생하는 고장은 고장율이 고장 전 수준으로 설정하는 최소

Table 1. Comparison of Literatures

Literatures	Age	Periodic	Random	Preventive	Working Cycle	Minor		Major	Minimal repair
						Replacement at the time of minor failure	Defer until periodic replacement or major failure		
1	V	V						V	
2	V	V						V	
3	V	V						V	
4	V		V					V	
5			V					V	
6		V			V				V
7		V			V				V
8		V			V				V
9		V						V	V
10	V				V			V	
11		V							V
12		V		V				V	
13	V	V			V	V		V	

한의 수리(minimal repair)를 진행하는 모형을 제시하였다[4]. 노화로 인한 교체와 정기적인 교체를 동시에 고려한 정책하에서 경미한 고장과 중고장을 분류한 기존의 연구에서는 경미한 고장에서도 중고장과 비슷한 수리 및 교체를 한다는 가정에서 연구를 진행하였다[6].

위에서 살펴본 바와 같이 기존 연구에서 다양한 조합의 수리와 교체 정책에 대한 연구가 진행되어 왔다. 특히 정기적인 교체(periodic replacement) 모형에서는 중고장이 발생하는 시점에서 중고장의 인지 실패로 정기 교체 시점까지 기다리는 상황이 연구되기고 하였다. 그러나 현실에서는 정기적인 추적 상황이라도 중고장 발생으로 시스템의 운영 중단을 인지하지 못하고 정기 교체 시점에서야 인지되는 경우는 드물다고 볼 수 있다. 또한 기존의 연구를 정책 별로 분류한 Table 1을 보면 경미한 고장을 정기적인 교체 시점 또는 중고장 발생 시점까지 미루는 연구는 진행되지 않았음을 확인할 수 있다. 이에 본 연구에서는 좀 더 현실적인 대안으로 중고장 발생 시 시스템의 교체 또는 수리를 진행하고 또한 시스템의 성능 저하 등으로 사용자에게 불편을 야기하는 경미한 고장의 경우 인지하더라도 바로 그 시점에 수리 또는 교체하는 것이 아니라 정기 교체 시점까지 기다리는 모형을 다루고 있다. 이는 기존 연구들에서는 다루지 않는 정책을 포함한 모형을 분석하였다는데 의미가 있다고 할 수 있다. 경미한 고장(minor failure)이 발생하더라도 바로 수리 또는 교체를 하는 것이 아니라 정기 교체 시점까지 미룬다는 가정은 현실에서 적용하는데 무리가 없다. 즉 현실적인 다음의 상황을 고려한 본 연구의 모형을 정리해 보면 다음과 같다. (a) 경미한 고장 시 바로 수리 또는 교체를 위한 시스템의 정지와 제반 비용 등이 성능 저하로 인한 불편 보다 상당히 높다고 보았다. (b) 시스템 교체는 사전에 정한 정기 시점(T) 또는 불규칙한 업데이트 주기의 적정 반복 횟수 시점(N) 중에 우선적으로 발생하는 시점에 진행을 한다고 가정하였다. 즉 교체 시점 사이에 시스템의 중고장(major failure)이 발생하는 경우 시스템을 교체를 하고 작동에는 무리가 없는 경미한 고장(minor failure)이 발생하는 경우에는 다음 교체 시점까지 불편을 감수하고 시스템 사용을 진행한다고 가정하였다. 즉 이러한 조건 하에서 최적의 업데이트 주기 반복 횟수(N^*) 또는 최적의 정기 교체 시점(T^*)을 결정하기 위한 모형을 분석하였다.

본문의 구성은 다음과 같이 진행된다. 2장에서는 위에서 언급한 조건을 기반으로 하여 단위 시간 당 기대 이익을 최소화하는 모형의 소개와 모형에서 얻게 되는 최적 정책의 성질을 설명하고, 3장에서는 2장에서 소개한 모형에 부합하는 수치 예제를 제시하고 변수 변화에 따른 교체 시점의 변화를 보여준다. 마지막으로 4장에서는 연구결과를 바탕으로 결론을 제시한다.

2. 모 형

정기 시점 또는 불규칙한 시스템 업데이트 주기 반복 횟수 시점 중에 우선적으로 발생하는 시점에 예방적으로 교체를 하고 작동에는 무리가 없으나 성능 저하 등의 불편을 야기하는 경미한 고장이 발생하는 경우에는 다음 교체 시점까지 불편을 감수하고 시스템 사용한다고 가정하였다. 이러한 정책 하에서 비용을 최소화하는 최적의 업데이트 주기 반복 횟수(N^*) 또는 최적의 정기 교체 시점(T^*)을 구하고자 한다. 또한 최적의 업데이트 주기 반복 횟수(N^*) 또는 최적의 정기 교체 시점(T^*)의 성질을 분석하여 이들에 영향을 미치는 요소들을 찾고 요소들이 미치는 영향에 대한 결과를 소개한다. 본 연구에서 적용된 용어와 변수들은 다음과 같다.

(ⅰ) T_i는 시스템의 $(i-1)$번째 중고장과 i번째 중고장 간의 시간 간격에 대한 확률 변수로 정의하며 서로 독립적이고 동일하게(independently and identically) 분포된다. 누적 분포는 $P\{T_i \le t\} \equiv F(t)$이며 평균은 $E(T_i) = \mu \equiv \int_0^{\infty} \overline{F}(t)dt$이다. 확률밀도함수는 $f(t) \equiv F'(t)$이고 고장률함수(failure rate) $h(t) \equiv \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$는 t에 대해서 $h(0)=0$에서 $h(\infty)=\infty$까지 순증(strictly increasing)한다.

(ⅱ) X는 경미한 고장이 발생하는 시점에 대한 확률 분포이며 누적분포는 유한한 기대값을 가지는 $H(t)$이며 확률밀도함수는 $h(t) = H'(t)$이다.

(ⅲ) Y_j는 j번째 업데이트 작업이 진행된 시간에 대한 확률변수이며 서로 독립적이고 동일하게(independently and identically) 분포된다. 누적 분포는 $P\{Y_j \le t\} \equiv G(t)$이고 유한한 평균 $\frac{1}{\theta} \equiv \int_0^{\infty} G(t)dt$을 가진다. 확률밀도함수는 $g(t) \equiv G'(t)$이고 $G(t)$의 n-겹 결합(n^{th} convolution)은 $G^n(t) \equiv P\{\Sigma_{j=1}^n Y_j \le t\}$이다. $(n=1, 2, ...)$

(ⅳ) c_1은 경미한 고장 시 발생하는 단위 시간 당 불편비용(minor failure cost)이며 c_2는 정기적 교체 시기(T) 또는 일정한 횟수(N)의 작업이 끝나는 시점에 발생하는 교체 비용이다.

본 연구에서 언급하는 교체(replacement)는 정기적 또는 일정한 횟수의 불규칙한 업데이트 주기 시점에 진행하는 예방적 교체 또는 중고장 발생 시점에서의 교체 모두를 의미한다. 그러나 시스템이 작동이 되기는 하나 성능 저하 등의 불편을 야기하는 경미한 고장의 경우에는 수리나 교체 등을 하지 않고 교체 시점이 도래할 때까지 불편을 감수하고 교체를 연기한다고 가정하였다.

시스템은 예방적으로 정기 교체 시점인 $T(0<T<\infty)$ 또는 일정 횟수의 랜덤 업데이트 시점인 $T_N=\sum_{i=1}^{N} Y_i(N=1,2,...)$ 중에서 먼저 도래하는 시점에 진행을 한다. 즉 예방적 교체 시점은 $\min[T,T_N]$이다. 예방적 교체 시점 사이에 발생하는 중고장과 경미한 고장은 서로 독립적으로 발생한다고 가정하였다. 경미한 고장이 발생한 많은 경우 사용자들은 상당한 비용과 시스템의 일정 기간 정지가 발생하는 수리나 교체를 진행하기보다 작동에는 큰 문제가 없으니 불편을 감수하고 교체 시점까지 기다리는 경우가 드물지 않다. 대신 경미한 고장 발생 시점에서부터 불편으로 인하여 단위 시간 당 불편 비용인 $c_1(<c_2)$이 지속적으로 발생된다고 가정하였다. 그러므로 교체는 T, T_N 또는 중고장이 발생하는 시점에 진행하게 되고 교체로 인한 단발성 비용인 c_2가 발생한다.

우선 교체가 발생하는 세 가지 시점에 따른 확률을 구하면 다음과 같다. 정기 교체 시점인 T에서 교체를 진행할 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_1=[1-F(T)][1-G^N(T)]$$

N번째 불규칙한 업데이트 주기 시점인 T_N에서 교체를 진행할 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_2=\int_0^T[1-F(t)]dG^N(t)$$

중고장(major failure)이 발생하는 시점에 교체를 진행할 확률은 다음과 같다.

$$P_3=\int_0^T[1-G^N(t)]dF(t)$$

교체가 발생하는 3가지 경우에 대한 총합이 1이므로 $(\sum_{i=1}^{3}P_i=1)$, 연속적인 두 교체 사이에 걸리는 시간의 평균을 구하면 다음과 같다.

$$T[1-F(T)][1-G^N(T)]+\int_0^T t[1-F(t)]dG^N(t)$$
$$+\int_0^T t[1-G^N(t)]dF(t)=\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt$$

연속적인 두 교체 사이에 발생하는 평균 비용은 다음의 3가지 경우를 합하여 구할 수 있다.

(1) 정기 교체 시점인 T에서 교체를 진행할 경우의 평균 비용은 다음과 같다.

$$[F(T)][1-G^N(T)]\left[c_1\int_0^T(T-x)dH(x)+c_2\right]$$

(2) N번째 불규칙한 업데이트가 발생하는 시점인 T_N에서 시스템 교체를 진행할 경우의 평균 비용은 다음과 같다.

$$\int_0^T\left[c_1\int_0^t(t-x)dH(x)+c_2\right][1-F(t)]dG^N(t)$$

(3) 중고장(major failure)이 발생하는 시점에 시스템 교체를 교체를 진행할 경우의 평균 비용은 다음과 같다.

$$\int_0^T\left[c_1\int_0^t(t-x)dH(x)+c_2\right][1-G^N(t)]dF(t)$$

그러므로 연속적인 두 교체 사이에 발생하는 평균 비용은 위의 세 비용을 합한 다음과 같다.

$$[1-F(T)]\left[1-G^N(T)][c_1\int_0^T H(x)dx+c_2\right]$$
$$+\int_0^T\left[c_1\int_0^t H(x)dx+c_2\right][1-F(t)]dG^N(t)$$
$$+\int_0^T\left[c_1\int_0^t H(x)dx+c_2\right][1-G^N(t)]dF(t)$$
$$=c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2$$

위에서 구한 교체 구간 평균 시간과 평균 비용을 이용하여 구한 시간 당 발생하는 총 비용은 다음과 같다.

$$C(T,N)=\frac{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}$$

두 변수인 N과 T를 모두 고려하려 최적화하기 전에 $N=\infty$ 또는 $T=\infty$을 설정하여 문제를 단순화하여 분석을 시작해 볼 수 있다. 우선 $N=\infty$인 경우를 보면 이는 시스템이 정기 교체 시점인 T에서만 교체를 진행한다는 것을 의미한다. 즉 이 경우에 해당하는 시간 당 발생하는 총 비용인 $C(T)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(T)=C(T,\infty)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}$$
$$=\frac{c_1\int_0^T[1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-F(t)]dt}$$

Lemma 1. $N=\infty$인 경우, $\lim_{T\to\infty}\int_0^T[1-F(t)][H(T)-H(t)]dt > \frac{c_2}{c_1}$를 만족하면, 다음 등식을 만족하는 유한(finite)하고 유일한(unique) 최적의 정기 교체 시점인 $T^*_{N=\infty}$가 존재한다.

$$H(T)\int_0^T[1-F(t)]dt-\int_0^T[1-F(t)]H(t)dt=\frac{c_2}{c_1}$$

단위 시간 당 발생하는 총 비용의 최소값은 $c_1H(T^*)$와 같다.

Lemma 1의 결과는 중고장 교체 비용과 경미한 고장으로 인한 불편 비용의 상대적 차이가 작아 질수록 정기 교체 시점은 점점 감소하는 것을 알 수 있는데 이는 경미한 고장으로 인한 불편 비용이 상대적으로 커지는 경우 자주 예방적으로 교체함으로써 불편함을 낮추려고 하는 경향이 발생하는 것을 알 수 있다.

이번에는 $T=\infty$인 경우를 보면 이는 시스템이 정규 교체 시점은 존재하지 않고 불규칙한 업데이트 주기의 N번째 시점이 T_N에서 교체를 진행한다는 것을 의미한다. 이 경우에 해당하는 시간 당 발생하는 총 비용인 $C(N)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}C(N)&=C(\infty,N)\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}\\&=\frac{c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}\end{aligned}$$

i번째 업데이트 주기에 대한 확률변수 Y_i의 n-겹 결합(n^{th} convolution)인 $G^N(t)$는 가정을 기반으로 하여 정리하면 $G^N(t)=P\{\sum_{i=1}^N Y_{i\le t}\}=P\{N(t)\ge N\}=\sum_{i=N}^\infty e^{\theta t}\frac{(\theta t)^i}{i!}$ $(N=1,2,...)$와 같다. 이를 이용하여 최적의 N을 찾아 정리하면 다음 Lemma 2와 같다.

Lemma 2. $T=\infty$인 경우 불규칙한 업데이트 주기에 대한 최적의 반복 횟수의 최적화 값인 $N^*_{T=\infty}$는 유한(finite)하며 다음을 만족시키는 가장 적은 정수(the smallest integer)이다.

$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\frac{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}-H(t)\right\}dt\ge c_2$$

$T=\infty$인 경우에도 Lemma 1에서와 비슷한 결과를 볼 수 있는데 중고장 교체 비용과 경미한 고장으로 인한 불편 비용의 상대적 차이가 작아 질수록 불규칙한 업데이트 주기에 대한 최적의 반복 횟수의 값은 점점 감소하는 것을 알 수 있는데 이는 경미한 고장으로 인한 불편 비용이 상대적으로 커지는 경우 업데이트 주기 반복 시점을 짧게 함으로써 예방적 교체 시점을 자주 발생하게 함으로써 시스템 사용자의 불편함을 낮추려는 경향이 발생하는 것을 알 수 있다.

이번에는 이 연구에서 최적화하고자 하는 두 변수 정기적 교체 시점인 T와 불규칙한 업데이트 주기에 대한 반복 횟수인 N을 가지는 다음 문제를 최적화한 경우에 대한 결과를 정리하며 다음 두 Proposition과 같다.

$$C(T,N)=\frac{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}$$

Proposition 1. $\lim_{T\to\infty}\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)][H(T)-H(t)]dt > \frac{c_2}{c_1}$을 만족하는 모든 에 대하여, 유한하고 유일한 $T^*(N)$이 존재하며, 또한 $T^*(N)$은 N에 대한 감소 함수(decreasing function)이다.

위의 결과는 불규칙한 업데이트 주기의 반복 횟수인 N이 정기 교체 시점인 T에 미치는 영향을 분석한 것이다. 결과를 보면 n이 증가할수록 T가 감소하는 것을 알 수 있는데 이는 불규칙한 업데이트 주기의 반복을 늘릴수록 중고장의 발생 확률이 높아지고 또한 시스템의 경미한 고장으로 인한 사용자 불편이 증가하는 것을 정기적 교체를 자주함으로써 예방적으로 막을 수 있다는 것을 이론적으로 설명하는 것으로 볼 수 있다.

Proposition 2.

1. $T>T^*_{N=\infty}$인 경우, 유한한 N^*가 존재하며 N^*는 다음을 만족시키는 가장 적은 정수이다.

$$c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\frac{\int_0^T[G^N(x)-G^{N+1}(x)][1-F(x)]H(x)dx}{\int_0^T[G^N(y)-G^{N+1}(y)][1-F(y)]dy)-H(t)}\right\}dt\ge c_2$$

$T\le T^*_{N=\infty}$인 경우, $N^*\to\infty$.

2. $N^*(T)$는 T에 대한 감소 함수(decreasing function)이다.

3. 수치 예제

본 장에서는 이전 장에서 분석한 결과를 간단한 예제를 적용해보고자 한다. 예제에서 사용한 가정과 값들은 다음과 같다. 중고장 간의 시간 간격에 대한 확률분포는 $F(t)=1-e^{-\lambda^2 t^2}$이며 중고장 간의 시간 간격 확률 분포의 특징으로 시간 간격 t가 증가하면 고장률인 $h(t)=\dfrac{f(t)}{\overline{F}(t)}=2\lambda^2 t$도 같이 증가하고 있다. 작업 시간에 대한 확률분포는 지수 분포인 $G(t)=1-e^{-\theta t}$를 사용한다. 경미한 고장이 발생하는 시점에 대한 확률분포는 $H(t)=1-e^{-\delta t}$이다. 경미한 고장으로 발생하는 시간 당 비용은 $c_1=1$이고 교체 비용은 $c_2=5$을 사용하였다. T는 정기 교체 시간 간격이다. Proposition 2의 (1)결과를 적용하면 최적의 작업 주기 반복 횟수인 N^*는 다음을 만족하는 가장 작은 정수 값이다.

$$\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^j}{j!}e^{-(\lambda t)^2}\left[\frac{\int_0^T e^{-\theta x}x^N e^{-(\lambda x)^2}(1-e^{-\delta x})dx}{\int_0^T e^{-\theta y}y^N e^{-(\lambda y)^2}dy}-(1-e^{-\delta t})\right]dt \geq \frac{c_2}{c_1}$$

우선 $N=\infty$인 경우의 $T^*_{N=\infty}$는 다음을 만족하는 값을 구하면 되며 $T^*_{N=\infty}=17$이 된다.

$$[1-e^{-\delta T}]\int_0^T e^{-(\lambda t)^2}dt-\int_0^T e^{-(\lambda t)^2}[1-e^{-\delta t}]dt=\frac{c_2}{c_1}$$

다양한 λ에 대하여 최적의 작업 주기 반복 횟수인 N^*와 최적의 정기 교체 시점인 T^*를 구하면 다음과 같다.

Table 2. Optimal N^* when $F(t)=1-e^{-\lambda^2 t^2}$, $G(t)=1-e^{-\theta t}$ and $c_1=1$, $c_2=5$

N		λ				
		0.0200	0.0225	0.0250	0.0275	0.0300
T	19	22	24	26	29	34
	20	12	12	13	13	14
	22	7	7	7	7	8
	24	6	6	6	6	6
	26	6	6	6	6	6
	28	6	6	6	6	6
	30	6	6	6	6	6

수치 해석 결과의 일부를 발췌하여 그림으로 그려보면 다음과 같이 볼 수 있다.

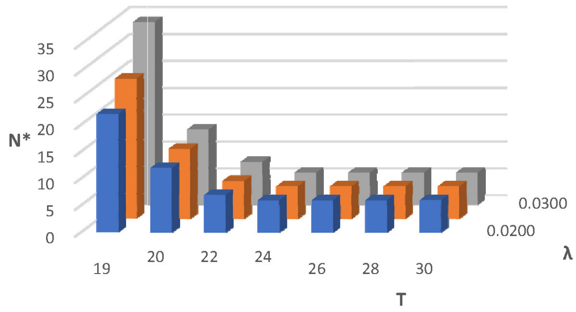

Figure 1. Number of Random Update Cycles (N^*) vs. Periodic Replacement Time(T)

<Figure 1>을 보면 정기 교체 시점 간격(T)이 멀어지면 불규칙한 업데이트 주기의 반복 횟수(N^*)가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이는 위에서 언급한 바와 같이 정기 교체 시점 간격이 멀어지면 시스템의 중고장 발생 가능성이 높아지면서 교체 비용 증가 가능성이 높아지게 된다. 동시에 경미한 고장으로 인한 사용자 불편이 증가하면서 불규칙한 업데이트 주기의 반복 횟수를 줄이고자 예방적 교체 시점의 간격을 줄여 총 비용을 감소하는 경향을 설명하고 있다.

4. 결 론

현대인이 일상적으로 사용하는 대부분의 시스템은 크게 두 가지의 고장 상태를 경험한다: (1) 멈춰서 사용이 더 이상 불가능한 작동 불능 상태인 중고장(major failure) (2) 성능의 저하로 사용에 불편을 야기는 하지만 여전히 작업을 할 수 있는 작동 상태인 경미한 고장(Minor failure). 경미한 고장 상태의 경우 사용자들은 성능 저하 등의 불편을 감수하고 대대적인 교체 시점까지 기다리는 경우가 많다. 사용자의 고장 상태에 따른 대응을 포함하고 있는 정비 또는 교체 정책 모형에 대한 분석은 정기적으로 시스템 보증 정비를 제공하는 기업의 입장에서 고려되어야 한다. 그러나 기존 연구 결과들을 보면 불편을 야기하고 성능에 저하가 발생하지만 여전히 작동이 가능한 경미한 고장의 경우에 바로 일정 기간 시스템을 멈추고 정비 또는 교체를 하는 경우에 대한 연구가 주로 진행되어 왔다. 하지만 현실적으로 많은 경미한 고장인 경우에 정비나 교체를 하지 않고 사용하는 경우가 많은 것을 감안하면, 경미한 고장에 대처하는 사용자의 현실적 행태를 고려한 모형은 연구 대상으로 충분히 중요한 위치를 차지하고 있다. 이에 본 연구에서는 경미한 고장의 경우에는 정비나 교체를 진행하지 않고 정기 교체 또는 예방적 교체 시점까지 연기 또는 기다리는 모형에 대

한 분석을 진행하였다. 그 결과 상당 부분 현실적이고 직관적인 결과를 얻게 되었다. 정기 교체 시점의 간격을 늘리면 늘릴수록 예방적 교체 시점을 짧게 잡는 것을 확인하였다. 또한 반대의 경우도 확인하였는데 예방적 교체 시점을 길게 잡을수록 정기 교체 시점의 간격을 짧게 해야 한다는 것을 확인하였다. 이러한 결과는 시스템을 사용하는 사용자 입장에서 뿐만 아니라 정기적 그리고 예방적으로 시스템의 정비 또는 교체 정책을 결정하는 기업의 입장에서 경미한 고장의 경우 바로 정비나 교체를 하지 않는 사용자의 행태를 결정 모델에 포함하여 좀 더 유연한 정책을 펼 수 있는 기준을 제공한다는 점에서 현장에서 유용하게 활용할 수 있기를 기대한다.

Acknowledgement

This study has been supported by a Research Fund of Hongik University, Korea.

References

[1] Barlow, R.E. and Proschan, F., *Mathematical theory of reliability*, SIAM, 1996.

[2] Chang, C.-C., Optimum Preventive Maintenance Policies for Systems Subject to Random Working Times, Replacement, and Minimal Repair, *Computers & Industrial Engineering*, 2014, Vol. 67, pp. 185-194.

[3] Fuqing, Y. and Kumar, U., A General Imperfect Repair Model Considering Time-dependent Repair Effectiveness, *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, Vol. 61, pp. 95-100.

[4] Lee, J., Optimal Working Cycles for Minimal Repair Policy, *Journal of Korean Society for Quality Management*, 2020, Vol. 48, pp. 201-214.

[5] Lim, J., Qu, J., and Zuo, M.J., Age Replacement Policy based on Imperfect Repair with Random Probability, *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, Vol. 149, pp. 24-33.

[6] Mitzutani, S., Zhao, X., Nakagawa, T., Age and Periodic Replacement Policies with Two Failure Modes in General Replacement Models, *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, Vol. 214, pp. 107754.

[7] Nakagawa, T., *Maintenance theory of Reliability*, Springer Science & Business Media, 2006.

[8] Nakagawa, T., Optimal Number of Failures before Replacement Time, *IEEE Transactions on Reliability*, 1983, Vol. 32, pp. 115-116.

[9] Nakagawa, T., Optimal Policy of Continuous and Discrete Replacement with Minimal Repair at Failure, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1984, Vol. 31, pp. 543-550.

[10] Nakagawa, T., *Random Maintenance Policies*, Springer, 2014.

[11] Nakagawa, T., Zhao, X., and Yun, W.Y., Optimal Age Replacement and Inspection Policies with Random Failure and Replacement Times, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2011, Vol. 18, pp. 405-416.

[12] Tilquin, C. and Cleroux, R., Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure and Adjustment Costs, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1975, Vol. 22, pp. 243-254.

[13] Zhang, C., Li, Q., and Liu, Y., Optimal Replacement Policy with Minimal Repair and Preventive Maintenance of an Aircraft Structure Subjected to Corrosion, *Soft Computing*, 2020, Vol. 24, pp. 375-384.

ORCID

Jinpyo Lee | http://orcid.org/0000-0001-6613-400X

<Appendix>

Proof of Lemma 1. $C(T)$를 T에 대하여 미분을 하면 다음 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{c_1[1-F(T)]H(T)\int_0^T[1-F(t)]dt-\left\{c_1\int_0^T[1-F(t)]H(t)dt+c_2\right\}[1-F(T)]}{\left\{\int_0^T[1-F(t)]dt\right\}^2}=0$$

또한 이를 정리하면 다음과 같아지게 된다.

$$H(T)\int_0^T[1-F(t)]dt-\int_0^T[1-F(t)]H(t)dt=\frac{c_2}{c_1} \tag{1}$$

좌변은 다음의 성질 때문에 T에 대해서 증가함수이다.

$$\frac{d}{dT}\left[H(T)\int_0^T[1-F(t)]dt-\int_0^T[1-F(t)]H(t)dt\right]=\frac{d}{dT}\left[\int_0^T[1-F(t)][H(T)-H(t)]dt\right]=\int_0^T[1-F(t)]h(T)dt>0$$

그러므로 만약 $\lim_{T\to\infty}\int_0^T[1-F(t)][H(T)-H(t)]dt>\frac{c_2}{c_1}$이 성립하게 되면, 유한하고 유일한 T^*가 존재하고 $C(T^*)=c_1H(T^*)$가 성립하게 된다.

Q.E.D

Proof of Lemma 2. 최적의 N^*을 구하기 위하여, $C(N+1)-C(N)\geq 0$를 만족시키는 N 중에서 가장 작은 정수를 선택하면 된다. 그러므로,

$$\begin{aligned}
0\leq C(N+1)-C(N)&=\frac{c_1\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}-\frac{c_1\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt}\\
&=\frac{\left\{c_1\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}}{\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}}\\
&\quad-\frac{\left\{c_1\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}}{\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}}\\
&\quad c_1\frac{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt}{\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}}\\
&\quad-c_1\frac{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}{\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}}\\
&\geq c_2\frac{\int_0^\infty[G^{N}(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}{\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}\left\{\int_0^\infty[1-G^{N}(t)][1-F(t)]dt\right\}}
\end{aligned}$$

$$c_1\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt$$
$$-c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$\geq c_2\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt-H(t)\int_0^\infty[1-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}dt$$
$$\geq c_2\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt+\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt\right.$$
$$\left.-H(t)\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt-H(t)\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt\right\}dt$$
$$\geq c_2\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt$$
$$\left.-H(t)\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}dt$$
$$+c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt$$
$$-c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt$$
$$\geq c_2\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$(\therefore c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt$$
$$-c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]dt=0)$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt\right.$$
$$\left.-H(t)\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right\}dt\geq c_2\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\frac{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}\right.$$
$$\left.-H(t)\frac{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt)}\right\}dt\geq c_2$$
$$c_1\int_0^\infty[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\frac{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^\infty[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt)-H(t)}\right\}dt\geq c_2$$

$H(t)$는 t에 대하여 증가함수이므로, 모든 $T\geq 0$에 대하여 다음을 만족한다.

$$\frac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}\leq\frac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(T)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}=H(T)$$

또한 다음도 만족하게 된다.

$$\frac{d}{dT}\left[\frac{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}\right]=\frac{[G^N(T)-G^{N+1}(T)][1-F(T)]H(T)\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}{\left[\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right]^2}$$

$$-\frac{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt[G^N(T)-G^{N+1}(T)][1-F(T)\Big]}{\left[\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right]^2}$$

$$=\frac{[G^N(T)-G^{N+1}(T)][1-F(T)]}{\left[\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right]^2}\left[\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(T)dt-\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt\right]$$

$$=\frac{[G^N(T)-G^{(N+1)}(T)][1-F(T)]}{\left[\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt\right]^2}\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)][H(T)-H(t)]dt>0$$

그러므로 $\frac{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$는 T가 0에서 $\frac{\int_0^\infty [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^\infty [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$까지에 대하여 순증가(strictly increasing) 함수이다.

Q.E.D

Lemma 3. i번째 업데이트 주기에 대한 확률변수 Y_i의 n-겹 결합(n^{th} convolution)인 $G^N(t)$는 $P\{\Sigma_{i=1}^N Y_{i\le t}\}=PN(t)\ge N=\Sigma_{i=N}^{\infty} e^{\theta t}\frac{(\theta t)^i}{i!}(N=1,2,\ldots)$라고 할 경우, 모든 $T>0$에 대하여,

$$\frac{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$$

은 N에 대한 증가 함수(increasing function)이다.

Proof.

$$\frac{\int_0^T [G^{N+1}(t)-G^{N+2}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T [G^{N+1}(t)-G^{N+2}(t)][1-F(t)]dt}-\frac{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T [G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$$

$$=\frac{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}[1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}[1-F(t)]dt}-\frac{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N}[1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N}[1-F(t)]dt}$$

$$=\frac{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N}\overline{F}(t)dt-\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N}\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)dt}{\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N}\overline{F}(t)dt}$$

$$\lim_{T\to 0}\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)dt-\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)dt=0$$

모든 $T\geq 0$에 대하여, $H(t)$는 t에 대하여 증가하므로 다음이 성립된다.

$$\frac{d}{dT}\left[\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)dt-\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)H(t)dt\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)dt\right]$$
$$=e^{\theta T}(\theta T)^N\overline{F}(T)\left[\theta TH(T)\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)dt+\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)H(t)dt\right.$$
$$\left.-H(T)\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^{N+1}\overline{F}(t)dt-\theta T\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N\overline{F}(t)H(t)dt\right]$$
$$=e^{\theta T}(\theta T)^N\overline{F}(T)\int_0^T e^{\theta t}(\theta t)^N[\theta T-\theta t][H(T)-H(t)]\overline{F}(t)dt>0$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\int_0^T[G^{(N+1)}(t)-G^{N+2}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^{N+1}(t)-G^{N+2}(t)][1-F(t)]dt}-\frac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}>0$$

그러므로, $\dfrac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$은 N에 대하여 증가함수이다.

Q.E.D

Proof of Proposition 1. $C(T,N)$을 T에 대하여 미분하여 0으로 설정하면, 다음과 같다.

$$\frac{d}{dT}\left[\frac{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2}{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}\right]=\frac{c_1[1-G^N(T)][1-F(T)]H(T)\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}{\left\{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt\right\}^2}$$
$$-\frac{\left\{c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]H(t)dt+c_2\right\}[1-G^N(T)][1-F(T)]}{\left\{\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]dt\right\}^2}=0$$

이를 정리하면 다음과 같이 된다.

$$c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)][H(T)-H(t)]dt=c_2$$

그러므로 $\lim_{T\to\infty}\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)][H(T)-H(t)]dt>\frac{c_2}{c_1}$를 만족하는 모든 N에 대하여, 유한하고 유일한 $T^*(N)$이 존재하게 된다. 또한, $C(T^*(N),N)=\dfrac{c_1H(T^*(N))\int_0^{(T^*}(N))[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}{\int_0^{(T^*}(N))[1-G^N(t)][1-F(t)]dt}$. $c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)][H(T)-H(t)]dt$은 N

에 대하여 증가하므로 $T^*(N)$은 N에 대하여 감소함수이다.

Q.E.D

Proof of Proposition 2. $C(T,N+1)-C(T,N)\geq 0$를 만족하는 가장 작은 N을 구하기 위하기 위해, $C(T,N+1)-C(T,N)$을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$c_1\int_0^T[1-G^N(t)][1-F(t)]\left\{\frac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt)-H(t)}\right\}dt\geq c_2$$

Lemma 3에 의하여 $\dfrac{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]H(t)dt}{\int_0^T[G^N(t)-G^{N+1}(t)][1-F(t)]dt}$이 N에 대하여 증가하기 때문에, 좌변은 N에 대하여 순 증가한다. 그러므로 다음의 결과가 성립한다: $T>T^*$이면, 유한한 N^*가 존재한다. 그렇지 않은 경우, $N^*\rightarrow\infty$. 좌변은 T에 대하여 순 증가하므로, $N^*(T)$은 T에 대하여 감소한다.

Q.E.D