The Mathematical Education. Vol. 61, No. 3, 441-456
http://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.3.441

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

A case study on the quadratic function problem solving process of middle school students with different unit coordination stages

Lee, Jin Ah[1] · Lee, Soo Jin[2]*

[1]Teacher, Gwanggyo Middle School

[2]Professor, Korea National University of Education

*Corresponding Author: Soo Jin Lee (sjlee@knue.ac.kr)

ABSTRACT

The purpose of the current study is to report a part of our larger project whose focus is to understand a relationship between students' units coordination and K-12 school mathematics. In particular, in this paper we report how students who exhibit distinct levels of units coordinations used their knowledge of proportion to solve quadratic function problems of the form $y = ax^2$. To this end, three 7th grade students all of whom assimiliated whole number problem situations with three levels of units but showed different levels for fraction problems were chosen. We carried out clinical interviews not only to understand their ability to coordinate units but to understand their problem solving process of proportion and the quadratic function problems. The analysis suggest that their abilities to coordinate units influenced their ways to solving proportion problems, and in turn influenced their ways to solve the specific form of quadratic functions. We have finalized our study by discussing how students' ability to construct and coordinate units, their proportion knowledge, and their knowledge associated with expressing the specific type of quadractic functions could be related.

Key words: unit coordination, proportion, scalar perspective, functional perspective, quadratic function

단위 조정 단계가 다른 중학생의 이차함수 문제 해결 과정에서 나타나는 특징

이진아[1] · 이수진[2]*

[1]광교중학교 교사 · [2]한국교원대학교 교수

*교신저자: 이수진 (sjlee@knue.ac.kr)

초록

본 연구의 목적은 학생들의 단위 조정과 학교 수학과의 관계를 이해하기 위한 목적으로 수행되고 있는 프로젝트의 일부 결과를 보고하는 것이다. 구체적으로 단위 조정 단계와 그에 따른 수준이 다른 학생들이 $y = ax^2$ 형태인 이차함수 문제를 해결하는데 있어 비례 지식이 어떻게 사용되고, 단위 조정 수준별 가용한 지식은 무엇인지 세밀하게 분석하는 것이다. 이를 위해 자연수 맥락에서는 3수준 단위를 주어진 자원으로 사용하여 동화할 수 있는 단위 조정 3단계 학생이지만, 복잡한 분수 곱셈 과제에서는 서로 다른 단위 조정 단계를 보여준 중학교 1학년 세 학생에 초점을 두었다. 나아가 비례 문제 해결 과정과 비례 관계가 포함된 이차함수 관련 문제에 대한 임상 면담 자료를 분석하였다. 분석 결과, 단위 조정 단계에 따라 비례 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 지식은 다르게 나타났으며, 이러한 차이는 이차함수를 이해하고 식으로 표현하는 과정에서 결과적 차이를 보였다. 이러한 분석 결과를 통해 결론에서는 단위 조정 이론, 비례 지식, 그리고 이차함수 지식과의 관련성에 대해 논의 후 시사점을 제시하였다.

주요어: 단위 조정, 비례, 스칼라 관점, 함수적 관점, 이차함수

Received August 10, 2022 **Revised** August 16, 2022 **Accepted** August 22, 2022
2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

서론

변수는 다양한 개념적 구조를 가진 복합 개념으로써 이를 이해하는 방식도 여러 가지이지만, 많은 학자들은 미지수, 일반화를 위한 도구, 변화하는 양 사이의 관계, 그리고 임의의 기호로 나누어 설명한다(Kim, 1997, 1999). 이때 변화하는 양 사이의 관계는 실제로 변하거나 변하는 것으로 생각할 수 있는 대상을 나타내며, 두 변수가 서로 영향을 주고받는 경우로 볼 수 있다(Kim, 1997; Pang et al., 2017). 학생들에게 변수라는 용어를 처음 사용하기 이전에도 초등학교 수학에서는 변수 개념 형성에 영향을 줄 수 있는 내용 요소들을 제공하고 있는데, 특히 변화하는 양 사이의 관계로서의 변수 개념은 초등학교 4~6학년의 일부 단원에서 제시되고 있고, 4~6학년에서 제시되는 함수와 관련된 유형 중 $y = ax$ 형태는 54.5%를 차지하고 있다(Pang et al., 2017). 따라서 변화하는 두 양 사이의 일차함수 문제 상황은 초등학교에서 변수라는 용어를 형식적으로 가르치지 않을 뿐이지 이미 다루고 있다. 이후 x, y 문자 사용을 통해 변수 개념이 본격적으로 도입되는 중학교 1~2학년에서는 변수에 대한 기호 사용과 용어를 배우며, 정비례 관계와 일차함수 개념을 학습하게 된다. 결국 초등학교에서 중학교 2학년 때까지 학생들에게는 선형적인 일차함수 상황이 가장 익숙한 함수 문제 상황인 것이다.

그러나 중학교 3학년에서 배우는 이차함수는 '변화율'의 관점에서 변화율이 일정한 일차함수 문제 상황으로부터 한 차원 높은 변화 상황인 '변화율의 일정한 변화'에 대한 이해가 필요하다(Ma & Im, 2019). 따라서 이차함수의 도입은 대부분 변화율의 일정한 변화 상황을 나타내는 소재로, 예를 들면 번지점프나 루지와 같은 등가속도하는 물체의 운동 상황에서 시간에 따른 이동 거리를 물어보거나, 혹은 가로와 세로 길이가 둘 다 변하는 상황에서의 직사각형 넓이를 구하는 문제와 같은 상황들을 통해 도입된다(Kim et al, 2021; Kim et al, 2020; Lee et al, 2021; Lew et al, 2020).

$y = ax$에서 $y = ax^2$으로의 차원의 변화는 중학교에서 고등학교 수학으로의 대수적 추론에 대한 중요한 기반을 제공한다(Lobato et al, 2012). 그러나 이 시기에 학교 수업에서는 학생의 개념적 이해에 초점을 두기보다 산술적 지식이나 절차적 지식에 초점을 두고 학생들을 지도하고 있다(Korea Institute of Curriculum and Evaluation, 2007; Lobato, 2008; Lobato et al., 2012). 특히 선형적인 일차함수 문제 상황이 익숙한 중학생들에게 $y = ax^2$ 형태의 이차함수 기본형을 도입하는 과정에서 반복적인 연습을 통한 절차적 지식[1]만을 강조한다면 학생이 이차함수의 변화되는 문제 상황을 일차함수와 비교하여 식별해 내기란 쉽지 않을 것이다.

Lobato 외 (2012)는 이차함수에 대한 학생의 개념적 이해를 위해서 연속적인 변화(continuous variation)와 순간적인 변화율(instantaneous rates of change), 그리고 비율의 비율(rates of rates)이라는 3가지 이해가 필요한데, 이차함수를 학생들에게 가르치는 과정에서 나타나는 어려움은 주로 학생의 비, 비율, 비례 개념과 관련한 비례 추론 과정으로부터 시작된다고 주장한다. 실제로 Lee 외 (2016)에서도 교수실험을 통하여 '비와 비율' 개념이 변화율 개념에 대한 수준의 변화를 가져올 수 있고, 변화율 개념에 대한 수준의 변화는 함수의 변화에 대한 인식에 영향을 줄 수 있다고 주장한 바 있다.

한편, Tillema (2013)은 학생의 '제곱'에 대한 곱셈적 의미를 이해하기 위해 선형적인 의미의 곱셈 문제(예, 분수, 일차 방정식, 비율과 관련)와 제곱의 의미를 가지는 곱셈 문제(예, 조합론, 이차방정식, 이차함수 포함)를 구분하여 6~7학년 학생들을 대상으로 교수실험을 진행하였다. 구체적으로 Tillema는 교수실험의 대상 학생을 선정하기 위하여 Steffe (1992, 1994)의 연구를 바탕으로 단위(units)를 분리(disembedding), 반복(iteration)하고, 단위에 단위를 합성하는 단위 조정(units coordination)의 조작을 통해 학생들의 곱셈적 개념에 주목하였으며, 학생들이 2배, 3배와 같은 선형적 의미의 곱셈 문제를 해결하기 위해 사용한 조작 활동이 제곱, 세제곱과 같은 비선형적 의미의 거듭제곱 문제를 해결하는 과정에서도 나타난다는 것을 보여주었다. 이러한 결과는 단위 조정이 학생의 곱셈 추론 과정에서 선형적 의미와 거듭제곱의 의미를 개발하고 구별하도록 지원할 수 있는 잠재력을 가지고 있음을 시사한다.

본 연구는 학생들이 정비례 관계와 일차함수로의 선형적인 의미를 이해한 이후, 일차함수와는 다른 한 차원 높은 변화 상황에서의 비선형적인 이차함수가 (선형적인 의미와는 식별되는) '제곱'의 이차원적 의미를 포함하고 있다고 보고, Tillema (2013)의 시사점에 주목하여 한 차원 높은 문제 상황으로써의 이차함수를 단위 조정이라는 관점에서 살펴보고자 한다. 이를 통해 학생들이 일차함수와

1 다수의 학자들은 학생의 학습 과정에서의 지식을 크게 개념적 지식과 절차적 지식으로 구분하고 있다(Cabobi, 2009; Miller & Hudson, 2007; Rittle-Johnson & Schneider, 2014). 개념적 지식은 지배적인 중심 원리와 그 안의 개별적인 지식들을 서로 관련지어 연결시키는 것이며(Canobi, 2009; Miller & Hudson, 2007), 절차적 지식은 일련의 행동 절차에 대한 지식으로(Canobi, 2009), 학생의 반복적인 연습을 통한 최소한의 의식적인 집중만으로도 문제 해결이 가능하다(Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

는 다르게 이차함수에서 느끼는 어려움은 무엇인지, 그리고 그 어려움은 학생이 이전에 가지고 있던 수학적 지식과 어떠한 관련성이 있는지를 분석하여 세 학생의 구체적인 사례로부터 하나의 경험적 가설을 제시할 것이다. 이에 따른 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 단위 조정 2 단계와 3 단계 학생[2]의 비례 문제 해결 과정은 어떠한가?

둘째, 단위 조정 2단계와 3단계 학생의 이차함수 문제 해결 과정은 어떠한가?

이론적 배경

단위 조정 관점과 비례 개념의 관련성

학생들은 초등학교 때부터 '단위'라는 개념을 통해 수를 구성해 나아가고, 단위와 단위 사이의 관계를 생성, 유지하면서 단위를 조정하는 과정에서 그 개념을 확장해 나아간다. 이때 단위 조정은 단위를 만들고 그 단위에 포함되거나 구성되는 또 다른 단위와의 관계를 유지하는 학생의 능력으로, 학생이 단위를 조정하고 동화할 수 있는 '단위 수준의 수'와 활동을 통해 생성할 수 있는 '수준의 수'라는 조작 범주를 가지고 있다(Norton & Boyce, 2015; Norton et al., 2015). 학생이 n 수준(n은 1, 2, 3)의 단위를 동화하여 내재화된 행동을 보였을 때 'n 단계에서 조작한다'라고 하는데, 이는 문제 상황에서 실제 어떤 활동을 수행하지 않고도 n개의 단위 수준을 한 번에 구별할 수 있음을 의미한다. 반면 '활동 안에서 n 수준을 생성한다'라는 것은 어떤 활동을 실제로 수행하는 과정에서 n 개의 수준은 구성할 수 있으나, 활동 중에는 n 수준의 구조를 유지되지 못할 가능성도 있다(Norton et al., 2015). Norton 외 (2015)는 학생이 동화시킬 수 있는 단위의 수에 따라 단위 조정 능력의 특징을 세 단계로 나누어 제시하였다. 본 연구는 정수 범위 안에서 3수준 단위 조정과 관련하여 주목하고 있으므로, Norton 외 (2015)에 의하면 '단위 조정 3단계 학생'이며, 3수준 단위를 주어진 자원으로 동화하여 '단위의 단위의 단위'인 3수준 단위 구조 안에서 구체적인 활동을 하지 않고도 단위 조정이 가능한 특징을 가지고 있다.

한편, 학생의 분수 개념을 이해하는 데에도 단위 조정은 중요하다. 분수 $\frac{m}{n}$ 은 $\frac{1}{n}$ 이 m개 있는 것으로써 학생이 이해하는 과정에서 1-단위를 n개의 분할로 인식하고, n의 부분 중 일부인 하나로 생각하는 것에서 벗어나, 전체 1을 잃지 않는 상태에서 1로부터 부분인 $\frac{1}{n}$ 을 분리할 수 있으며, 분리한 $\frac{1}{n}$ 을 n 번 이상의 반복 가능한 양으로 생각할 수 있어야 한다(Boyce et al, 2021; Hackenberg & Lee, 2015; Steffe & Olive, 2010). Steffe (2003)은 학생이 분수 개념을 구성해 나아가는 과정에서 재귀 분할(recursive partitioning)이 나타난다고 보았는데, 전체를 부분으로 분할하는 분수의 곱셈 맥락에서 재귀 분할은 부분의 부분, 그리고 전체 사이의 관련성으로부터 분수 개념의 구성을 설명하였다. 재귀 분할은 분할의 분할이라는 두 분할의 합성을 통하여 합성 단위를 생성하고, 여러 개의 단위를 조정함으로써 전체를 새로운 3수준 단위의 양적 구조로 바라볼 수 있는 정신적인 활동이다(Lee & Lee, 2022; Shin & Lee, 2019; Steffe, 2003). 이러한 '재귀 분할'은 Lee와 Lee (2022)에 의하면 하나의 3수준 단위에서 또 다른 3수준 단위 사이의 구조적 전환의 가능성을 설명할 수 있는 요인으로 가분수가 포함된 문제 해결 과정에서의 '재귀 분할의 내재화' 여부가 비례 문제를 이해하고 해결하는 과정에서 중요한 역할을 한다고 주장하였다.

비례 문제 상황은 자연수 맥락을 넘어 가분수를 포함한 분수 맥락에서의 유연한 곱셈 추론이 요구되며, 비례 문제 해결을 위해서는 3단계 수준의 단위 조정이 필수적이다(Lee & Shin, 2020; Ulrich, 2016). 예를 들어, Lee와 Lee (2022)에서는 자연수 맥락에서 단위 조정 3단계 학생이지만, 복잡한 분수 곱셈 맥락에서는 '활동 안에서' 3수준 단위를 조정하는 두 학생의 비례 문제 해결 과정의 분석을 통해 분수 곱셈 문제에서 단위에 단위를 합성하며, 합성 단위에 대한 스플리팅 조작[3]의 가능성을 보였던 학생은 비례 문제에서 단일 단위를 구성하고, 구성한 단일 단위를 비례 문제 해결을 위한 도구로 사용하는 것을 볼 수 있었다. 반면 분수 곱셈 문제에서 단위에 단위를 합성하지 못하고, '눈대중 분할'[4]을 보여주었던 학생은 재귀 분할을 내재화하지 못하였고, 비례 문제에서 여러 시행착오 거치며 합성 단위를 혼동하는 모습은 자연수 맥락에서는 같은 수준의 단위 조정 단계이지만, 분수 맥락에서 생성되는 단위 구조

---

2 본 연구에서 단위 조정 2단계와 3단계 학생들을 대상으로 연구를 수행한 목적에 대해서는 이론적 배경과 연구 방법 부분에 더 구체적으로 설명한다.

3 합성단위에 대한 스플리팅 조작에 대한 자세한 기술은 Lee와 Lee (2022)를 참고하기 바란다.

4 '눈대중 분할'은 Lee와 Lee (2022)에 처음 제시된 용어로 단위에 단위를 합성하지 못하고, 기존의 단위를 새로운1-단위로 하여 분할하는 학생의 조작 방식을 설명한 것으로 자세한 기술은 Lee와 Lee (2022)를 참고하기 바란다.

의 복잡성에 따라 서로 다른 양적 조작 방식을 나타낼 수 있으며, 이러한 차이는 비례 문제 해결 과정에서 식별되는 차이와 관련이 있음을 확인하였다(Lee & Lee, 2022).

본 연구에서는 자연수 맥락에서 단위 조정 3단계 학생이지만, 가분수가 포함된 복잡한 분수 맥락에서는 서로 다른 단위 조정 단계와 수준을 보여준 세 명의 학생을 대상으로 하였다. 그리고 학생의 수 세기로부터 시작하여 정수, 분수에서의 단위 조정 방식과 비례 개념 사이에서의 관련성을 주장했던 앞선 선행연구로부터 한 발짝 더 나아가 단위 조정 단계와 수준이 다른 학생들의 비례 문제 해결 과정과 비례 관계가 포함된 함수 문제 해결 과정 사이의 관련성을 보고자 한다. 이 과정에서 단위 조정에 대한 관점은 초등 산술에서 대수적 사고로의 전환 시기에 학생의 수학적 이해를 설명하는 도구가 될 것으로 본다.

비례 관계에 대한 학생의 문제 해결 과정

Simon (2006)에서 '학생의 수학적 이해'는 그 이해가 학생에게 있다고 보는 것이 아니라, 연구자가 주어진 과제에 참여하는 학생의 능력을 학생의 언어적, 비언어적 행동을 통해 일관성있고 유용하게 설명하여 구별할 수 있는 방법적 측면이라고 하였다. 이에 본 연구는 학생이 주어진 문제 상황에서 수학적으로 추론하는 범주를 명료화하기 위해 비례 문제 상황을 유연성(flexibility)과 효율성(efficiency) 측면에서 다차원적으로 분석한 Carney 외 (2015) 연구에 주목하였다. Carney 외는 비례 관계를 이용한 미지값 문제 상황에서 두 가지 관점(스칼라 관점, 함수적 관점)과 두 가지 접근 방식(덧셈적 접근과 곱셈적 접근)이라는 요소를 바탕으로 이론적 분석 틀을 구성하였다.

구체적으로 스칼라 관점은 비의 각각 양을 상수 배를 통하여 확대 혹은 축소할 수 있는 단위로 인식하는 관점이고, 함수적 관점은 비 안에서 두 양 사이의 일정한 곱셈적 관계를 인식하고 이 관계를 이용하여 동등한 비(equivalent ratios)를 구성할 수 있다는 관점이다(Carney et al., 2015). 비례 관계를 이용한 미지값 문제 상황에 대한 구조와 Carney 외의 문제 해결 과정에 대한 두 가지 관점은 Figure 1과 같다.

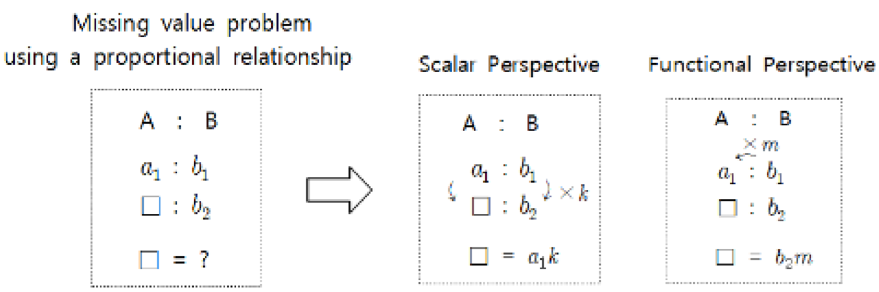


Figure 1. Two perspectives on the missing value problem situation using proportional relations (Carney et al., 2015, p.142).

나아가 Steinthorsdottir와 Sriraman (2009)의 4가지 비례 추론 수준에 따른 학생의 전략을 바탕으로 하여 Carney 외 (2015)는 비례 관계를 포함한 미지값 문제 상황에서 학생의 비례 추론 수준에 따라 나타나는 전략을 관점(스칼라 관점과 함수적 관점)과 접근 방식(덧셈적, 곱셈적 접근)을 기준으로 Table 1과 같이 설명하였다.

Table 1. Steinthorsdottir and Sriraman (2009)'s understanding of scalar and functional perspectives on the level of proportional reasoning (Carney et al., 2015, p. 143).

Level	Identify student strategies by level	Perspectives
1	Students incorrectly focus on the difference in quantities either within or between the ratios.	Scalar perspectives
2	Students focus on either additively iterating or multiplicatively scaling the given ratio as a composed unit to reach the missing value in the equivalent ratio (scale-up).	
3	This level involves scaling down a given ratio, and includes two sub-levels, the ability to partition the given ratio as a composed unit to reach the missing value in the equivalent ratio (scale-down) and the ability to combine iteration and partitioning to reach the missing value (scale up and down).	
4	This level involves the flexible use of either the scalar or functional relationship depending upon the ease of calculation with the numbers in the problem.	Scalar and Functional perspectives

비례 관계를 포함한 문제 상황은 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 와 같은 동등한 관계(equivalent relationship)를 항상 포함하고 있어서 비례 관계 안에서는 두 가지 다른 곱셈적 관계를 볼 수 있다(Carney et al., 2016). 우선 주어진 비를 자연수 배수 혹은 반복적인 덧셈으로 하여 동등한 새로운 비를 생성하기 위해 스칼라 배만큼 확대, 축소하기 때문에 스칼라 관점을 볼 수 있으며, 주어진 비에서 한 양과 다른 한 양 사이의 곱셈적 관계에 주목하는 함수적 관점으로도 볼 수 있다. 그렇다면 Table 1의 스칼라 관점과 함수적 관점, 그리고 덧셈적 접근과 곱셈적 접근 방식은 비례 관계를 포함한 미지값 문제 상황 뿐만 아니라, 비례 관계를 포함한 두 변화하는 양 사이의 이차함수 문제 상황에서도 볼 수 있다.

Carney 외 (2015) 이후로 진행된 Carney 외 (2016)은 비례 관계를 포함한 미지값 문제 상황이 주어진 숫자 관계에 따라 학생들의 전략과 문제 접근 방식에 영향을 준다는 사실로부터 학생들이 스칼라 관점보다는 함수적 관점에서의 문제 해결을 더 어려워한다고 보았고, 그럼에도 불구하고 스칼라 관점과 함수적 관점을 유연하게 사용하는 것이 학생의 비례 추론 능력에 매우 중요함을 강조하였다. 따라서 학생의 스칼라 관점과 함수적 관점을 유연하게 전환할 수 있는 능력이 비례 추론에서 더 나아가 학생이 이차함수를 일차함수와 식별되는 변화 상황으로 인식하고, 문제를 해결해 나아가는 과정을 일관성있고 유용하게 설명할 수 있는 중요한 렌즈가 될 것이라고 본다.

함수 관련 선행 연구

학생들의 비와 비례 개념은 이들의 산술 지식과 대수적 지식을 연결하는 가교 역할을 한다(Norton & Hackenberg, 2010). 현 교육과정에 의하면 중학교 1학년 '문자와 식' 영역에서 변수 개념이 본격적으로 도입되고, '함수' 영역에서 정비례와 반비례, 일차함수, 이차함수를 순차적으로 배우게 된다. 이때 중학교 3학년에서 배우는 이차함수는 이전에 학습한 정비례 관계나 일차함수와 비교해서 한 차원 높은 변화 상황에 대한 학생의 인식이 중요하다. 이에 '교수·학습 방법 및 유의사항'에서도 학생들에게 다양한 상황을 이용하여 일차함수와 이차함수의 의미를 다루도록 명시하고 있다(Ministy of Education, 2015).

지금까지 함수와 관련한 연구는 함수 학습과 그래프의 표현으로부터 공변추론 능력에 주목한 연구(Ma & Shin, 2016; Ma et al., 2016), 그리고 지수함수, 무리함수 등 다양한 함수로부터 학생의 변화율에 대한 인식과 표현을 공변적 관점과 연결시킨 연구(Lee et al., 2015; Lee & Shin, 2017) 등이 있으며, 이차함수와 관련한 연구에 있어서도 학생의 변화 관계에 대한 이해를 바탕으로 공변 추론에 주목한 연구들(예, Lobato et al., 2012; Ellis, 2011; Fonger et al., 2017; Ma & Im, 2019)이 있다. 즉, 변화하는 두 양 사이의 공변적 관점을 기반으로 하여 학생의 함수 학습에 대한 연구들이 대부분이었다. 그러나 최근 들어 학생들의 단위 조정 수준과 관련한 연구들, 변화율(Byerley, 2019), 공변추론(Boyce & Wyld, 2017), 비와 비례(Lee & Lee, 2020, 2021; Lee & Shin, 2020; Shin et al., 2020), 미적분학 준비(Boyce et al., 2021) 등과 같이 학생의 단위 조정 수준과 그 수준에 따라 학생들의 수학 지식이 어떻게 다르게 나타나는지를 학교 수학 전반에 걸쳐 진행되고 있다.

예를 들어, Boyce 외 (2021)은 학생의 단위 수준에 따라 미적분을 준비 과정에서 훨씬 좋은 수행 결과가 나타냈다고 보고하였다. 특히 3수준 미만의 단위를 동화하는 학생과 3수준 단위로 동화하는 학생 사이에 식별된 초기 미적분(pre-calculus) 이해 정도는 유의미한 차이가 있음을 통계적으로 보여주었다. 이 과정에서 학생의 단위 조정과 초기 미적분 개념 사이에 실질적인 관계가 있음을 시사하며, 학생들의 단위 조정 방식과 공변하는 양 사이의 관계로써의 함수에 대한 이해 사이와의 관련성을 언급하였다.

나아가 Lee와 Lee (2020)은 비 a : b에 대한 학생 이해의 차이가 이차함수 문제 상황을 식으로 표현하는 능력의 차이에 영향을 미칠 수 있음을 보고한 바 있다. 비 개념이 내재화되지 못하고, 외연량의 결합된 관계로 이해하여 비를 덧셈적으로만 접근했던 학생을 통해 이 학생의 어떠한 양적 조작 방식이 이차함수 문제 상황을 일차함수로 표현하는데 결정적인 역할을 하였는지를 살펴보았다. 그 결과 '하나당의 비'와 '내포량과 같은 측정으로의 비'(비 개념의 내재화)에 대한 학생의 이해가 이차함수를 표현하는 과정에서 중요한 역할이었음을 시사하였다. 그러나 비 개념에 대한 학생의 이해는 일차함수와 이차함수 문제 상황을 식별하기 위한 충분조건은 아니다. 이에 본 연구는 인지 주체가 비 개념을 '하나당의 비' 나 '내포량과 같은 측정으로의 비'로 내재화할 수 있다면 두 양 사이의 관계에서 일차함수와 식별되는 상황으로 이차함수 문제 상황을 이해할 수 있는지에 초점을 두었다. 또한 학생들의 비, 비례 개념에 대한 차이가 이들에게 가용한 단위 조정의 수준에 따라 그리고 그 수준에서 학생이 보여주는 양적 조작 방식에 의해 식별 가능하다고 보았던 Lee와 Lee (2022)의 연구 결과로부터 본 연구의 초점을 바라볼 수 있는 관점으로써 '단위 조정'에 주목한다.

연구 방법

연구 방법 개관

본 연구는 중학교 1학년 학생 4명을 대상으로 하여 2021년 5월부터 2021년 8월까지 진행된 임상 면담에서 학생 한 명당 7차시씩 총 28차시로 수집된 자료의 일부이다. 임상면담(Clement, 2000)은 인간의 사고 뒤에 숨겨져 있는 추론 과정을 이해하기 위해 인간의 행동을 관찰하고, 관찰된 행동으로부터 사고 과정을 부분적으로 분석하는 방법이다. 학생들은 임상면담이 진행되는 동안 자신의 이전 개념과 추론 과정을 사용하기 때문에, 연구자는 학생의 사고 뒤에 숨겨진 세계를 이해할 수 있게 된다(Clement, 2000). 임상 면담의 목적은 학생들의 산술적 지식과 비례 문제 해결 과정으로부터 비례 관계가 포함된 $y = ax^2$ 형태의 이차함수 문제 해결 과정 사이의 관련성을 살펴보는 것이었다. 다음은 본 연구의 대상 및 면담 과제에 대해 소개를 하고자 한다.

연구 대상 및 면담 과제 소개

제1 저자인 교사 연구자가 재직 중인 중학교에서 동료 수학 교사의 도움을 받아 1학년 학생들 중 현재 사교육을 받고 있지 않으면서 자발적 참여 의사를 보인 학생들로 1차 추천을 받았으며, 이후 학부모 동의와 사전 면담을 거쳐 최종 네 명의 면담 참여자를 선정하였다. 이는 학기 중 방과후 혹은 방학 중에도 면담이 진행될 수 있다는 점을 고려하여 지속적으로 참여할 수 있는 연구 대상자를 선정하는 것이 중요하다고 판단하였기 때문이다. 사전 면담에서 학생 네 명은 단위 조정 방식 간에 식별되는 차이가 있었으며, 네 명의 학생 중 자연수 맥락에서 3수준의 단위를 주어진 자원으로 사용하여 동화할 수 있는 단위 조정 3단계 학생으로 가분수가 포함된 복잡한 분수 곱셈 과제에서는 서로 다른 특징을 보여준 세 명의 학생(상우, 다혜, 연수)[5]을 연구 대상으로 최종 선정하였다.

구체적으로 총 7차시의 본 면담 과정 중 2차시로 진행된 분수의 곱셈 연산 과제는 Hackenberg와 Tillema (2009)에서 제시된 5가지 유형 중에서 '가분수의 가분수'와 관련된 유형으로 "$\frac{11}{9}$의 $\frac{4}{3}$"에 대한 과제이다. 이때 세 학생은 모두 1막대를 9등분하여 $\frac{1}{9}$의 11번 반복을 통해 가분수 $\frac{11}{9}$을 나타내었지만, 이후 $\frac{11}{9}$로부터 $\frac{4}{3}$를 나타내는 과정에서는 뚜렷한 차이를 보였다. 상우는 $\frac{11}{9}$을 새로운 1-단위로 보고 Figure 2의 왼쪽 그림과 같이 새롭게 3등분하여 $\frac{4}{3}$를 나타내었다. 그러나 기존의 3수준 단위 구조($\frac{1}{9}-\frac{9}{9}-\frac{11}{9}$)에 대한 분할의 분할이 아닌 $\frac{11}{9}$을 새로운 1-단위로 하여 '눈대중 분할'을 하였고, 자신이 그린 그림으로부터 수치적으로 구한 답을 연결시키지 못하였다. 즉, 상우는 활동을 통해 $\frac{1}{9}-\frac{9}{9}-\frac{11}{9}$과 $\frac{1}{3}-\frac{3}{3}-\frac{4}{3}$ 각각의 3수준 단위에 대한 구성은 가능하였지만, 단위에 단위를 합성하지 못한 눈대중 분할로 인하여 두 개의 3수준 단위 구조 사이의 전환은 문제 해결 과정에서 나타나지 못하였다.

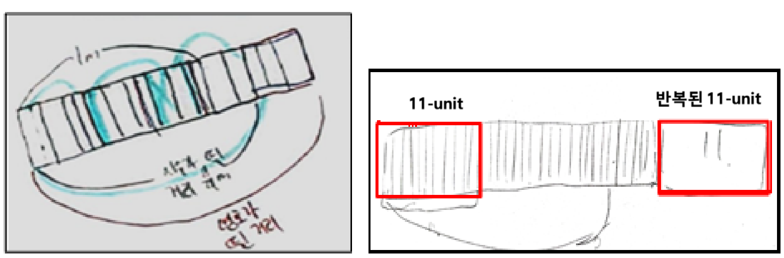


Figure 2. Sangwoo's partitioning from eye measurements and Dahye's images for $\frac{4}{3}$ of 11.

반면 다혜는 여러 번의 시행착오를 겪으며, 단위에 단위를 분할하려는 시도까지 '1분 40초'라는 긴 시간이 걸렸으나, 결국 Figure 2의 오른쪽 그림과 같이 $\frac{11}{9}$의 막대 그림에 $\frac{4}{3}$을 나타내기 위해 11부분의 각각에 3을 합성하였으며, 11부분에 3을 합성하여 구성한 3수준 단위 구조에서 1-3-33과 동시에 1-11-33으로의 두 개의 3수준 단위 구조로 다혜는 11의 $\frac{4}{3}$를 나타낸 것이다. 비록 전체 1인 $\frac{9}{9}$를 잃어버리고 $\frac{44}{33}$라고 답하였지만, 자신이 그린 막대 그림을 다시 확인하면서 전체 $\frac{27}{27}$로 회귀 가능하였다. 따라서 다혜는 '활동 안에서' 단위에 단위를 합성하며 두 개의 3수준 단위 구조 사이의 전환이 가능한 것으로 보였다.

5 참여 학생들의 이름은 모두 가명이다.

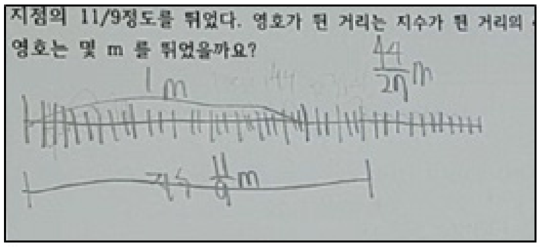


Figure 3. Yeonsu's picture of the $\frac{4}{3}$ situation on $\frac{11}{9}$.

앞서 눈대중 분할로 단위의 단위를 합성하지 못하거나 혹은 단위에 단위를 합성 가능해도 전체를 잃어버리며 자신이 그린 그림을 통해서 전체로 회귀할 수 있었던 두 학생과 달리, 연수는 과제가 주어지자 바로 $\frac{44}{27}$ 라고 답하였다. 1막대를 9등분하고 $\frac{1}{9}$ 을 두 개를 그리며 가분수 $\frac{11}{9}$ 을 막대 그림으로 나타낸 이후 Figure 3의 막대 그림과 같이 $\frac{1}{9}$ 의 11부분 각각 3을 합성하여 1-3-33의 구조에서 11의 $\frac{4}{3}$ 를 나타내기 위해 1-11-33의 구조로 동시에 전환하하여 33부분에서 11부분을 더 추가해야 한다고 답하였다. 그리고 자신이 그린 그림이 $\frac{44}{27}$ 임을 전체 $\frac{27}{27}$ 로 부터 설명할 수 있었다. 따라서 활동 이전에 두 개의 3수준 단위 구조를 유연하게 전환 가능한 학생이었다.

따라서 자연수 맥락에서는 모두 단위 조정 3단계 학생이었지만, 분수 맥락에서는 생성되는 단위 구조의 복잡성에 따라 단위 조정 2단계와 3단계 구분이 되고, 또 같은 단위 조정 2단계 안에서도 서로 다른 양적 조작 방식을 보여준 세 명의 학생들에 주목하여 비례 문제와 비례 관계가 포함된 이차함수 문제 상황에 대한 학생들의 이해 과정을 자세히 분석해 보고자 한다.

면담 과제는 크게 3가지 주제로 분수 문제(Hackenberg & Tillema, 2009; Shin et al., 2020), 비, 비례 관련한 문제(Carney et al., 2015; Lamon, 1993; Shin & Lee, 2019; Lee & Shin, 2020; Shin et al., 2020), 함수 및 식의 표현과 관련한 문제(Ellis, 2011; Lee & Lee, 2020; Lee et al, 2021; Lew et al, 2020; Lobato et al, 2012)이며, 한 차시에 4~5개 정도의 과제를 제시하였다. 이 중 본 연구에서는 5차시 '비, 비례 문제'와 7차시 '이차함수 관련 문제' 중 세 학생이 뚜렷한 특징을 보였던 (각 차시의 한 문제씩) 총 두 문제를 분석의 대상으로 삼았다.

Table 2의 연구 과제에서 비례 관련 문제는 Carney 외 (2015)의 연구 과제인 '비례 관계를 이용한 미지값 문제 상황'과 과제 유형은 동일하다. 그러나 Lamon (1993)의 비례 문제 유형 4가지[6]로 분류해 보았을 때, Carney 외 (2015)의 연구 과제는 세 번째 유형으로 '사람 수와 피자 조각의 수, 일정 금액과 그 금액으로 살 수 있는 물건의 개수' 등과 같이 서로 관련 없던 두 요소 사이의 관계를 비교하는 것이다. 반면 본 연구 과제는 Lamon (1993)의 네 번째 유형으로 확대-축소 문제 상황이며, '닮음' 개념이 이 문제 유형에 포함된다. 따라서 면담 학생들은 아직 '도형의 닮음'을 배우기 이전이므로 이를 고려하여 학생들이 익숙한 휴대폰의 이미지 '확대-축소' 기능에 대한 설명을 과제에 추가하였다.

한편 비례 관계를 포함한 이차함수 관련 문제는 $y = ax^2$ 형태로 Ellis (2011), Lee와 Lee (2020), Lobato 외 (2012)에서 제시된 이차함수와 관련한 연구 과제를 참고하여 2차시로 진행된 총 6개의 문제 중 하나를 선정하였다. Table 2에서 제시된 과제는 직사각형의 가로와 세로의 길이가 일정한 비를 가지면서 변화하는 상황에서 가로의 길이에 대한 직사각형의 넓이 변화라는 문제로 '비례 관련 문제'로 선정한 본 연구 과제와 '닮음'이라는 유사한 측면을 가진다. 또한 이차함수가 제곱의 이차원적 의미를 포함하고 있으므로 학생이 문제 상황을 그림으로 그려 보는 과정에서 닮은 도형들의 가로와 세로의 길이 변화에 대한 두 가지 차원의 변화를 학생이 어떻게 인식하는지 그린 그림으로부터 관찰 가능할 것으로 판단하였기에 본 연구 과제로 선정하였다.

---

6 Lamon (1993)의 비례 개념을 포함한 문제 유형은 4가지이며, 첫 번째 양의 측정(well-chunked measures), 두 번째 부분-부분-전체(part-part-whole), 세 번째 관련된 집합(associated sets), 네 번째 확대와 축소(stretchers and shrinkers)이다.

Table 2. Interview tasks.

	Tasks
Rato, proportion-related task	In the cell phone picture, the rectangle is 5 in width and 3 in length. The rectangle is too small to be enlarged. Solve the following problems and explain them.  1. If the vertical length is enlarged by 24, what is the horizontal length of the enlarged rectangle? 2. If the vertical length is enlarged by 5, what is the horizontal length of the enlarged rectangle?
Quadratic function task	A new rectangular shape was created by shortening or extending a rectangle with a horizontal length of 2 and a vertical length of 5 while keeping the ratio of the width and length constant. 1. What is the area of the rectangle according to the change in the horizontal length? (Please draw a picture and explain.) 2. Assuming that the area of a rectangle with respect to the length x of the width is y, express x as a relational expression with respect to y, and explain why the equation was established.

자료 수집 및 분석 방법

모든 면담은 COVID-19 상황에 따라 투명 칸막이가 설치된 교실에서 방역수칙을 준수하며, 면담자(제1 저자인 교사 연구자)와 학생이 나란히 앉아 일대일로 면담을 진행하였다. 면담의 모든 과정은 두 대의 카메라로 녹화되었으며, 면담 장면 전체와 학생의 활동지를 각각 촬영하였다. 면담자는 미리 계획된 문항지와 그에 따른 질문지를 준비하였으며, 학생의 답변이 모호하다고 판단될 경우 학생의 생각을 세밀히 관찰하기 위해 질문지에 없는 질문을 하기도 하였다. 그리고 문제 해결 과정에 직접적인 도움을 주지 않는 범위 내에서 추가 질문 등을 통해 학생과 상호 작용하였으며, 학생들의 차이를 고려해 질문에 대한 풀이 시간은 충분히 부여하였다. 그리고 매 차시별 촬영된 영상과 면담 영상으로부터 작성한 관찰일지, 전사 자료, 그리고 면담 과정에서 학생이 작성한 활동지 등을 종합적으로 활용하였다. 자료의 분석은 크게 두 단계로 진행되었다. 첫 번째 단계는 면담이 진행되는 과정에서의 수집된 자료를 통해 학생의 언어적, 비언어적 표현에 주목하며, 학생의 문제 해결 과정에 대한 해석, 추측, 그리고 선행 연구로부터의 이론적 틀을 바탕으로 분석을 진행하였다(Corbin & Strauss, 2015). 두 번째 단계는 모든 자료 수집이 완료된 이후 회고 분석을 통해 면담 과정에서 분석된 결과를 바탕으로 각 차시별로 학생 간의 비교 분석을 하며, 두 저자가 논의를 통해 비례 문제 상황과 비례 관계가 포함된 이차함수 문제 상황을 일관성 있게 설명할 수 있는 가설을 세우고, 연구 문제를 확인하는데 그 목적을 두었다.

결과 분석

단위 조정 단계가 다른 학생들의 비례 문제 해결 과정

가로와 세로의 길이의 비가 5 : 3일 때, 세로의 길이가 5이면 가로의 길이가 얼마인지를 물어보는 과제에서 단위 조정 단계가 다르고, 또 같은 단계에서도 서로 다른 수준을 보여주었던 세 학생에 대한 문제 해결 과정을 분석해 보고자 한다. 우선 단위 조정 2단계 학생인 상우는 가로와 세로의 길이를 2배, 3배, 4배하여 수의 나열을 통해 표를 구성하였고, 표를 잠시 바라 보다가 다시 처음의 가로와 세로의 길이를 각각 $\frac{1}{3}$ 배하여 세로의 길이 1을 구성한 뒤에 가로의 길이가 $\frac{5}{3}$ 이라고 하였다. 그리고 세로의 길이가 1일 때의 가로의 길이를 하나의 단위처럼 보고 2배, 3배, 4배, 5배하며, 5번의 반복을 통하여 $\frac{25}{3}$ 라고 양을 구성하였다. 상우는 Figure 4에 의하면 세로와 가로의 길이를 직접 나열하면서 그 과정에서 세로의 길이 1에 해당하는 '가로 길이의 양'을 구성할 수 있었으며, 이와 같은 '1에 해당하는 다른 한 양의 구성은 상우가 비례 관계를 이용한 미지값 문제 상황을 해결하는 핵심적 조작이었던 것으로 보인다.

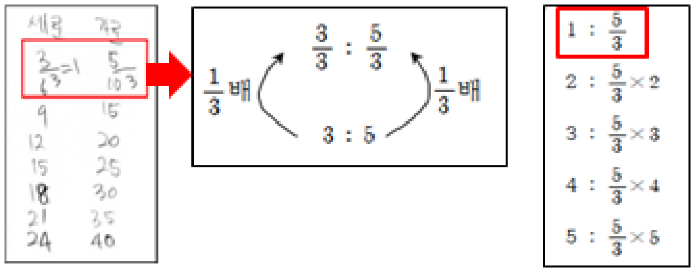


Figure 4. The process of solving the missing value problem using Sangwoo's proportional relationship.

그러나 결과만 보면 상우가 문제 해결 과정에서 세로의 길이 1에 대한 가로의 길이를 구하기 위해 곱셈적으로 접근했다고 생각될 수 있으나, 세로의 길이 5에 대한 가로의 길이를 구하기 위해서 상우는 세로의 길이 1에 해당하는 가로의 길이 $\frac{5}{3}$를 세로의 길이가 5가 될 때까지 Figure 4에서 처럼 하나씩 더해가며 순차적으로 나열하였다. 즉, 자연수 배수로의 덧셈적 관계에 주목하였던 것으로 보인다. 상우와 같은 단위 조정 2단계 학생인 다혜는 상우와 유사하게 "$\frac{5}{3} \times 5$"라는 식을 활동지에 썼으나, 이 식을 활동지에 적기까지 '45초'라는 시간이 필요했다. 비례 문제 과제인 5차시 이전에도 다혜는 이미 가분수를 구성할 수 있었고, 활동 안에서 두 개의 3수준 단위 구조에 대한 전환이 가능했던 학생이었다. 그러한 다혜가 활동지에 표현한 $\frac{5}{3}$는 아래 면담자와의 대화에서도 나타나듯이 상우가 구성한 '1에 해당하는 다른 한 양'과는 구별된다.

다혜: 세로의 길이 3에서 5가 되었으니까 이제 (세로의 길이가) 1만큼 늘렸으면 5 곱하기 $\frac{1}{3}$ 해서 $\frac{5}{3}$가 늘어났다고 했거든요.
면담자: 세로가 1일 때 가로가 $\frac{5}{3}$라는 말이야?
다혜: 아니요. 어... (말끝을 흐린다.)
면담자: $\frac{5}{3}$가 뭐지?
다혜: 그러니까 이게... (처음 직사각형의 세로의 길이를 가리키며) 여기 직사각형에서 원래 길이가 3인데 5가 됐잖아요. 여기서 세로의 길이가 (처음 직사각형 세로의 길이를 다시 가리키며) 1늘어난다는 건 (확대한 직사각형의 세로의 길이를 가리키며) 여기선 $\frac{5}{3}$씩 늘어난 거에요. 그래서 세로가 5라면... 음... (3초 후) $\frac{5}{3}$가 세 개면 5가 나오잖아요. 그래서 $\frac{5}{3}$가 5개니까 5 곱하기 $\frac{5}{3}$를 해서 $\frac{25}{3}$가 나왔어요.

처음에 면담자는 다혜도 상우와 같이 세로의 길이가 1일 때 가로의 길이로써 $\frac{5}{3}$라는 양을 표현한다고 생각하였다. 그러나 다혜는 "세로가 1일 때 가로가 $\frac{5}{3}$라는 말이야?"라는 면담자의 말에 곧바로 "아니오"라며 단호하게 말하였다. 이후 답변하는 과정에서 다혜가 주목한 부분은 직사각형의 '세로의 길이'였다. 즉, 다혜는 $\frac{5}{3}$라는 양을 구성하는 과정에서 '가로의 길이'는 고려하지 않았던 것이다. 처음 주어진 직사각형의 세로의 길이 3을 1-단위로 하여 각 $\frac{1}{3}$씩 3부분에 5를 합성하는 방식으로 즉, 세로의 길이 3이 5가 되기 위해서 $\frac{5}{3}$가 3개있는 $\frac{1}{3} - \frac{5}{3} - \frac{15}{3}$의 3수준 구조로 설명하였다. 따라서 "1만큼 늘렸으면 5 곱하기 $\frac{1}{3}$ 해서 $\frac{5}{3}$가 늘어났다"라는 다혜의 말은 단위 조정 관점으로 보면 '세로의 길이 3을 1-단위로 할 때 $\frac{1}{3}$ 씩 3부분에 5를 합성하여 $\frac{5}{3}$가 3개 있다'로 해석된다. 그리고 세로의 길이 3을 5가 되게 하기 위해 자신이 구성한 $\frac{5}{3}$를 단일 단위로하여 가로의 길이를 구하기 위해 $\frac{5}{3}$를 5번 반복하였다. 결국 다혜는 단일 단위 $\frac{5}{3}$를 구성하고, Figure 5와 같이 구성한 단일 단위를 가로 5-막대와 세로 3-막대에 각각 분배하여 활동지에 "$\frac{5}{3} \times 5$"를 표현하기까지 '45초'라는 시간이 필요했던 것으로 보인다.

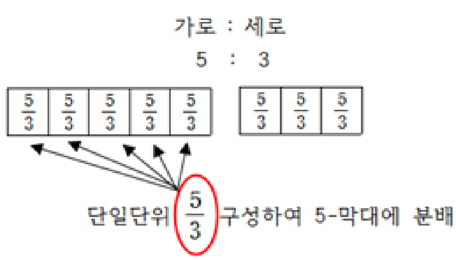


Figure 5. The process of solving the missing value problem using Dahye's proportional relationship.

단위 조정 2단계인 상우와 다혜 두 학생을 비교해 보면, 두 학생 모두 '가로와 세로의 길이 비' 안에서의 두 양 사이의 일정한 곱셈적 관계에는 주목하지 못하고, 가로와 세로의 길이 각각의 양을 하나의 비로 하여 확대-축소할 수 있는 단위로 인식하였다. 이 과정에서 상우는 '한 양에 대한 다른 한 양의 크기'를 분할과 반복을 통한 자연수 배수 관계의 덧셈적 접근 방식으로 미지의 양에 도달하는 모습을 보였다. 시간이 오래 걸리기는 했지만 다혜는 세로의 길이가 확대되는 상황에서 하나의 단일 단위를 구성하고, 구성한 단일 단위를 가로 막대와 세로 막대에 분배하는 방식으로 비례 관계를 이용하여 미지값 문제에 도달하였다. 따라서 두 학생 모두 Carney 외 (2015)에 의하면 스칼라 관점에서의 3수준으로 식별할 수 있다.

반면, 단위 조정 3단계 학생이었던 연수는 “가로가 5이고, 세로가 3이면 가로는 세로의 $\frac{5}{3}$배니까, 세로가 1이면 가로가 $\frac{5}{3}$에요.” 라며 “세로의 길이 1이 5가 되니까 가로가 $\frac{5}{3}$의 5배이면 $\frac{25}{3}$”라고 설명하였다. 즉, 연수는 가로의 길이는 $\frac{5}{3}$의 5배로 $\frac{25}{3}$라고 답하며, 상우와 다혜처럼 결과적으로 같은 문제 해결 과정을 보였다. 이때 상우가 문제를 해결하는 과정에서 주목했던 '세로의 길이가 1이면 가로의 길이가 $\frac{5}{3}$'라는 '한 양의 1에 대한 다른 한 양의 크기'가 연수에게도 역시 비례 문제를 해결하는 과정에서 중요한 핵심적인 조작으로 볼 수 있으나, “가로는 세로의 $\frac{5}{3}$ 배”라는 연수의 말에서 처럼 '세로의 길이가 1이면 가로의 길이가 $\frac{5}{3}$'임을 이해하기 위해서 연수는 앞서 두 학생이 주목하지 못했던 함수적 관점에서 가로와 세로의 길이 사이의 곱셈적 관계에 주목하였다는 점이다. 따라서 연수는 가로와 세로의 길이의 두 양 사이의 일정한 곱셈적 관계를 인식하여 함수적 관점에서 문제를 바라볼 수 있고, 비의 각각의 양을 5배하는 과정에서 스칼라 관점과 함수적 관점을 유연하게 사용 하여 문제를 해결하였으므로 Carney 외 (2015)에 의하면 4수준으로 판단된다.

단위 조정 단계가 다른 학생들의 이차함수 문제 해결 과정

가로의 길이가 2, 세로의 길이가 5인 직사각형에서 가로와 세로의 길이 비를 일정하게 유지하며 줄이거나 늘여서 새로운 직사각형의 모양을 만드는 상황에서 가로의 길이 변화에 따른 넓이의 변화에 대한 질문에 세 학생 모두 가로와 세로의 길이를 Figure 6과 같이 나열하고, 가로와 세로의 길이로부터 직사각형의 넓이를 구하였다.

다만 Figure 6에서와 같이 '가로의 길이'와 '(가로의 길이 변화에 따른) 세로의 길이', 그리고 '직사각형의 넓이'에 대해 세 학생이 수치적으로 나열한 수들과 그들의 설명 과정에는 정도의 차이가 있었으며, 이후 이차함수 변화 상황을 식으로 표현하는 과정에서 그 결과적인 차이가 나타났다.

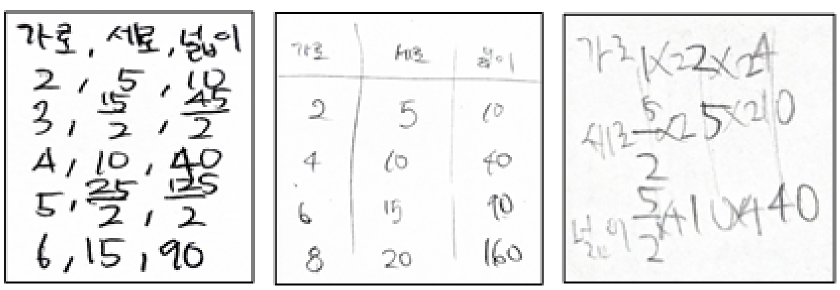


Figure 6. A table numerically showing the vertical length and the area of the rectangle relative to the horizontal length of Sangwoo, Dahye, Yeonsu (from left).

상우와 다혜는 변화 상황을 수치적으로 표현할 때 가로의 길이가 1인 경우를 고려하지 않았다. 이러한 사실은 면담자가 가로의 길이를 x, 가로의 길이 변화에 따른 직사각형의 넓이를 y라고 두고, y를 x에 대한 관계식으로 나타낼 것을 요구했을 때, 식의 표현하는 과정에서 많은 시행착오를 거치는 계기가 되었다. 특히 상우는 가로의 길이를 1씩 더하며 덧셈적으로 접근하였고, 그 과정에서 세로 길이의 변화와 직사각형의 넓이 변화 사이에서 어떠한 규칙도 찾아내지 못하였다. 다음은 이후로도 고민만하고 활동지에 어떠한 시도조차 하지 못했던 상우와 면담자가 나눈 대화 일부이다.

면담자: 가로의 길이를 나열한 수에는 1일 때가 없네?
상우: 아! 네... 가로가 1이면, 세로는 $\frac{5}{2}$에요. 가로와 세로가 2대5니까, 가로가 1이면 $\frac{5}{2}$. (활동지에 $1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$라고 적는다.) 아! (활동지에 바로 $y = \frac{5}{2}x$라고 적는다.) 가로가 x이니까, 넓이는 $\frac{5}{2}x$ 에요.

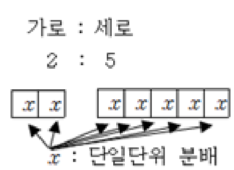
비례 문제에서도 상우는 세로의 길이 1에 대한 가로의 길이를 구할 수 있었다. 따라서 가로의 길이가 1인 경우는 단지 수치적으로 나열하는 과정에서 고려하지 못했을 뿐이라는 사실은 "가로의 길이를 나열한 수에는 1일 때가 없네?"라는 면담자의 질문에 바로 "가로가 1이면 세로는 $\frac{5}{2}$에요."라는 답으로 알 수 있다. 그러나 가로의 길이를 x라고 표현하는 순간, 상우가 나타낸 직사각형의 넓이에 대한 식은 일차함수였다.[7] 비례 문제에서 스칼라 관점으로 3수준에 머물러 있었던 상우는 비례 관계가 포함된 이차함수 문제에서도 가로의 길이와 세로의 길이에 대한 곱셈적 관계에는 주목하지 못하였다. 따라서 함수적 관점으로 문제 상황을 바라보지 못하였던 상우에게 가로의 길이를 x라고 할 때, 가로의 길이에 대한 세로의 길이를 $\frac{5}{2}x$라고 나타내지 못한 것은 비례 문제의 연장선에서 당연한 결과이다.

상우와 같은 단위 조정 단계이나 '활동 안에서' 두 개의 3수준 단위 구조로의 전환이 가능했던 다혜의 경우, 상우와 같이 가로의 길이 변화를 수치적으로 나열할 때 가로의 길이가 1인 경우를 고려하지 못하였다. 다음은 다혜와 면담자와의 대화 일부이다.

다혜: 가로는 2, 4, 6, 8이고, 세로는 5, 10, 15, 20이니까 넓이는 10, 40, 96, 160이에요.
면담자: 그렇구나. 그럼 변화하는 직사각형을 식으로 표현해 볼 수 있겠니?
다혜: (활동지에 "$(2+2x) \times (5+5x) = y$"라고 적는다.) 순서가 세 번째면.. 어! 잠시만요. (활동지에 식을 지우고 "$2x \times 5x = y$"라고 적는다.) y가... 가로 세로 둘 다 순서가 x 번째라면 가로는 $2x$, 세로는 $5x$에요. 그래서 넓이는 $10x$에요.
면담자: $y = 10x$?
다혜: 아! x^2이에요. x 곱하기 x이니까, $y = 10x^2$이에요.
면담자: 직사각형이 변하는게 어떻게 변하는거 같아? 어떻게 증가해?
다혜: 넓이가 순서의 제곱만큼 커져요. 10의 x^2만큼이요.

다혜는 Figure 6과 같이 자신이 나열한 가로의 길이와 세로의 길이, 그리고 직사각형의 넓이로부터 규칙을 찾으려고 하였고, 그 규칙에 따라 관계식을 세우려는 시도들을 하였다. 그 과정에서 (가로의 길이가 아닌) 자신이 나열한 수들 사이에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째, ... , x번째와 같이 나열된 수들의 순서를 x라 두고, x번째일 때의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $2x$와 $5x$로 하여 직사각형의 넓이는 $y = 10x^2$이라고 표현하였다. 비록 처음에는 $y = 10x$라고 했지만, 이내 $y = 10x^2$이라는 이차함수로 바꾸었고, 직사각형의 넓이 변화 상황을 "순서의 제곱만큼 커져요."라고 하였다. 이후로 또 다른 관계식을 요구하는 면담자의 질문에 가로의 길이를 x에 대한 직사각형의 넓이로 $y = ax^2$ 형태를 표현하지는 못하였지만, 자신이 나열한 순서에 따른 'x번째' 직사각형의 넓이를 이차식으로 표현할 수 있었다.

다혜는 가로의 길이와 세로의 길이 사이의 곱셈적 관계에는 여전히 주목하지 않고, "순서가 x번째라면 가로는 $2x$, 세로는 $5x$에요."라는 말에서 처럼, 순서 'x번째'를 하나의 단위로 하여 순서에 2배와 5배를 통해 가로와 세로의 길이를 조정하고 있는 것으로 판단된다. 이는 여전히 함수적 관점이 아닌 스칼라 관점에서의 변화 상황이며, Figure 5의 비례 문제 해결 과정과 비교해 볼 때, Figure 7과 같이 이차함수 문제 해결 과정으로 해석해 볼 때 같은 단위 조정 단계인 상우와는 구별되는 부분이다.



$$x \times 2 : x \times 5 \Longrightarrow y = 10x^2$$

Figure 7. Algebraic expression for a quadratic function of Dahye showing a quantitative operation similar to a proportional problem solving process.

7 상우는 이차함수와 관련된 문제 상황에서 면담자의 개입이 있기 전에는 일관성있게 y=ax형태의 식으로만 표현하였음을 밝힌다.

반면 연수는 Figure 6과 같이 가로의 길이가 1인 경우로부터 세로의 길이와 직사각형의 넓이를 구하였고, 이후 가로의 길이를 2배씩 변화시키며 2, 4일 때 각각 세로의 길이와 직사각형의 넓이 사이의 관계를 수치적으로 표현하였다. 그리고 가로의 길이 2가 1로 축소될 때, 세로의 길이는 $\frac{5}{2}$로 축소되어, 가로의 길이 1이 x라면 세로의 길이는 $\frac{5}{2}x$이므로 직사각형의 넓이는 $y=\frac{5}{2}x^2$이라고 표현하였다.

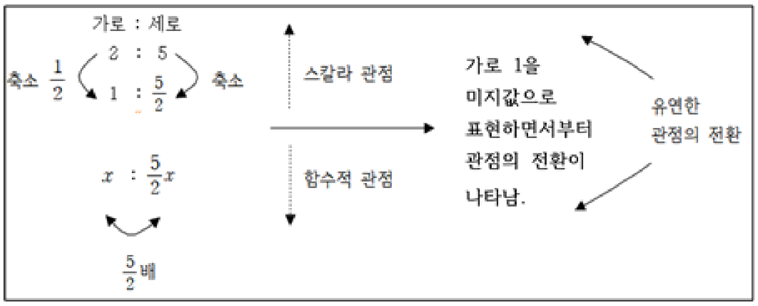


Figure 8. Flexible transition between scalar and functional perspectives in Yeonsu's problem-solving process.

연수는 앞서 비례 문제 해결 과정에서 Carney 외 (2015)의 4수준 전략을 나타내며, 스칼라 관점과 함수적 관점을 유연하게 전환하는 모습을 보여 주었다. 이러한 연수의 문제 해결 과정은 비례 관계가 포함된 이차함수 문제 상황에서도 나타나 Figure 8과 같이 이차함수를 식으로 표현하는 과정에서도 중요하게 작용한 것으로 보여진다. 가로의 길이와 세로의 길이 각각을 $\frac{1}{2}$ 배하여 축소하고, 가로의 길이 1과 세로의 길이 $\frac{5}{2}$로부터 '가로는 세로의 $\frac{5}{2}$ 배'라는 함수적 관점에서의 곱셈적 관계를 통해 가로의 길이가 x일 때, 세로의 길이도 $\frac{5}{2}x$ 임을 곧바로 인식한 것으로 보인다. 따라서 이 과정에서 연수는 스칼라 관점과 함수적 관점을 유현하게 전환 가능함을 보여준다.

결론 및 제언

일차함수를 학습한 이후 이차함수를 도입할 때, 이차함수가 단순히 이차식의 형태로 이루어진 포물선 모양의 그래프라는 절차적 지식만을 강조하기보다는 그에 앞서 학생들에게는 일차함수와 식별되는 한 차원 높은 변화 상황이라는 개념적 이해가 선행될 필요가 있다(Ellis, 2011; Fonger et al., 2017; Lee & Lee, 2020). 따라서 학생이 이차함수 $y=ax^2$을 수치적으로 또 대수적으로 표현하는데 비례 지식이 어떻게 사용되고, 덜 정교한 이해를 보이는 학생(상우, 다혜)과 더 정교한 이해를 보이는 학생(연수) 사이의 차이를 설명하는데 단위 조정이라는 관점에서 이를 설명할 수 있는지 보고자 하였다. 이에 대한 본 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 분수 맥락에서 단위 조정 2단계로 판단된 상우와 다혜는 단위 조정 3단계인 연수와 비례 관계를 이용한 미지값 문제 해결 과정에서 Carney 외 (2015)의 이론적 분석틀에 따라 서로 다른 관점에서의 서로 다른 조작 방식을 보여주었다. 상우와 다혜는 가로와 세로의 길이 각각에 주목하며 스칼라 관점에서 비례 문제를 해결하는 모습을 보였고, 연수는 가로와 세로의 길이의 두 양 사이의 일정한 곱셈적 관계를 인식하며 함수적 관점에서 문제를 바라보았다.

가분수가 포함된 분수 곱셈 상황에서 활동을 통해서도 단위의 단위를 합성하지 못하며, 분할한 단위를 새로운 1-단위로 하여 눈대중 분할의 모습을 보였던 상우와 시행착오를 거쳤지만 단위에 단위를 합성하며 두 개의 3수준 단위 구조의 전환이 가능했던 다혜는 Lee와 Lee (2022)에 따르면 같은 단위 조정 단계에 있지만 '재귀 분할의 내재화' 측면에서 그 차이를 드러냈다. 그리고 그 차이는 가로와 세로의 길이 비 5 : 3에서 세로의 길이 3을 5로 변환하는 과정에서도 드러났다. 상우는 세로의 길이 3을 바로 5로 변환하지 못하고, 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $\frac{1}{3}$배하여 구성한 가로와 세로의 길이 비를 5번 더해가며 미지값에 도달하였다. 반면 다혜는 세로의 길이 3에 $\frac{5}{3}$배하여 세로의 길이 3을 바로 5로 변환하는 조작 방식을 보였다. 이에 가분수가 포함된 분수의 곱셈 문제에서

'재귀 분할의 내재화' 가능 여부에 따라 비례 문제 해결 과정에서의 양적 조작 방식의 차이가 나타나며, 이는 두 개의 3수준 단위 사이의 구조적 전환과도 관련된다는 Lee와 Lee (2022)의 주장은 고무적이다. 그러나 결과적으로는 두 학생 모두 Carney 외 (2015)에 의하면 가로와 세로의 길이 각각의 양에 주목하며 미지값에 도달하기 위해 가로, 세로 그 각각의 단위를 분할, 분리, 반복하는 양적 조작 방식을 보여주어 비례 추론 3수준의 스칼라 관점에 머물러 있는 것으로 판단된다.

반면 가분수가 포함된 분수 곱셈 문제에서도 단위의 단위를 합성하며 전체로부터 자신이 합성한 단위가 얼마인지를 알고 바로 그림으로 표현 가능했던 단위 조정 3단계 학생인 연수는 세로의 길이의 $\frac{5}{3}$배가 가로의 길이라는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 바로 인식하였다. 따라서 함수적 관점에서 가로와 세로의 길이에 대한 곱셈적 관계로부터 세로의 길이 1일 때 가로의 길이의 양인 $\frac{5}{3}$를 하나의 단일 단위로 구성하고, 이후 스칼라 관점으로 전환하여 5번의 반복을 통해 미지값에 도달하였다. 따라서 Carney 외 (2015)의 스칼라 관점과 함수적 관점이 유연하게 전환 가능한 비례 추론 4수준으로 판단된다.

둘째, 같은 단위 조정 2단계 안에서도 서로 다른 양적 조작 방식을 보여주었던 상우와 다혜는 결과적으로 이차함수 문제도 서로 다르게 표현하였던 반면, 단위 조정 2단계와 3단계로 서로 다른 단위 조정 단계에 있던 다혜와 연수는 결과적으로는 이차함수 문제에서 $y = ax^2$ 형태로의 유사한 이차함수식을 나타냈다. 그러나 다혜와 연수는 자신이 표현한 이차함수를 설명하는 과정에서 서로 다른 관점으로 문제 상황을 바라보고 있음을 확인할 수 있었다.

우선 상우와 다혜의 경우를 비교해 보면, 비례 문제에서 스칼라 관점으로 3수준에 머물러 있었던 상우는 비례 관계가 포함된 이차함수 문제에서도 가로의 길이와 세로의 길이에 대한 곱셈적 관계에는 주목하지 못하며 가로의 길이를 x라고 하는 순간, 직사각형의 넓이를 $y = ax$ 형태의 일차함수로 표현하였다. 상우와 같이 비례 문제를 스칼라 관점에서만 보았지만, 활동 안에서 두 개의 3수준 단위 구조로의 전환이 가능했던 다혜는 첫 번째, 두 번째, 세 번째 직사각형과 같이 순서를 두어 (즉, 변수 x를 자연수 범위로 한정하여) x 번째 직사각형에서의 가로와 세로의 길이 각각을 구성하고, 자신이 구성한 미지값의 자연수 배수 관계를 이용해 $y = ax^2$ 형태의 이차함수를 나타낼 수 있었다. 이 과정에서 가로와 세로의 길이로 각각 주어진 단위에 'x 번째'라는 미지의 자연수 x를 분배하는 방식으로 가로와 세로를 나타낼 수 있었던 것으로 보인다. 다만, 다혜가 가로의 길이가 x일 때는 직사각형의 넓이를 이차함수로 나타낼 수 없었던 것은 상우와 마찬가지로 비례 문제를 해결하는 과정에서 스칼라 관점에만 머물렀던 다혜에게 당연한 결과일지 모른다. 그리고 상우와 다혜의 스칼라 관점과 비교해 볼 때, 비례 문제에서 스칼라 관점과 함수적 관점을 유연하게 전환 가능했던 연수는 Carney 외 (2015)의 함수적 관점이 비선형함수로의 이차함수를 제곱이라는 이차원적 의미로 바라볼 수 있게 하는데 기여하였다고 본다. 활동 안에서 시행착오를 보이며 두 개의 3수준 단위 구조의 전환 가능했던 다혜와는 달리, 활동 이전부터 두 개의 3수준 단위 구조를 유연하게 전환 가능했던 연수는 자연수 범위에서 확장된 변수 x에 대한 $y = ax^2$ 형태의 이차함수로 표현이 가능했던 것으로 판단된다.

본 연구는 이를 바탕으로 Figure 9와 같이 단위 조정 단계에 따라 비례 문제 해결하는 과정에서의 관점과 수준은 다르게 나타나며, 관점과 수준의 차이는 $y = ax^2$ 형태의 이차함수 문제를 표현하는 과정에서의 결과적 차이를 보여준다는 하나의 설명적 가설을 제시한다.

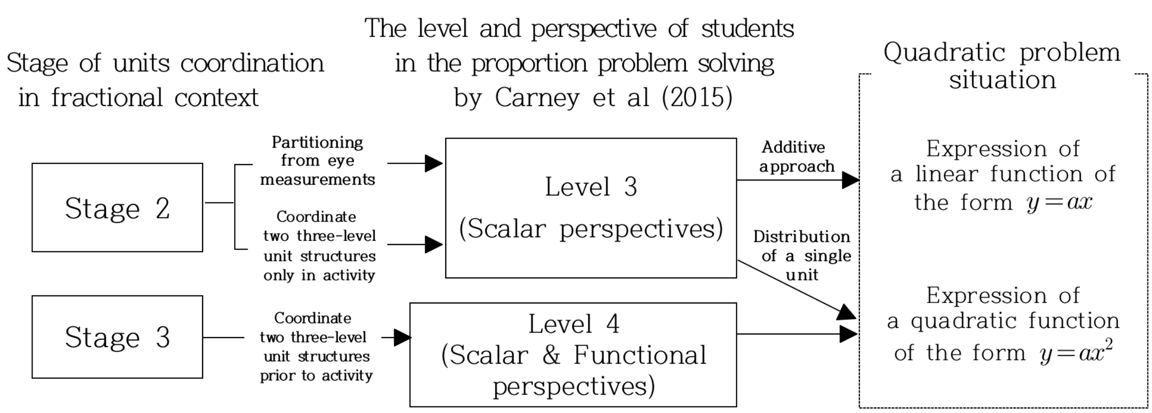


Figure 9. An explanatory hypothesis for the quadratic problem solving process from the proportional problem of three students.

그리고 더 나아가 상우와 다혜는 같은 단위 조정 단계임에도 불구하고 이차함수를 일차함수와는 다른 상황으로 식별하였고, 식으로 표현하는 과정에서 나타나는 차이는 비례 문제 해결 과정에서의 차이로부터 기인한 것으로 판단하였다. 따라서 비례 문제 해결 과정과 비례 관계가 포함된 이차함수를 이해하는 과정에서 학생의 단위 조정 단계 및 수준의 이해가 필요함을 시사한다. 또한 다혜와 연수 사이의 이차함수를 식으로 표현 과정에서의 차이는 비례 문제를 함수적 관점에서 볼 수 있는지에 대한 차이로부터 식별 가능하며, 함수적 관점의 식별은 단위 조정 단계에 따른 차이와 관련이 있음을 시사하는 바이다.

본 연구에서 제시된 가로와 세로 길이의 변화에 따라 직사각형 넓이의 변화를 학생이 함께 고려하여 값을 조정하는 것은 어려운 일이며, 복잡한 함수 관계에서 학생들이 반복적인 이산적 변화(예, 다혜의 이차함수 표현)로부터 양이 연속적으로 변화한다(예, 연수의 이차함수 표현)는 인식에 도달하는 것은 쉽지 않은 일이다. 따라서 본 연구의 설명적 가설의 관점을 확장시켜 두 변화하는 양 사이의 공변적 관점에 주목한 연구로의 연결 가능성도 함께 모색해 보는 시도가 후속 연구로 진행되기를 제안해 본다. 이러한 방향으로의 연구는 선형적 함수로의 일차함수에 익숙한 중학생들이 비선형함수로써 처음 접하게 되는 이차함수를 어떻게 배워야 하는지를 이해하는 데 바탕이 되며, 함수 학습에서 배워야 할 개념을 학생들이 어떻게 이해는지 그 과정적 측면에 초점을 두어 수업 현장에서 교수 학습 자료에 중요한 아이디어를 제공할 수 있는 기초 연구가 될 것이라고 기대한다.

References

Byerley, C. (2019). Calculus students’ fraction and measure schemes and implications for teaching rate of change functions conceptually. *Journal of Mathematical Behavior, 55,* 100694.

Boyce, S., Grabhorn, J. A., & Byerley, C. (2021). Relating students’ units coordinating and calculus readiness. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(3), 187-208. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1771651

Boyce, S., & Wyld, K. (2017). Supporting students’ understanding of calculus concepts: Insights from middle-grades mathematics education research. In A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.1152–1157). SIGMAA on RUME.

Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactionsin children’s addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*, 131-149. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.07.008

Carney, M., Smith, E., Hughes, G., Brendefur, J., Crawford, A., & Totorica, T. (2015). Analysisof students' proportional reasoning strategies. In T. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam,K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 141-148). Michigan State University.

Carney, M., Smith, E., Hughes, G., Brendefur, J., & Crawford, A. (2016). Influence of proportional number relationships on item accessibility and students’ strategies. *Mathematics Education Research Journal, 28*(4), 503-522. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0177-z

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interview: Foundations and model viability. In R. Lesh, & A. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Methodologies of Science and Mathematics Education* (pp. 341-385). Lawrence Erlbaum.

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research* (4th ed.). Sage Publications.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship throughquantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth(Eds.), *Early Aalgebraization* (pp. 215-238). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_13

Fonger, N. L., Dogan, M. F., & Ellis, A. (2017). Students' clusters of concepts of quadratic functions. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp.329–336). PME.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students’ fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(2), 196-243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students’ whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.004

Kim, H. K., Na, G. S., Lee, M. R., Lee, A. K., & Kwon, Y. G. (2021). *Middle School Mathematics 3*. Truebook Sinsago.

Kim, N. H. (1997). *Didactical analysis of variable concept andsearch for direction of its learning-teaching* [Doctoral Dissertation, Seoul National University].

Kim, N. H. (1999). On some teaching problems related to thelearning of variable concept in school mathematics, *School Mathematics, 1*(1), 19-37.

Kim, W. Y., Cho, M. S., Bang, G. S., Lim, S. H., Kim, D. H., Kang, S. J., Bae, S. J., Ji, E. J., & Kim, Y. H. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Visang Education.

Korea Institute of Curriculum and Evaluation (2007). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education and Human Resources Development.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lee, D. G., Kim, S. H., Ahn, S. J., & Shin, J. (2016). Analysis on high school students` recognitions and expressions of changes in concentration as a rate of change. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(3), 333-354.

Lee, D. G., Moon, M. J., & Shin, J. (2015). A student's conceiving a pattern of change between two varying quantities in a quadratic functional situation and its representations: The case of Min-Seon. *The Mathematical Education, 54*(4), 299-315. https://doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.4.299

Lee, D. G., & Shin, J. (2017). Students' recognition and representation of the rate of change in the given range of intervals. *Journal of Educational Research in Mathematics, 27*(1), 1-22.

Lee, J. A., & Lee S. J. (2020). Secondary students' reasoning about covarying quantities in quadratic function problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, 30*(4), 705-732. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.11.30.4.705

Lee, J. A., & Lee S. J. (2022). Exploring fraction knowledge of the stage 3 students in proportion problem solving. *The Mathematical Education, 61*(1), 1-28. https://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.1.1

Lee, J. Y., Choe, B. L., Kim, D.J., Kim, S. M., Won, Y. M., Kang, H. K., Kim, S. C., & Kang, S. G. (2021). *Middle School Mathematics 3*. Chunjae Education.

Lee, S. J., & Shin, J. (2020). Students' proportion problem solving with different units coordination stages. *Journal of Educational Research in Mathematics. 30*(2), 245-279. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.05.30.2.245.

Lew, H. C., Sunwoo, H. S., Shin, B. M., Jeong, D. S., Jang, Y. H., Seol, J. S., & Park, S. H. (2020). *Middle School Mathematics 3.* Chunjae Education.

Lobato, J. (2008). On learning processes and the national mathematics advisory panel report. *Educational Researcher, 37*(9), 595–601.

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 85-119. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.656362

Ma, M. Y., & Lim, D. (2019). Two middle school students' understanding of 'constant rate of change' and 'constant rate of change of rate of change'. *School Mathematics, 21*(3), 607-624.

Ma, M. Y., & Shin, J. (2016). Gifted middle school students' covariational reasoning emerging through the process of algebra word problem solving. *School Mathematics, 18*(1), 43-59.

Ma, M. Y., Shin, J., Lee, S. J., & Park, J. H. (2016). Middle school students' understanding and development of function graphs. *School Mathematics, 18*(3), 457-478.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education No. 2015-74 [Vol. 8].

Miller, S. P., & Hudson, P. J. (2007). Using evidence-based practices to build mathematics competence related to conceptual, procedural, and declarative knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1). 47-57.

Norton, A., & Hackenberg, A. J. (2010). Continuing research on students' fraction schemes. In L. Steffe, & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 341-152). Springer.

Pang, J. S., Cho, S., & Kim, J. W. (2017). An analysis of variable concept in the elementary mathematics textbooks and workbooks. *The Mathematical Education, 56*(1), 81-100. https://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.1.81

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developingconceptual and procedural Knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp.1118-1134). Oxford University Press.

Shin, J., & Lee, S. J. (2019). Conceptual analysis for solving a missing value problem using a proportional relationship. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(2), 227-250. https://doi.org/10.29275/jerm.2019.5.29.2.227

Shin, J., Lee, S. J., & Steffe, L. P. (2020). Problem solving activities of two middle school students with distinct levels of units coordination. *Journal of Mathematical Behavior, 59,* 1-19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100793

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359–371.

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*(3), 259–309. https://doi.org/10.1016/1041-6080(92)90005-Y

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 1–41). State University of New York Press.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding scheme. Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 237-295. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00022-1

Steinthorsdottir, O. B., & Sriraman, B. (2009). Icelandic 5th-grade girls' developmental trajectories in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 6-30.

Tillema, E. S. (2013). A power meaning of multiplication: Three eighth graders' solutions of cartesian product problems. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 331-352. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.006

Ulrich, C. (2016). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (part 2). *For the Learning of Mathematics, 36*(1), 34-39.