The Mathematical Education. Vol. 61, No. 3, 419-439
http://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.3.419

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

Mathematising process analysis of linear function concept based on Freudenthal's didactical phenomenology

Kim, Eun suk[1] · Cho, Wan Young[2]*
[1]Teacher, Namsung Middle School
[2]Professor, Chungbuk National University

*Corresponding Author: Cho, Wan Young (wycho@cbu.ac.kr)

ABSTRACT

This study is based on Freudenthal's mathmatising process and the didactical phenomenology of linear function concept, I have described and examined the process in which students represent the constant rate of change into tables, graphs and equations and, in this way, how they construct mental objects and essence of the linear function concept. The students used the proportionality as composite units, when they represented the phenomenon with constant rate of change into tables. When representing in graphs, all but one student represented it into a line. There were differences among the students in the level they were using the given conditions, co-variation perspective, and corresponding rules when formulating equations. The students compared the relationship between two variables in a multiplicative way, and under the guidance of teachers they reached to the understanding that its relationship becomes a constant. Moreover, they could construct mental objects of a constant rate of change, understanding the situation where the relationship between time difference and distance difference becomes one value, namely speed. The students had difficulties in connecting the rate of change with the inclination of a line. The students constructed the essence (concept) of linear functions, after building and organizing the image that the rate of change is constant, the graph is linear, and the equation is formulated as $y=ax+b$ (a: inclination, b: intercept).

Key words: Freudenthal's mathematising, didactical phenomenology, mental objects, linear function concept, rate of change

Freudenthal의 교수학적 현상학에 기반한 일차함수 개념 수학화 과정 사례 분석

김은숙[1] · 조완영[2]*
[1]남성중학교 교사 · [2]충북대학교 교수

*교신저자: 조완영 (wycho@cbu.ac.kr)

초록

본 연구의 목적은 프로이덴탈의 수학화 과정과 일차함수 개념의 교수학적 현상학의 분석을 통하여 학생들이 변화율이 일정한 현상을 표, 그래프, 식으로 표현하는 과정과 일차함수 개념의 심상을 구성하는 과정, 본질을 구성하는 과정을 서술하고 분석하는 것이다. 연구 결과, 학생들은 변화율이 일정한 현상을 표로 표현할 때 합성단위로서의 비를 사용하고, 그래프로 표현할 때 한 학생을 제외하고 직선으로 표현하였다. 식으로 표현할 때 학생별로 주어진 상황, 공변 관점, 대응 규칙을 이용하는 수준의 차이가 있었다. 학생들은 두 변화량 사이의 관계를 곱셈적으로 비교하였고, 그 비율이 하나의 상수가 된다는 것을 교사의 안내에 따라 구성하였다. 특히 시간의 변화량과 거리의 변화량이 하나의 값, 속력이 되는 상황을 통하여 변화율이 일정하다는 심상을 구성하였다. 단, 변화율을 직선의 기울기와 연결하는 데에는 어려움을 겪었으나, 변화율이 일정하다는 심상과 그래프가 직선이며 식의 모양이 $y=ax+b$ (a는 변화율, b는 절편)라는 심상을 정리하고 조직하여 일차함수의 본질(개념)을 구성하였다.

주요어: 프로이덴탈의 수학화, 교수학적 현상학, 심상, 일차함수 개념, 변화율

Received August 06, 2022 **Revised** August 17, 2022 **Accepted** August 17, 2022
2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

서론

Na 외 (2017)에 따르면 미래사회는 ‘인공지능이 적용된 자동화· 지능화, 사람·사물·공간 등 모든 것이 연결되고 상호작용하는 초연결 사회’이며, 지능화, 초연결 사회, 인간과 기계의 협업 구도, 가상화 등의 특징을 갖는 사회이다. 이러한 특징을 갖는 미래사회의 수학교육에서는 정형화된 절차의 수행보다는 개념적 이해, 결과적 지식보다는 과정적 지식이 더욱 중요해질 것으로 예측된다(Na et al., 2017). 인간과 기계의 협업이라는 측면에서 보면 기계가 인간보다 더 빠르고 정확하게 수행할 수 있는 대수적 절차나 그래프 그리기 등은 기계에 맡기고, 인간은 기계가 제공하는 것을 이용하여 새로운 지식이나 의미 있는 문제를 발견하고 탐구하는 것이 더 바람직하다. 즉 인간은 새로운 맥락이나 상황을 과정적·개념적으로 탐구·해석하고 이해한 후 다시 이를 상황에 적용하는 데 더 중점을 둘 필요가 있다. 우리는 이러한 수학 탐구 과정을 수학적 모델링 또는 수학화라고 한다.

Wolfram (2010)은 ‘컴퓨터가 수학적 절차를 수행할 때 우리는 어떤 수학을 가르칠 것인가?’라는 질문을 던진 후, 스스로 모델링이라고 답하였으며, Gravemeijer 외 (2017)는 21세기 필수 수학 역량은 ‘적용하기/모델링하기’라고 하였다. 2015 개정 수학과 교육과정 중학교의 목표 중 하나가 “사회 및 자연현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.”(교육부, 2015, pp 4-5)인데 이러한 목표를 달성하는데 적합한 수학 수업 방법 중의 하나가 학생들의 수학 탐구 활동이 전제된 수학적 모델링이나 수학화 방법이다.

수학적 모델링이나 수학화 이론은 이미 잘 알려져 있지만, 수학과 교육과정이나 수학 교과서에서 또는 수학 수업에서 이것을 어떻게 구현할 것인가에 대한 구체적이고 실천적인 논의는 매우 부족하다. 우리의 경험과 교사들과의 대화를 토대로 볼 때, ‘수학화를 통한 수학 수업을 어떻게 하는 것인가?’에 대한 경험 부족과 ‘학생들이 과연 수학을 탐구할 수 있을까?’에 대한 믿음 부족이 그 원인 중 일부라고 판단된다. 우리의 연구는 이러한 문제의식에서 출발하였다. 수학화 방법을 이용한 학생들의 수학 탐구 과정에서 어떤 일들이 일어나는가, 학생들이 현상을 탐구하여 수학적 본질을 찾아내는 과정에서 어떤 전략을 사용하며, 어떤 어려움을 겪는가, 궁극적으로 수학화 활동을 이용한 수학 탐구 수업이 가능한가 등이 우리의 주요 관심사이다.

Freudenthal의 수학화는 현상-심상-본질-응용으로 요약할 수 있다. 즉 학생들에게 현실적인 맥락의 현상을 탐구 문제로 제공하여 심상을 구성하도록 하고, 심상을 사고의 대상으로 반성적 사고를 통해 본질을 탐색한 후, 본질을 활용하여 응용 상황의 문제를 해결하는 일련의 과정이 수학화이다. 현상은 본질의 응용가능 영역에 대한 현실로 일상생활은 물론 물리적·사회적·정신적·수학적 세계의 현상을 총칭하는 것이다. 심상이란 학생들이 현상에 대한 활동을 통해 구성하는 표상, 직관, 개념이미지 등을 의미하며 형식적 개념의 형성을 돕는 직관적인 예비 개념의 역할을 한다(Chong, 1997). 본질은 일상생활과 물리적·사회적·정신적·수학적 세계에서 일어나는 여러 가지 현상을 정리·조직하기 위한 도구로서 발명된 수학 개념, 아이디어, 구조를 의미한다(Woo, 2017). Chong 외 (2018)에 의하면 Freudenthal (1991)은 심상을 형성하도록 하려면 학생들에게 먼저 정의를 지도하는 것이 아니라, 여러 가지 현실 맥락에서 출발하여 그 본질을 행동적으로 또는 시각적으로 표현하도록 해야 한다고 하였다.

Yi와 Lee (2020)은 함수를 변화하는 양 사이의 관계로 보고 각 양의 변화와 그 조정에 주목하는 공변 관점은 함수의 역사적 발달 과정에서 오랜 기간 중심 아이디어였을 뿐만 아니라, 미적분학 개념과 밀접한 관련이 있으며, 관찰 데이터로부터 자연 현상을 모델링하는 함수를 찾는 데 유용한 관점이라고 주장하였다. Thompson과 Carlson (2017)은 공변을 바라보는 학생의 사고에 초점을 두고 양적추론을 기반으로 두 개 이상의 양이 동시에 변하는 것으로 공변을 정의하였다. 공변 관점에서 두 변수의 변화 관계를 알아보는 좋은 방법 중의 하나가 변화율 개념이다(Cho, Kwon & Lee, 2017; NCTM, 2010).

변화율은 두 변수의 증가량의 비율을 의미한다. 현재 우리나라 교육과정과 교과서에서는 일차함수 개념을 일차식으로 표현되는 함수라는 관점에서 정의하고 있으며 변화율이라는 용어는 도입하고 있지 않다. 그러나 직선의 기울기는 변화율의 기하적 표현이며, 실제로 교과서에 제시된 직선의 기울기를 설명하는 과정은 곧 변화율 개념을 설명하는 과정과 동일하다. 이러한 의미에서 볼 때 일차함수 개념의 본질에는 ‘변화율이 일정한 함수’, ‘식이 일차식인 함수’, ‘그래프가 직선인 함수’와 이들 사이가 동치관계라는 의미가 포함되어 있다. 따라서 일차함수 개념의 수학화 활동에서 상황은 변화율이 일정한 상황이고, 학생들은 이 상황을 탐구하여 일차함수 개념에 대한 심상을 구성하고 이를 토대로 일차함수가 무엇인지 정리할 필요가 있다. 이러한 수학화 활동은 학생들이 지금까지

경험하지 못했던 활동으로 학생들에게 호기심과 탐구 의욕을 제공할 수도 있지만 여러 가지 어려움을 겪을 수도 있을 것이다.

본 연구의 목적은 본 연구의 목적은 일차함수 개념의 교수학적 현상학의 분석을 통하여 개발한 교과과정에 따라 학생들의 일차함수 개념의 수학화 과정을 면밀히 분석하고자 하는 것이다. 특히 일차함수 개념의 수학화 활동 과정에서 학생들이 어떤 전략을 사용하여 어떤 어려움을 겪는지 등을 알아보는 데 있다.

이러한 연구목적을 달성하기 위해 연구 문제를 다음과 같이 설정하였다.

첫째, 학생들의 변화율이 일정한 상황을 표, 그래프, 식으로 표현하는 과정은 어떠한가?

둘째, 학생들의 표, 그래프, 식을 이용하여 변화율이 일정한 상황을 이해하는 과정은 어떠한가?

셋째, 학생들의 일차함수 개념을 구성하는 반성적 사고 과정은 어떠한가?

이론적 배경

Freudenthal의 수학화와 교수학적 현상학

Freudenthal의 수학화 이론의 핵심은 학생들에게 완성된 수학을 가르치는 것이 아니라 현상으로부터 출발하여 내용과 형식의 교대작용을 거쳐 점진적인 형식화 과정 즉 수학화 활동으로서의 수학을 가르치자는데 있다.

Freudenthal의 수학적 개념의 수학화 활동은 두 단계로 구분할 수 있다. 첫째 단계는 현상에 대한 문제해결 활동을 통해 심상으로서의 본질을 구성하는 단계이고 둘째 단계는 전 단계에서 구성된 심상을 대상으로 반성적 사고를 통해 심상을 정리·조직하여 본질을 개념으로 정리하는 단계이다(Figure 1).

Figure 1. Freudenthal's process of mathematisation in concepts.

Vinner (1991)는 현재 수학교육에서 개념은 정의에 의해 획득된다는 가정 하에 완성된 수학 지식으로서 개념의 정의를 가르치는 데 초점을 두고 있다고 한다. 수학 개념을 정의로 전달하려는 시도는 심상을 구성하는 첫째 단계를 생략하거나 소홀히 다루는 것이다. 이러한 방법은 다음과 같은 몇 가지 문제점을 가지고 있다. 첫째, 학생들이 수학을 어려워하는 가장 큰 이유 중의 하나가 수학의 추상성과 형식성 때문으로 추상화된 결과적 지식으로서의 수학을 학생들에게 직접 이해시키는 것은 불가능하거나 적어도 매우 어렵다. 따라서 수학교육에서는 심상으로부터 개념으로서의 본질을 찾아내는 데 초점을 두어야 한다. 둘째, 수학적 대상과 수학적 대상에 대한 개념은 구분되어야 하고, 구체물을 이용하여 개념의 몇 가지 측면을 보여주고 개념을 정의하는 것만으로는 개념의 본질을 충분히 반영하기 어렵다(Chong, 1997, p. 70). 따라서 학생들이 수학적 대상에 대한 정의를 암기한다고 하더라도 개념의 본질을 파악한 것이라고 보기 어렵다. 셋째, 학생들은 주어진 수학적 대상이 그 개념의 예인지 아닌지를 판단할 때, 개념정의보다는 개념이미지에 의존하는 경향이 있으며, 이로 인해 오류를 보이기도 한다. '개념을 가르치면 응용할 수 있다.'라는 가정 하에 정의를 통해 개념을 가르친 후 예와 보기, 문제를 통해 개념 이미지를 형성하도록 하는 현재의 수학교육은 심상의 구성 후에 개념의 본질을 탐구하도록 하자는 Freudenthal의 관점에서 볼 때 반교수학적 전도현상이라 할 수 있다(Woo, 2017, p. 389).

Freudenthal의 수학 개념의 수학화 과정(Figure1)에서 현상은 본질의 응용가능 영역에 대한 현실로 일상생활은 물론 물리적·사회적·정신적·수학적 세계의 현상을 총칭하는 것이다. 현상은 수학의 발생적 근원이면서 동시에 수학의 응용 영역의 원천으로 학생들에게 현실적이어야 하고 수학의 본질과의 관련성이 풍부해야 하며, 동기 부여와 심상의 구성 가능성이 있는 것일수록 좋은 현상이다. 학생들에게 현상을 제공할 때 문제로 제시될 수 있으며 학생들이 현상의 문제해결 활동을 통해 심상을 구성할 수 있도록 제공되어야 한다. 수학 개념의 현상은 개념의 역사 발생 과정의 분석이나 개념의 응용 분석을 통해 찾을 수 있다. 예를 들어 미분 개념의 역사 발생적 분석을 통해 미분 개념의 수학화에 요구되는 현상을 생각할 수 있다. 미분 개념은 기하에서의 접선 문제와 물리에서의 속도 문제로부터 발생하였다. 아르키메데스가 나선(극방정식으로 $r=\alpha\theta$)의 운동 방향(곡선의 접선 방향)을 탐구하는 과정에서 비롯된 접선문제(Yang & Cho, 2000)는 케플러와 카발리에리를 거쳐 극한 개념을 이용하여 라이프니츠에 의해 체계화되었으며, 순간속도 문제는 Oresme의 연구와 Oresme 이후 변화하는 양과 변화 상태(변화율)에 대한 수치적 계산 연구를 거쳐 역시 극한 개념을 이용하여 뉴턴에 의해 체계화되었다. 접선 문제와 순간 속도 문제는 미분 개념이 발생하게 된 근원문제이며 이 두 가지 서로 다른 맥락의 문제를 미분 개념의 수학화를 위한 현상 문제로 선택할 수 있다.

심상이란 학생들이 현상에 대한 활동을 통해 구성하는 표상, 직관, 개념이미지 등을 의미하며 형식적 개념의 형성을 돕는 직관적인 예비 개념의 역할을 한다(Chong, 1997). Freudenthal은 학생들이 개념 정의나 설명을 통해 개념을 이해하기보다는 개념이 내포된 현상 속에서 그 개념의 용도를 알고 사용하는 것을 통해 자기 나름대로 그 개념에 대한 어떤 관점을 갖게 된다고 하였으며, 그 어떤 관점이 바로 개념에 대한 심상이다(Chong, 1997). Freudenthal에 따르면 학생들이 개념을 학습할 때 심상으로서의 본질을 구성하는 것이 개념으로서의 본질을 구성하는 것보다 선행되어야 하며, 이를 통해 현상이 심상의 구성자료임을 인식할 수 있도록 해야 한다(Chong, 1997, p. 70). 개념을 형식적으로 정의하기 전에 심상을 구성하여 개념의 본질을 직관적으로 파악하도록 하자는 Freudenthal의 주장은 개념 형성의 발판이 되는 자발적 관점과 일차적 직관 등 예비개념의 필요성을 언급한 Vygotsky (1985), Fischbein (1987)의 주장과 같은 것이다(as cited in Woo, 2017). Freudenthal이 심상의 구성과 개념으로서의 본질 구성을 구분하는 것은 Vinner (1991)가 개념정의와 개념이미지를 구분하는 것과 유사하다고 할 수 있다.

본질은 일상생활과 물리적·사회적·정신적·수학적 세계에서 일어나는 여러 가지 현상을 정리·조직하기 위한 도구로서 발명된 수학 개념, 아이디어, 구조를 의미한다(Woo, 2017). 그러나 수학적 개념은 하나의 특성을 갖는 개념이 아니라 복합적이고 다차원적인 개념(Woo, 2017)이기 때문에 수학의 본질이 무엇인가를 규명하는 문제는 간단하지 않다. Freudenthal이 말하는 수학의 본질을 이해하기 위해서 브루너가 주장하는 수학적 구조의 의미를 살펴볼 필요가 있다. 브루너의 구조는 Freudenthal이 말하는 본질과 결과적으로는 동일하거나 유사한 의미를 갖는다. 그러나 브루너가 완성된 수학으로서의 구조를 말한 것인 반면, Freudenthal이 말하는 본질은 현상-심상-본질이 유기적으로 연결되어 있고, 현상을 정리하는 수단으로 결과적인 측면뿐만 아니라 과정적인 측면도 강조하고 있다는 점에서 차이가 있다.

첫째, Freudenthal의 의미에서의 현상은 수학화 과정을 통해 본질을 찾을 수 있는 원천으로 브루너의 지식의 구조에서 말하는 완성된 지식을 활동적·영상적·상징적 표현으로 번역·제시하는 지식의 표층(또는 현상)과는 다르다.

둘째, Freudenthal은 심상으로서의 본질을 먼저 구성한 후 개념으로서의 본질을 찾도록 요구하지만 브루너는 개념을 정의한 후 개념이미지를 형성하도록 하고 있다.

셋째, Freudenthal의 수학화는 응용가능영역인 현상에서 출발하여 본질을 구성하고 다시 응용하는 순서로 진행되지만 브루너의 관점은 개념 먼저 응용 나중이라는 점에서 차이가 있다.

따라서 Freudenthal의 본질에서 표층은 단순히 결과적인 '지식의 기록'을 의미하지 않고 학생들이 본질을 찾아낼 원천이자 응용 가능한 현실적인 영역으로서의 현상과 현상을 본질로 정리하는 과정에서의 심상의 구성 활동 등 수학화 과정으로 구성되어야 한다.

개념의 본질로서의 일반적 원리 즉 표층 이면의 그 무엇을 어떻게 볼 것인가에 대해서는 다양한 의견이 존재할 수 있다. 개념의 본질이 결과적으로는 정의로 요약되겠지만 단순히 정의를 본질로 보는 것은 문제가 있다.

Freudenthal의 수학화 관점에서 수학 개념을 가르치기 위해서는 무엇보다 먼저 현상과 본질 사이의 관계와 이 둘 사이를 연결하는 심상이 무엇인지를 파악할 필요가 있다(Shin & Cho, 2020). Freudenthal은 교수학적 측면에서 현상과 본질 사이의 관계를 논의하는

것을 교수학적 현상학이라 하였으며, 수학 개념에 대한 교수학적 현상학적 분석이 수학교육에서 가장 기본적인 연구라고 주장하였다(Woo, 2017). 수학 개념에 대한 교수학적 현상학적 분석의 목적은 개념의 본질과 현상, 심상 그리고 그들 사이의 관계를 규명하고 현상으로부터 심상으로서의 본질과 개념으로서의 본질을 구성해 가는 과정에서 예상되는 학생들의 전략과 어려움이 무엇인지 등을 밝혀내는 데 있다. 따라서 수학 개념의 교수학적 현상학에서는 수학 개념의 역사발생 과정과 수학적 분석, 교육과정이나 교과서 분석을 통한 수학교육자들의 교수학적 판단, 학습 과정에 대한 관찰로부터 얻어진 학생들의 수학적 구조의 구성 과정과 그 과정에서 발생하는 어려움, 수학 개념의 응용 사례 분석 등이 요구된다(Woo, 2017; Shin & Cho, 2020).

일차함수 개념의 교수학적 현상학

일차함수, 이차함수, 삼차함수와 같은 기본적인 함수의 기원을 바빌로니아, 그리스 수학에서 찾을 수 있지만 이 당시에는 함수 특히 일차함수가 무엇인지에 대한 논의는 없었다. 비례 관계를 중시했던 그리스인들은 $y=ax\pm b$꼴의 일차함수에도 '비에서 좀 더 크게(작게) 주어진 양'이라는 이름을 붙였다고 한다(Kim et al., 2017, p. 120). 천체 운동을 기술하기 위한 수단으로 삼각함수 개념을 무의식적으로 사용했듯이 현실 세계를 관찰, 해석하는 과정에서 비례 개념과 관련하여 일차함수 개념을 무의식적으로 사용했을 것으로 추정된다.

오늘날 일차함수 개념과 유사한 용어를 처음으로 사용한 사람은 기하학적 함수 단계에서 활동한 Oresme이다. 일차함수는 영어로 linear function(선형함수)이라고 하는데, 이는 일차함수의 그래프가 직선이므로 붙여진 이름이다(Woo, 2017). 선형함수에 대한 논의는 Oresme의 연구에서 발견된다. Oresme은 세기(강도: intensities)의 일정성과 변화에 관한 연구에서 두 변수 사이의 함수 관계를 정의하고 이 관계를 그래프로 나타내었다[1]. Oresme은 속력이 일정한 운동과 속력이 일정하게 변하는 운동(등가속도 운동)을 구분하였으며, 일정하게 변하는 운동(현대적 의미에서 선형사상)을 다음과 같이 정의하였다(Small, 2007)

> 일정한(uniform) 물리적 양(질:quality)은 대상(subject)의 모든 점에서 크기가 같은 반면, 일정하게 변하는 물리적 양은 대상을 나타내는 직선 위의 임의의 세 점이 주어지면 두 번째 점과 세 번째 점 사이의 거리에 대한 첫 번째 점과 두 번째 점 사이의 거리의 비는 세 번째 점과 두 번째 점의 크기의 차이에 대한 두 번째 점과 첫 번째 점의 크기의 차이의 비와 같다.

Oresme은 등속운동을 하는 물리적 상황을 그래프로 표현하여 설명하였고, 이러한 Oresme의 생각이 오늘날 일차함수 개념의 역사적 근원 문제이다. 또한 Oresme의 방정식에서 만들어진 일차함수의 그래프는 데카르트가 좌표계를 만들기 이전에 논의된 것이다.

Steiner (1988)은 Oresme이 속도와 시간을 기준으로 등가속도 운동을 그래프로 나타내었는데 이것은 오늘날 해석기하학의 그래프에 가까운 것이었다고 하였다(as cited in Kim et al., 2017). 수평인 직선에 시각을 표시하고, 속도는 각 시각에 대해 수직인 선분의 길이로 나타내었다. Oresme은 수직인 선분들의 끝점들은 직선이 된다는 것[2]과 등가속도 운동이 정지 상태에서 시작되면 속도를 나타내는 선분들은 직각삼각형을 이룬다는 사실을 알아내었다(Kim & Kim, 1986; Kim et al., 2017). Steiner (1988)은 Oresme이 이를 일반화하여 '물체가 등속운동이나 등속이 아닌 운동을 하는 것은 물체가 평균속도로 등속운동을 하는 것과 같다.'와 같이 운동학과 관련하여 더 일반적인 해석을 제시하였다(as cited in Kim et al., 2017). Oresme의 증명은 최초로 물리 문제를 기하학적 표현을 이용하여 수학적 함수로 모델링한 예로 알려져 있다.

Steiner (1988)은 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 함수에 대한 연구가 진행되는 과정에서 함수에 대한 정의가 필요하게 되었고 라이프니츠는 '곡선상의 한 점에 접선의 길이 접선, 법선의 길이, 법선 등을 구하는 일을 함수(functio, relatio)라고 하였고, 이것이 함수라는 용어가 등장한 최초의 일이다(as cited in Kim et al., 2017).

---

1 Oresme이 활동하던 시기에는 함수라는 용어나 함수에 대한 정의가 명확하지 않았지만, Oresme의 주장을 오늘날 관점에서 해석한 것이다.

2 등가속도 운동에서 속도는 시각의 일차함수로 시간-속도 그래프는 직선이 된다.

대수적 함수 단계 이전인 기하학적 함수 단계에서 운동을 그래프로 표현하고 그 결과로 나타나는 곡선들에 대한 탐구로 미적분의 발달과 불가분의 관계 속에서 함수 개념이 발생했다고 볼 수 있다.

함수 개념은 라이프니츠로부터 비롯하여 양 사이의 관계로, 그리고 변량 x의 함수란 x에 관한 식이다 는 생각으로 발전한다. 그 후로 오일러는 오늘날의 함수 기호 $f(x)$를 사용했고, 함수를 식의 형태로 분류하였다. 크게 대수함수와 초월함수로 먼저 분류하고, 대수함수는 다시 무리함수, 유리함수로 분류하며, 유리함수는 유리정함수, 분수함수로 분류한 것이다. 라이프니츠와 오일러의 함수개념은 "변수 x와 y 사이에 하나의 방정식이 성립하고 x의 임의의 값이 주어질 때, 그에 대하는 y의 값이 결정되면 y는 x의 함수라고 한다."는 것인데, Kim과 Kim (1999)은 지금도 중고등학교에서는 이 초보적인 함수 개념으로 가르치고 있다고 하였다. 그러나, 코시는 함수를 단지 변수들 사이의 관계(대응)로 파악하여서 수식으로 나타낼 수 없는 (대응)관계까지도 일의대응(하나의 값에 대해서 값도 하나만 정해지는 대응(관계))만 만족하면 함수가 되는 매우 폭넓은 개념으로 확장시켰다.

중학교에서는 일차함수와 이차함수를 탐구하고 고등학교에서는 다항 함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 다양한 함수족을 탐구한다. 함수족을 식으로 정의하는 것이 일반적이지만 같은 함수족 내의 함수들은 전반적으로 특정 성질을 공유하고 있고, 따라서 함수족을 이용하여 실세계 맥락 등 다양한 상황에서 나타나는 변화 패턴을 기술하고 해석할 수 있다.

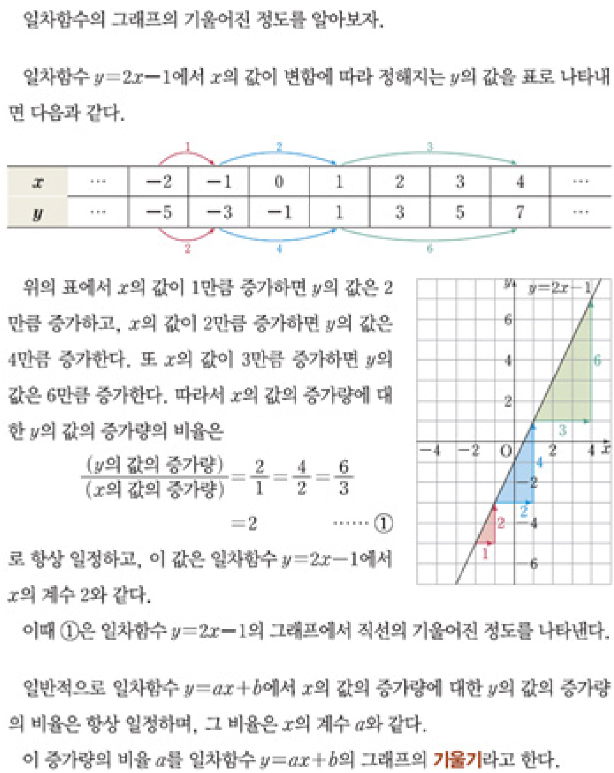
일반적으로 함수인가를 판단할 때는 정의역의 원소가 공역의 원소에 하나씩 대응되는가에 초점을 둔다. 이러한 대응 관점은 고등학교 수준 이상에서 함수를 학습할 때 매우 중요하다. 그러나 중학교 수준에서의 함수는 함수인지를 판단하는 경우는 대응관점이 역할을 하지만 변화하는 현상에서 두 변수 사이의 종속관계를 중심으로 함수를 다루고 있다. 두 변수 사이에 어떤 종속관계가 있는지를 파악하기 위해서는 두 변수가 변하는 방식 즉 공변 관점에서 현상을 해석해야 한다. 공변 관점에서 두 변수의 공변을 설명하고 수량화하는 좋은 방법은 두 변수 사이의 변화량의 비율 즉 변화율을 조사하는 것이다(Cho et al., 2017). 예를 들어 정비례는 두 변수의 비율이 일정한 관계이고 일차함수는 두 변수의 변화량의 비율이 일정한 함수이다. 이차함수는 변화량이 일정하게 증가 또는 감소하는 함수 즉 변화량의 변화율이 일정한 함수가 된다.

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 관한 일차식 $ax+b(a \neq 0)$의 꼴로 표현될 수 있는 함수를 일차함수라고 한다. 일차함수는 선형함수(linear function)라고도 하는데 이는 일차함수의 그래프가 직선이기 때문에 붙여진 이름이다. 일차함수는 일단 함수이기 때문에 다양한 실세계 맥락을 탐구하여 일차함수 개념을 수학화하는 과정에서 주어진 상황이 함수인지를 판단할 때는 대응 관점을, 어떤 함수인지를 알아보기 위해서는 공변 관점 즉 변화율을 조사할 필요가 있다. 대응 관점에서 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 오직 하나씩 정해지는지를 확인해야 한다. 이때 표, 식, 그래프를 이용하여 확인할 수 있다.

두 변수 사이의 공변 관계에 따라 함수의 유형이 결정되고 변화율을 조사함으로써 공변 관계를 파악할 수 있다(Cho et al., 2017). 이런 관점에 따르면 일차함수를 '$\text{변화율} = \dfrac{\text{y의 값의 변화량}}{\text{x의 값의 변화량}} (\neq 0)$이 일정한 함수[3]'로 정의할 수도 있다. 일차함수가 갖는 '일정한 변화율'이라는 특징은 일차함수를 변화율이 일정하지 않은 이차함수나 지수함수와 구별할 수 있는 중요한 특징이다.

우리나라에서는 중학교 수준에서 변화율이라는 용어를 명시적으로 도입하지 않았다. 그러나 일차함수의 그래프의 기울기를 $\dfrac{(\text{y 값의 증가량})}{(\text{x 값의 증가량})}$으로 정의함으로써 변화율 개념을 묵시적으로 다루고 있다. Figure 2에서 기울기를 설명하는 과정에서 'x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 $\dfrac{(\text{y 값의 증가량})}{(\text{x 값의 증가량})} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} = 2$로 항상 일정하고'로 표현하고 이를 기울기의 정의로 연결시키고 있다. 즉 변화율로서 기울기를 정의한 것이다. 변화율이 일정한 함수를 그래프로 나타내면 기울기가 일정한 직선이 됨을 알 수 있다. 또한 변화율이 일정한 함수, 그래프가 직선인 함수를 식으로 나타내면 일차식이 된다.

3 변화율 또는 기울기를 정의할 때 '증가량'을 '변화량'으로 바꾸면 '감소를 음의 증가'로 해석할 때 학생들이 겪는 어려움을 줄일 수 있을 것이다.



일차함수의 그래프의 기울어진 정도를 알아보자.

일차함수 $y=2x-1$에서 x의 값이 변함에 따라 정해지는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	-1	0	1	2	3	4	⋯
y	⋯	-5	-3	-1	1	3	5	7	⋯

위의 표에서 x의 값이 1만큼 증가하면 y의 값은 2만큼 증가하고, x의 값이 2만큼 증가하면 y의 값은 4만큼 증가한다. 또 x의 값이 3만큼 증가하면 y의 값은 6만큼 증가한다. 따라서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은

$$\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

로 항상 일정하고, 이 값은 일차함수 $y=2x-1$에서 x의 계수 2와 같다.

이때 ①은 일차함수 $y=2x-1$의 그래프에서 직선의 기울어진 정도를 나타낸다.

일반적으로 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 그 비율은 x의 계수 a와 같다.

이 증가량의 비율 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 **기울기**라고 한다.

Figure 2. Definition of slope (Kim et al., 2019)

변화율 또는 기울기 개념과 관련된 실세계 현상 중 대표적인 것이 속력 문제이다. 초등학교 5학년 과학 교과서에서는 <물체의 운동> 단원에서 속력을 단위 시간 동안 물체가 이동한 거리로 정의하며, $\frac{\text{이동한 거리}}{\text{이동하는 데 걸린 시간}}$ 즉 걸린 시간에 대한 이동 거리의 비율로 정의하고 있다. 속력을 걸린 시간에 대한 이동 거리의 비율로 정의하는 것은 속력을 변화율의 관점에서 정의한 것이다. 2009 개정 과학교육과정에서는 중학교 1학년에서 다루던 <여러 가지 운동> 단원이 2015 개정 과학과 교육과정에서는 중학교 3학년으로 이동되어 <운동과 에너지> 단원에서 운동을 다루고 있다. 중학교 3학년 과학교과서에서 물체의 빠르기를 1초, 1시간 등과 같은 단위시간 동안 물체가 이동한 거리로 나타내며, 이를 수치로 나타낸 값인 속력을 $\text{속력}(\mathrm{m/s})=\frac{\text{이동 거리}(\mathrm{m})}{\text{걸린 시간}(\mathrm{s})}$으로 정의하고 있다(Kim et al., 2020, p. 95). 여기서도 속력을 걸린 시간에 대한 이동 거리의 비율 즉 변화율 관점에서 정의한 것이다. 또한 '평균 속력은 물체가 주어진 시간 동안 평균적으로 어느 정도의 빠르기로 운동하였는지를 나타낸다.'라고 하여 평균속력 개념도 도입하고 있다. 이후 등속운동을 탐구하는 과정에서 속력을 기울기와 연결시키고 있다. Figure 3의 <정리하기>에서 '장난감 자동차의 속력은 시간에 관계없이 일정하다.'는 것과 '그래프의 기울기는 시간에 따른 이동 거리 즉 속력을 의미한다.'는 것을 탐구하도록 요구하고 있다.

또한 Figure 3에서 기울기의 정의를 '그래프의 기울기는 가로축 값 변화량에 대한 세로축 값 변화량의 비율이다. $\text{기울기}=\frac{\text{세로축 값 변화량}}{\text{가로축 값 변화량}}$'라고 제시하였다. 그래프의 기울기의 정의는 기하학적으로 직선의 기울어진 정도라는 직관적 이미지를 가지고 있으며 동시에 '변화량의 비율'이라는 변화율의 의미를 갖기도 한다. 그래프의 기울기 정의에서 '가로축 값의 변화량'은 장난감 자동차의 운동 상황에서 '걸린 시간'을 의미하고, '세로 축 값의 변화량'은 '이동 거리'를 나타내고 있어 변화하는 두 양 사이의 변화율의 의미도 내포한 것으로 볼 수 있다. 과학교과서에서는 '등속운동에서는 시간-이동 거리 그래프가 직선으로 나타나며, 이 그래프의 기울기는 속력과 같고 일정하다.'라고 설명하고 있다.

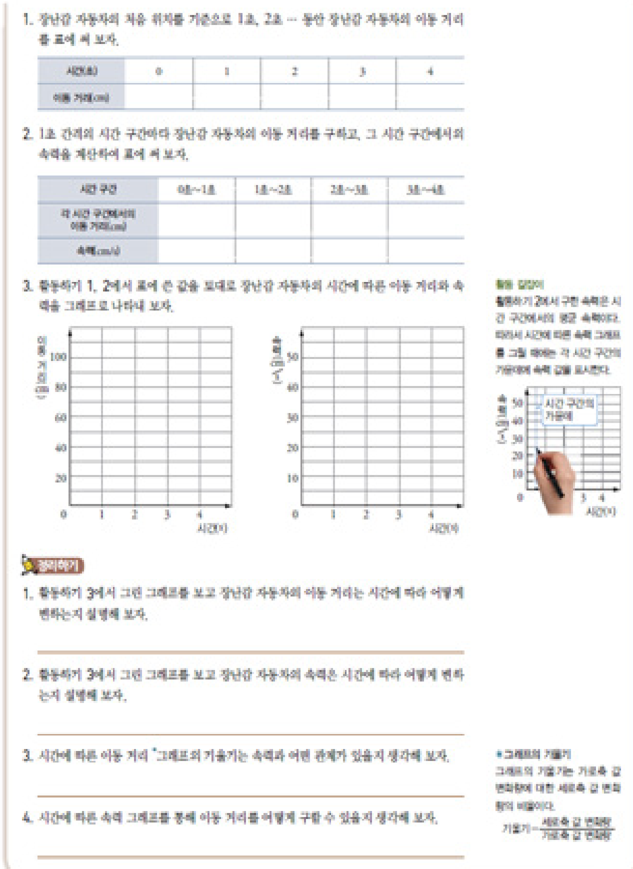


Figure 3. Uniform motion's expression and analysis (Kim et al., 2020, pp. 96-97).

Ellis (2013)는 기울기를 함수에 의해 관련된 두 양이 서로 함께 변할 때 한 양의 변화에 대한 다른 양의 변화율이라고 하였다. 과학에서 속력을 설명할 때 변화율과 기울기 개념을 동치로 다룬다. 과학교과서에서는 속력을 변화율의 관점에서 $\text{속력}(\mathrm{m/s}) = \dfrac{\text{이동거리}(\mathrm{m})}{\text{걸린시간}(\mathrm{s})}$ 로 정의하면서 속력은 시간-이동 거리 그래프에서의 기울기와 같다는 것을 동시에 다루고 있다. 특히 등속운동을 속력이 일정한 운동이고 시간-이동 거리 그래프가 직선으로 나타나며, 이 그래프의 기울기는 속력과 같고 일정하다.'라고 설명하고 있다. 또한 독일 교과서에서도 변화율과 기울기 개념을 연결하여 일차대응과 일차함수를 정의하고 있으며, MiC 교과서와 일본 교과서에서도 변화율 개념과 기울기 개념을 연결시키고 있다. 우리나라 교육과정에서도 일차함수를 다룰 때 변화율이라는 용어를 명시적으로 표현하고 있지 않지만 기울기를 $\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$ 으로 정의하고 있고, 여기에는 변화율의 관점이 포함되어 있다.

따라서 일차함수의 본질을 논의할 때 '변화율이 일정한 함수'라는 측면을 반영하는 것은 큰 문제가 되지 않으며, 일차함수를 이해하는데 도움이 될 것이다. 일차함수의 그래프 표현에서 기울기는 변화율의 기하학적 표현으로 파악하고, 일차함수는 '변화율이 일정한 함수'이고 이것은 '두 변수 사이의 관계식이 일차식인 함수', '그래프로 나타내면 기울기가 일정한 직선이 되는 함수'와 동치라고 이해하도록 할 필요가 있다.

Ryou (2008)의 연구에 따르면 학생들은 기계적으로 암기하여 기울기 개념을 알고 있지만 문제를 풀이할 때 의미 있게 활용하지 못하였으며, 특히 실생활 문제를 나타낸 그래프에서 독립변수의 변화량과 종속변수의 변화량의 비가 기울기임을 이해하지 못하였다. Ryou (2008)은 특히 학생들이 일차함수 개념을 두 양의 변화량의 비가 일정한 상황을 형식화한 결과로 이해하기 보다는 단순히

일차식 y=ax+b로 나타낼 수 있는 함수가 일차함수라고 인식하는 경향이 있음을 보고하였다. Ryou (2008)의 연구 결과는 기울기 개념을 단순히 직선의 기울어진 정도라는 시각적 관점으로 이해하기 보다는 변화율이라는 분석적 관점과 연결하여 이해할 필요성이 있음을 시사하고 있다. 한편, 많은 연구에서 학생들이 기울기 개념을 시각적 관점으로만 생각하고 변화율의 의미를 함께 고려하지 못한 경우 오류를 범하는 경우가 있음을 보고하고 있다(Seo, 2009).

일차함수 개념의 본질과 심상

y가 x의 일차함수일 때 일차함수의 성질을 다음과 같이 정리할 수 있으며, 이 성질들은 동치관계이다(Cho 외, 2017).

<성질1> 함수 $y=f(x)$에서 변화율 즉 $\frac{(\text{y의 값의 증가량})}{(\text{x의 값의 증가량})}(\neq 0)$이 일정하다.

<성질2> 함수 $y=f(x)$에서 그래프가 직선이고 기울기$(\neq 0)$가 일정하다.

<성질3> 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$의 꼴로 나타낼 수 있다.

일차함수의 세 가지 성질은 동치관계이고 세 성질 중 하나를 정의로 선택할 수 있지만 일차함수가 무엇인지를 세 가지 성질을 상호 연결하여 이해하는 것이 중요하다. 현재 우리나라 수학과 교육과정과 교과서에서는 <성질1>은 도입하지 않고 있으며 <성질3>으로 일차함수를 정의한 후 일차함수의 그래프에서 <성질2>를 다루고 있다. 특히 일차함수 개념을 정의할 때 <성질1>을 다루지 않음으로써 변화율과 기울기 개념을 연결시킬 기회를 제공하지 못하고 있다. 기울기 개념을 일차함수의 주요 성질인 변화율과 연결시키지 않고 도형의 성질로서 직선이 기울어진 정도라는 시각적 이미지로 도입하면 학생들이 일차함수 개념은 물론 기울기 개념을 이해하는데 장애가 될 수 있다(Ryou, 2008; Seo, 2009).

또한 일차함수 $y=ax+b$에서 $b=0$이면 $y=ax(a\neq 0)$이기 때문에 정비례 관계는 일차함수의 특별한 경우이다. $y=ax(a\neq 0)$의 그래프가 원점을 지나는 직선이고(y절편 b=0), $\frac{y}{x}=a(a\neq 0)$ 즉 x에 대한 y의 비율이 일정하다. 반면 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $(0, b)$을 지나는 직선이고 x에 대한 y의 비율이 아니라 'x의 변화량'에 대한 'y의 변화량'의 비율 즉 변화율$(=\frac{\Delta y}{\Delta x})$이 일정하다. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax(a\neq 0)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이고 점 $(0, b)$에서 상대적으로 정비례 함수가 된다[4](Woo, 2017, p. 97).

이러한 논의를 토대로 일차함수 개념의 본질을 규명할 때 다음 몇 가지를 고려할 필요가 있다. 첫째, <성질1>을 일반적 원리로, <성질2>와 <성질3>은 표층으로 구분할 수 있으며 이 세 가지 성질이 상호 밀접한 관계로 연결된다. 둘째, 그래프와 기울기 개념은 일차함수의 본질의 일부가 되어야 한다. 특히 기울기 개념은 변화율 개념의 기하학적 표현이기 때문에 일차함수 개념을 도입할 때 기울기 개념을 포함할 필요가 있다. 셋째, 일차함수는 함수와 밀접한 관련이 있으며 일차함수의 본질을 논의할 때 함수인가를 판단하는 과정이 포함되어야 한다. 넷째, 정비례 관계는 일차함수의 특수한 형태이며 두 개념 사이의 관계를 y절편, 평행이동과 연결시킬 필요가 있다. 일차함수 $y=ax+b$ 에서 y절편이 0이면 즉 b=0이면 정비례 관계 $y=ax(a\neq 0)$가 되고, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 정비례 관계 $y=ax(a\neq 0)$ 의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행 이동한 것이다. 따라서 일차함수를 정의한 후, 일차함수의 특별한 예로서 정비례 개념을 논의하는 과정에서 y절편과 평행이동 개념을 도입하는 방안을 검토할 수 있을 것이다.

지금까지의 논의를 토대로 일차함수 개념의 본질을 다음과 같이 정리할 수 있다(Figure 4 참조).

> 일차함수는 함수 $y=f(x)$에서 변화율 $\frac{(\text{y의 변화량})}{(\text{x의 변화량})}(\neq 0)$이 일정한 함수로 이를 식으로 나타내면 $f(x)=ax+b$ (a,b는상수,$a\neq 0$)와 같이 f(x)가 x에 관한 일차식이 되고, 변화율을 그래프로 나타내면 기울기 $\frac{(\text{y의 변화량})}{(\text{x의 변화량})}$가 일정한 직선이다. 특히, y절편 b=0이면 정비례 관계 $y=ax(a\neq 0)$이 되고 이때의 그래프는 원점을 지나는 직선이 된다. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax(a\neq 0)$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

4 상대적으로 정비례한다는 것은 'x에 대한 y-b의 비율 $\frac{y-b}{x}$가 일정하다.'는 것을 의미한다.

이러한 관점에서 볼 때 일차함수 개념의 수학화 과정은 변화율이 일정한 현상을 탐구하여, 표, 식, 그래프 표현을 통해 변화율이 일정하다는 것을 직관적으로 파악함으로써 심상을 구성하고, 심상을 사고의 대상으로 어느 것을 정의로 선택할 것인지 그리고 정의와 성질 사이의 동치관계를 확인하여 일차함수를 개념화하는 것으로 정리할 수 있다. 이 과정에서 함수와 정비례 개념과의 관련성도 정리할 필요가 있다.

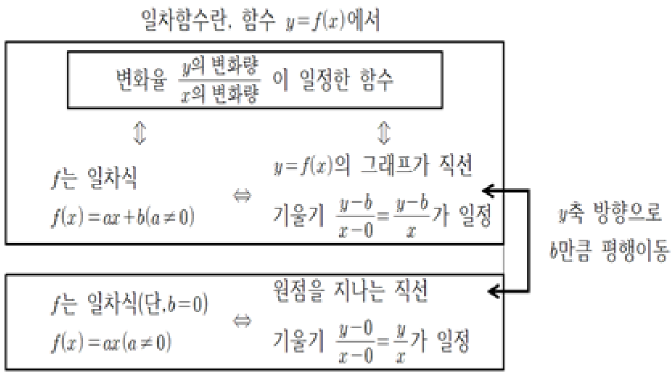


Figure 4. Linear function concept’s essence.

연구방법

연구 대상

먼저 연구자가 근무하는 충북 청주시 소재의 N 중학교 2학년 학생 중에서 함수 및 일차함수 단원을 아직 학습하지 않았으며, 변화율에 대한 상식 수준이 서로 다른 학생 4명을 선정하였다.

변화율에 대한 상식은 크게 두 문항으로 검사를 실시하였다. 첫째, 원기둥 모양에 일정한 속도로 물을 담을 때의 시간과 높이의 질적 그래프를 그리는 문항이었다. A학생은 원점을 지나지 않고 몇 개의 점을 찍어서 선분으로 연결하여 오른쪽 위를 향하게 나타내었다. B학생은 같은 문항에 대하여 막대그래프로 표현하였고, C학생은 원점을 지나며 오른쪽 위를 향하는 직선으로 그렸으며, D학생은 응답하지 못하였다.

둘째, 시간에 따른 높이가 일정하게 감소하면서 기울기가 서로 다른 직선 모양의 두 그래프를 해석하고, 그 차이점을 서술하는 문항이었다. 오른쪽 아래를 향하는 직선 모양의 기울기가 서로 다른 두 그래프를 해석할 때, 학생 A와 학생 C는 서서히 내려간다, 급격히 내려간다고 하였다. 학생 B는 격자 눈금을 읽어서 1시간 동안 1칸 내려온다, 2시간 동안 5칸 내려온다고 그래프를 해석하였다. 학생 D는 빠르게 높이가 1칸 내려간다, 조금 빠르게 높이가 5칸 내려간다고 해석하였다.

두 그래프의 차이점을 말할 때에는 학생 B만 그 차이점을 1시간 동안 1칸 하락, 1시간 동안 2.5칸 하락 한다고 서술하여 변화율 개념으로 해석하였다. 학생 D도 낮아지는 데 걸리는 시간이 차이가 난다고 서술하여 학생 B가 서술한 것처럼 구체적이지는 않으나 변화율 개념으로 해석하였다. 학생 C는 약하게 하강, 급격히 하강이라고 서술하여 시간에 따라 변하는 높이의 속도(변화율)로 해석하였다. 반면 학생 A는 내려간 높이와 시간이 다르다고 서술하여 두 양이 변하는 각각의 양에만 주목하여 해석하였다.

학생들의 학업 성취 수준은 1학기 중간고사 성적을 기준으로 상(80점 이상), 중상(60이상 80점 미만), 중(40점이상 60점 미만), 하(40점 미만)로 구분하였을 때, 학생 A는 중상 수준, 학생 B와 학생 C와 학생 D는 하 수준이다.

연구 방법

일차함수 개념의 교수학적 현상학 분석을 통하여 개발한 교과과정을 이용하여 학생들이 일차함수 개념의 심상과 본질을 찾는 수학화 과정, 즉 학생들이 일차함수 개념의 심상을 구성하는 과정과 본질을 논의 하는 과정을 상세하게 서술하고, 이를 분석하였다. 일차함수의 개념 지도 수업을 통해서 학생들이 현상에서 심상을 구성하고, 심상에서 본질을 논의할 때, 사용하는 전략과 방법, 어려워하는 점과 그 이유, 극복하는 과정 등을 관찰하여 연구목적에 부합되는 자료를 수집, 분석하여 이를 기술하고자 하므로 정성연구 중 질적 사례연구(case study)를 하였다.

개발한 일차함수 개념 교과과정은 Table 1과 같다.

Table 1. Developed linear function concept curriculum.

Step	Activities
Exploration 1	<Situation1> Exploring situations where the rate of change is constant(The relation between object's weight and spring's length)
	[Active1] Expressing situation in table, graph, equation
	[Active2] Explaining rate of change using graph and equation
	<Situation2> Exploring situations where the rate of change is constant(The relation between time and cable car's height)
	[Active1] Expressing situation in table, graph, equation
	[Active2] Explaining rate of change using graph and equation
	<Situation3> Exploring situations where the rate of change is constant
	(The relation between Se-min and Chan-young's time and location)
	[Active1] Expressing situation in table, graph, equation
	[Active2] Explaining rate of change using graph and equation
Exploration 2	[Active1] Using [ExplorationⅠ]'s result, Structuring rate of change, graph's shape, slope, equation and connecting linear function's three properties
	[Active2] Selecting linear function's definition and Explaining relation of other two properties
Exploration 3	<Situation4> Exploring why a direct proportionality is a linear function
	[Active1] Expressing direct proportional situation in table, graph, equation
	[Active2] Expressing direct proportional situation's parallel movement in table, graph, equation
	[Active3] Explaining why direct proportionality is linear function, and using the results of
	[Active1], [Active2] to compare the commonalities and differences in table, graph,equation and connect them with the concept of translation

자료 수집 및 분석

학생들의 기록 행위, 그리고 교사와 학생의 대화, 학생 간의 대화를 녹음 및 녹화하였다. 수업은 2021년 3월 22일부터 4월 2일까지 10일간, 하루 약 90분(2차시)씩 총 20차시를 실시하였고, 학생들과 함께 함수와 일차함수 개념 수업을 위하여 연구자가 제작한 교수 학습 자료를 이용하여 수업하였다. 학생 A, C, D는 모든 실험에 참여하였으나, 학생 B는 가끔 실험에 빠지는 경우가 있었다. 수업 시기가 학기 초이고 학생들이 서로 친밀하지 않아서 각자 학생들이 먼저 활동지를 해결하고 학생들이 모두 해결한 후에 교사가 학생들에게 어떻게 해결하였는지 질문하면 학생 한명씩 돌아가면서 대답하는 식으로 수업하였다. 전체 토의를 하면서 학생들이 스스로 본인의 활동지 내용을 수정하는 경우도 있었고, 교사의 안내에 따라 학생들이 답을 수정하는 경우도 있었다. 또한 학생들이 수업 시간에 작성한 활동지, 연구자가 작성한 현장노트를 통하여 다각도로 학생들의 일차함수 개념의 수학화 과정에 대한 자료를 수집하여 자세하게 기술하였다.

학생들의 일차함수 개념의 수학화 과정을 연구자가 만든 Table 2의 분석틀에 따라 분석하였다. 표현 과정, 현상에서 심상을 구성하는 과정, 심상에서 본질을 구성하는 과정을 중심으로 학생들이 변화율이 일정한 상황을 표, 그래프, 식으로 표현하는 활동에서 사용하는 전략과 발생하는 어려움, 다양한 표현을 이용하여 일정한 변화율을 이해하는 수준과 발생하는 어려움, 기울기와 변화율의 연결 방법 및 어려움, 반성적 사고 과정은 어떻게 발생하고 그 어려움은 무엇인지 분석하였다. 본 연구에서는 연구문제 1과 연구문제 2는 [탐구활동 I]의 <상황1>에서 학생 A와 학생 D의 수학화 과정을 분석하였고, 연구문제 3은 [탐구활동 I]의 <상황3>의 활동 결과와 [탐구활동 II]에서 수업에 참여한 모든 학생들의 수학화 과정을 분석하였다.

Table 2. Analysis of Students' mathematization process for linear function concept.

Expression Activity
What strategy do students use to express constant rate of change situation in table, graph, equation?
What difficulties do students encounter when expressing constant rate of change situation in table, graph, equation?
Mental Object Activity
How about students understanding level of constant rate of change situation using table, graph, equation?
What difficulties do students encounter when understanding constant rate of change situation using table, graph, equation?
Concept Activity
How about reflective thought process if students make up concept from mental objects?
What are difficulties in students' reflective thought?

결과분석

학생들의 변화율이 일정한 상황을 표, 그래프, 식으로 표현하는 과정은 어떠한가?

<상황 1>의 훅의 법칙은 중학교 1학년 과학교과서에 나오는 내용으로 학생들에게 현실적이고 익숙하며 수학 교과서에서도 많이 활용되는 예이다. 단, 상황에 제시된 표에는 물체의 무게가 0, 2, 5, 9일 때 용수철의 길이를 제시하였고, 이를 토대로 표를 완성하는 과정에서 변화율에 대한 심상을 구성할 수 있을 것이라 예상하였다.

<상황 1>

다음은 용수철에 물체를 매달았을 때, 용수철의 길이를 측정하여 표로 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.

물체의 무게(kg)	0	2	5	9	⋯
용수철의 길이(cm)	4	8	14	22	⋯

[활동1] 용수철에 매단 물체의 무게와 용수철의 길이의 관계를 표, 그래프, 식으로 나타내시오.

① 표

물체의 무게(kg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
용수철의 길이(cm)	4		8			14				22	⋯

② 축에 이름과 단위, 눈금과 숫자를 표시하고 그래프를 그리시오.

③ 두 변수를 문자로 나타내고, 두 변수 사이의 관계식을 구하시오.

변화율이 일정한 상황을 표로 표현하는 과정

다음은 학생들이 [활동1]의 표를 채우는 과정을 서술한 것이다.

교 사: 표는 어떻게 구했어? 뭘 발견했어?
학생D: 1 kg씩 늘어날 때 2 cm씩 커져요.
교 사: 그걸 어떻게 발견했어? 주어진 표를 보고 [활동 1]의 표를 만들 때 어떻게 이렇게 표를 채운 거야?
학생A: 0 kg일 때 4 cm인데, 2 kg일 때 8 cm이면 1 kg는 그 중간이니까, 4와 8의 중간인 6으로 따져서 대입해보니까 다 2씩 늘어났어요.
교 사: 학생D는 2 kg에서 5 kg는?
학생D: 저도 똑같아요.

연구자는 사고실험에서 무게가 2 kg 늘어날 때 용수철의 길이가 4 cm만큼 늘어나고, 3 kg 늘어날 때 6 cm만큼 늘어나니까, 비례적 대응 관계 $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\cdots$를 이용하여 1 kg 늘어날 때 2 cm 만큼씩 늘어난다는 것을 찾아낼 것으로 예상하여 <상황 1>의 표를 만들었으나, 학생들은 1 kg 늘어날 때 2 cm 만큼씩 늘어난다는 것을 0과 2의 중간 값 1로, 4와 8의 중간 값 6으로 각각 분할하여 합성단위(composed unit)로서의 비[5]로 찾아내었다.

변화율이 일정한 상황을 그래프로 표현하는 과정

학생들이 함수의 뜻을 배웠기 때문에 변수의 도입과 눈금 표시는 어느 정도 가능할 것으로 예상하였다. 단, 상황에서 독립변수와 종속변수를 구분하여 변수 x, y로 결정하는 것이 어려울 것으로 예상하였다. 즉 물체의 무게를 y축, 용수철의 길이를 x축에 놓을 것으로도 예상하였다. 표에 제시된 점만 표시하고 직선으로 연결시키지 못하는 학생들이 있을 것이라고 예상할 수 있으나, 무게가 1씩 커질 때 길이가 2cm씩 커지므로, 일정하게 올라가는 직선으로 그래프를 그릴 것으로 예상하였다.

학생 A는 처음 주어진 표의 4개의 좌표를 눈금 있는 자를 사용하여 x축과 y축의 눈금을 정확한 측정을 통하여 표시하고 주어진 네 점이 한 직선 위에 있음을 확인한 후 직선으로 연결하였다(Figure 5). 학생 D는 x축의 눈금은 1씩, y축의 눈금은 5씩 일정하게 표시하고 주어진 점을 나타낸 후, 꺾은선 그래프처럼 표현하였다(Figure 6).

교 사: 학생D가 그린 그래프는 뭐야? 직선이야?
학생D: 약간씩 꺾여서
교 사: 사실 여기서 눈금이 정확하게 없어서 그런데, 꺾이는 선일까?
학생A: 직선이요.
교 사: 학생A는 직선으로 그렸네?
학생A: 7 mm씩 따져서 0.7 곱하기 2하면은 1.4니까, 여기(가 0부터 2까지)가 1.4 cm이고, 여기(가 2에서 5까지)는 3.5이어서, 직선으로 나오던데요.

학생 A는 처음에 주어진 표를 이용하여 그래프를 그릴 때, 눈금 있는 자를 사용하여 x축의 눈금을 7 mm씩 계산하여서 0부터 2까지는 1.4 cm, 2에서 5까지는 3.5 cm으로 일정하게 표시하고, y축도 마찬가지로 일정한 눈금을 계산하여 표시한 후에, 4개의 좌표가 한 직선 위에 있게 됨을 확인하였다. 무게의 변화량과 용수철의 길이의 변화량을 비례적 대응관계로 추상화하여 일정한 직선으로 그려질 것을 예상하여 그리지 않았다. 학생 D는 x축의 눈금은 1로 나타내었으나, y축의 눈금을 5로 나타내어서, y의 값의 일정한 변화량을 정확하게 나타낼 수 없었다. 그래프의 모양이 직선이 되는 것을 아직 인지하지 못하고, 꺾은선 그래프 모양으로 그렸다. 즉, 학생 A와 학생 D는 변화율이 일정한 현상으로부터 그래프의 모양이 직선이 될 것이라고 예상하지 않고 그래프로 표현하였으나, 학생 A는 정확한 측정을 통해서 주어진 네 점이 한 직선 위에 있다고 확인하여 직선으로 연결하여 그래프를 완성하였다. 즉, 학생 A는 좌표축의 눈금을 정확하게 측정하여 직선으로 연결하였으나, 학생 D는 좌표축의 눈금 표시를 정확하게 하지 않아서 직선으로 나타내지 못 하였다.

5 비를 세우는 두 가지 방법으로 곱셈비교로서의 비와 합성단위로서의 비가 있다. 곱셈비교로서의 비는 두 양을 곱셈으로 비교하는 것이고, 합성단위로서의 비는 두 양을 하나의 새로운 단위로 합성하는 것이다. 그 단위를 반복하거나 같은 크기의 부분으로 나누는 과정에서 나타난다.(Park, Kang, Ko, & Lee, 2016, pp.16-17)

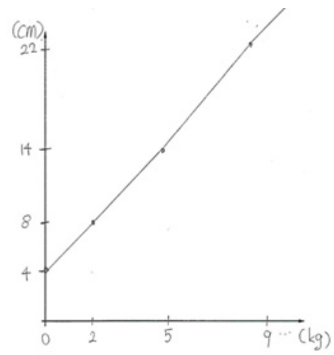


Figure 5. Student A's graph.

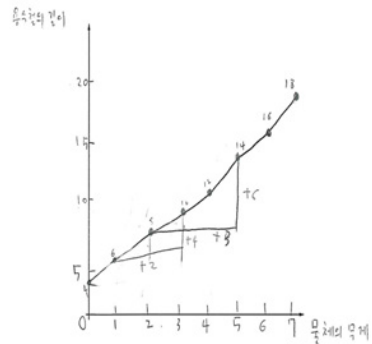


Figure 6. Student D's graph

이를 통해서 알 수 있는 것은 변화율이 일정한 상황을 직선으로 표현하는 데에는 측정에 대한 선수학습이 필요하며, 표로 표현하는 과정에서 무게가 1 kg씩 커질 때 길이가 2 cm씩 커지는 관계를 말하였으나 변화율이 일정한 상황의 그래프가 직선이 되는 것으로 자연스럽게 연결되지 않을 수 있으므로 교사의 적절한 안내가 필요하다.

변화율이 일정한 상황을 식으로 표현하는 과정

다음은 학생 A와 학생 D가 두 변수를 문자로 나타내고, 두 변수 사이의 관계식을 구하는 과정이다.

교 사: 식은 어떻게 구했어?
학생D: 무게를 라고 하고, 길이를 라고 했을 때, 를 두 번 곱한 다음에 더하기 4를 하면 가 된다는 걸 찾았어요.
교 사: 이 4는 어떻게 해서 더해준 거야?
학생D: 다른 값을 하나씩 넣어봤는데, 곱하기 도 안 됐었고, 제가 설명을 잘 못 하겠어요.
학생A: 저는 처음에 안 나왔었는데, 뒤에 [활동2]부터 하다가 답이 딱 나왔어요.
교 사: 뒤에 것부터? 어떤 거?
학생A: 물체의 무게가 1 kg에서 3 kg로 변하는 거랑, 2 kg에서 5 kg로 변하는 것 구한 다음에 관계 설명하는 것 생각하다 보니까 나왔어요.
교 사: 한 번 설명해볼래? 이 식이 네가 한 [활동2]랑 어떤 관련이 있는 거야?
학생A: 물체의 무게는 1씩 증가하는데, 용수철의 무게는 2씩 증가하니까 길이를 라 두고, 물체의 무게를 로 두면, 인데, 무게가 0일 때 이미 4 cm이니까, 다 4를 더해주면 가 나와요.

학생 A는 [활동1]에서 두 변수 사이의 관계식을 못 구하였는데, [활동2]에서 두 변화량 사이의 관계를 설명하는 문제를 먼저 해결하고 나서 물체의 무게(x)의 변화량이 1일 때, 용수철의 길이(y)의 변화량이 2이므로, 일정한 변화율인 2를 이용해서 $y=2x$라고 구하고, y절편 4를 더해서 관계식을 구하였다. 즉 학생 A는 두 변화량을 곱셈적으로 비교하고, 이를 이용하여 관계식으로 표현하였다.

학생 D는 학생 A처럼 두 변화량의 관계와 문제 상황에서 처음 용수철의 길이를 이용하여 구한 것이 아니라, x와 y의 대응 규칙을 이용하여 구하였다. 학생 D는 본인이 작성한 활동지에는 x에 2를 곱하는 식을 적었는데 이를 x를 두 번 곱한다고 말하였다.

학생들의 표, 그래프, 식을 이용하여 변화율이 일정한 상황을 이해하는 과정은 어떠한가?

[활동 1]에서 표를 완성하는 과정에서 암묵적으로 사용하던 지식을 명시적으로 확인할 수 있도록 [활동 2]의 질문을 구성하였다. 학생들이 일정한 변화율 개념에 대한 심상을 구성하는데 도움이 될 것으로 예상하였다.

예상 답안은 다음 네 가지 정도를 예상하였다.

첫째, 4 cm 증가, 6 cm 증가하므로 1 kg당 2 cm씩 일정하게 증가한다. 둘째, 무게의 변화량과 용수철 길이의 변화량의 비가 1:2이다. 셋째, 무게의 변화량의 2배가 용수철 길이의 변화량이다. 넷째, 학생들이 일정한 변화율을 하나의 상수 $\frac{(\text{용수철의 길이의 변화량})}{(\text{물체의 무게의 변화량})}=2$로 구성하려면 교사의 적극적인 안내가 필요할 것으로 예상하였다. 이 때 변화율이라는 용어를 사용한다.

직선의 기울기가 일정하다는 심상을 구성하기 위해서 서로 다른 두 개의 삼각형의 밑변과 높이 사이의 공통점 즉, $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=2$가 됨을 발견할 수 있는 발문이 필요할 것으로 예상되며, 이를 통하여 학생들이 변화율과 기울기가 같다는 심상을 구성할 수 있을 것으로 예상하였다.

또한, 학생들이 식 $y=2x+4$에서 의 x계수 2가 변화율과 같다는 심상을 구성할 것으로 예상하였다.

<상황 1>의 [활동2]는 다음과 같다.

표를 이용하여 변화율이 일정한 상황을 이해하는 과정

[활동2]

(1) 용수철의 길이는 물체의 무게의 함수인가? 그 이유는?
(2) 물체의 무게가 1 kg에서 3 kg으로 변하는 동안 용수철의 길이는 얼마나 변했는가?
물체의 무게가 2 kg에서 5 kg으로 변하는 동안 용수철의 길이는 얼마나 변했는가?
물체의 무게의 변화량과 용수철 길이의 변화량 사이의 관계를 설명하시오.
(3) (2)에서 구한 두 변화량 사이의 관계를 그래프 에 나타내어 설명하시오.
(4) 물체의 무게의 변화량과 용수철 길이의 변화량 사이의 관계를 식을 이용하여 설명하시오.

학생 A와 학생 D는 두 변수의 변화량 사이의 관계를 1 kg씩 증가하면 2 cm씩 증가한다고 설명하였다. 학생들이 교사의 안내에 따라 변화율이 일정한 상황을 이해하고 일정한 변화율을 하나의 상수, $\frac{(\text{용수철의 길이의 변화량})}{(\text{물체의 무게의 변화량})}=2$로 구성하는 과정은 다음과 같다.

교사: 2 kg에 4 cm, 3 kg에 6 cm는 어떤 공통점이 있어?
학생A: 나누기 하면 2가 되요.
교사: 그래. 6 나누기 3, 4 나누기 2 하면 둘 다 2가 되지?
학생A: 네.
교사: 우리가 초등학교 때, 비율이라고 배웠지?
학생A: 그럼, 이 둘은 비율이 같은 거네요.
교사: 그래. 너희가 물체의 무게의 변화량과 용수철 길이의 변화량 사이의 관계를 설명했잖아. 이 비율을 변화율이라고 하고, 변화율을 분수로 써 볼까?

D학생은 $\frac{4}{2}$와 $\frac{6}{3}$이라고 쓰고, A학생은 $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=2$라고 쓴다.

논의과정을 통해서 두 학생은 물체의 무게에 대한 용수철의 길이의 변화율을 학생 A는 $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=2$라고 적었고 학생 D는 $\frac{4}{2}$와 $\frac{6}{3}$이라고만 쓰고 그 일정한 변화율의 값을 나타내지는 않았다.

그래프를 이용하여 변화율이 일정한 상황을 이해하는 과정

학생 A는 두 변화량 사이의 관계를 그래프에 나타내기 위해서 [활동1]의 (2)의 그래프와 다르게 x의 눈금을 1씩, y의 눈금을 2씩 표시한 새로운 그래프를 하나 더 그렸다. 그리고 x축에 둥근 화살표를 표시하고 '+1'을, y축에 둥근 화살표를 표시하고'+2'를 나타내었다.

학생 D는 두 변화량 사이의 관계를 [활동1]의 (2)의 그래프의 두 점 (1, 6), (3, 10)을 잇는 곡선을 그린 후 '+4'라고 적고, 두 점 (2, 8), (5, 14)도 마찬가지로 곡선으로 연결한 후'+6'이라고 적었다.

다음 그림은 학생 A가 교사의 안내에 따라 두 변화량을 그래프에 나타낸 그래프이다. 학생 A는 두 변화량을 가로와 세로에 표시하였으나, 두 점을 이은 선분을 빗변으로 하는 삼각형으로 나타내지는 못하였다(Figure 7 참조).

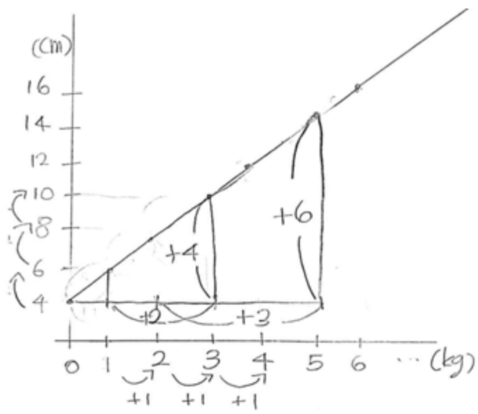


Figure 7. Student A's graph 2.

다음은 학생들이 교사의 안내에 따라 그래프에서 변화율이 일정한 현상을 이해하는 과정이다.

교사: 변화율을 이용해서 직선이 얼마만큼 기울어져 있는지를 얘기해 볼까? x가 1 kg 증가할 때, y는 2 cm 증가하는 이 직선은 $\frac{2}{1}$ 만큼 기울어져 있다고 한다면, 변화율이 3이면 직선의 기울기가 어떻게 될까?
A학생: 더 눕혀져요.
교 사: 1 kg에 2 cm 증가하는 게 이 그래프거든? 그럼, 1 kg에 3 cm 증가하면?
A학생: 더 세워지겠네요.
교 사: 그래. 변화율이 그래프가 직선일 때는, 직선이 얼마만큼 기울어져 있는지는 나타내고, 수학 용어로 기울기라고 해.

학생 A는 두 변화량을 그래프에 정확하게 나타내지는 않았으나, 변화율과 기울기를 이해하고, 두 변화량의 비율을 하나의 상수 2로 개념화하여 이것을 식에서 x의 계수와도 연결하여 말하였다. 학생 D는 Figure 6과 같이 두 변화량을 그래프에 정확하게 나타내었으나, 두 변화량의 비율을 하나의 상수 2와 연결하지 못하였다.

식을 이용하여 변화율이 일정한 상황을 이해하는 과정

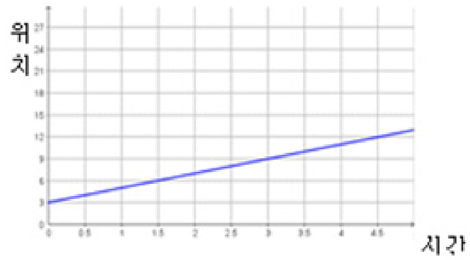
학생 A는 두 변화량 사이의 관계가 1kg 늘어날 때 2cm씩 늘어난다는 것을 비율로 쓰지는 않았으나 용수철의 길이는 2씩 늘어나는데 물체의 무게는 1씩 증가하므로 $\frac{2}{1}=2$ 라는 일정한 비율 2를 식 y=2x의 2에 동그라미를 그려서 표현하였다. 학생 D는 두 변수 사이의 관계식은 가장 먼저 구하였으나, 두 변화량 사이의 관계를 식을 이용하여 전혀 서술하지 못 하였다.

학생들의 일차함수 개념을 구성하는 반성적 사고 과정은 어떠한가?

<상황3>은 초등학교 5학년 2학기 과학교과서를 통하여 학습한 $\text{속 력} = \frac{\text{이동거리}}{\text{걸린시간}}$ 에 관한 과제이고, 중학교 1학년 수학 교과서에서 그래프 그리기와 해석, 정비례의 뜻과 그래프 등을 학습하였기 때문에 시간의 변화량과 거리의 변화량이 하나의 값, 속력이 된다는 것은 학생들에게 익숙한 상황이라고 할 수 있다. 두 변화량 사이의 관계에서 변화율이 일정하다는 심상을 아직 구성하지 못한 학생들에게 심상을 구성할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 예상하였다.

<상황 3>

세민은 3m지점에서 출발하여 다음 그림(파란색 그래프)과 같이 5초 동안 움직이고 있다. 찬영은 0m지점에서 출발해서 정확히 3초에 세민을 따라 잡았다.



[활동1] 물음에 답하시오.

(1) 찬영이가 움직인 상황을 그래프, 표, 식으로 나타내시오.

시간(초)									
위치(m)									

식:

(2) 세민이가 움직인 상황을 표와 식으로 나타내시오.

시간(초)									
위치(m)									

식:

[활동 2] 물음에 답하시오.

(1) 세민이와 찬영이의 운동 상황은 함수인지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.
(2) 세민이와 찬영이의 속력을 각각 구하여 보고, 그 풀이 과정을 서술하시오. (단, 속력의 단위를 반드시 적으시오)
(3) (2)에서 구한 세민이와 찬영이의 속력을 그래프 와 연결하여 설명하시오.
(4) (2)에서 구한 세민이와 찬영이의 속력을 식과 연결하여 설명하시오.
(5) 세민이와 찬영이의 운동 상황의 차이점을 그래 프와 식을 이용하여 설명하시오.

[탐구활동 II]에서는 [활동1]의 (1)에서는 학생들이 변화율이나 기울기에 대한 개념이 부족한 경우 전체 토의를 통하여 학생들이 개념을 다시 정리할 수 있을 것으로 예상하였다.

[탐구활동 II] 일차함수란 무엇인가?

[활동1] [탐구활동 I]의 <상황1>~<상황3>에 대한 물음에 답하시오.

(1) <상황1>, <상황2>, <상황3>의 활동 결과를 완성하시오.

상황	변화율	그래프	기울기	식
<상황 1>				
<상황 2>				
<상황 3>				

(2) <상황1>, <상황2>, <상황3>에서 두 변수 사이의 관계의 공통점을 3가지 쓰시오.

[활동2] [활동1]의 (2)에서 제시한 공통점 세 가지 중 일차함수의 뜻을 선택하고 다른 두 가지 성질과의 관계를 설명하시오.

[활동1]의 (2)에서는 변화율이 일정하고, 그래프의 모양이 직선이며 그 직선의 기울기는 변화율과 같고, 식의 모양은 $y=ax+b$(단, a는 변화율이고, b는 처음의 값)라고 예상하였다. 세 가지 성질을 가지는 함수를 일차함수라고 한다고 교사가 안내한 후 학생 스스로 일차함수의 뜻을 한 가지 정하고, 이를 다른 두 성질과의 관계를 서술하도록 구성하였다. 이를 통하여 학생들이 일차함수 개념을 어떻게 구성하고 성질들을 어떻게 연결하여 이해하는지를 확인할 수 있을 것으로 예상하였다.

변화율, 그래프의 모양, 기울기, 식 정리하는 과정

학생들 스스로 <상황1>, <상황2>, <상황3>에서의 변화율, 그래프의 모양, 기울기, 식을 먼저 정리한 후 교사와 함께 전체 토의하였다.

네 명의 학생들은 [탐구활동 Ⅰ]의 <상황1>에서는 '변화율'이라는 용어를 사용하지 않고, 두 변화량의 관계를 서술할 때에는 모두 '1 kg 증가할 때 2 cm 늘어난다'고 답하였다. 그러나 [탐구활동 Ⅱ]에서 '변화율'이라는 용어를 사용하여 <상황 1>을 정리하도록 과제를 제시하자, 학생 A는 2라고 답하였고, 학생 B는 2:1이라고 답하였다. 즉 학생 A와 학생 B는 '1 kg 증가할 때 2 cm 늘어난다'는 심상을 '변화율'로 나타낼 때, 학생 A는 하나의 상수로, 학생 B는 비례 관계로 구성하였다. 학생 C와 학생 D는 [탐구활동 Ⅰ]의 <상황 1>을 설명할 때와 동일하게 '1 kg 증가할 때 2 cm 늘어난다'라고 답하였다.

다음은 <상황 3>의 변화율에 대하여 교사와 학생들이 논의하는 과정이다.

교 사: <상황3>의 세민이의 경우에 대해서 이야기해보자. 세민이의 경우에서 변화율은 뭐니?

학생A: 2이요.

교 사: 2는 뭐야?
학생A: 변화율이라는 게 속력인데...
교 사: 변화율이 여기서는 속력이야?
학생A: 네.
학생D: 저는 아까랑 똑같이 가 1증가할 때, 는 2증가한다고 적었는데, 저도 2라고 하는 게 맞을 것 같아요.
교 사: 그럼, 학생D도 속력이 변화율이라고 생각하는 거니?
학생D: 네.
학생C: 저도 2가 맞는 것 같아요.
학생B: 저는 처음에는 9:3이라고 적었는데, 아닌 것 같아요. 2인 것 같아요.

학생 A가 변화율이 속력이라고 말하자 학생 C와 학생 D는 변화율을 2라고 수정하였고 학생 B도 9:3이라는 비례적 대응관계로 나타내었다가 논의하는 과정에서 변화율을 2라고 말하였다. 속력이 걸린 시간에 대한 이동 거리이므로 두 변화량의 비율이라는 것을 모두 이해하고, 학생 A의 말에 동의하여 변화율이 일정한 일차함수의 개념에 대한 반성적 사고가 일어난 것이라고 할 수 있다.

그러나 기울기에 대해서는 학생 A와 학생 D만이 변화율 2와 같다고 이야기하였고, 학생 B는 단순히 기울기를 직선으로 그렸고, 학생 C는 정리하지 못 하였다. 학생 B와 학생 C가 <상황 3>에서 속력을 그래프에 나타내어 보는 활동, 즉 두 변화량인 걸린 시간과 이동거리를 그래프에 나타내는 표현을 하지 못하여 이를 정리하고 조직하는 데 변화율(속력)과 기울기가 같다는 반성적 사고가 일어나지 않았다고 할 수 있다. 따라서 학생 B와 학생 C를 위하여 교사가 기울기에 대하여 다시 한 번 설명하여 주었다.

세 가지 상황에서 두 변수 사이의 관계의 공통점을 변화율, 그래프의 모양, 기울기, 식에서 발견한 것을 다음과 같이 논의하고 일차함수 개념을 구성하도록 안내하였다.

교 사: 세 가지 상황에서 두 변수 사이의 관계를 나타낸 표에서의 변화율, 그래프의 모양, 식에서 나타나는 공통점을 말해볼까?
학생C: 직선으로 증가하고 있다.
학생A: 변화율이랑 그래프의 모양, 기울기, 식에서의 의 계수가 똑같아요.
교 사: 식의 모양은 어떻니?
학생B, D: $y = ax + b$
교 사: 그래. 그래프의 모양은 모두 직선이고, 식의 모양은 가 에 대한 일차식이고, 변화율이 일정하며 그래프의 기울기가 일정한 관계가 있어. 두 변수 와 사이에 이러한 특징을 가지는 함수를 일차함수라고 한단다.

일차함수의 뜻을 선택하고 다른 성질들과 연결하는 과정

학생들과 교사가 변화율, 그래프의 모양, 기울기, 식에 대하여 전체 토의를 한 후, 공통점 세 가지 중 일차함수의 뜻을 선택하도록 하였다. 학생 A와 학생 D는 y가 에 x대한 일차식으로 표현되는 것을 일차함수의 뜻으로 선택하였고, 식에서의 x의 계수가 변화율과 같다는 것을 연결하여 설명하였다. 반면, 학생 B와 학생 C는 변화율이 일정하다는 것을 일차함수의 뜻으로 선택하고 이를 그래프의 모양이 직선이 된다는 것과 연결하여 설명하였다. 학생 A와 학생 D는 [탐구활동 Ⅰ]에서 관계식을 구하는 것을 크게 어려워하지 않았고, 변화율과 기울기, 식에서 x의 계수가 모두 같다는 것을 이해하여 일차식으로 표현되는 것을 일차함수의 뜻으로 선택한 것으로 보인다. 하지만, 학생 C는 [탐구활동 Ⅰ]에서 학생 A, 학생 D와 다르게 관계식을 스스로 구하지 못하여 y가 x에 대한 일차식으로 표현되는 것을 일차함수의 뜻으로 선택하지 않고, 변화율이 일정하다는 것을 일차함수의 뜻으로 선택한 것으로 보인다. 학생 B도 변화율이 일정하다는 것을 일차함수의 뜻으로 선택하였다. 학생 B와 학생 C는 그래프의 모양이 직선이 된다는 개념과 변화율이 일정하다는 것을 연결하여 설명하였다. 즉 두 학생 모두 변화율이 일정하다는 개념과 그래프의 모양이 직선이 된다는 개념을 연결하고 있으나, 변화율과 기울기를 연결하거나 변화율과 식을 연결하여 설명하지는 못 하였다.

결론 및 제언

본 연구의 목적은 일차함수 개념의 교수학적 현상학의 분석을 통하여 일차함수 개념의 현상과 본질을 알아보고, 일차함수를 아직 학습하지 않은 중학교 2학년 학생들을 대상으로 일차함수 개념의 수학화 과정을 변화율이 일정한 현상을 표, 그래프, 식으로 표현하는 과정과 일차함수 개념의 심상을 구성하는 과정, 본질을 구성하는 과정으로 상세하게 서술하고, 이를 분석하는 것이다.

분석 결과로부터 도출한 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 변화율이 일정한 현상을 표와 그래프로 표현하는 것은 쉽게 해결하였다. 표를 채울 때는 합성단위로서의 비를 이용하였다. 학생들이 변화율이 일정한 현상을 그래프로 그릴 때에는 과제에 제시된 표를 순서쌍으로 만들어 좌표평면에 점으로 나타내고 선으로 연결하였다. 학생 A는 정확한 측정을 통해서 그래프가 직선이 된다는 것을 발견하였으나, 학생 D는 직선이 아닌 꺾은선 그래프라고 답하였다.

둘째, 식을 구할 때는 학생 A는 주어진 상황과 공변 관점, 대응 규칙을 모두 이용하였고, 관계식에서 변화율이 x의 계수와 같다는 심상을 구성하였다. 반면 학생 D는 대응 규칙만을 이용하여 두 변수 사이의 관계식을 구하였고, 관계식에서 변화율이 x의 계수와 같다는 심상을 구성하지 못 하였다.

셋째, 학생들은 두 변화량의 관계에 대하여 '1 kg 증가할 때 2 cm씩 증가한다', '1:2'라는 심상을 구성하였다. 학생들이 두 변화량의 관계가 일정한 비율이 2가 된다는 것을 구성하기 위해서는 교사의 적극적인 안내가 필요하였다.

또한 학생들은 시간의 변화량과 거리의 변화량이 하나의 값, 속력으로 구성되는 과제를 통하여 변화율의 개념을 구성하였고, 변화율이 일정하다는 본질을 구성하였다.

넷째, 학생들은 변화율이 일정한 상황을 그래프로 표현하면 직선이 된다는 상식은 가지고 있었으나, 일정한 변화율을 그래프에 어떻게 나타낼 수 있는지와 일정한 변화율이 직선의 기울기와 어떤 관계가 있는지에 대해 설명하는 데 어려움을 겪었다. 이 때, 직선 위의 서로 다른 두 점을 이용하여 일정한 비율을 찾게 하고, 그 비율이 직선의 기울기가 되는 이유에 대한 교사의 적극적인 안내가 필요하였다.

다섯째, 학생들이 일정한 변화율을 식을 이용하여 수학화할 때에는 표에 주어진 두 점을 이용하거나 그래프 위의 두 점을 이용하였다. 학생들이 함수식의 x의 계수와 일정한 변화율을 서로 비교, 관찰하도록 하는 교사의 안내가 반드시 필요하였다.

여섯째, 학생들은 변화율이 일정한 현상을 통하여 일차함수 개념에 대한 심상을 구성하였고, 변화율이 일정하다, 그래프가 직선이고, 식의 모양이 $y = ax + b$(a는 변화율, b는 y절편)라는 일차함수의 본질(개념)을 구성하였다. 이 때, 학생들과 교사의 토의과정을 통하여 학생들은 심상을 정리하고 조직하여 일차함수 개념을 구성하는 것을 확인할 수 있었다. 학생 A와 학생 D는 식

$y = ax + b$을 일차함수의 뜻으로 선택하였다. 단순히 일차식으로 표현되기 때문에 일차함수라고 정의하기 이전에 변화율이 x의 계수이고, 상황에서 초기의 값(y절편)이 상수항이 되는 식의 구조를 이해한 학생들은 이미 상황을 이용하여 일차함수의 개념을 이해하였다.

변화율이 일정한 상황에서 학생들이 변화율에 대한 심상을 구성할 수 있고 일차함수의 본질을 구성할 때 변화율이 일정한 현상(상황)은 중요하게 작용한다는 것을 확인하였다. 특히 일정한 속력으로 움직이는 상황은 일정한 변화율에 대한 심상과 본질을 구성하는 데 반드시 필요한 교과과정이라는 것을 확인하였다.

변화율이 일정한 상황의 변화율, 그래프의 모양, 기울기, 식을 정리하고 변화율의 공통점, 그래프의 공통점, 식의 공통점을 조직하면서 변화율이 일정하고, 그래프가 직선이며, 식의 모양이 x에 대한 일차식으로 표현되는 일차함수의 개념을 구성하였다. 그리고 세 가지 성질 사이의 관계를 서술하면서 세 가지 성질은 서로 동치관계인 것을 이해하였다.

일차함수 개념 교과과정에 대한 학생들의 수학화 과정 중 학생들이 일차함수의 개념 즉 본질을 구성하는 과정에서는 학생별로 표현 과정과 심상 구성 과정에서 수행한 정도에 따라 일차함수의 뜻을 선택하고, 다른 두 가지 성질 사이의 관계를 서술하는 데 차이가 있었다.

표현 과정, 심상 구성 과정에서는 학생간의 상호작용, 학생과 교사와의 상호작용을 통하여 학생들이 어려움을 극복하였고, 본질 구성 과정에서는 교사의 안내에 따른 전체 토의과정 속에서 학생들이 일차함수 개념을 구성하였다.

선행 연구에서는 학생들이 기울기 개념을 시각적 관점으로만 생각하고 변화율의 의미를 함께 고려하지 못한 경우 오류를 범하는 경우가 있음을 보고하고 있으나 그에 대한 구체적인 수업 장면이나 오류를 극복하기 위한 방안 등에 대한 연구는 살펴볼 수 없었다. 본 연구에서는 학생들이 변화율의 의미를 이해하는 과정과 변화율과 기울기 개념을 연결하는 과정이 어떻게 이루어지며, 학생들이 그 과정 속에서 어려워하는 점이 무엇이고, 어떻게 해결하는지 등을 알 수 있었다.

Ma (2017)의 연구에서는 중학생들의 비례 추론 수준에 따라 일차함수를 이해하는 정도를 사례 분석하였으나, 본 연구에서는 학생 스스로 일차함수 개념을 구성할 수 있는 교과과정을 설계하여 수업을 하고, 수업 과정에서 학생들의 일차함수 개념의 수학화 과정을 구체적으로 살펴보았고, 학생들이 어떻게 반성적 사고를 하는지 등을 발견할 수 있었다.

또한, 과학교과서에서는 변화율의 관점에서 속력이 시간-이동 거리 그래프에서의 기울기와 같다는 것을 동시에 다루고 있고 특히 등속운동을 '속력이 일정한 운동이고 시간-이동 거리 그래프가 직선으로 나타나며, 이 그래프의 기울기는 속력과 같고 일정하다.' 라고 설명하고 있다. 본 연구에서는 학생들이 물체의 무게에 따라 변하는 용수철의 길이에 대한 상황(<상황1>)보다 등속운동 상황(<상황3>)에서 변화율과 기울기 개념을 더 잘 이해하는 것을 확인하였다.

앞으로 수학화 과정 수업에서는 학생들에 따라서 교사의 안내가 어떻게 이루어져야 하는지에 대한 지속적인 연구가 필요하다. 미래 교육에서는 학령인구가 급속도로 감소하고 그에 따라 개별화 교육이 강조되고 있다. 따라서 학생 개개인에 맞추어 학습하고 교사가 안내하고 스스로 공부하는 교실 환경이 더욱 중요할 것이다.[6]

References

Chong, Y.O. (1997). *Sudy on Fredudenthal's mathematising instruction theory* [Doctoral dissertation, Seoul National Unversity Graduate School].

Chong, Y.O., Lee, K.H., Na, G.S. (2018). *Realistic mathematics education*, Kyowoo.

Ellis, A. (2013). *Teaching ratio and proportion in the middle grades: Ratio and proportion. Research Brief.* National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K., Stephan. M., Julie, C., Lin, F-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the future. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Na, G.S., Kim, D.W., Kim, Y., Lee, S.J., Park, M.M. (2017), Future Mathematics Education's view and research. The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

6 본 연구는 주저자의 2021년 박사 학위 논문의 내용을 토대로 재구성하여 작성하였음.

Joanne Lobato & Amy B. Ellis(Park, J.S., Kang, H.Y., Ko, E.S., Lee, D.H. Transfer) (2016). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics*, Kyowoosa.

Kaput, James J. (1994). “The Representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience”, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers. 379-397.

Kim, N.H., Na, G.S., Park, K.M., Lee, K.H., Chong, Y.O., Hong, J.G. (2017). *A Study on Mathematics Curriculum and Textbooks* , Gyeongmunsa.

Kim, H.K., Na, G.S., Lee, M.L., Lee, A.K., Kwon, Y.G. (2019). *Middle School Mathematics 2*, Good book Shinsago.

Kim, H.R., Kim S.H., Kim, M.S., Lee, Y.S., Hwang, S.Y., Lee, S.H., …, Song, S.J. (2020). *Middle School Science 3*, DongA Press.

Kim, Y.U. & Kim, Y.G. (1986). *Mathematical history*, Woosung Munwhasa..

Kim, Y.U. & Kim, Y.G. (1999). *Understanding of mathematical history*, Shin Sung Press.

Ma, M.Y. (2017). *Middle School Students’ Understanding and Development of Linear Functions* [Doctor’s thesis, Korea National University of Education Graduate School].

National Council of Teachers of Mathematics (2010) (Ryu, H.C., Cho, W.Y., Lee, K.H., Na, G.S., Kim, N.G., Pang, J.S. Transfer) (2007). *Principles and Rules for School Mathematics*, Gyeongmunsa.

Park, J.H., Shin, J.H., Lee, S.J., Ma, M.Y. (2017). Analyzing Students’ Works with Quantitative and Qualitative Graphs Using Two Frameworks of Covariational Reasoning, *Jounal of Educational Research in Mathematics*, *27*(1), 23-49.

Ryou, H.J. (2008). *A Study of Conceptual Understanding and Teaching Methods for of Linear Function Slope* [Master’s thesis, Korea National University of Education Graduate School].

Seo, J.S. (2009). *The Analysis of Understanding the Slope Concept in Hing School Students* [Master’s thesis, Korea National University of Education Graduate School].

Shin, S.J. & Cho, W.Y. (2020). An Analysis of the Concepts of Direct Proportion in <Mathematics1> Textbook Under 2015- Revised Curriculum Based on Freudenthal’s Mathematising Instruction Theory, *School Mathematics*, 22(4), 923-943.

Small, Christopher G. (2007). *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer.

The Ministry of Education. (2015). Mathematics Curriculum. Ministry of Education , 2015-74 [Supplement 8].

Thomas J. Cooney, Sybilla Beckmann, Gwendolyn M. Lloyd(Cho, W.Y., Kwon, N.Y., Lee, D.H. Trasfer) (2017), *Developing Essential Understanding of Functions for Teaching Mathematics*, Kyowoosa.

Thompson, P.W., & Carlson, M.P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp.421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81., Springer https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1 5

Woo, J.H. (2017). *School Mathematics’s Educational Basic(2)*, Seoul National Unversity Press.

Yi, G.H. & Lee, J.H. (2020). Pre-service Teachers’ Ways of Thinking of Qualitative Graph Construction in a Continuous Covariation Situation, *Jounal of Educational Research in Mathematics*, *30*(3), 509-530. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.30.3.509