

상승하는 원환형 기포와 자유수면의 상호작용

문은성* · 김대겸†

Interaction between a rising toroidal bubble and a free surface

Eunseong Moon* and Daegyoun Kim†

Abstract We experimentally investigate a rising toroidal bubble impacting a free surface. The toroidal bubble is created by releasing pulsed air. By adjusting the volume and circulation of the toroidal bubble, the characteristics of interactions between the toroidal bubble and the free surface are identified. Because of the impact by the toroidal bubble, the free surface is convexly deformed upwards above the center point of the toroidal bubble, while the edge of the deformed free surface is pulled down. When the circulation of the bubble becomes stronger, the surface which was pulled down breaks eventually, and air above the free surface is entrained into water, forming an unstable toroidal bubble. The deformations at the center and edge of the free surface are in a linear relationship with the Froude number and the Weber number, respectively.

Key Words : Toroidal bubble (원환형 기포), Free surface (자유수면), Air entrainment (공기 유입)

1. 서론

기포는 산업 현장이나 바다 및 강 등 매우 다양한 환경에서 관찰할 수 있다. 특히 다양한 산업 분야에서 물질 전달 또는 열전달 등의 반응성을 향상시키는 데 기포가 이용되고 있다⁽¹⁾. 기포는 주변 유체보다 가볍기 때문에 부력에 의해 상승하게 되고, 일반적인 상황에서 자유수면과 충돌을 피할 수 없다. 충돌 이후 기포는 곧 터지게 되며, 이 과정에서 액체 내부에 있던 물질들이 공기 중으로 흩뿌려지게 되는데 이는 건강과 환경오염 및 기후와 큰 관련이 있다⁽²⁾. 기포의 상승 속도에 따라 자유 액체 표면과의

기포 충돌의 양상이 다르며⁽³⁾, 기포의 파열 과정 역시 크기에 따라 달라진다^(4,5). 작은 기포의 경우는 기포의 공동이 붕괴되며 위쪽으로 액체 제트가 생성되어 적은 수의 물방울이 생성된다⁽⁴⁾. 반면에 큰 기포의 경우는 기포를 이루는 얇은 액체 필름의 파열로 인해 매우 많은 수의 미세한 액체 입자들이 생성되므로 공기 중 대부분의 물방울 입자들은 큰 기포의 파열 과정에서 나온다고 볼 수 있다⁽⁵⁾.

한편, 부력에 의해 상승하는 기포는 그 크기에 따라 형상 또한 다르게 나타난다⁽⁶⁾. 특히, 충분히 큰 크기를 가지는 초기에 구형인 기포의 경우는, 기포의 상하단의 압력 차이에 의해 기포의 하단에서 액체 제트가 형성되어 기포의 상단을 뚫으며 고리 형태의 기포가 생성되는데, 이를 원환형 기포라 부른다⁽⁶⁻⁸⁾.

† Mechanical Engineering, KAIST, Associate Professor
E-mail: daegyoun@kaist.ac.kr

* Mechanical Engineering, KAIST, Ph.D. Student

이러한 원환형 기포는 인양에 사용되는 수중 풍선이 터지거나 수중 폭탄의 폭발에 의해서도 생성될 수 있으며^(9,10), 돌고래 등 수중 포유류 또한 생성할 수 있다⁽¹¹⁾. 원환형 기포는 와류 고리의 일종이므로 구형 기포에 비해 큰 운동 에너지를 가지며, 부력에 의해 반지름이 지속적으로 증가한다고 알려져 있다⁽⁹⁾. 따라서 원환형 기포는 상승하면서 더 많은 유체의 흐름을 만들어내고, 이후 자유수면과 충돌할 때 자유수면 주위에 있던 물체는 매우 큰 충격을 받을 수 있다⁽¹⁰⁾. 따라서 상승하는 원환형 기포와 자유수면의 충돌 과정을 이해하는 것은 중요하다.

공동 현상(Cavitation)에 의한 증기 기포와 자유수면의 상호작용은 이전에 관찰된 적이 있으며 이 경우 공동 기포는 빠르게 붕괴하여 액상으로 변화하였으므로 폭발 위치가 수면에서 멀어질수록 수면에 미치는 영향은 매우 작아졌다⁽¹⁰⁾. 이에 반해 공기의 주입으로 생성된 기포의 경우는 보다 안정적이고 부피 변화가 작으므로 생성 위치가 수면에서 멀더라도 수면에 미치는 영향이 크게 작아질 것으로 예상되지 않으며, 전혀 다른 상호작용이 예상된다. 따라서 이 논문에서는 수면의 아래에서 만들어져 상승하는 공기로 이루어진 원환형 기포가 자유수면과 충돌하는 경우를 다루고자 한다.

2.1절에서는 실험 셋업, 2.2절에서는 주요 매개변수를 다룬다. 3.1절에서는 충돌 과정에 대한 전반적인 개요, 3.2절에서는 자유수면의 변형을 다룬다. 모든 관찰된 내용은 4장에서 요약하고자 한다.

2. 실험

2.1. 실험 셋업

실험 셋업의 개략도는 Fig. 1에 나타나 있다. 원환형 기포에 대한 측벽 효과를 최소화하기 위해 실험은 충분히 큰 수조(W600 mm × D600 mm × H1400 mm)에서 수행되었다. 짧은 시간 동안 노즐을 통해 공기를 방출하여 원환형 기포를 생성한 이전 연구들의 장치와 유사한 원

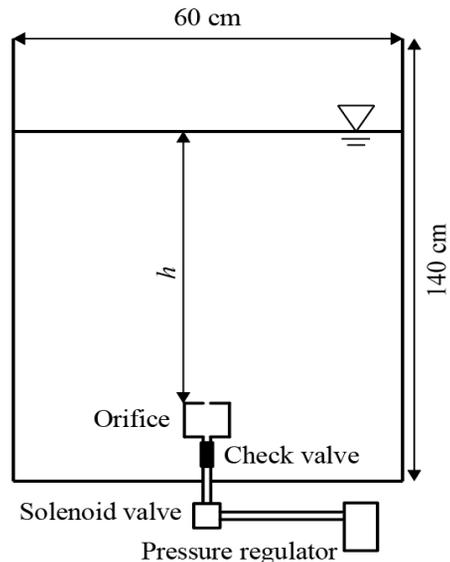


Fig. 1. Experimental setup.

환형 기포 생성기를 제작하였다^(11,12). 기포 생성기는 상단에 공기가 배출되는 반지름 3 mm의 원형 구멍이 있는 원통형 오리피스 형태로 제작하였으며, 압축 공기는 이 구멍을 통해 물속으로 짧은 시간 동안 방출된다. 기포 생성기에 연결된 솔레노이드 밸브를 MATLAB 코드(Mathworks, Inc.)를 통해 제어하여 공기의 방출 시간을 조절하였으며, 압력 레귤레이터를 통해 압축 공기의 압력을 조절하였다. 체크 밸브는 물이 기포 생성기로 역류하는 것을 방지하기 위해 기포 생성기 하단에 설치하였다. 공기압은 25 kPa에서 75 kPa, 솔레노이드 밸브 개방시간은 0.175초에서 0.30초로 제어하여 다양한 부피의 원환형 기포를 생성하였다.

앞서 설명했듯 원환형 기포는 상승함에 따라 부력에 의해 반지름이 증가하는 성질이 있다. 다양한 반지름의 영향을 살펴보기 위해서 원환형 기포 생성기에서 자유수면 사이의 거리 h 를 30, 45, 70, 75, 110 cm로 조절하였다.

실험시 물의 온도는 $25 \pm 1^\circ\text{C}$ 로 통제되었으며, 이때 공기의 밀도, 물의 밀도, 동점도, 표면장력 계수는 각각 1.2 kg/m^3 , 997 kg/m^3 , $0.891 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$, 71.8 mN/m 이다.

1280×1024 픽셀의 해상도를 가진 고속 카메라

라(FASTCAM MINI-UX50, Photron Inc.)는 원환형 기포의 진화와 자유수면을 시각화하는 데 사용되었다. 카메라는 자유수면을 수평으로 관측할 수 있도록 장착하였으며, 영상의 대비를 향상하기 위해 LED 램프를 사용하여 영상 평면을 조명했다. 이미지는 초당 250 프레임(일부 케이스는 125 프레임)으로 촬영되었다.

2.2. 실험 변수

원환형 기포의 형태는 기포의 고리 반지름 R 과 코어 반지름 a 로 결정할 수 있다(Fig. 2). 기포의 상승 양상은 기포의 형태와 기포의 상승 속도 U 에 따라 달라지는데, 이 값들은 지속적으로 변화하기 때문에 기준이 되는 지점을 선택할 필요가 있었다. 자유수면의 변형이 관측되기 시작되는 지점을 기준점으로 두고 이때를 기준 시간($t = t_0$)으로 설정하였으며, 이때의 기포의 상승 속도, 고리 반지름 및 코어 반지름을 각각 U_0, R_0, a_0 로 정의하였다. 기포의 부피는 기포가 완벽한 원형 고리 모양이라는 가정하에 고리 반지름 R 과 와류 코어 반지름 a 을 이용하여 $2\pi a^2 R$ 로 계산하였으며, 기준점 주변의 5개의 이미지에서 기포 부피를 얻어 이 값의 평균을 기포의 부피 V_b 로 정의하였다. 기포의 수직 위치에 따라 물이 작용하는 압력이 달라지므로 기포의 부피가 달라지지만, 기준점에서 자유수면 사이의 거리는 일반적으로 10 cm를 넘지 않으므로 부피의 변화는 1%에 미치지 않기 때문에 무시할 수 있다 가정하였다.

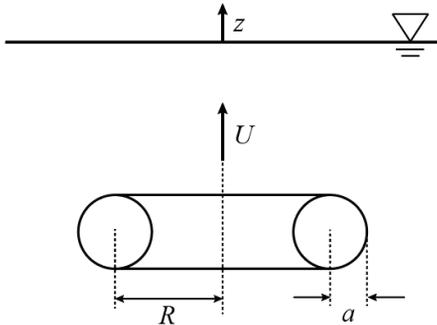


Fig. 2. Kinematic parameters of a toroidal bubble.

원환형 기포의 순환 강도(circulation strength)는 기포의 동적 거동에 영향을 미치는 또 다른 매개변수이다. 원환형 기포의 순환 강도는 다음과 같은 이론 식으로 추정할 수 있다⁽¹¹⁾.

$$\Gamma = 4\pi R U \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right)^{-1} \quad (1)$$

원환형 기포의 생성과 상승에는 있어 기포와 주변 유체 사이의 표면장력과 기포의 상대적인 크기를 나타내는 본드 수 $Bo (= \Delta \rho g D_{eq}^2 / \sigma)$ 가 중요하다고 알려져 있다⁽⁶⁾. 여기서 $\Delta \rho$ 는 물과 공기의 밀도차(995.8 kg/m^3), D_{eq} 는 등가 구면 직경으로 그 값은 $(6V_b/\pi)^{1/3}$ 으로 계산할 수 있다.

또한, 밀도 구배가 존재하는 유체를 이동하는 와류 고리의 경우, 와류 고리의 관성력과 와류 고리에 작용하는 중력의 상대적 크기가 와류 고리의 거동을 결정하는 데 것으로 알려져 있다⁽¹³⁻¹⁵⁾. 이를 고려하기 위해 원환형 기포에 대한 관성 및 중력의 상대적 크기를 나타내는 프루드 수 Fr 를 정의하였다. 또한 기포와 자유수면의 상호작용을 결정짓는 데는 기포의 관성과 자유수면의 표면장력의 비를 나타내는 웨버 수 We 의 또한 중요하다. 이 두 무차원 변수가 주요 변수로서 다음과 같이 정의되었다.

$$Fr = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{gR_0^3}}, \quad We = \frac{\rho U_0^2 R_0}{\sigma} \quad (2)$$

여기서 g 는 중력가속도 9.8 m/s^2 , ρ 는 물의 밀도, σ 는 물과 공기 사이의 표면장력을 나타낸다. 여기서 프루드 수 Fr 의 관성 성분은 원환형 기포의 기준점에서의 와류 순환 Γ_0 으로 대체되었는데, 이는 와류의 거동을 살펴보기에 적절하며⁽¹⁶⁾, 웨버 수의 정의는 3.2절에서 다시 논의 될 것이다. 이러한 무차원 매개변수의 범위는 $Bo = 52 - 122, Fr = 0.4 - 1.7, We = 13 - 67$ 이다. 무차원 시간은 다음과 같이 정의되었다.

$$t^* = \frac{\Gamma(t - t_0)}{R_0^2} \quad (3)$$

3. 결과 및 분석

3.1. 기포와 자유수면의 진화 과정

자유수면의 영향을 무시할 수 있을 때 원환형 기포의 거동에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔다^(9,17). 하지만 기포가 자유수면에서 가까워지면 자유수면의 영향을 무시할 수 없고, 이때 어떠한 거동을 보이는지에 대해 거의 알려져 있지 않다. 이 섹션에서는 이러한 자유수면의 영향으로 인한 원환형 기포의 운동이 어떤 특징을 가지는지 살펴본다.

Fig. 3에는 실제 기포의 진화 과정 중 특징적인 상황이 나타나 있다. 초기 기포는 계면과 거의 상호작용하지 않으며 상승한다(Fig. 3, $t^* = 0.2$). 기포가 자유수면에 접근함에 따라 기포의 반지름은 더욱 빠르게 증가한다(Fig. 3, $t^* = 4.8$). 자유수면은 변형되기 시작하고 기포는 자유수면 주위에서 더 이상 위로 이동하지 못하고 제자리에서 회전을 계속한다(Fig. 3, $t^* = 5.9 - 7.6$). 기포의 회전에 의해 자유수면이 일그러지기 시작하며(Fig. 3, $t^* = 7.6$) 자유수면 위의 공기를 수면 아래로 빨아들인다(Fig. 3, $t^* = 8.9 - 9.7$). 이후 원환형 기포는 작은 기포들로 분해되고 작은 기포들은 다시 수면 위로 올라가게 된다(Fig. 3, $t^* = 11.6$).

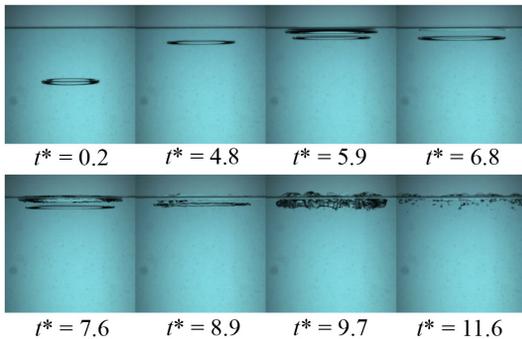


Fig. 3. Representative scenes of the interaction between a toroidal bubble and free surface. $Bo = 63$, $Fr = 0.8$, $We = 24$.

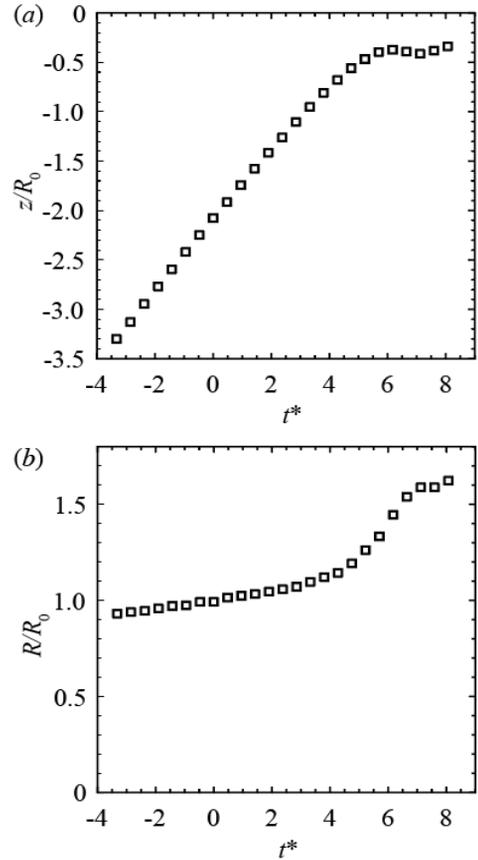


Fig. 4. (a) Dimensionless vertical position and (b) dimensionless ring radius of the toroidal bubble displayed in Fig. 3.

Fig. 4에는 Fig. 3에 나타난 기포의 수직 위치와 반지름의 시간에 따른 변화가 나타나 있다. 기포의 수직 위치 z 와 반지름 R 는 모두 기준점에서의 반지름인 R_0 로 무차원화되었으며, 수직 위치 $z = 0$ 은 자유수면의 초기 위치를 나타낸다. 무차원 고리 반지름은 자유수면의 영향을 거의 받지 않을 때($t^* < 3$), 느리게 증가하는 모습을 보인다. 기포의 무차원 수직 위치 또한 $t^* < 3$ 일 때 거의 일정하게 증가한다. 이는 이전의 연구 결과와 일치한다^(9,17).

하지만 $t^* = 3$ 을 기점으로 기포의 거동이 달라지는 것이 관측된다. 반지름의 확장은 가속되며 위치의 변화율, 즉 속도 또한 감소한다. 이는 단단한 벽과 충돌하는 단상 와류 고리 사

이의 상호 작용에서 관찰된 패턴과 유사하다⁽¹⁸⁾. 하지만 고체 벽과는 다르게 자유수면은 타원형으로 약간 변형되는 모습을 관측할 수 있었으며 변형되는 정도는 기포의 운동학적 특성에 따라 차이가 있었다. 이는 3.2절에서 다시 논의될 것이다.

기포는 상승하는 동안 순환(circulation)에 의해 안정적으로 유지되지만, 기포의 속도가 크게 감소한 후 기포는 가지고 있던 운동 에너지를 빠르게 잃으며 불안정성에 의해 작은 기포들로 분해된다. 쪼개진 작은 기포들도 초기에는 회전하며 그 자리를 유지하지만 회전 속도가 점점 감소하며 회전하지 않는 일반적인 기포와 같이 부력에 의해 상승하는 모습을 보인다.

3.2. 자유수면의 변형과 수면 위 공기의 유입

지금까지는 자유수면에 의해 기포가 받는 영향을 확인하였다. 기포에 의해 계면이 받는 영향도 무시할 수 없다. 기포의 순환 강도가 작을 때는 크게 증가한 기포의 고리 반지름으로 인해 속도는 크게 감소하고 자유수면은 거의 변형되지 않는다. 반면 기포의 순환 강도가 클 때는 반지름 증가와 감속 모두 상대적으로 크지 않고 자유수면은 크게 변형되게 된다(Fig. 5a). Fig. 5(b)는 원환형 기포에 의해 변형되는 계면의 2차원 개략도가 나타나 있다. 원환형 기포의 대칭축 부분의 자유수면은 Fig. 5(b)의 점 A와 같이 위로 볼록하게 올라가지만 반대로 링 바깥 부분의 수면은 Fig. 5(b)의 점 B와 같이 아래로 내려오는 모습이 보인다. 이러한 계면의 변형은 자유수면에 가할 수 있는 충격을 살펴보는 데 중요하며 자유수면에서의 기포 파열로 인한 미세 입자 생성에 영향을 줄 수 있으므로 자세한 분석이 필요하다.

먼저 원환형 기포의 중심축 부분의 자유수면의 상승 양상을 논의한다. Fig. 6(b)에서 확인할 수 있듯이, 원환형 기포로 인해 변형된 계면의 무차원 최대 높이인 z_{max}/R_0 는 기포의 상대적인 부피를 나타내는 본드 수 Bo 와는 거의 관련이

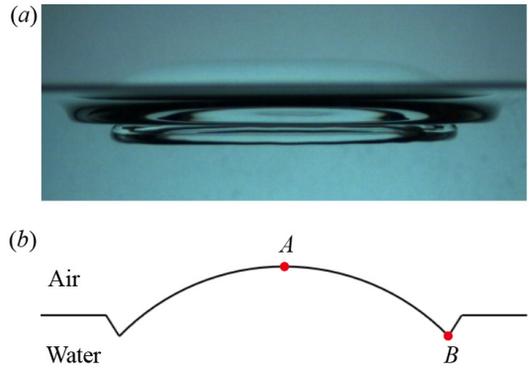


Fig. 5. (a) Deformation of the free surface and (b) 2-D schematic diagram of the free surface deformation.

없다는 것을 알 수 있다. 자유수면이 위로 솟아 오르는 정도는 기포의 크기가 아닌 원환형 기포의 관성력과 원환형 기포가 물을 끌고 올라가는 것에 저항하는 중력의 상대적인 크기를 통해 결정된다. 원환형 기포가 자유수면과 충돌하는 상황은 주변 유체와 같은 유체로 이루어진 와류 고리(vortex ring)가 섞이지 않는 두 유체 사이의 계면과 충돌하는 상황과 매우 유사하므로 이와 관련된 연구를 참조할 수 있다. Linden (1970)은 와류 고리와 두 유체 사이의 계면의 상호작용을 비점성, 비회전성으로 가정하고 베르누이 방정식을 풀어 다음과 같은 관계식을 도출하였다⁽¹³⁾.

$$Fr^2 \sim \frac{z_{max}}{R_0} \quad (4)$$

여기서 z_{max} 는 계면이 변형된 최대 높이이다. 실제로는 이와 같은 상호작용이 비점성이 아니기 때문에 오차가 존재할 수 있지만, 이와 비슷한 Song et al., (2017)의 연구에서 섞이지 않는 두 유체 사이의 계면이 최대로 변형될 때 계면의 수직 방향의 변위는 Fr 이 커질수록 증가한다는 것을 확인할 수 있었다⁽¹⁵⁾.

원환형 기포로 인해 변형된 계면의 무차원 최대 높이인 z_{max}/R_0 와 Fr 의 관계는 Fig. 6(a)에서 확인할 수 있다. z_{max}/R_0 의 값은 Fr 에 따라 증

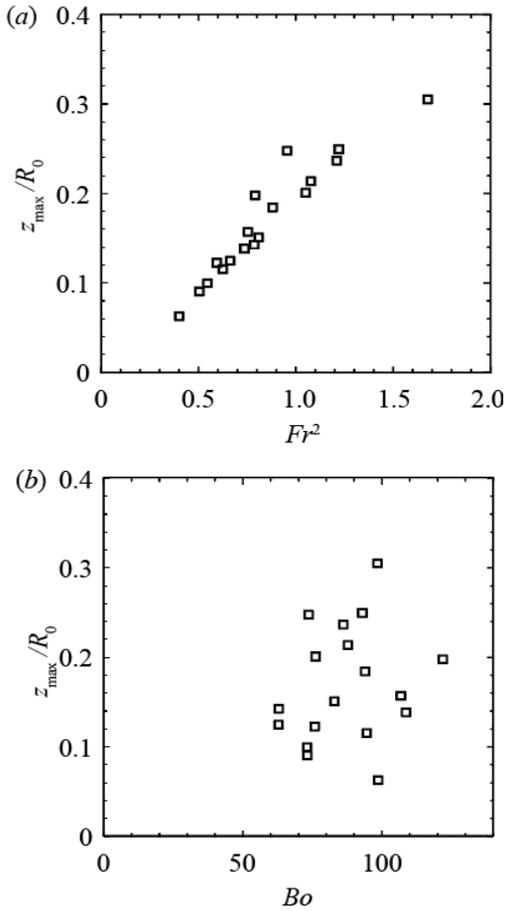


Fig. 6. Dimensionless maximum deformed height of the free surface, z_{\max}/R_0 , with respect to (a) Fr^2 and (b) Bo .

가하는 경향을 확인할 수 있고, 이는 충돌 과정을 비점성으로 가정하여도 원환형 기포와 자유수면의 충돌 또한 성공적으로 설명할 수 있음을 나타낸다.

다음으로 링 바깥 부분의 수면이 아래 방향으로의 변형의 특성을 확인하였다. 이 부분의 변형은 원환형 기포의 중심축 부분 수면의 변형에 비해 부피 스케일은 작지만 변형되는 길이는 크기 때문에, 중력에 비해 표면장력의 영향이 크다고 볼 수 있다. 따라서, 원환형 기포의 관성과 자유수면의 표면장력의 상대적 크기를 고려할 필요가 있다. 이를 반영하는 무차원수인 웨버 수 We 를 주요 무차원 변수로 설정하였다.

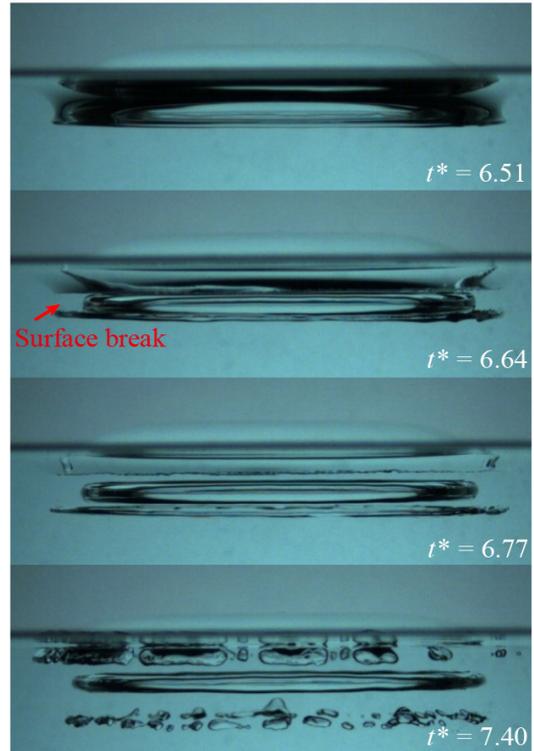


Fig. 7. Sequence of free surface break for $Bo = 86$, $Fr = 1.1$, $We = 42$.

표면장력에 비해 원환형 기포의 관성력이 매우 큰 경우에는 Fig. 7에 나타나 있듯이 자유수면을 당기는 힘이 자유수면의 표면장력을 넘어서서 표면이 끊어지게 된다($t^* = 6.64$). 이를 통해 처음에는 자유수면 위에 있던 공기가 고리의 형태로 수면 아래로 내려가는 공기 유입 현상이 나타난다. 이 유입된 고리 형태의 기포는 부력이 작용하는 방향과 반대 방향인 아래쪽으로 진행하기 때문에 매우 빠르게 불안정해지고 작은 기포들로 분해된다(Fig. 7, $t^* = 7.40$).

수면이 변형되는 정도를 확인하기 위해 Fig. 5(b)에서 점 B의 수직 방향의 변위를 특성 길이로 활용하였다. 공기 유입이 발생하지 않은 경우에는 Fig. 5(b)의 점 B의 수직 위치의 최솟값을 z_{\min} 으로, 공기 유입이 발생한 경우에는 변형된 표면이 끊어지기 직전의 점 B의 위치를 z_{\min} 으로 정의하였으며, 유입된 기포의 수직 위치의 최솟값은 z_{bubble} 로 정의하였다.

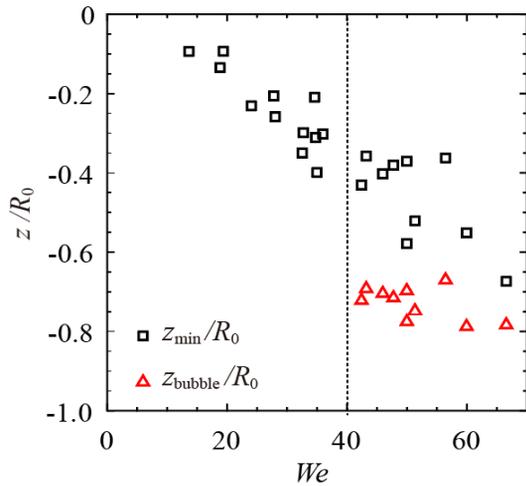


Fig. 8. Dimensionless positions of the lowermost point of the deformed surface, z_{\min}/R_0 , and the entrained bubble, z_{bubble}/R_0 , with respect to We . The dotted line denotes $We = 40$.

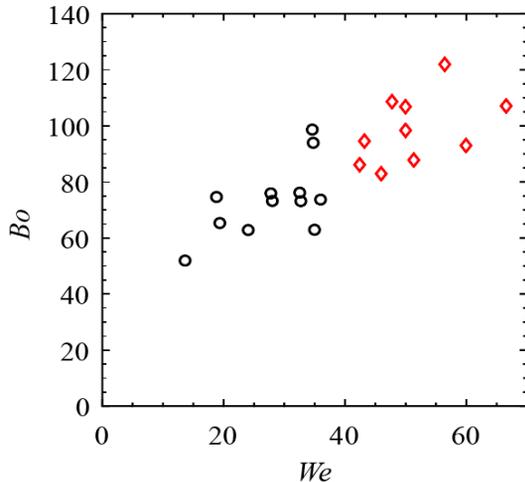


Fig. 9. Different regimes of free surface deformation. The circular black markers represent no air entrainment cases, and the red diamond markers represent air entrainment cases.

웨버 수 We 와 z_{\min} , z_{bubble} 의 관계는 Fig. 8에 나타나 있다. We 의 값이 증가할수록 z_{\min}/R_0 의 값은 일정하게 감소한다. 수면 위의 공기가 수면 아래로 유입되는 현상의 경우, We 의 값이 40 미만일 때는 공기 유입 현상이 발생하지 않았으나 40을 초과하였을 때는 공기 유입 현상

이 발생하였다. Fig. 9는 공기 유입이 발생한 경우와 발생하지 않은 경우의 웨버 수와 본드 수를 나타낸 그림이다. 실험의 조건 상 웨버 수가 커질수록 본드 수도 커졌으며, 웨버 수가 크고 본드 수가 작은 케이스는 관찰되지 않았다. 하지만 공기 유입이 발생하는 케이스는 본드 수에 비해 웨버 수에 더욱 민감하다는 것을 확인할 수 있다. 이를 바탕으로, 공기 유입 현상을 결정하는 무차원 변수는 웨버 수라는 것을 유추할 수 있으며, 크리티컬 웨버 수 We_c 는 약 40으로 추정할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 상승하는 원환형 기포와 자유수면의 충돌을 실험적으로 관찰하였다. 원환형 기포는 자유수면에 가까워질수록 반지름이 증가하고 속도가 감소하며, 자유수면 역시 원환형 기포의 영향으로 볼록하게 변형하는 것으로 나타났다. 이러한 계면의 변형은 원환형 기포의 관성과 기포 주위의 유체에 작용하는 중력, 자유수면의 표면장력의 상호작용의 결과이며, 프루드 수와 웨버 수가 커질수록 계면의 변형 또한 커졌다. 특히 웨버 수가 40 이상일 때는 자유수면 위에 있던 공기가 원환형 기포의 순환에 의해 자유수면 아래로 유입되는 현상이 발견되었다. 이러한 현상으로 인해 수면에는 매우 많은 기포가 생성되며, 이러한 기포가 터지며 수면 위로 많은 양의 미세 기포가 생성될 수 있다.

REFERENCE

- 1) Ribeiro, C. P., Jr. and Mewes, D., 2007, "The effect of electrolytes on the critical velocity for bubble coalescence," Chem. Eng. J. 2007, Vol. 126, pp. 23~33.
- 2) Walls, P. L., Bird, J. C. and Bourouiba, L., 2014, "Moving with bubbles: a review of the interactions between bubbles and the microorganisms that surround them," Integr.

- Compar. Biol., Vol. 54, pp. 1014~1025.
- 3) Zawala, J. and Malysa, K., 2011, "Influence of the impact velocity and size fo the film formed on bubble coalescence time at water surface," *Langmuir*, Vol. 27, pp. 2250~2257
 - 4) Stuhlman, O., 1932, "The mechanics of effervescence," *Physics*, Vol. 2, pp. 457~466.
 - 5) Spiel, D. E., 1998, "On the birth of film drops from bubbles bursting on seawater surfaces," *J. Geophys. Res.*, Vol. 103, pp. 24907~24918.
 - 6) Tripathi, M. K., Sahu, K. C., and Govindarajan, R., 2015, "Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid", *Nat. Commun.*, Vol. 6, 6268.
 - 7) Walters, J. K., and Davidson, J. F., 1963, "The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid Part 2. The three-dimensional bubble and the toroidal bubble," *J. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 321~336.
 - 8) Chen, L., Garimella, S. V., Reizes, J. A. and Leonardi, E., 1999 "The development of a bubble rising in a viscous liquid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 387, pp. 61~96.
 - 9) Vassel-Be-Hagh, A. R., Carriveau, R., and Ting, D. S.-K., 2015, "A balloon bursting underwater," *J. Fluid Mech.*, Vol. 769, pp. 522~540.
 - 10) Wang, S., Duan, W. and Wang., Q., 2015 "The bursting of a toroidal bubble at a free surface," *Ocean Engineering*, Vol. 109, pp. 611~622.
 - 11) Lesage, P., Kemiha, M., Poncin, S., Midoux, N. & Li, H.Z., 2016, "Mimicking dolphins to produce ring bubbles in water," *Biomimetics*, Vol. 1, article no: 7.
 - 12) Yan, X., Carriveau, R. & Ting, D. S.-K., 2018, "Laminar to turbulent buoyant vortex ring regime in terms of Reynolds number, Bond number, and Weber number," *J. Fluids Eng.*, Vol. 140, 054502.
 - 13) Linden, P. F., 1973, "The interaction of a vortex ring with a sharp density interface: a model for turbulent entrainment," *J. Fluids Mech.*, Vol. 60, pp. 467~480.
 - 14) Dahm, W. J. A., Scheil, C. M. and Tryggvason, G., 1989, "Dynamics of vortex interaction with a density interface," *J. Fluid Mech.*, Vol. 205, pp. 1~43.
 - 15) Song, M., Choi, S. and Kim, D., 2021, "Interactions of the interface of immiscible liquids with an impinging vortex ring," *Phys. Fluids*, Vol. 33, 022108.
 - 16) Song, M., Bernal, L. P., and Tryggvason, G. 1992, "Head-on collision of a large vortex ring with a free surface," *Phys. Fluids A*, Vol. 4, pp. 1457~1466.
 - 17) Pedley, T. J., 1968, "The toroidal bubble," *J. Fluid Mech.*, Vol. 32, pp. 97~112.
 - 18) Walker, J. D. A., Smith, C. R., Cerra, A. W. and Doligalski, T. L., 1987, "The impact of a vortex ring on a wall," *J. Fluid Mech.*, Vol. 181, pp. 99~140.