

# 유한요소해석을 사용한 구성 방정식 피팅 시 변형률 속도 민감도 및 요소 크기의 영향

구강희<sup>1</sup> · 김용주<sup>1</sup> · 서민홍<sup>2</sup> · 김형섭<sup>3,4,5,#</sup>

## Effect of Strain Rate Sensitivity and Mesh Size on Constitutive Equation Fitting Using Finite Element Analysis

G. H. Gu, Y. Kim, M. H. Seo, H. S. Kim

(Received May 12, 2022 / Revised July 6, 2022 / Accepted July 6, 2022)

### Abstract

The finite element analysis is one of the representative methods for predicting the materials behavior for experiments that are difficult to perform empirically. Constitutive equations are essential for reducing computation time and sharing data because they enable finite element analysis simulations through simple formulae. However, it is difficult to derive accurate flow curves for all materials as most constitutive equations are not formulated based on their physical meaning. Also, even if the constitutive equation is a good representation of the flow curve to the experimental results, some fundamental issues remain unresolved, such as the effect of mesh size on the calculation results. In this study, a new constitutive equation was proposed to predict various materials by modifying the combined Swift-Voce model, and the calculation results with various mesh sizes were compared to better simulate the experimental results.

**Keywords:** Finite element analysis, Constitutive equation, Tensile test, Strain rate sensitivity, Mesh size

## 1. 서론

금속 소성가공 측면에서 유한요소해석(FEA, finite element analysis) 기법은 실증적으로 수행하기 어려운 실험에 대해 재료의 거동을 예측하기 위한 대표적인 방법 중 하나이다[1,2]. 대부분의 현장 엔지니어와 연구원들은 보다 쉽고 간단한 유한요소해석을 위해 실험으로부터 얻은 진응력-진변형률 곡선(true stress-strain curve)을 다음과 같은 식들로 정의되는 Hollomon, Ludwik, Swift, Voce 등과 같은 다양한 구성 방정식에 대입해 사용한다[3].

$$\text{Hollomon: } \sigma = K\varepsilon^n \quad (1)$$

$$\text{Ludwik: } \sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n \quad (2)$$

$$\text{Swift: } \sigma = K(\varepsilon + \varepsilon_0)^n \quad (3)$$

$$\text{Voce: } \sigma = \sigma_0 + K\{1 - \exp(-c\varepsilon)\} \quad (4)$$

여기서  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$ 는 재료의 응력, 변형률, 초기 항복점에서의 응력, 초기 항복점에서의 변형률을 가리키며, 나머지 매개변수들( $K, n, c$ )은 각 구성 방정식에서 재료의 경화 거동을 나타내기 위한 매개변수들이다. 이러한 구성 방정식들을 이용해 유한요소해석을 수행하면 간단한 수식을 통해 다양한 해석이 가능해 빠른 계산과 용이한 데이터 공유가 가능하

1. 포항공과대학교 신소재공학과, 대학원생

2. 포스코 기술연구원, 책임연구원

3. 포항공과대학교 신소재공학과, 교수

4. 포항공과대학교 철강대학원, 교수

5. 연세대학교 첨단기술융합연구교육원, 교수

# Corresponding Author : Pohang University of Science and Technology (POSTECH) E-mail: hskim@postech.ac.kr. ORCID : 0000-0002-3155-583X

며, 소성 불안정성(plastic instability) 이후의 불균일 연신을 구간(post-necking elongation regime)에 대한 유동 곡선을 제공하는 장점도 지니고 있다. 하지만, 이러한 구성 방정식들은 물리적 의미를 기반으로 구성된 공식이 아니기 때문에 모든 재료에 대해 정확한 유동 곡선을 도출할 수 있는 구성 방정식은 존재하지 않으며, 구성 방정식과 실제 재료의 유동 곡선이 일치하더라도 요소 크기(mesh size)가 계산 결과에 미치는 영향과 같은 일부 근본적인 문제는 여전히 해결되지 않은 상태로 남아있다[4,5].

본 연구에서는 정확한 유동 곡선의 도출을 위해 980 MPa 급 2 상 조직강(DP980, dual-phase steel), 변태 유기 소성강(TRIP steel, transformation induced plasticity steel), 저탄소강(LC steel, low-carbon steel), 쌍정 유기 소성강(TWIP steel, twinning induced plasticity steel)의 4 가지 다른 재료에 대해 기존 연구들에서 널리 사용되는 combined Swift-Voce 모델을 이용해 구성 방정식 피팅을 수행하였으며, combined Swift-Voce 모델에 대해 모든 재료가 정확한 유동 곡선을 도출하지 못하는 문제의 발생 여부를 확인하였다. 이를 해결하기 위해, 변형률 속도 민감도(strain rate sensitivity) 항을 추가해 combined Swift-Voce 모델을 수정함으로써 기존의 구성 방정식에 비해 정확한 유동 곡선을 도출할 수 있는 새로운 구성 방정식을 제안하였다. 또한, 요소 크기가 계산 결과에 미치는 영향을 확인하기 위해 서로 다른 요소 크기를 가지는 인장시편을 모사하여 유한요소해석을 수행하였다.

## 2. 인장시험 및 유한요소해석

### 2.1 인장시험

인장 시험은 DP980, TRIP steel, LC steel, TWIP steel의 기계적 성질과 유동 곡선이 서로 다른 4 가지 유형의 금속 판재로부터 그림 1(a)와 같이 게이지 길이 6.4 mm 및 게이지 폭 2.5 mm의 개 뼈 형상 시편(dog-bone-shaped specimen)을 가공해 수행하였다. 인장 시험을 수행하기 전에 모든 인장 시편은 표면의 결함을 제거하기 위해 600, 800, 1200 방 SiC 사포(grit paper)를 사용하여 기계적으로 연마되었다. 인장 시험 시 디지털 이미지 상관(DIC, digital image correlation) 기법을 이용하기 위해 흰색 스프레이로 인장 시편의 전면에 배경을 형성한 뒤 검은색 스프레이로 반점 패턴을 형성하였다. 모든 시편에 대해

인장시험은 압연 방향(rolling direction)으로 수행하였으며, 그림 1(b)와 같이 만능시험기(universal testing machine; Instron 1361, Instron Corp., USA)와 디지털 이미지 상관 장비(ARAMIS 5M, GOM Optical Tech., Germany)를 사용하여 상온 및  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 의 변형률 조건에서 수행하였다.

### 2.2 변형률 점프 시험

수정된 combined Swift-Voce 모델에 필요한 입력 상수인 변형률 속도 민감도 항을 획득하기 위해 인장시험과 동일한 만능시험기 및 디지털 이미지 상관 장비를 이용하여 균일 연신 영역(uniform elongation regime)에서  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  과  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  사이 변형률 속도의 급격한 변화를 이용해 변형률 점프 시험(strain rate jump test)을 수행하였다. 인장시험과 압축 시험에서 변형률 속도 민감도  $m$  값은 일반적으로 식 (5)를 이용해 계산된다[6].

$$m = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right) \quad (5)$$

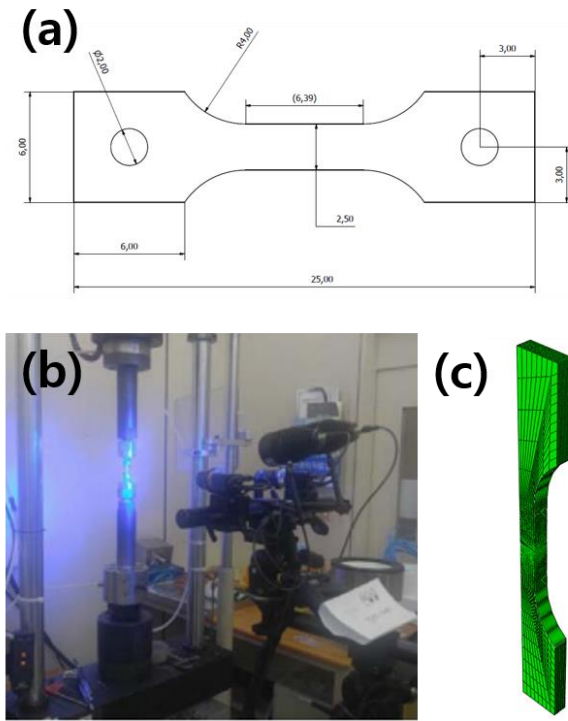
여기서  $\sigma$ 는 가해진 단축 응력이며  $\dot{\epsilon}$ 는 시편의 소성 변위 속도와 길이를 나타내는 변형률이다. 수행한 변형률 점프 시험에 대해  $m$  값은 jump-up 과 jump-down 의 평균을 고려하여 계산되었으며, 정확한 계산을 위해 불균일 연신을 구간의 jump-up 과 jump-down 은 고려하지 않았다.

### 2.3 수정된 combined Swift-Voce 모델

수정된 combined Swift-Voce 모델은 기존의 combined Swift-Voce 모델에 실험으로부터 획득할 수 있는 변형률 속도 민감도 항을 추가함으로써 기존의 구성 방정식으로 정확하게 도출이 불가능한 유동 곡선을 다양한 재료에서 보다 정확하게 도출할 수 있는 것이 특징이다. 일반적으로 사용되는 combined Swift-Voce 모델은 식 (6)와 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = K_1(1 - \alpha)(\epsilon + \epsilon_0)^n + \alpha[\sigma_0 + K_2\{1 - \exp(-c\epsilon)\}] \quad (6)$$

이 때,  $\alpha$ 는 Swift 모델과 Voce 모델에서 나타내는



**Fig. 1 (a) Geometry and dimensions (in mm) of the tensile specimen. (b) Experimental setup of uniaxial tensile test and (c) schematic illustration of uniaxial tensile testing with meshes of the FEM simulation.**

가공 경화 거동의 비율을 조절하는 매개변수이다. 다른 가공 경화 곡선 모델과 마찬가지로 식 (6)의 매개변수는 선형 회귀 적합(linear regression fitting)에 의하여 도출할 수 있다. 변형률 점프 시험을 통해 구한  $m$  값을 이용해 변형률 속도 민감도 항을 상수로 추가함으로써 수정된 combined Swift-Voce 모델은 다음 식 (7)과 같이 정의하였다.

$$\sigma = K_1(1 - \alpha)(\varepsilon + \varepsilon_0)^n(\dot{\varepsilon})^m + \alpha[\sigma_0 + K_2\{1 - \exp(-c\varepsilon)\}](\dot{\varepsilon})^m \quad (7)$$

## 2.4 유한요소해석

수정된 combined Swift-Voce 모델이 다양한 재료에서 정확한 유동 곡선을 예측할 수 있는지 검증하기 위해 4개 재료의 인장시험으로부터 획득한 진응력-진변형률 곡선을 combined Swift-Voce 모델 및 수정된 combined Swift-Voce 모델에 대해 피팅함으로써 매개변수를 도출한 후 상용 소프트웨어인 ABAQUS

2021을 이용하여 ABAQUS standard 중 사용자 정의 서브루틴(user-defined subroutine) UHARD를 통해 그림 1(c)와 같이 실험과 동일한 형상의 인장시편을 모사해 유한요소해석을 수행하였다. 유한요소해석 결과는 실험과 동일하게 6.4 mm의 게이지 길이를 지정 후 추출하였다. 유한요소해석으로 구현한 인장시편은 완전히 적분된 3D 8노드 선형 등계수(C3D8, fully integrated 3D 8-node linear isoparametric)로 구성되었으며, 게이지 영역에서 소성 불안정성을 충분히 모사할 수 있도록 0.02 mm의 요소 크기를 가지도록 설계하였다. 추가로, 요소 크기가 계산 결과에 미치는 영향을 확인하기 위해 게이지 영역에서 0.01 mm, 0.02 mm, 0.04 mm, 0.06 mm의 서로 다른 요소 크기를 가지는 인장시편을 모사하여 검증하였다.

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1 인장시험 결과 및 combined Swift-Voce 모델을 이용한 피팅

인장시험에서 소성 불안정성이 발생하기 전의 균일 연신 구간에서는 인장시편의 게이지 영역이 균일하게 연신되기 때문에 진응력과 진변형률은 각각 식 (8)과 (9)을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\sigma_{True} = \sigma_{Eng}(1 + \varepsilon_{Eng}) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{True} = \ln(1 + \varepsilon_{Eng}) \quad (9)$$

여기서  $\sigma_{Eng}$ 와  $\varepsilon_{Eng}$ 는 각각 공학응력과 공학변형률을 나타낸다. 인장시험을 수행한 4가지 재료에 대한 진응력-진변형률 곡선의 균일 연신 구간에서 combined Swift-Voce 모델의 선형 회귀 적합을 이용해 도출된 매개변수는 표 1에 나타내었으며, 그림 1(c)와 같이 실험과 동일한 형상의 인장시편을 구현하여 수행한 유한요소해석을 결과를 실험 결과와 함께 그림 2에 나타내었다. 그림 2(a,b)에 도시된 DP980과 TRIP steel의 경우 combined Swift-Voce 모델로부터 수행된 유한요소해석이 실험 결과와 잘 일치함을 확인하였다. 하지만, 그림 2(c,d)의 LC steel과 TWIP steel의 결과에서 보는 바와 같이 combined Swift-Voce 모델이 일부 재료의 유동 곡선을 정확하게 예측하지 못한다는 사실을 확인하였다. 따라서, combined Swift-Voce 모델을 피팅해 구현할 수 없는

Table 1 Modeling parameters of the combined Swift-Voce equation.

|            | $K_1$   | $\epsilon_0$ | $n$       | $\sigma_0$ | $K_2$    | $c$     | $\alpha$ |
|------------|---------|--------------|-----------|------------|----------|---------|----------|
| DP980      | 1377.85 | $1^{-10}$    | 0.04742   | 1138.11    | 8263.370 | 0.42863 | 0.05490  |
| TRIP steel | 1824.11 | $1^{-10}$    | 0.12160   | 1179.20    | 124300.1 | 0.09567 | 0.01350  |
| LC steel   | 514.178 | $1^{-10}$    | 0.25272   | 213.330    | 23479828 | 0.00399 | 0.00050  |
| TWIP steel | 509.795 | 0.1          | $1^{-10}$ | 588.375    | 38440.67 | 0.98471 | 0.08276  |

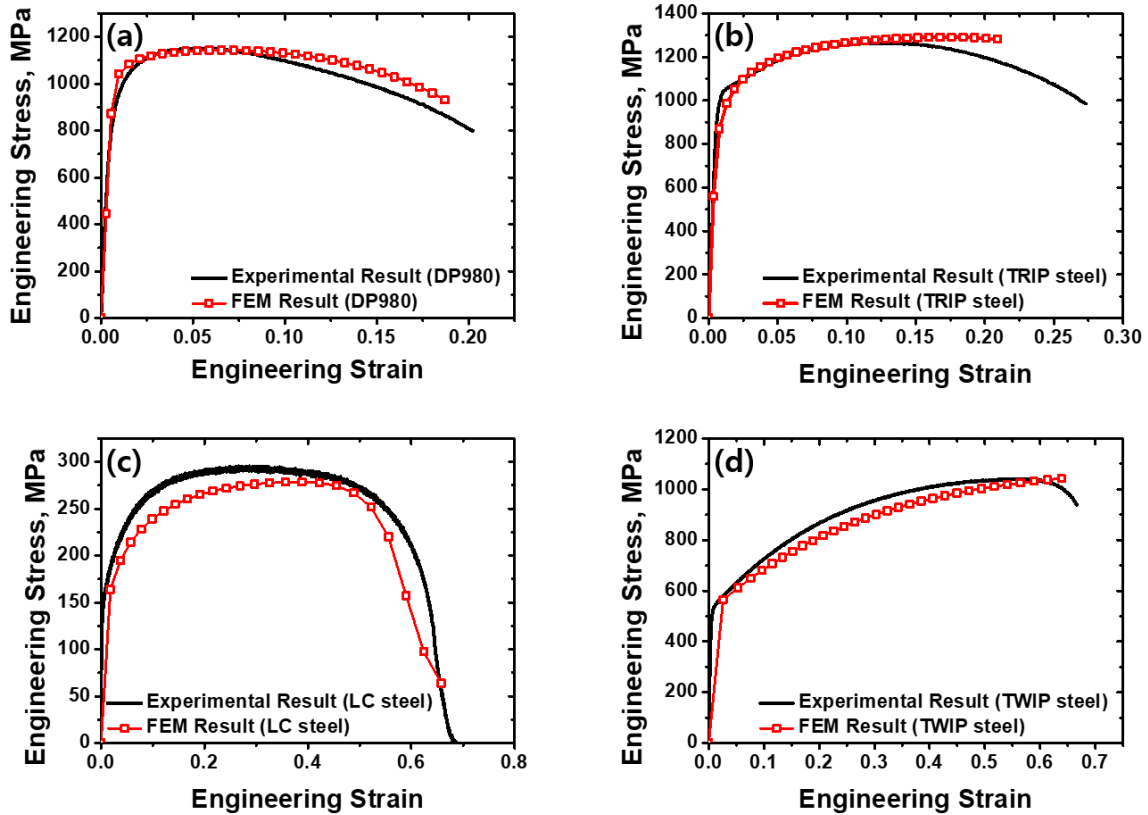


Fig. 2 Comparison between the finite element method simulations derived from combined Swift-Voce equation and experimentally obtained engineering stress-strain curves for (a) DP980, (b) TRIP steel, (c) LC steel, and (d) TWIP steel.

재료들의 유동 곡선까지 도출할 수 있는 새로운 가공 경화 곡선 모델을 제시할 필요가 있다.

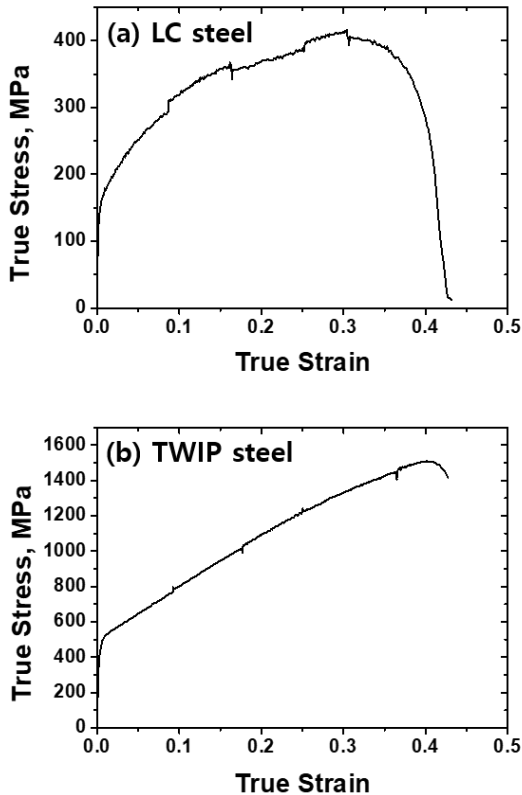
### 3.2 변형률 점프 시험 결과 및 수정된 combined Swift-Voce 모델을 이용한 피팅

Combined Swift-Voce 모델로는 구현할 수 없는 재료들의 유동 곡선을 예측하기 위한 새로운 가공 경화 곡선 모델을 2.3 절에서 제시하였다. 수정된 combined Swift-Voce 모델에 필요한 입력 상수  $m$  값을 결정하기 위해 그림 3 과 같이 combined Swift-Voce 모델로 구현할 수 없는 재료들에 대해 변형률

점프 시험을 수행하였다. Combined Swift-Voce 모델의 매개변수 획득 방법과 마찬가지로 수정된 combined Swift-Voce 모델의 매개변수는 변형률 점프 시험으로 구한  $m$  값을 상수로 고정한 후 진응력-진변형률 곡선의 균일 연신 구간에서 선형 회귀 적합을 이용해 도출되었다. 실험으로부터 구한  $m$  값과 도출된 매개변수는 표 2 에 표기하였으며, 유한요소해석 결과는 실험 결과와 함께 그림 4에 도시하였다. 결과적으로, 그림 4 와 같이 combined Swift-Voce 모델로는 도출할 수 없었던 LC steel 과 TWIP steel 을 수정된 combined Swift-Voce 모델을 사용해 보다 정확하게 예측할 수 있었다. 이는 실험으로부터 얻을 수 있는 상수  $m$

**Table 2 Modeling parameters and m values of the modified combined Swift-Voce equation.**

|            | $K_1$   | $\epsilon_0$ | $n$     | $\sigma_0$ | $K_2$   | $c$     | $\alpha$ | $m$     |
|------------|---------|--------------|---------|------------|---------|---------|----------|---------|
| LC steel   | 1175.85 | $1^{-10}$    | 0.82506 | 213.330    | 205.789 | 16.8032 | 0.67252  | 0.01789 |
| TWIP steel | 7717.23 | $1^{-10}$    | 1.22246 | 588.375    | 1750.33 | 1.82388 | 0.88387  | 0.00825 |



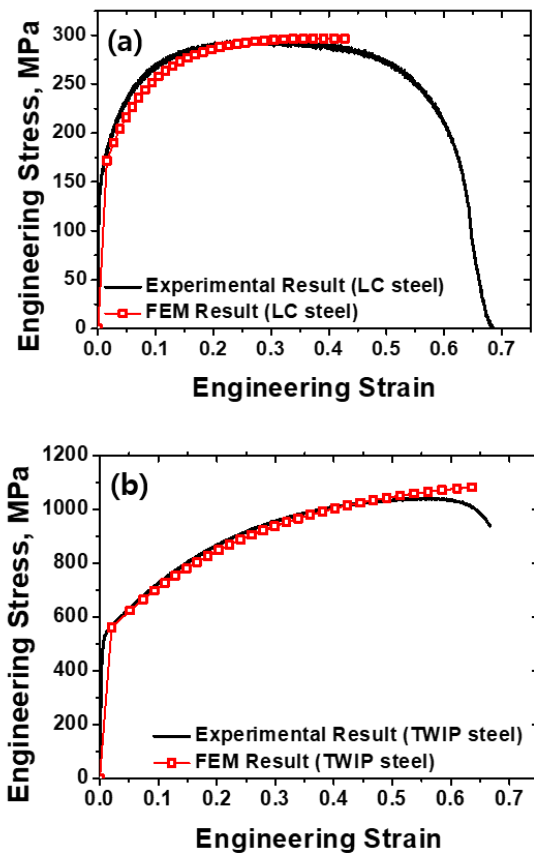
**Fig. 3** Strain rate jump test performed for (a) LC steel and (b) TWIP steel between strain rate of  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  and  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

항을 추가함으로써 수정된 combined Swift-Voce 모델이 일부 예측할 수 없는 유동 곡선을 갖는 재료들에 대한 문제도 해결할 수 있기에 다양한 재료의 유동 곡선을 효과적으로 예측할 수 있는 새로운 가공 경화 곡선 모델이라고 판단된다.

### 3.3 유한요소해석에 대한 요소 크기의 영향

구성 방정식이 실제 재료의 유동 곡선을 잘 표현 하더라도 유한요소해석 계산에 필요한 최소 요소 크기와 같은 일부 문제가 존재한다. 따라서, 사용한 가공 경화 곡선이 실제 재료를 보다 잘 모사하기 위해

서는 요소 크기에 따른 계산 결과를 검증할 필요가 있다. 본 연구에서는 요소 크기에 따른 계산 결과를 비교하기 위해 그림 5 와 같이 DP980 에 대해 combined Swift-Voce 모델을 사용해 네킹이 발생하는 게이지 중심 영역에서 0.01 mm, 0.02 mm, 0.4 mm, 0.06 mm 의 서로 다른 요소 크기를 가지는 인장시편을 모사해 검증하였다. 0.01 mm, 0.02 mm, 0.04 mm 의 요소 크기를 가지는 유한요소해석 계산 결과는 게이지의



**Fig. 4** Comparison between the finite element method simulations derived from modified combined Swift-Voce equation and experimentally obtained engineering stress-strain curves for (a) LC steel and (b) TWIP steel.

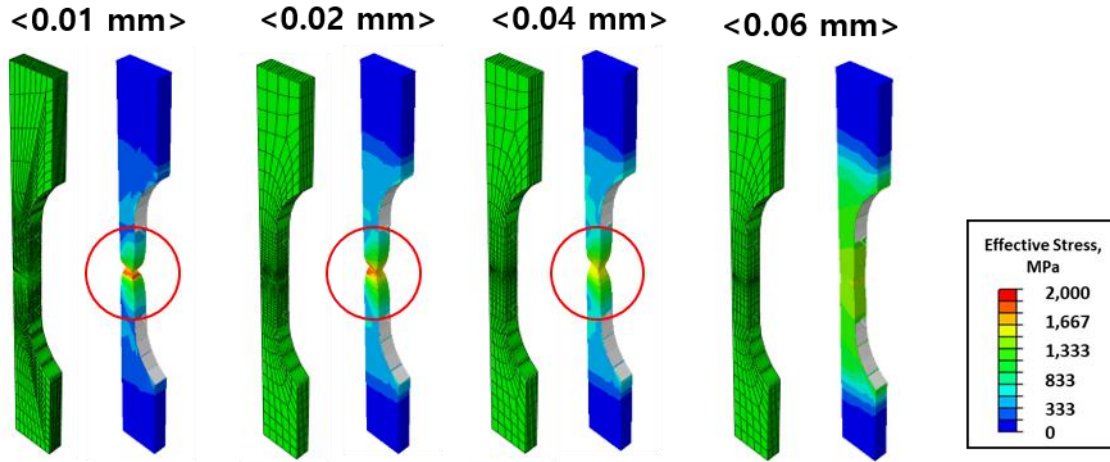


Fig. 5 Undeformed and deformed states of simulated tensile specimens with different mesh sizes.

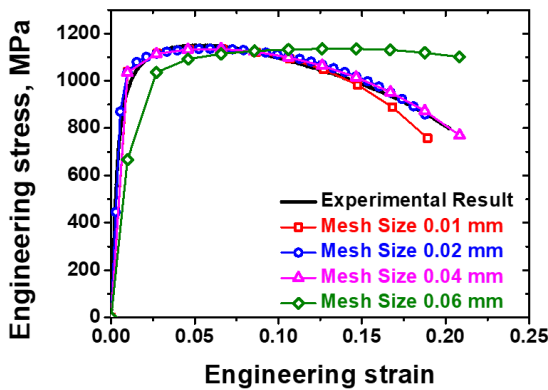


Fig. 6 Comparison of finite element analysis results with different mesh sizes and engineering stress-strain curve obtained from experiments in DP980.

중앙부에서 네킹 현상(necking phenomenon)이 발생한 반면, 요소 크기가 0.06 mm 인 인장시편은 노드 사이의 간격이 넓어 변형된 거리와 하중을 정확하게 표현하지 못해 항복과 네킹 현상을 모사하는데 어려움이 있는 것을 확인하였다. 그림 6 에 도시된 공학응력-공학변형률 곡선에서도 마찬가지로 0.06 mm 요소 크기의 유한요소해석 결과는 네킹 현상이 발생하지 않아 인장시편을 정확하게 모사하지 못하였다. 이러한 결과는 유한요소해석을 통해 정확한 인장시편 결과를 예측하기 위해서는 폭 방향으로 최소 30 개 이상의 요소가 있어야 한다는 점을 시사한다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 combined Swift-Voce 모델을 수정해 보다 다양한 재료를 정확하게 예측할 수 있는 새로운 구성 방정식을 제안하였다. 수정된 combined Swift-Voce 모델의 재료 상수를 획득하기 위해 변형률 점프 시험을 수행하였으며, 제안된 구성 방정식을 사용하면 기존의 combined Swift-Voce 모델로는 구현이 불가능한 재료까지도 유동 곡선을 도출할 수 있는 것을 확인하였다. 또한, 유한요소해석을 구현하기 위해서는 폭 방향으로 최소 30개 이상의 요소가 있어야 소성 불안정성을 구현할 수 있다는 것을 서로 다른 요소 크기를 가지는 인장시편을 계산함으로써 확인하였다. 결론적으로, 본 연구에서 제안하는 수정된 combined Swift-Voce 모델과 일정 개수 이상의 요소로 모사된 유한요소해석을 이용하면 다양한 재료들의 유동 곡선을 보다 효율적으로 예측할 수 있으리라 판단된다.

#### 후 기

이 연구는 POSCO(2022Y006) 및 한국연구재단(NRF-2021R1A2C3006662)에서 지원을 받아 수행된 연구이며, 이에 감사드립니다.

## REFERENCES

- [1] S. Hosny, M.A.-H. Gepreel, M.G. Ibrahim, A.R. Bassuony, 2021, Simulation of Tempcore Process for 500 MPa Steel Bars, *Met. Mater. Int.* Vol. 27, pp. 3359-3370. <https://doi.org/10.1007/s12540-020-00685-x>.
- [2] G.H. Gu, J. Kwon, J. Moon, H. Kwon, J. Lee, Y. Kim, E.S. Kim, M.H. Seo, H. Hwang, H.S. Kim, 2022, Determination of Damage Model Parameters Using Nano- and Bulk-Scale Digital Image Correlation and the Finite Element Method, *J. Mater. Res. Technol.* Vol. 17, pp. 392-403. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.01.012>.
- [3] H.J. Kleemola, M.A. Nieminen, 1974, On the Strain-Hardening Parameters of Metals, *Metall. Trans.* Vol. 5, pp. 1863-1866. <https://doi.org/10.1007/BF02644152>.
- [4] A. Cichański, 2017, Mesh Size Dependency on Notch Radius for FEM Analysis of Notched Round Bars under Tension, *AIP Conf. Proc.* Vol. 1822, 020004. <https://doi.org/10.1063/1.4977678>.
- [5] A. Cichański, 2015, The Influence of Mesh Morphology on the Accuracy of FEM Analysis of Bar with a Ringed Notched under Tension, *SSP* Vol. 224, pp. 204-209. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.224.204>.
- [6] Y. Kim G.H. Gu, P. Asghari-Rad, J. Noh, J. J. Rho, M.H. Seo, H.S. Kim, 2022, Novel Deep Learning Approach for Practical Applications of Indentation, *Mater. Today Adv.* Vol. 13, 100207. <https://doi.org/10.1016/j.mtadv.2022.100207>.