



## Research Article

# An analysis on concept definition and concept image on quadrangle of middle and high school students

Chang, Hyun Suk<sup>1</sup> · Kim, Myung Chang<sup>2</sup> · Lee, Bongju<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Lecturer, University of Ulsan

<sup>2</sup>Graduate student, Kyungpook National University

<sup>3</sup>Professor, Kyungpook National University

\*Corresponding Author: Lee, Bongju (leebj@knu.ac.kr)

## ABSTRACT

The purpose of this study are to analyze how well middle and high school students understand the concept definition of quadrangle and to explore the phenomenon about their concept image. A test tool was developed and 60 8<sup>th</sup> graders, 63 9<sup>th</sup> graders and 65 10<sup>th</sup> graders were tested, and some students who needed in-depth analysis were interviewed. The results are as follows. First, it cannot be said that understanding level of the concept definition of the quadrangle naturally improves as the grade level goes up. Particularly, it was found that the understanding of the definition of the rhombus is the lowest in all three grades compared to other quadrangle. Second, although female students understood the definition of square better than male students, the understanding level of the definition of trapezoid, parallelogram, rhombus, and rectangle did not differ by gender. Third, it was found that the students who did not understand the concept definition of the quadrangle were more and more influenced by the concept image as the grade level went up. Fourth, it showed that a tendency to be less influenced by the concept definition and more influenced by textbooks and teachers as the grades go up when students form a concept image.

**Key words:** quadrangle, concept definition, concept image, middle and high school students

## 중·고등학생의 사각형에 대한 개념 정의 이해와 개념 이미지 분석

장현석<sup>1</sup> · 김명창<sup>2</sup> · 이봉주<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>울산대학교 강사, <sup>2</sup>경북대학교 대학원 학생, <sup>3</sup>경북대학교 교수

\*교신저자: 이봉주 (leebj@knu.ac.kr)

## 초록

이 연구의 목적은 중학생과 고등학생의 사각형에 대한 개념 정의 이해 정도를 분석하고 개념 이미지에 대한 현상을 탐색하는 것이다. 이를 위해 검사 도구를 개발하고 중학교 2학년 60명, 중학교 3학년 63명, 고등학교 1학년 65명을 대상으로 검사하고, 일부의 학생을 면담하였다. 연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 학년이 올라감에 따라 자연적으로 사각형의 개념 정의에 대한 이해도가 향상된다고 볼 수 없다. 특히, 모든 학년에서 다른 사각형과 비교하여 마름모 개념 정의에 대한 이해도가 가장 낮은 것으로 나타났다. 둘째, 정사각형에 대한 개념 정의는 여학생이 남학생보다 더 잘 이해하지만, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형에 대한 개념 정의에 대한 이해 정도는 성별로 차이가 없는 것으로 나타났다. 셋째, 사각형 개념 정의를 이해하지 못하는 학생은 학년이 올라갈수록 개념 이미지의 영향을 점점 더 크게 받는 것으로 나타났다. 넷째, 학년이 올라갈수록 학생의 사각형에 대한 개념 이미지 형성에 개념 정의의 영향은 줄어들고 교과서나 교사의 영향이 증가하는 경향을 보여주었다.

**주요어:** 사각형, 개념 정의, 개념 이미지, 중·고등학생

Received March 10, 2022

Revised March 22, 2022

Accepted April 22, 2022

2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

Copyright © 2022 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## 서론

초등학교에서 배우는 기하 개념은 학생의 다양하고 구체적인 조작적 구성 활동을 통해 직관적으로 습득된다(Piaget et al., 1960). 이러한 조작을 통해 학생이 가지게 되는 자생적 개념 이미지는 다른 새로운 개념을 획득할 때 영향을 미칠 수 있기 때문에, 교사는 수학적 개념을 지도하기 전에 학생이 그 개념과 관련하여 가지고 있는 자생적 개념 이미지는 무엇이며, 학습을 통해 그 개념 이미지가 어떻게 변화해 가는지 파악하는 것이 필요하다(Shin, 2017).

NCTM (2000)은 초등학생뿐만 아니라 중학생과 고등학생의 기하 교육에서도 ‘직관적인 기하 개념 학습’의 중요성을 강조하였다. 이러한 경향은 우리나라 중·고등학교 기하 영역 교수·학습 방법에도 반영되어 있다. 이는 직관이 이후 귀납적, 연역적 추론과 관련된 문제해결 학습에 바탕이 되고, 학생의 기하학적 도형 분류와 정의 방식에도 영향을 미치기 때문인 것으로 밝혀져 있다. 그러나 직관적 개념 학습을 통해 형성된 학생의 개념 이미지는 오개념을 형성할 수 있고(Tall & Vinner, 1981), 형식적 정의를 통한 개념 학습에도 영향을 미친다(Sierpinska, 1987, 1990; Robert & Speer, 2001). 또한 학생에게 최초로 형성된 자생적 개념 이미지는 변하기 어렵고, 언어적 정의와 불일치할 경우 이후 기하 학습에 영향을 줄 수 있다(Fischbein, 1993, Fischbein & Nachlieli, 1998; Mesquita, 1998; 1989; Fujita & Jones, 2007).

초등교육과 연결되는 중등학교 기하 학습 내용 요소 중 대표적 개념의 하나로 사각형을 들 수 있다. Hershkowitz (1989)는 ‘원형 이론(Rosch & Mervis, 1975)’을 반영하여 초등학생과 예비교사를 대상으로 조사함으로써 사각형 개념이 학생에게 인식된 최초의 개념 이미지, 즉 원형에 영향을 받을 수 있다는 것을 입증하였다. Fujita와 Jones (2007)도 대학생은 사각형의 언어적 정의와 개념 이미지의 이해에 차이를 보이며, 이는 사각형 개념 이미지의 ‘원형’에 기인한다고 주장하였다. 기하 영역에서 개념 정의와 개념 이미지의 강한 연결성을 설명하기 위하여 Fischbein (1993)은 ‘도형 개념’을 도입하고, 도형 개념의 이해 수준이 학생의 나이에 영향을 받지 않지만 수학 성취도에 따라 차이가 있음을 보여주었다.

국내에서도 사각형 개념과 관련된 연구(Lee, 2006; Han, 2008; Cho, 2010; Na, 2013; Shin, 2017; Ha, 2018, Noh et al., 2019)를 찾아볼 수 있다. 초등학교 2학년을 대상으로 삼각형과 사각형의 개념 이미지를 조사한 연구, 초등학교 4학년을 대상으로 도형과 관련된 학생의 오류 유형이나 원인을 분석한 연구, 정의하기와 이름 짓기 과정에서 드러나는 개념 이미지에 대한 연구 등 개념 이미지와 관련된 연구가 주로 초등교육을 중심으로 이루어지고 있음을 알 수 있다(Kim, 2016; Shin, 2017; Noh & Ahn, 2007; Choi & Kim, 2012).

국외와 국내의 기하 교육 연구는 사각형 개념의 내용과 관련해서 학습 시기의 차이로 인해 연구 대상이 다르고 이로 인해 결과의 분석에서 관점의 차이가 발생할 수밖에 없다. 일본, 싱가포르, 미국, 영국, 스코틀랜드 등은 ‘사각형의 포함 관계’를 대학교 과정에서 다룬다(Pickreign, 2007; Fujita & Jones, 2007; Cho, 2010). 따라서 이들 국가에서는 사각형의 성질과 포함 관계와 관련된 연구를 주로 대학생을 대상으로 수행하였다. 반면, 우리나라에서는 중학교 2학년 과정에서 사각형의 성질과 그 포함 관계를 다룬다. 중학생도 초등학생 때 형성된 원형 이미지에 영향을 받고 개념 정의와 개념 이미지를 일치시키는 것을 어려워한다는 국외 연구 결과(Clements & Battista, 1992)에 근거하여 국내에서는 초등학생 때 형성된 사각형의 개념 이미지가 중학생과 고등학생이 될 때까지 사각형 개념 이해에 어떠한 영향을 주는지 살펴볼 필요가 있다.

이 연구에서는 중학생과 고등학생을 대상으로 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하는 평면도형 중 사각형에 대한 이해도를 개념 정의와 개념 이미지에 초점을 맞추어 조사하고자 한다. 다시 말해, 사각형에 대한 중학생과 고등학생의 개념 정의에 대한 이해도와 개념 이미지에 대한 상황을 조사하고, 이를 토대로 사각형 개념 이해와 관련된 현상과 학생의 행동 요인을 분석하여 실제 기하 영역 교수·학습에 적용 가능한 구체적인 정보를 제공하고자 한다.

## 이론적 배경

## 사각형 개념의 교수·학습

2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하는 사각형의 학습 내용과 교수·학습 방법을 각각 살펴보면 다음과 같다. 사각형의 학습 내용과 관련하여, 초등학교 1~2학년 과정에서 학생은 생활 주변의 관찰과 직관을 통해 사각형을 이해하고, 그릴 수 있으며 다른 도형과 구별할 수 있다. 3~4학년 과정에서 학생은 여러 사각형의 구체물을 통한 조작 및 분류 활동을 통해 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모를 알고 그 성질을 이해한다. 5~6학년 과정에서 학생은 사각형의 구체적 조작을 통해 합동인 사각형을 찾고 선대칭 사각형과 점대칭 사각형을 이해하고 그릴 수 있다. 마지막으로 중학교 2학년 과정에서 학생은 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

사각형의 교수·학습 방법과 관련하여, 초등학교 1~2학년에서는 사각형을 직관적으로 파악하고 모양을 분류하며 변의 수와 꼭짓점의 수의 관계를 파악하도록 한다. 3~4학년에서는 사각형 이름 짓기 활동을 통해 스스로 정의에 대해 사고하게 하고, 구체적인 조작 활동을 통해 여러 가지 사각형의 간단한 성질만 다루지만, 사각형 사이의 관계는 다루지 않는다. 5~6학년에서는 구체적인 조작 활동을 통해 사각형 합동의 의미를 알게 한다. 마지막으로 중학교 2학년에서는 사각형의 성질을 대각선 위주로 다루고, 다양한 정당화 방법을 통해 학생 수준에 맞게 활용하도록 한다.

우리나라에서는 초등학교에서 사각형 관련 개념을 직관적으로 다루고, 이를 기반으로 중학교에서 사각형과 관련된 성질 및 포함 관계 등을 학습하게 된다. 이에 초등학교에서 배운 사각형 개념을 학생은 어떠한 방식으로 인식하고 이를 어느 정도 기억하며 중학생과 고등학생의 사각형 개념 이해에 영향을 미치는지 알아보기 위해, 국내의 평면기하사각형 개념과 관련된 연구를 고찰한 결과는 다음과 같다.

초등학교에서의 비구성적 학습으로 인해 학생은 인식론적 오류나 개념 이미지를 고착화하고, 교사는 사각형의 위계적 상호관계 지도에 어려움을 가질 수 있다. 먼저, 학생의 오류는 초등학교 수학 교과서에 나타난 사각형 지도 방법에 대한 해석에서 기인한다고 볼 수 있다. Kim과 Kang (2008)은 제7차 교육과정에서 사각형 지도를 학생 스스로 지식을 구성하도록 하였지만 여전히 미흡하고, 학생에게 의미 있는 지식 구성을 위하여 사각형을 지도할 때 학생의 인식론적 오류를 파악하는 것이 필요하다고 제안하였다. Ryu (2009)는 초등학교 평행사변형을 그리는 활동에서 고정된 두 변을 주어 제한된 이미지로 표현하는 것이 학생의 개념 이미지를 고착화하고, 그림으로 도형을 정의하는 것은 직관적 학습에는 장점이지만 도형을 교과서에 제시된 도형에 한정함으로써 학생이 도형을 제한된 이미지로 생각하게 된다고 밝혔다. 다음으로, 사각형 포함 관계 지도의 경우, 우리나라 제3차 교육과정에서는 집합을 먼저 배우고 사각형의 상호관계를 지도함으로써 위계를 학습할 수 있었으나 제4차 교육과정부터 초등학교에서 집합의 포함 관계가 삭제되어 사각형의 상호관계 지도가 어려워졌다(Cho, 2010). 하지만 이러한 초등학교 교육의 결과가 중학생과 고등학생의 사각형 개념 이해에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 연구는 찾아보기 어렵다.

이 연구에서는 초등학교에서 형성된 학생의 사각형과 관련된 인식론적 오류나 개념 이미지의 고착이 중학생과 고등학생의 사각형 개념 이해에 영향을 줄 것으로 가설을 설정하였다. 가설 설정은 크게 다음 2가지에 근거하여 이루어졌다. 첫째, Vygotsky (1987)에 따르면, 개념 형성 과정을 옹기 해결한 아동이나 청소년들은 종종 개념의 언어적 정의를 제공하는 과정에서 원시적 사고 수준으로 퇴행할 수 있다. 둘째, Tall과 Vinner (1981), Fujita (2012)에 따르면, 의식적이든 무의식적이든 개념과 관련된 모든 정신적 속성은 개념 이미지에 포함되며 개념 이미지는 미래의 갈등의 씨앗이 될 수 있고, 사각형의 ‘이미지’와 ‘속성’ 그리고 ‘정의’에 대한 이해가 서로에게 영향을 미칠 수 있다. 따라서 학생이 사각형 개념의 이해도가 낮을 경우 ‘갈등의 씨앗’으로 판단한 학생의 인식론적 고착과 제한된 개념 이미지 및 기억의 상실 등이 개념 정의를 기술하는 과정에서 구체적으로 드러날 것이라고 보았다.

## 개념 정의와 개념 이미지

개념 정의는 비순환적인 방법으로 개념을 정확히 설명하는 말의 형식(Form of words)으로, 이는 형식적 개념 정의와 사적 개념 정의로 구분된다. 개념 이미지는 그 개념에 관련된 모든 속성과 과정 및 영상(Mental picture)으로 이루어진 인지구조 전체로 정의된다 (Tall & Vinner, 1981).

학생은 동화와 조절을 통해 적절한 개념 이미지를 형성해야 하지만, “부드럽게 이어진 함수”로 연속함수를 인식하는 경우의 예와 같이 언어적 요소가 인지 장애의 요인이 되고, 적절하지 않은 개념 이미지는 향후 교수·학습에 잠재적 갈등 요인이 될 수 있다

(Tall & Vinner, 1981). 또한, 교수-학습 과정에서 교사들이 갖고 있는 개념 정의와 개념 이미지가 유기적으로 움직여 개념 이미지를 표현해야 하지만 실제 교실에서는 개념 정의는 활성화되지 않고 개념 이미지만 활성화되어 개념 이미지가 왜곡될 수 있다(Vinner, 1983). 예를 들면, 극한 개념의 경우 잠재적 갈등 요인의 근원으로 (1) 수학 외부 용어에 내재된 의미, (2) 학습 전 경험적 지식의 조합을 통한 수학적 관념 형성, (3) 수학 외적 요인을 배제한 수학적 개념 형성, (4) 특수한 예 사용, (5) 경험에 의한 잘못된 해석 등을 들 수 있다. 특히, 개념 이미지는 교육 과정과 교과서의 전개 방식에 의존하며 교과서에 제시되는 예로 인해 학생의 개념 이미지가 고정되거나 한정될 수 있다. 예를 들면, 교과서에 제시된 자연수와 관련된 “빨셈은 항상 작아진다.”는 표현은 학생에게 음수의 빨셈에 잘못된 개념 이미지를 심어 줄 수 있다(Davis & Vinner, 1986).

Fischbein (1993)은 정보처리 이론과 “기하적인 사고에 서는 개념적이고 도형적인 양상의 전체적인 융합(Fusion)이 있다(Piaget & Inhelder, 1966, p. 154).”는 연구를 기반으로 개념 정의와 개념 이미지 이론(Tall & Vinner, 1981)을 기하 개념에 적용하여, 기하에서는 형상과 개념이 상호작용하며 서로 의존적인 관계에 있다고 주장하고 도형 개념을 도입하였다. 도형 개념은 첫째, 플라톤의 이데아와 아리스토텔레스의 유(類)적 개념과 같은 정신적 실체이며 기하 영역에서 수학적 추론에 의해 처리되는 구조적 성질을 가지고 있다. 둘째, 구체적-감각적 성질(예. 색상, 중량, 밀도 등)이 없지만 도형의 성질이 나타나고, 다른 개념의 정의 및 이미지와 다르게 도형만이 가진 속성 때문에 개념 정의와 개념 이미지에 상호 의존한다. 셋째, 도형의 증명 과정에서 사용되는 쪼개기, 포개기, 돌리기 등은 도형만이 가진 공간적 속성이다(Fischbein, 1993). 이러한 분석을 기반으로 Fischbein (1993, 1998)은 첫째, 공간적 속성을 포함하는 도형 개념의 습득 여부는 기하 문제 해결에 결정적인 역할을 할 수 있다고 보았다. 예를 들어, “이등변 삼각형의 두 밑각이 같다.”의 증명 과정에서 각의 이등분선을 이용할 때, 각의 이등분선 도입은 이등변 삼각형의 성질과 더불어 각의 ‘쪼개기’와 같은 공간에서의 구조적인 성질을 문제 해결 과정에 도입한 결과로 볼 수 있다. 둘째, 평행사변형, 연모양의 사각형과 관련된 검사 결과, 14 - 17세 사이 학생 218명의 나이에 따른 발달은 도형 개념과 상관관계가 없고, 수학 성취도가 높을수록 이를 더욱 형식적(예. 공리나 정의에 따라 판단하는 것 등)으로 이해한다는 것을 보여주었다.

이 연구에서는 초등학생을 대상으로 한 선행 연구 결과, 즉 기하 영역에서 학생의 도형 개념 이해는 개념 정의와 개념 이미지가 상호작용하는 의존적인 관계이고(Fischbein, 1993), 개념 이미지는 교사와 교과서에 더 큰 영향을 받아 형성된다(Vinner, 1983; Davis & Vinner, 1986)는 결과에 주목하였다. 전자와 관련하여 중·고등학생이 사각형 개념을 이해하는 경우에는 의존적인 현상이 잘 드러나지 않지만, 사각형 개념을 이해하지 못하는 경우에는 개념 정의와 개념 이미지가 일치하지 않는 현상이 중·고등학생의 행동(예. 기억, 주목하기)에 기인하여 개념 정의를 기술하는 과정에서 드러날 것으로 보았다. 후자와 관련하여서는 사각형에 국한되는 것은 아니지만, 개념 이미지의 형성 원인을 교과서, 교사, 동료 학생 등의 사회적 측면에서도 살펴볼 필요가 있다고 보았다.

## 연구 방법

### 용어의 정의

학생이 기술한 사각형의 언어적 개념 정의와 학생이 그린 개념 이미지가 동일하게 해석되고 기존 사각형의 정의와 일치할 경우에 개념 정의와 개념 이미지가 상호의존적이라고 보았다. 이러한 경우에 학생의 ‘사각형의 개념 정의와 개념 이미지가 일치한다.’고 표현하고, 학생이 ‘사각형 개념을 이해’하는 것으로 보았다.

사각형의 전형적인 예는 학생이 제시한 사각형의 개념 이미지 중 상대적으로 빈도가 가장 높게 나타난 사각형 모양으로 정의하였다.

사각형에 대한 개념 이미지의 형성 원인은 검사 결과를 바탕으로 2가지 경우로 분류하였다. 현재 사각형의 개념 이미지를 그리기 위해 사각형의 이름, 정의, 속성 등과 같이 사각형과 관련된 정보에 의존하는 경우와 사각형 개념에 대한 정보가 아니라 사각형을 처음 배울 때 교사의 지도나 교과서(예. 교사가 직접 그려준 그림과 교과서에서 본 그림에 대한 기억) 등과 같은 교수·학습 상황에 영향을 받았다고 인식하는 경우로 구분하였다. 전자는 사각형 개념에 대한 학생의 기억에 의존하므로 인지적인 것으로, 후자는 사각형을 학습한 상황에 의존하므로 사회적인 것으로 보았다. 비록 학생이 교사의 지도나 교과서의 영향을 기억하지 못하는 한계가

있지만 면담을 통하여 보완하고자 하였다.

마지막으로 Van Hiele (1985) 수준 이론에 따르면 학생은 사각형의 개념 이미지를 먼저 인식한 후 성질 및 언어적 정의를 이해하게 된다. 초등학생 때 교수·학습 과정에서 형성될 수 있는 사각형에 관련된 개념 이미지의 고착과 교과서의 영향으로 인해 도형을 제한된 이미지로 생각할 수 있다(Ryu, 2009). 이러한 문헌 고찰을 토대로, 이 연구에서는 학생이 사각형의 개념 정의를 기억하지 못하는 상황에서 개념 정의를 기술하고자 시도할 경우에, 사각형을 옳게 그릴지라도 초등교육 시기에 형성되어 고착된 인식과 제한된 개념 이미지가 반영된 학생의 관점이 드러날 것이라 판단하였다. 이러한 현상을 학생이 개념 이미지의 속성을 부분적으로 주목(Attention)한 행동으로 보았다.

## 검사 도구

검사 도구를 개발하기 위해 전문가 집단(박사 2명, 박사과정 3명, 석사과정 2명)을 구성하였다. 문항 개발을 위한 논의는 모두 3차례에 걸쳐 진행되었다. 첫 번째 모임에서는 사각형의 개념 이미지와 관련된 선행 연구를 논의하여 Fischbein (1998), Fujita와 Jones (2007)의 두 연구에 제시된 검사 형식과 내용을 수정하고 보완하기로 하였다.

두 번째 모임에서는 선행 연구 분석 결과를 토대로 다음 3가지 사항을 고려하여 검사 문항을 구성하였다. 첫째, Fischbein (1998), Fujita와 Jones (2007)의 두 연구를 확장하여 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형에 적용하여 검사 도구를 개발하는 것으로 합의하였다. 각 사각형에 대하여 동일한 3개의 문항(정의 쓰기, 개념 이미지 그리기, 개념 이미지를 그린 이유 쓰기)으로 구성하였다. 정의 쓰기를 개념 이미지 그리기보다 앞에 배치한 이유는 문제에 응답하는 문항 구성이 학생에게 영향을 줄 수 있음을 고려하였기 때문이다. 더불어 개념 이미지의 형성 원인도 추가하여 조사하고자 하였다. 둘째, Fujita와 Jones (2007)는 학생이 사각형의 개념 이미지를 연구자가 제시한 예에서 선택하도록 했지만, 이 연구에서는 학생이 직접 사각형의 개념 이미지를 그리게 하였다. 그 이유는 학생이 기존의 구조화된(제시된) 예에서 개념 이미지를 선택할 경우, 학생의 자생적인 개념 이미지가 배제되고 연구자의 의도에 의해 학생의 개념 이미지가 분류될 수 있기 때문이다. 셋째, 수학 성취도에 따른 사각형에 대한 학생의 이해도는 Fischbein (1998)의 연구와 유사할 것으로 판단하여 생략하였다.

세 번째 모임에서는 검사 문항의 단어 및 표현 방식에 대한 학생의 이해도를 반영하기 위해 현직 교사 2명의 자문을 청취하였다. 그 결과 ‘이미지’라는 표현이 사각형과 관련된 개인적인 생각, 느낌으로 판단하는 등으로 오해할 수 있다는 의견을 반영하여, ‘그림’이라는 단어를 추가하였다.

이러한 절차를 거쳐 검사 도구는 5개의 사각형 각각에 대하여 개념 정의, 개념 이미지(그림), 이미지를 그린 이유 등을 묻는 총 15개의 문항으로 구성하였다. 검사 도구에서 사다리꼴 문항을 예로 제시하면 Table 1과 같다.

## 연구 대상

**Table 1.** Questions about trapezoid in the test tool.

No.	Item
1.	Answer the following questions about the trapezoid.
1-1.	Write down the definition.
1-2.	Draw an image (picture).
1-3.	Write down the reasons for drawing the image (picture) as shown above.

경북 C읍 소재 중학생 2학년 60명, 중학교 3학년 63명, 일반계 고등학교 1학년 65명, 총 188명을 대상으로 검사를 실시하였다. 참여한 학년별, 성별 인원 수는 Table 2와 같다.

## 자료 수집 및 분석

**Table 2.** Subjects.

Grade	Gender		Total
	Male	Female	
8 <sup>th</sup>	39	21	60
9 <sup>th</sup>	30	33	63
10 <sup>th</sup>	33	32	65
Total	102	86	188

검사는 2018년 12월 초에 실시하였다. 검사 시간은 20분이고, 교사와 학생 간 그리고 학생과 학생 간 상호작용(예. 대화 등)이 없도록 주의하였다. 수집한 검사 자료를 SPSS 18.0 버전을 이용하여 학년별과 성별로 사각형 개념 정의에 대한 정답률을 기술 통계로 분석하고 차이 검정을 실시하였다.

검사 결과를 바탕으로 면담 대상자를 선정하였다. 면담 대상자의 성적은 내신 성적을 기준으로 상위 30% 이하를 상, 30% 초과~60% 이하를 중, 60% 초과를 하로 분류하였다. 면담은 지필 검사 후 약 2개월 후에 실시하였고, 녹음기로 기록하였다.

면담에서는 두 가지를 고려하였다. 첫째, 개념 이미지를 옳게 그리고 개념 정의를 정확하게 기술하지 않은 학생을 대상으로 정의를 틀린 원인과 관련하여 학생의 의견을 들어보고자 하였다. 이 연구에서는 사각형의 개념 이미지와 성질에 ‘주목’하는 방식에 따른 학생의 개념 정의 기술 방식을 분류하고자 하였다. 이에 이와 관련된 학생의 생각을 알아보고자 하였다. 둘째, 개념 정의 기술 과정에서 나타난 학생의 실제적인 인식을 알아보기 위해, 면담 과정에서 교사가 학생이 틀린 부분을 가리키며 “개념 정의를 이렇게 쓴 이유는 무엇이니?”로 정하였다. 검사 담당 교사와 2회에 걸쳐 질문 방법에 대해 논의한 결과, 학생이 내용을 기억하지 못하는 경우를 대비하여 교사가 학생의 지필 검사 반응을 설명한 후 질문하고, 교사의 의도적인 개입을 배제하고자 하였다.

면담 대상자는 지원자 중 사각형 별로 각각 두 명씩 총 10명을 최종 선정하였다. 지필 검사 결과를 토대로 면담을 통해 이 연구의 의도에 맞게 검사 내용과 의미의 연결이 가능하다고 판단되는 학생을 검사 담당 교사가 조사하고, 연구자가 검사 담당 교사와 논의한 후에 학생을 최종적으로 선정하였다. 한편 면담 대상자 중 남학생의 비율(90%)이 높은 이유는 사각형과 관련된 오개념, 특히 사각형의 개념 정의 기술 과정에서 여학생에 비해 상대적으로 언어적 표현 능력이 낮은 남학생(Hwang & Yeo, 2020; Lee, 2008)에게서 더 잘 드러날 것이라 판단하였기 때문이다.

마지막으로 사각형에 대한 개념 이미지의 형성 원인과 마찬가지로 검사 결과 분석의 한계를 보완하기 위해 면담을 실시하였다. 학생이 지필 검사에서 기술한 내용을 교사가 알려준 후 면담을 실시하였고, 면담은 평균 3~5분 정도에 걸쳐 이루어졌다. 모든 자료는 연구진에서 교차로 분석한 후 논의하고 확정하였다.

## 결과 분석 및 논의

### 사각형 개념 정의에 대한 이해

#### 학년별

5개의 사각형 정의에 대한 학년별 정답 빈도와 정답률은 Table 3과 같다. 결과를 단순 비교해 보면 3가지 특징을 찾을 수 있다. 첫째, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형의 경우 중학교 2학년 학생과 비교하여 중학교 3학년 학생은 정답률이 낮았지만 고등학교 1학년 학생의 정답률은 상대적으로 높았다. 둘째, 정사각형의 경우 중학교 2학년에서 고등학교 1학년까지 학년이 올라감에 따라 정답률이 상승하였고, 마름모의 경우 중학교 2학년에서 중학교 3학년까지 학년이 올라감에 따라 정답률이 상승하였지만 고등학교 1학년에서는 중학교 3학년과 비교해서 정답률이 낮았고 특히, 중학교 2학년보다 정답률이 낮았다. 셋째, 모든 학년에서 다른 사각형과 비교하여 마름모에 대한 정답률이 가장 낮았다.

이러한 결과를 해석해 보면 첫째, 중학생의 경우 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형 개념과 관련하여 학년이 올라간다고 자연적으

**Table 3.** Frequency (percentage) of correct answer for concept definition of quadrangle by grade.

Sort	8 <sup>th</sup> (n=60)	9 <sup>th</sup> (n=63)	10 <sup>th</sup> (n=65)	Total (n=188)
Trapezoid	45 (75.0)	41 (65.1)	53 (80.0)	139 (73.4)
Parallelogram	47 (78.3)	46 (73.0)	51 (78.5)	144 (76.6)
Rhombus	32 (53.3)	37 (58.7)	27 (43.1)	96 (51.6)
Rectangle	39 (66.7)	39 (61.9)	48 (73.9)	126 (67.6)
Square	37 (61.7)	40 (63.5)	45 (69.2)	122 (64.9)

로 이해하게 되는 것이 아님을 알 수 있다. 고등학생의 경우 마름모를 제외한 다른 4개의 사각형에서 중학생보다 상대적으로 정답률이 더 높은 것은 부분적으로 중학생과 일반계 고등학생의 전반적인 실력 차이에 기인한 것이라 볼 수 있다. 둘째, 마름모와 관련된 결과는 대학생의 경우에도 마름모의 정의, 이미지, 속성에 대한 성취도가 다른 사각형과 비교하여 낮다는 선행 연구 결과(Fujita, 2012)와 유사한 결과가 중학생과 고등학생의 경우에도 나타난다는 것을 알 수 있다.

5개의 사각형의 난이도가 다르다는 한계가 있지만, 사각형에 대한 이해가 학년에 따라 차이가 있는지 통계적으로 검증한 분산분석 결과는 Table 4와 같다. Levene의 검정 결과에서 유의수준 0.05에서 등분산이 가정되지 않아 Dunnett T3의 방법을 사용하였다. 분산분석 결과, 학년이 올라감에 따라 학생의 사각형 개념에 대한 이해도가 통계적으로 향상된다고 할 수 없다.

**Table 4.** ANOVA results by grade.

Sort		Sum of squares	df	A/S	F	p-value
Trapezoid	Intergroup	0.735	2	0.367	1.889	0.154
	Within a group	35.967	185	0.194		
	Sum	36.702	187			
Parallelogram	Intergroup	0.098	2	0.049	0.266	0.767
	Within a group	34.131	185	0.184		
	Sum	34.229	187			
Rhombus	Intergroup	0.810	2	0.405	1.625	0.200
	Within a group	46.142	185	0.249		
	Sum	46.952	187			
Rectangle	Intergroup	0.463	2	0.232	1.051	0.352
	Within a group	40.744	185	0.220		
	Sum	41.207	187			
Square	Intergroup	0.197	2	0.099	0.428	0.653
	Within a group	42.633	185	0.230		
	Sum	42.830	187			

## 성별

5개의 사각형 정의에 대한 남학생 정답률과 여학생의 정답률을 비교해 보면, 모든 사각형의 개념 정의에 대한 여학생의 정답률이 남학생보다 높은 것으로 나타났다(Table 5). 남학생과 여학생의 정답률 차이를 내림차순으로 정리하면 정사각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모인 것을 알 수 있다. 이는 전반적으로 형태가 기울어지거나 회전하지 않은 단순한 사각형일수록 여학생이 남학생과 비교하여 상대적으로 더 잘 이해한다는 것을 보여준다. 5개의 사각형 정의에 대한 성별 정답률 차이를 검증한 t-검정 결과는 Table 5와 같다. Levene의 검정 결과 모두 유의수준 .05에서 등분산이 가정되지 않아, Dunnett T3의 방법을 사용하였다. 분석 결과, 정사각형 정의를 제외하고 다른 4개의 사각형 정의에 대한 정답률 성차는 모두 유의수준 .05에서 통계적으로 유의하지 않았다. 즉, 정사각형의 정의에 대해서는 여학생의 이해 정도가 남학생보다 유의하게 높고, 다른 4개의 사각형 정의에 대한 이해 정도에는 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

**Table 5.** Frequency (percentage) of correct answer for concept definition of quadrangle by gender and the result of gender difference *t*-test.

	Male (n=102)	Female (n=86)	<i>t</i>	<i>p</i> -value
Trapezoid	73 (71.6)	66 (76.7)	-0.955	0.341
Parallelogram	75 (73.5)	69 (80.2)	-1.240	0.216
Rhombus	50 (49.0)	46 (53.5)	-1.546	0.124
Rectangle	64 (62.8)	62 (72.1)	-0.475	0.636
Square	59 (57.8)	63 (73.3)	-2.244*	0.026

\**p*<0.05




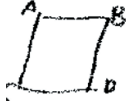
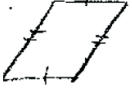




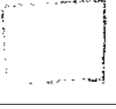
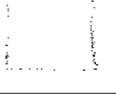




**전형적인 예**

학생이 인식하는 각 사각형의 대표적인 형태를 알아보기 위하여 사각형의 개념 정의에 대한 이해 여부와 상관없이 대부분의 학생이 공통으로 인식하는 각 사각형의 개념 이미지를 조사한 결과는 다음과 같다. Table 6에 제시된 사각형을 개념 이미지로 그린 학생은 총 188명의 학생 중 사다리꼴은 181(96.3%)명, 평행사변형은 170(90.4%)명, 마름모는 177(94.1%)명, 직사각형은 157(83.5%)명, 정사각형은 181(96.3%)명으로 나타났다. 따라서 Table 6에 제시된 사각형을 대부분의 학생들이 공통으로 인식하는 사각형으로 볼 수 있고, 이를 이 연구에서는 사각형의 전형적인 예로 보았다.

더불어 사각형을 옳게 그렸지만 전형적인 예를 개념 이미지로 그리지 않은 학생은 사다리꼴 4명, 평행사변형 9명, 마름모 5명, 직사각형 27명, 정사각형 1명이고, 사각형의 개념 이미지를 틀리게 그리거나 그리지 않은 학생, 즉 무응답인 학생은 사다리꼴 3명, 평행사변형 9명, 마름모 6명, 직사각형 4명, 정사각형 6명인 것으로 조사되었다. 특히, 전형적인 예를 개념 이미지로 그리지 않은 학생 중 다른 사각형에 비해 인원이 많은 직사각형을 분석한 결과, 개념 이미지를 ‘세로의 길이가 가로의 길이보다 긴 직사각형’으로 제시한 학생이 21명 포함되어 있었다.

Table 6에서 평행사변형과 직사각형의 경우에는 선행 연구(Monaghan, 2000, p.186; Fujita & Jones, 2007)에서 제시된 두 사각형의 ‘원형’의 예와 일치하기 때문에, 사다리꼴과 마름모 및 정사각형에 대한 전형적인 예도 대부분의 학생이 가지는 사각형에 대한 개념 이미지의 ‘원형’일 것으로 추측된다.

**Table 6.** Typical and non-typical examples of quadrangle.

Sort	Typical		Non-typical
Trapezoid			
Parallelogram			
Rhombus			
Rectangle			
Square			



### 사각형 개념을 이해하지 못한 경우 분석

사각형에 대한 학생의 개념 이미지는 학생 개인이 가지는 개념 정의에 따른 이미지로 옳고 그름을 판정하는 데에는 한계가 있다. 이에 이 절에서는 사각형에 대한 개념 이미지를 학생 개인의 개념 정의와 비교하는 것에 초점을 두는 대신에 그 자체로 옳은 이미지 인지 또는 틀린 이미지인지에 비추어 고찰하였다. 즉, 개념 정의 또는 개념 이미지를 옳게 기술하거나 그리지 못한 경우를 모두 사각형 개념을 이해하지 못한 경우로 간주하고 분석하였다. 사각형의 개념 정의 또는 개념 이미지를 옳게 기술하거나 그리지 못한 학생은 사다리꼴 49(26.6%)명, 평행사변형 44(23.9%)명, 마름모 92(48.4%)명, 직사각형 62(32.4%)명, 정사각형 66(35.1%)명인 것으로 조사되었다.

사각형의 개념 정의를 기술하는 과정에서 정의 또는 이미지의 전체가 아니라 개념 이미지의 일부(예. 성질, 각 등) 또는 이름에 주목하는 사례를 찾아볼 수 있었다. 예를 들어, Figure 1을 보면, 학생은 개념 이미지에 표시된 각을 이용하여 사각형의 개념 정의를 잘 못 기술하고 있다. 이러한 현상은 학생이 사각형의 개념 정의를 이해하지 못하거나 기억하지 못하고, 자신의 인지 구조에 고착된 개념 이미지를 바탕으로 자의적으로, 즉 각의 표현(성질)에 주목함으로써 사각형의 정의를 기술한 것으로 해석할 수 있다. 다시 말해, 선행 연구에 제시된 가설을 토대로 추론하면, Figure 1은 사각형 개념 정의의 기억 상실과 이전의(예. 초등학교 때) 교수 학습 과정에서 경험을 통해 발생한 개념 이미지에 포함된 정신적 속성으로 인해 학생은 개념 이미지의 특정한 영역을 제한적으로 주목하게 되고, 이는 개념 정의를 기술하는 과정에서 발생하는 오류의 근원이 될 수 있음을 드러낸다고 볼 수 있다.

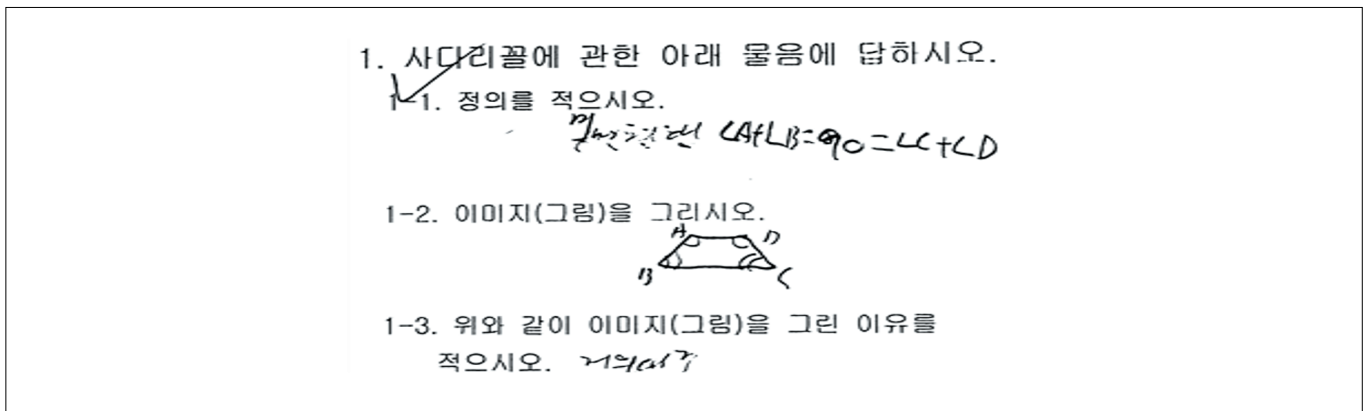


Figure 1. Concept definition example of trapezoid.

위 사례에서 제시된 관찰과 해석을 토대로, 이 연구에서는 학생은 사각형의 개념 이미지를 잘 기억하지만 시간이 지남에 따라 사각형의 개념 정의에 대한 이해도(예. 기억하는 정도)가 낮아지므로 사각형과 관련된 오개념은 사각형의 개념 정의 기술 과정에서 나타난다고 판단하였다. 그 이유는 첫째, 교사가 잠깐 동안 이미지를 보여주고 형식적 정의를 내릴 경우 개념 이미지는 제한적으로 발달할 수 있지만 시간이 지날수록 개념 정의는 인지적인 측면에서 대부분 비활성화 되고, 도형 개념이 완전히 발달되지 않았다면(즉, 사각형을 이해하지 못했다면), 도형에 대한 판단은 ‘이미지’에 영향을 받기(Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) 때문이다. 둘째, 사각형 개념 정의 및 개념 이미지에 대한 조사 결과에서 알 수 있듯이 대부분의 학생이 사각형의 개념 이미지를 옳게 그리지만 사각형의 이해 정도가 학년이 올라감에 따라 유의미하게 향상되지 않았기 때문이다.

따라서 학년이 올라갈수록 사각형의 개념 이미지의 영향이 더 커지게 되고 학생은 사각형의 개념 이미지를 분리하여 사각형 개념 정의를 사고하는 것이 힘들어진다. 다시 말해, 학생은 오랫동안 축적된 사각형 모양에 대한 직관적인 개념(개념 이미지)을 토대로 기하 학습을 하는 것으로 볼 수 있다(NCTM, 2000).

위 논의를 토대로, 이 연구에서는 사각형의 개념 정의를 기술하지 못한 학생을 대상으로 ‘개념 이미지를 주목하는 방식’을 유형을 구분하여 나누고 해석하였다. 사각형 개념을 이해하지 못한 학생을 대상으로 개념 정의를 기술하는 방식을 시각적 이미지 이용, 변의 길이 관계 이용, 대각선 성질 이용, 각 사이의 관계 이용, 기타 등의 5가지로 유형을 분류하였다. 예를 들면, 사다리꼴의 경우는 ‘사

다리 모양으로 된 사각형(시각적 이미지), ‘마주보는 변이 한 쌍씩 같은 것(변의 길이 관계)’, 평행사변형의 경우는 ‘마주보는 한 쌍의 길이가 평행한 것(변의 길이 관계)’, 마름모의 경우는 ‘대각선의 길이가 같은 마름모(대각선의 성질)’, ‘두 대각선의 절반이 각각 같은 사각형(대각선의 성질)’, ‘마주보는 각의 크기가 같다(각 사이의 관계)’, 직사각형의 경우는 ‘한 변이 긴 사각형(시각적 이미지)’, ‘윗변과 아랫변 길이가 같고, 옆 변의 길이가 같다(변의 길이 관계)’, 정사각형의 경우는 ‘네 변의 길이가 다 같은 사각형(변의 길이 관계)’, ‘네 변의 길이가 같아야 한다(변의 길이 관계)’를 들 수 있다.

사각형 개념 정의를 기술하는 과정에서 두 가지 유형을 모두 이용하여 언급한 경우, 예를 들어 ‘변의 길이와 각이 각각 같다.’의 경우에는 중복하여 세었다. 사각형의 개념 이미지와 개념 정의를 모두 잘못 기술한 학생은 기타로 분류하였다. 각 유형별로 응답한 학생 수는 Table 7과 같다.

**Table 7.** Descriptive types of concept definition by quadrangle.

Types	Trapezoid	Parallelogram	Rhombus	Rectangle	Square	Total
Using the visual image (shape)	6	7	9	7	2	31
Using the length relationship of the sides	12	7	12	18	31	80
Using the properties of the diagonal line	0	0	24	2	4	30
Using the relationship between angles	2	1	12	2	5	22
Other (including non-response)	30	30	35	34	27	156
Total	50	45	92	63	69	319

Table 7에서 2가지 이상 유형을 포함하여 기술한 학생 수를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 사다리꼴과 평행사변형의 정의에 한 명의 학생이 모두 각의 크기와 변의 길이를 사용하여 기술하였다. 직사각형의 경우에 한 명의 학생이 대각선의 성질과 변의 길이 관계를 이용하여 응답하였다. 정사각형의 경우에 한 명의 학생이 대각선, 각, 변의 관계를 이용하여 기술하였고, 다른 한 명의 학생은 대각선과 변의 길이 관계를 동시에 제시하였다.

Table 7에 나타난 경향을 고려할 때, 사각형 개념을 이해하지 못한 학생이 사각형의 정의를 기술할 때 다음 2가지의 특성을 드러낸다고 할 수 있다. 첫째, 사각형의 전체적인 모양새와 부분적인 성질, 예를 들어, 변의 길이, 대각선, 각 등을 주목함으로써 개념 정의를 기술한다. Van Hiele (1985)의 기하 학습 1~5수준 이론을 반영하여 해석해 보면, 사각형 개념을 이해하지 못한 학생은 사각형의 전체적인 모호한 시각적 이미지만 주목하고 구체적 성질로 이행하지 못하거나(1수준), 사각형의 부분적인 성질 또는 관계만 주목(2수준)하고 있다. 둘째, 기타 유형을 제외하면, 변의 길이 관계 이용, 대각선의 길이 관계 이용, 각 및 각의 관계 이용 등의 내림차순으로 주목 빈도가 높다는 것을 알 수 있다. 다시 말해, 사각형의 정의와 직접적인 관련성이 높고 시각적으로 잘 드러나는 길이의 관계를 각의 관계보다 먼저 인식하고 있다.

### 사각형 개념 이미지 형성 원인

전형적인 예로 나타나는 학생의 사각형 개념 이미지의 형성 원인을 알아보기 위해 검사 도구 3번 문항에 대한 총 188명 학생의 응답 빈도(백분율)를 사각형의 이름, 성질, 정의, 교과서 또는 교사 등으로 분류하여 정리하면 Table 8과 같다. 학생은 무응답을 제외하고, 모든 사각형의 개념 이미지 형성 과정에서 정의, 교과서 또는 교사, 명칭의 내림차순으로 영향을 많이 받았다고 응답하였다. 반면, 사각형의 성질에 영향을 받았다고 응답한 학생은 드물었다. 전자와 관련하여, 2015 개정 수학과 교육과정에 따르면, 초등학교 3~4학년 과정에서는 직관적으로 사각형을 학습하고, 중학교 2학년 과정에서 개념과 성질을 다룬다. 따라서 비록 사각형의 명칭은 미리 알고 있더라도 대부분의 학생이 사각형의 형식적인 정의를 교사의 설명과 교과서를 통해서 최초로 학습할 가능성이 높기 때문에, 교과서 또는 교사가 학생의 사각형의 개념 이미지의 초기 인식에 영향을 주고 있는 것으로 볼 수 있다. 후자와 관련하여 Van Hiele (1985) 수준 이론으로 해석하면, 학생이 사각형의 성질을 인식하기 전에 사각형의 전체적인 형태를 먼저 인식하기 때문에, 개념 이미지 형성에 사각형의 성질의 영향을 받는다고 생각하지 않는 것으로 볼 수 있다.

나아가 이 결과를 개념 이미지(예. 평행사변형)는 학습자가 학교에서 처음 학습할 때 생성된다는 기존 연구(Okazaki & Fujita, 2007)와 관련 지어 일반적인 사각형(예. 사다리꼴, 마름모, 직사각형, 정사각형 등)으로 확장하여 해석해 보면, 학생의 인지구조에 형성되는 사각형의 개념 이미지의 최초의 형태, 즉 ‘원형’은 사회적인 영향에 의해 생성되는 것으로 볼 수 있다. 비록 후속 연구를 통해 실증적인 검증이 필요하지만, 사각형의 개념 이미지는 사전에 형성되기 시작하더라도 원형으로 고착되는 것은 교과서나 교사의 영향이 크다고 볼 수 있다. 반면에 사각형 개념 이미지의 형성 원인을 ‘동료 학생’이라고 응답한 학생은 없었다.

**Table 8.** Frequency (percentage) of causes of concept images formation by quadrangle.

Causes	Trapezoid	Parallelogram	Rhombus	Rectangle	Square
Name	30 (16.0)	27 (14.4)	27 (14.4)	30 (16.0)	27 (14.4)
Property	3 (1.6)	6 (3.2)	9 (4.8)	2 (1.1)	3 (1.6)
Definition	64 (34)	63 (33.5)	49 (26.1)	49 (26.1)	64 (34.0)
Name and property	1 (0.5)	6 (3.2)	13 (6.9)	15 (8.0)	6 (3.2)
Textbook or Teacher	43 (22.9)	38 (20.2)	39 (20.7)	39 (20.7)	37 (19.7)
No response	47 (25.0)	48 (25.5)	51 (27.1)	53 (28.2)	51 (27.1)

Table 8의 결과를 학년별, 성별로 다시 분석한 결과 5가지 현상을 발견하였다. Table 9는 평행사변형에 대한 학년별, 성별 재분석 결과의 예를 정리한 것이다. Table 10은 5개의 사각형에서 가장 영향을 많이 받는 것으로 나타난 정의, 교과서나 교사의 2가지 영향 원인에 대하여 학년별 그리고 성별로 재분석한 것이다.

**Table 9.** Frequency (percentage) of causes of concept images formation for parallelogram by grade and gender.

Causes	8 <sup>th</sup>	9 <sup>th</sup>	10 <sup>th</sup>	Male	Female	Total
Name	6 (10.0)	13 (20.6)	8 (12.3)	14 (13.7)	13 (15.1)	27 (14.4)
Property	1 (1.7)	1 (1.6)	4 (6.2)	4 (3.9)	2 (2.3)	6 (3.2)
Definition	27 (45.0)	20 (31.7)	16 (24.6)	31 (30.4)	32 (37.2)	63 (33.5)
Name and property	1 (1.7)	3 (4.8)	2 (3.1)	1 (1.0)	5 (5.8)	6 (3.2)
Textbook or Teacher	8 (13.3)	12 (19.0)	18 (27.7)	25 (24.5)	13 (15.1)	38 (20.2)
No response	17 (28.3)	14 (22.2)	17 (26.2)	27 (26.5)	21 (24.4)	48 (25.5)

**Table 10.** Frequency (percentage) of causes (definition/textbook or teacher) of concept images formation for quadrangle by grade and gender

Causes	8 <sup>th</sup>	9 <sup>th</sup>	10 <sup>th</sup>	Male	Female	
Trapezoid	Definition	27 (45.0)	20 (31.8)	17 (26.2)	31 (30.4)	33 (38.4)
	Textbook or Teacher	12 (20.0)	8 (12.7)	23 (35.4)	26 (25.5)	17 (19.8)
Parallelogram	Definition	27 (45.0)	20 (31.7)	16 (24.6)	31 (30.4)	32 (37.2)
	Textbook or Teacher	8 (13.3)	12 (19.0)	18 (27.7)	25 (24.5)	13 (15.1)
Rhombus	Definition	19 (31.7)	19 (30.2)	11 (16.9)	25 (24.5)	24 (27.9)
	Textbook or Teacher	9 (15.0)	11 (17.5)	19 (29.2)	25 (24.5)	14 (16.3)
Rectangle	Definition	18 (30.0)	20 (31.7)	11 (16.9)	24 (23.5)	25 (29.1)
	Textbook or Teacher	9 (15.0)	11 (17.5)	19 (29.2)	23 (22.5)	16 (18.6)
Square	Definition	21 (35.0)	23 (36.5)	20 (30.8)	31 (30.4)	33 (38.4)
	Textbook or Teacher	9 (15.0)	9 (14.3)	19 (29.2)	23 (22.5)	14 (16.3)

무응답을 제외한 사각형의 개념 이미지의 형성 원인을 학년별, 성별로 분석해 보면, 첫째, 정사각형은 세 학년 모두에서 ‘정의’의 영향이 가장 높게 나타났다. 둘째, 정사각형을 제외한 다른 4개의 사각형에서는 중학교 2학년과 3학년 학생의 경우 사각형의 정의에 가장 영향을 많이 받고, 고등학교 1학년 학생의 경우 교과서나 교사의 영향을 가장 많이 받는 것으로 나타났다. 셋째, 사다리꼴, 직사각형, 정사각형에서 중학교 3학년의 경우 경향성이 일치하지 않지만, 전반적으로 학년이 올라갈수록 사각형의 정의의 영향은 줄어들고 교과서나 교사의 영향은 증가하는 경향을 보였다. 넷째, 5개의 모든 사각형에 대하여 남학생과 여학생이 동일하게 사각형의 정의의 영향을 가장 많이 받는 것으로 나타났다. 다섯째, 여학생과 비교하여 상대적으로 남학생이 더 사회적인 영향을 많이 받는 것으로 드러났다.

한편, 검사 결과를 바탕으로 학생이 사각형의 개념 정의를 옳게 기술하지 못한 원인이 ‘개념 이미지를 주목하는 방식’, 즉 전체적인 시각적 이미지, 변의 길이 관계, 대각선의 성질, 각 또는 각의 관계 등을 부분적으로 인식한 결과라는 분석과 학생의 실제 인식이 일치하는지 면담을 통해 좀 더 심층적으로 알아보았다. 사다리꼴(학생 S2), 직사각형(학생 S7), 정사각형(학생 S9, S10)의 경우 정의 기술 과정과 관련된 진술을 하지 않았기 때문에, 면담 결과를 검사 내용과 관련된 양적 분석에 추가하였다. 면담 결과를 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형의 순서로 면담한 각각 2가지 학생 사례를 정리하면 다음과 같다.

사다리꼴의 경우(Figure 2), 학생 S1은 중학교 3학년 남학생으로 성취도는 하위권이다. 학생 S1은 ‘마주보는 대변의 길이가 같다.’는 기억을 이용하여 사다리꼴의 개념 정의를 기술했다고 응답하였다. 학생 S2는 중학교 3학년 남학생으로 상위권이다. 학생 S2는 사다리꼴의 개념 이미지를 ‘명칭’에 주목하여 그렸다고 응답하였고, 사다리꼴의 정의 기술 과정에서 ‘사다리 모양’과 동일하게 그려진 개념 이미지에 포함된 ‘각의 성질’을 이용하고 있다.

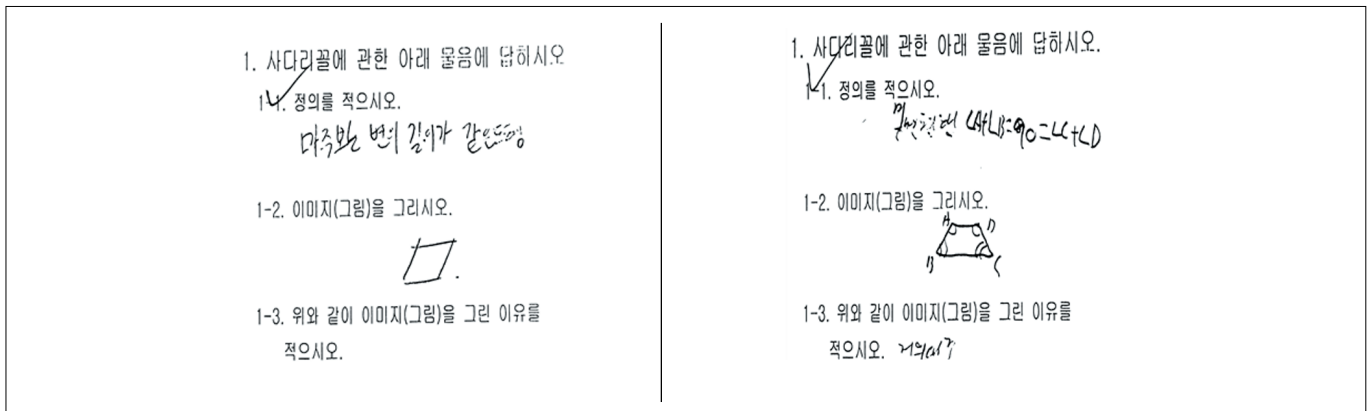


Figure 2. Cases of definition and image about trapezoid (left: S1, right: S2).

평행사변형의 경우(Figure 3), 학생 S3은 중학교 3학년 남학생이고 중위권이다. 학생 S3은 평행사변형의 개념 이미지를 ‘교과서 등에서’ 그려진 그림을 기억’하여 그렸다고 응답하였고, 평행사변형의 정의를 기술하는 과정에서는 ‘이미지에 그려진 두 쌍의 대변의 길이가 같다’는 성질을 기억하였다고 응답하였다. 학생 S4는 중학교 2학년 남학생이고 하위권이다. 학생 S4는 평행사변형의 개념 이미지를 ‘수학책에 그려진 마주보는 길이가 같은 사각형을 기억’하여 그렸다고 응답하였고, 평행사변형의 정의 기술 과정에서는 ‘평행사변형의 이름과 더불어 개념 이미지에 그려진 대변의 길이가 같다’는 성질을 기억하였다고 하였다.

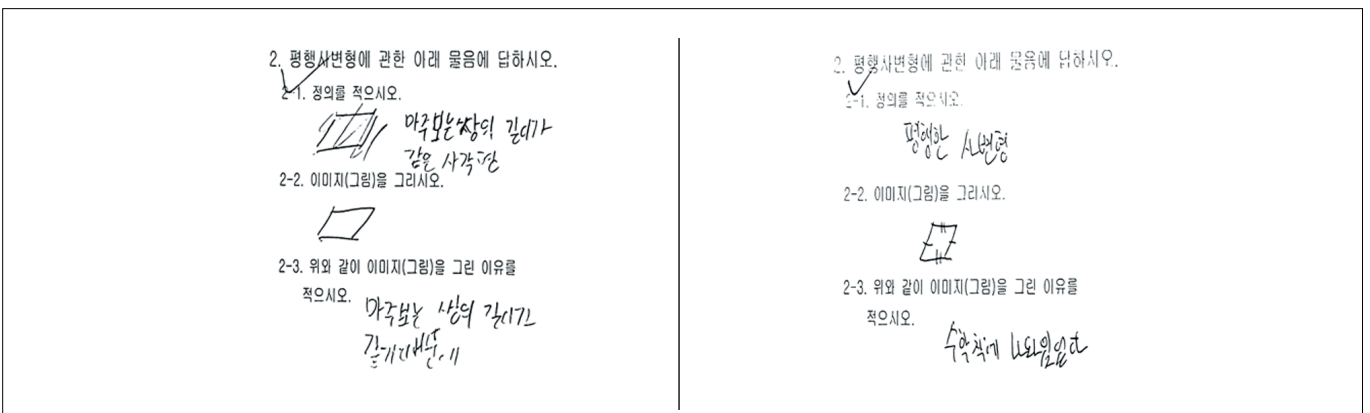


Figure 3. Cases of definition and image about parallelogram (left: S3, right: S4).

마름모의 경우(Figure 4), 학생 S5는 중학교 3학년 여학생이고 중위권이다. 학생 S5는 마름모의 개념 이미지를 ‘이름과 관련된 다이아몬드 또는 방석 등’을 생각해서 그렸다고 응답하였고, 마름모의 정의 기술 과정에서는 이름과 관련된 것(예. 다이아몬드) 이외에는 기억하지 못하였다고 하였다. 학생 S6은 고등학교 1학년 남학생이고 하위권이다. 학생 S6은 마름모의 개념 이미지를 ‘초등학교에서도 배운 적이 있다는 것과 이름과 관련된 피자 포장 박스 등’을 생각해서 그렸다고 응답하였고, 마름모의 정의 기술 과정에서 평행하다는 성질 이외에는 기억하지 못하였다고 하였다.

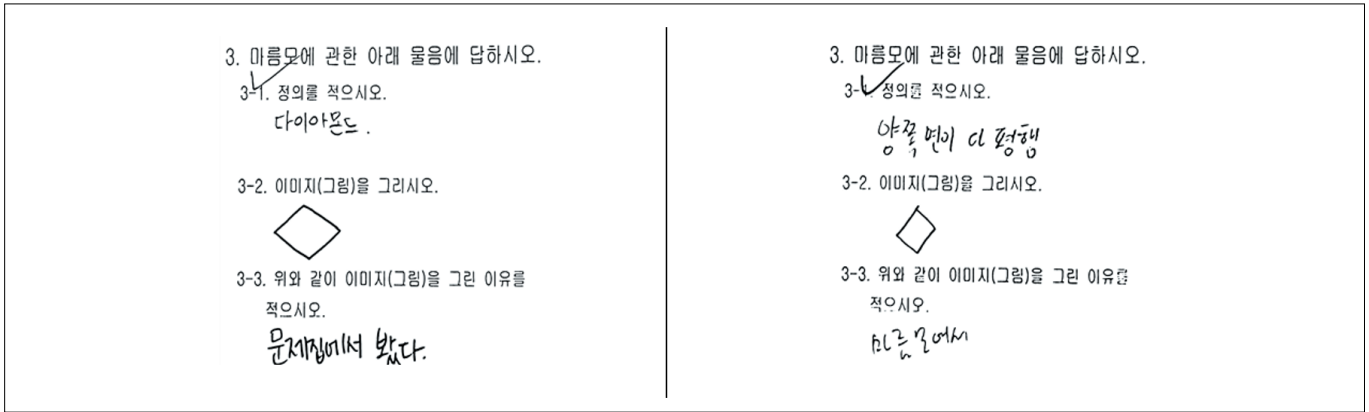


Figure 4. Cases of definition and image about rhombus (left: S5, right: S6).

직사각형의 경우(Figure 5), 학생 S7은 중학교 3학년 남학생이고 하위권이다. 학생 S7은 직사각형의 개념 이미지를 ‘길쭉한 모양, 책에서 본 것’으로 기억해서(떠올라서) 그렸다고 하였고, 직사각의 정의 기술 과정에서 ‘변이 평행하다’는 성질을 이용하고 있다. 학생 S8은 중학교 3학년 남학생이고 하위권이다. 학생 S8은 직사각형의 개념 이미지를 ‘모든 면과 각이 같은 사각형’으로 기억해서 그렸다고 하였고, 직사각형의 정의 기술 과정에서 ‘초등학교에서 배운 두 변의 길이가 같다’는 성질을 이용했다고 응답하였다.

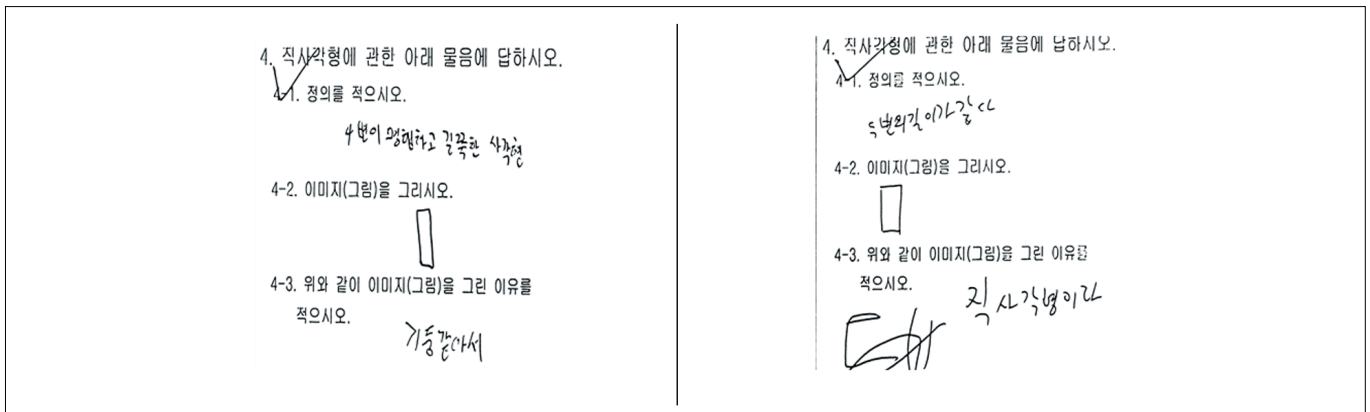


Figure 5. Cases of definition and image about rectangle (left: S7, right: S8).

정사각형의 경우(Figure 6), 학생 S9는 중학교 2학년 남학생이고 중위권이다. 학생 S9는 정사각형의 개념 이미지를 ‘네 각이 같고 대각선이 수직인 것’을 주목하여 그렸다고 하였고, 정사각형의 정의 기술 과정에서도 ‘네 각이 같고 대각선이 수직인 것’과 ‘네 변의 길이가 같다’는 것을 이용하고 있다. 학생 S10은 고등학교 1학년 남학생이고 하위권이다. 학생 S10은 정사각형의 개념 이미지를 ‘자신이 그린 그대로 기억난 것’으로 그렸고 ‘변만 같으면 된다.’고 응답하였고, 정사각형의 정의 기술 과정에서 변의 길이가 모두 같다는 것을 이용하였다.

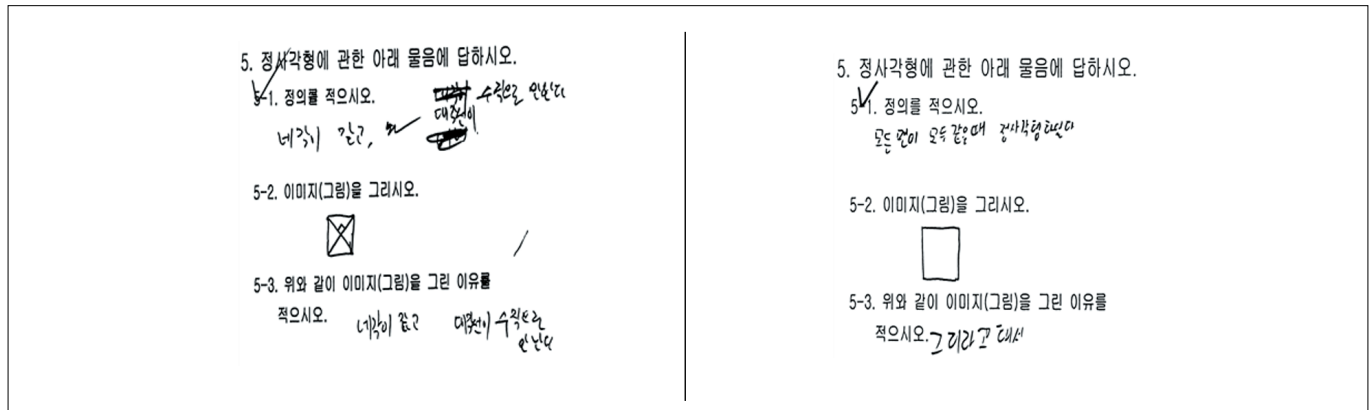


Figure 6. Cases of definition and image about rectangle (left: S7, right: S8).

위의 사례에서 살펴보았듯이 면담 과정에서 불완전한 기억을 바탕으로 응답한 경우도 있었지만, 면담에 참여한 학생의 사각형의 개념 정의와 관련된 응답 내용을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 사다리꼴의 경우 사다리꼴의 명칭, 각의 성질 등을 반영하거나 평행사변형으로 오해하였다. 둘째, 평행사변형의 경우 평행사변형의 명칭과 교과서를 본 기억(시각적인 이미지)을 반영하였다. 셋째, 마름모의 경우 평행사변형의 성질, 참고서를 본 기억, 명칭과 관련된 피자박스 상기(시각적인 이미지) 등을 반영하였다. 넷째, 직사각형의 경우 평행, 수직과 변의 길이가 같다 등의 성질과 교과서에서 본 기억(시각적인 이미지)을 반영하였다. 다섯째, 정사각형의 경우 변의 길이가 같다는 성질, 대각선의 각과 관련된 마름모의 성질, 정사각형의 이미지 등을 반영하였다.

면담 결과를 요약하면, 학생은 사각형의 이름, 교과서에서 본 기억 등을 바탕으로 한 이미지와 변의 길이 관계, 대각선의 성질, 각 또는 각의 관계 등을 반영하여 사각형의 개념 정의를 기술하였다고 응답하였고, 이는 검사 분석 결과와 일치하는 것으로 파악되었다.

## 결론 및 제언

이 연구에서는 중학생과 고등학생을 대상으로 사각형에 대한 개념 정의의 이해 정도를 분석하고 사각형의 개념 이미지에 대한 현상을 탐색하고자 하였다. 이를 위해 선행 연구를 바탕으로 검사 도구를 개발하고 중학교 2학년, 중학교 3학년, 고등학교 1학년을 대상으로 검사하였다. 검사 결과를 토대로, 사각형 개념에 대한 학생의 이해도를 분석하고 대부분의 학생이 인식하는 사각형의 이미지를 조사한 후, 사각형 개념을 이해하지 못하는 학생과 관련된 현상을 분석하고, 마지막으로 사각형에 대한 개념 이미지 형성 원인을 조사하였다. 연구 결과를 토대로 한 결론은 다음과 같다.

먼저, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형의 5개 사각형 개념 정의에 대한 이해 정도는 통계적으로 학년별(중학교 2학년, 중학교 3학년, 고등학교 1학년)로 차이가 없는 것으로 나타났다. 즉, 학년이 올라감에 따라 자연스럽게 사각형의 개념 정의에 대한 이해도가 향상된다고 볼 수 없다. 특히 모든 학년에서 다른 사각형과 비교하여 마름모 개념 정의에 대한 이해도가 가장 낮은 것으로 나타났다. 이러한 결과는 마름모의 이미지, 정의, 속성에 대한 대학생의 성취도가 다른 사각형 비해 낮다는 선행 연구 결과(Fujita, 2012)를 뒷받침하는 근거가 될 수 있다. 한편, 정사각형에 대한 개념 정의는 여학생이 남학생보다 더 잘 이해하지만 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형에 대한 개념 정의에 대한 이해 정도는 성별로 차이가 없는 것으로 나타났다. 즉, 정사각형을 제외한 다른 4개의 사각형에 대하여 남학생과 여학생의 이해 정도가 같다고 할 수 있다. 사각형 개념 이해도에 성차가 거의 없다는 것은 공간기하 능력에 유의미한 성차가 없다는 최근 연구(Chang et al., 2020)와 같은 맥락을 유지한다고 볼 수 있다. 사각형 개념 정의의 이해 정도에 대한 학년별 분석 결과는 교육과정에서 사각형을 다루는 시점에 사각형 개념에 대한 학습이 잘 이루어질 수 있도록 좀 더 효과적인 사각형 정의 지도를 위한 교수-학습 방안이 모색되어야 하는 필요성을 드러낸다고 할 수 있다.

둘째, 사각형 개념 정의를 이해하지 못하는 학생은 학년이 올라갈수록 사각형 개념과 관련하여 개념 이미지의 영향을 점점 더 크게 받고, 사각형의 개념 이미지를 분리하여 사각형의 개념 정의를 사고(예. 기억, 주의)하는 것에 더 힘들어하는 것으로 나타났다. 또한 사각형 개념 정의를 다루는 시점에서 개념을 이해하지 못한 학생은 사각형의 개념 정의를 기술할 때, 사각형 개념 이미지의 전체적인 모양새, 부분적인 성질(예. 변의 길이, 대각선, 각 등)에 주목함으로써 사각형의 개념 정의를 기술한다는 것을 알 수 있었고, 이러한 경향성은 면담에서도 그대로 드러났다. 이는 각 사각형 교수·학습 과정에서 사각형 개념을 개념 이미지를 포함하여 다른 전략을 모색하여 사각형 개념 정의를 지도할 필요가 있음을 시사한다.

셋째, 학생이 자신의 사각형 개념 이미지를 형성할 때 대체적으로 정의, 교과서 또는 교사, 사각형의 명칭 등의 순서로 영향을 많이 받는다고 인식하는 것으로 나타났다. 특히, 사각형의 성질에 영향을 받는다고 응답한 학생은 드물었고, ‘동료 학생’에 영향을 받는다고 인식한 학생은 전혀 없었다. 그러나 전반적으로 학년이 올라갈수록 사각형의 정의의 영향은 줄어들고 교과서나 교사의 영향이 증가하는 경향을 보여주었다. 이는 학년이 올라갈수록 사각형의 정의를 직접 다루는 기회보다 문제를 해결하는 과정에서 사각형을 시각적으로 다루거나 성질을 적용하는 기회가 많아지기 때문인 것으로 해석된다.

마지막으로, 이 연구의 결과를 바탕으로 한 제언은 다음과 같다. 첫째, Fujita (2012)의 연구와 더불어 이 연구의 결과를 사각형 개념 교수·학습에 반영하면 사각형에 관련된 학생의 오개념 발견과 교정에 도움이 될 수 있을 것이다. 둘째, 이 연구에서 발견된 오류 유형 및 관련된 현상이 다른 기하 개념에서는 어떠한 양상으로 드러나는지에 대한 연구를 제언한다. 셋째, 개념 이미지와 개념 정의와 관련된 사각형의 이해가 사각형의 성질 및 포함 관계의 이해에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 추가적인 연구를 제언한다.

## References

- Chang, H. S., Hong, J. A., & Lee, B. (2020). An analysis on middle school students' space geometrical thinking based on cylinder. *The Mathematical Education*, 59(2), 113-130. <https://doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.2.113>
- Cho, Y. M. (2010). A study on the mutual relation of quadrilateral in history of mathematics education of south korea. *School Mathematics*, 12(3), 389-410.
- Choi, S. I., & Kim, S. J. (2012). A Study on defining and naming of the figures in the elementary mathematics - focusing to 4th grade geometric domains. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 15(4), 719-745.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Macmillan.
- Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5(3), 281-303.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211. <https://doi.org/10.1080/0950069980201003>
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 60-72. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20. <https://doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Ha, Y-J. (2018). *A study on the teaching and learning of quadrilaterals by using symmetry* [Master thesis, Seoul National University].
- Han, H-S. (2008). The use of the Geometer's Sketchpad in eighth-grade students' quadrilateral learning. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 11(3), 513-541.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics Winter Edition*, 11(1), 61-76.
- Hwang, S., & Yoe, S. (2020). Gender differences in Korean elementary students: an analysis of TIMSS 2011 and 2015 fourth grade mathematics assessment. *The Mathematical Education*, 59(3), 217-235. <https://doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.3.217>
- Kim, J-W. (2016). An analysis of 2nd grade students' concept image about the triangle. *School Mathematics*, 18(2), 427-442.
- Kim, H-J., & Kang, W. (2008). An analysis on the teaching quadrilaterals in the elementary school mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, 11(2), 141-159.

- Lee, J. K. (2006). A study of Korea middle school students' cognitive level of geometry and geometry curriculum based on van Hiele theory. *Educational Research Institute Dongguk University*, 17, 55-85.
- Lee, S. Y. (2008). *Correlation between the mathematical problem-solving and language skills in context: compared according to gender* [Master thesis, Ajou University].
- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(99\)80058-5](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80058-5)
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179-196. <https://doi.org/10.1023/A:1004175020394>
- Na, H-L. (2013). *Analysis on the conceptualizing process of the fourth grade elementary student in relation to the quadrilaterals in the dynamic geometry environment* [Master thesis, Seoul National University of Education].
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Noh, J. W., Lee, K-H., & Moon, S-J. (2019). Case study on the learning of the properties of quadrilaterals through semiotic mediation - focusing on reasoning about the relationships between the properties -. *School Mathematics* 21(1), 197-214. <https://doi.org/10.29275/sm.2019.03.21.1.197>
- Noh, Y-A., & Ahn, B-G. (2007). An analysis on error of fourth grade student in geometric domain. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 11(2), 199-216.
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007) Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland, *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 41-8. South Korea, July 2007.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *L'Image mentale chez l'enfant. Etudes sur le développement des Représentations des âges*, Presses Universitaires de France.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Basic Books.
- Pickreign, J. (2007). Rectangle and rhombi: how well do pre-service teachers know them? *Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers, 1, content knowledge*. Available online at: <http://www.k-12prep.math.ttu.edu> (published February 2007; accessed 18 June 2007).
- Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. In D. Holton (ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 283-299). Kluwer Academic Publishers. [https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7\\_26](https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_26)
- Rosch, E., & Mervis, C. (1975). Family resemblances: studies in the internal structures of categories. *Cognitive Psychology*, 7, 573-605. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(75\)90024-9](https://doi.org/10.1016/0010-0285(75)90024-9)
- Ryu, H. J. (2009). Mathematics and curriculum and textbook analysis 2009 on triangle and square. *Journal of Elementary Education Research*, 25(1), 71-91.
- Shin, Y. J. (2017). *An analysis of concept images of quadrilaterals of second-year elementary students* [Master thesis, Gyeongin National University of Education].
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies In Mathematics*, 18, 371-397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn College, School of Education (Original work published 1959).
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305. <https://doi.org/10.1080/0020739830140305>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. [https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_5](https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5)
- Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. C. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (pp. 39-285). Plenum Press.