The Journal of the Convergence on Culture Technology (JCCT)
Vol. 8, No. 3, pp.485-491, May 31, 2022. pISSN 2384-0358, eISSN 2384-0366

http://dx.doi.org/10.17703/JCCT.2022.8.3.485
JCCT 2022-5-60

주문량의 크기에 따라 신용거래 기간이 허용되는 상황 하에 선형적으로 감소하는 고객 수요를 고려한 퇴화성제품의 최적 가격 및 재고정책

Distributor's pricing and ordering policies with linearly price dependent demand for decaying products under order-size-dependent delay in payments

신성환*

Seong-Whan Shinn*

요 약 전통적인 경제적주문량(Econo,ic Orde Quantity: EOQ) 모형은 제품을 공급 받는 즉시 제품의 구입비용을 지불한다는 기본 가정 하에 모형을 분석하였다. 그러나 제품 공급자는 경쟁 기업과의 차별화 수단으로 제품의 구입비용에 대하여 일정 기간 지불 유예를 허용하고 있으며, 또한 이와 같은 신용거래는 공급자의 수요 증대를 목적으로 거래량에 따라 탄력적으로 허용되는 것이 더 일반적이라고 볼 수 있다. 중간유통자 입장에서 볼 때 신용거래는 제품 구입비용에 대한 일시적인 유용이 가능하여 결과적으로 재고 투자 비용을 절감하는 효과를 기대할 수 있고, 결국 최종 고객의 수요 증대를 목적으로 판매 가격을 낮추는 요인이 될 수 있다. 이와 같은 관점에서 고객의 연간 수요는 중간유통자의 판매 가격에 선형적으로 감소하는 함수라는 가정 하에 중간유통자 관점의 최적 주문량과 판매 가격을 결정하는 모형을 분석하고자 한다. 문제 분석을 위하여 제품은 시간이 경과함에 따라 일정율로 퇴화한다는 경우에 중간유통자의 연간 수익에 대한 모형을 수립하고, 총 수익을 최대화하는 경제적 주문량과 판매 가격 결정으로 위한 해법을 제시하고자 한다.

주요어 : 신용거래, 판매가격, 경제적주문량, 선형수요함수, 퇴화

Abstract The traditional economic order quantity (EOQ) model is analyzed under the basic assumption that the purchase price is paid immediately upon receiving the product. However, product suppliers may allow a certain period of deferral of payment for product purchase costs in order to differentiate themselves from competitors. From the distributor's point of view, such a credit transaction can temporarily divert product purchase costs, resulting in a reduction in inventory investment costs, and ultimately, a factor that lowers the selling price for the purpose of increasing end-customer demand can be. In addition, in that credit transactions are provided for the purpose of increasing the demand of suppliers as a means of differentiation from competitors, it is more general to be allowed flexibly according to the transaction volume. In this regard, assuming that the end customer's demand is represented by a linear decreasing function of the distributor's selling price, this study analyzes a model for determining the distributor's pricing and ordering policies under order-size-dependent delay in payments. For the analysis, we also assume that the inventory is depleted not only by customer's demand but also by decaying.

Key words : Credit Period, Price, Lot-size, Linear Demand Function, Deterioration

*정회원, 한라대학교 신소재화학공학과 교수 (제1저자)
접수일: 2022년 3월 29일, 수정완료일: 2022년 4월 20일
게재확정일: 2022년 4월 23일
Received: March 29, 2022 / Revised: April 20, 2022
Accepted: April 23, 2022
*Corresponding Author: swshinn@halla.ac.kr
Dept. of Advanced Materials & Chemical Engineering, Halla Univ, Korea

Ⅰ. 서 론

전통적인 경제적주문량(Econo,ic Orde Quantity: EOQ) 모형은 제품을 공급 받는 즉시 제품의 구입비용을 지불한다는 기본적인 가정 하에 모형을 분석하였다. 그러나 일반적으로 공급자는 경쟁 기업과의 차별화를 목적으로 제품의 구입비용에 대하여 일정기간 지불 유예를 허용하는 것이 관례이다. 이러한 관점에서 최근 공급자가 구입비용에 대하여 일정 기간 거래 금액의 지불 유예를 허용하는 상황을 고려한 재고 모형에 대한 연구가 수행되어 왔다. Goyal [1], Chung [2] 그리고 Teng et al. [3]은 이와 같은 신용거래의 가정 하에 중간유통자의 최적 재고정책에 대한 연구를 수행하였다. 분석 결과에 따르면, 공급자로 부터의 신용거래는 중간유통자의 재고 투자 비용을 줄이는 수단이 되고, 따라서 중간유통자는 이와 같은 재고 투자비용의 절감을 통하여 고객의 수요가 늘어나기를 기대하면서 고객에 대한 판매 가격을 할인할 수 있게 된다.

한편, 이와 같은 신용거래하의 재고정책의 경우 중간유통자의 주문량은 최종 고객의 수요에 영향을 받기 때문에 중간유통자의 주문량의 크기와 판매 가격의 결정은 동시에 다루어지는 것이 타당하게 여겨진다. 이와 같은 관점에서 Dye and Ouyang [4] 및 Ouyang et al. [5]는 고객의 수요가 공급자의 판매 가격의 가격 탄력함수(a constant price elasticity function)라는 가정 하에 주문량과 판매가격을 동시에 결정하는 문제를 분석하였다. 또한 Avinadav et al. [6] 및 Shi et al. [7]은 수요가 공급자의 판매 가격에 따라 감소하는 선형 함수(a linearly decreasing function)라는 가정 하에 동일한 문제를 발표하였다.

이상의 연구들은 공급자가 허용하는 신용기간이 중간유통자의 주문량에 무관하게 동일하게 주어진다는 가정 하에 문제를 분석하였다. 그러나 이와 같은 신용거래가 경쟁 기업과의 차별화 수단의 하나로 수요 증대를 목적으로 제공되어 진다는 측면으로 보면 신용거래기간이 거래량에 따라 탄력적으로 허용되는 것이 더 일반적이라고 볼 수 있다. 이와 같은 관점으로 최근에 Shinn [8]은 수요가 중간 유통자의 판매 가격에 따라 선형적으로 감소하는 함수라는 가정 하에 신용 거래 기간이 중간유통자의 거래량에 따라 종속적으로 주어지는 상황을 고려하여 중간유통자의 주문량과 판매가격을 결정하는 모형을 분석하였다. 앞에서 제시한 연구들은 모두 다 제품의 특성이 시간의 경과에 상관없이 일정하게 지속된다는 가정으로 모형을 분석하였다. 이 가정은 시간의 경과해도 제품의 특성이 퇴화하지 않는 경우에는 적절하지만, 시간이 지남에 따라 제품의 특성이 퇴화되어 못 쓰게 되는 많은 제품을 볼 수 있다. 이와 같은 이유로 Ghare and Schradr [9]는 일정률로 퇴화하는 제품에 대한 재고 모향을 발표하였다. 최근에 Tsao and Sheen [10]은 신용거래의 가정 하에 일정률로 퇴화하는 제품에 대한 주문량 및 판매 가격 결정 문제를 분석하였다.

본 연구는 신용거래 하에 고객의 수요가 판매 가격의 선형 감소함수라는 가정 하에 일정률로 퇴화하는 제품에 대한 재고 모형을 분석하고자 한다. 문제 분석을 위해 공급자로부터 허용되는 신용거래 기간은 중간유통자의 거래량의 크기에 따라 종속적으로 주어지는 상황을 고려하고, 중간유통자 입장에서의 최적 판매가격 및 주문량을 결정하는 문제를 분석하고자 한다.

Ⅱ. 중간유통자의 수리모형

본 연구는 Shinn [8]의 연구 결과를 일정율로 퇴화하는 제품의 경우로 확장한 모형으로 제품 퇴화에 대한 가정을 제외하면, Shinn [8]의 가정과 동일하다. 본 연구에서는 다음의 가정과 기호를 사용한다.

<가정>

(1) 고객의 수요는 중간유통자의 판매 가격의 선형 감소함수(a linearly decreasing function)로 나타난다.

(2) 공급자는 중간유통자의 제품 대금에 대하여 신용거래를 허용하고, 신용거래 기간은 중간유통자의 주문량에 따라 종속적으로 허용된다.

(3) 신용거래기간 동안 중간융통자의 제품 대금의 일시적으로 유용이 가능하여 일정한 이자율(I)로 수익이 발생하고, 신용거래 기간이 경과된 후 구입한 제품에 대한 제품 대금의 지불로 남아있는 재고에 대해 일정 이자율(R)로 재고투자비용이 발생하게 된다.

(4) 제품은 일정율(λ)로 퇴화한다.

<기호>

C = 단위 제품 가격.

S = 주문 비용.

H = 재고투자비용을 제외한 재고유지비용.

The Journal of the Convergence on Culture Technology (JCCT)
Vol. 8, No. 3, pp.485-491, May 31, 2022. pISSN 2384-0358, eISSN 2384-0366

R = 재고투자비용(% 값).
I = 투자수익률(% 값).
D = 연간 수요, $D = a - bP$, a, b 는 양의 상수
P = 단위 판매 가격($< a/b$)
λ = 퇴화율
Q = 주문량.
T = 주문주기.
tc_j = 주문량에 종속적으로 주어지는 신용 기간, $v_{j-1} \le TDC < v_j$, $tc_{j-1} < tc_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$ 그리고 $v_0 < v_1 < \cdots < v_m$, $v_0 = 0$, $v_m = \infty$.
$q(t)$ = t 시점의 재고 수준.

Ghare and Schradr [9]가 제시한 대로 재고가 일정율(λ)로 퇴화하는 경우, t 시점의 퇴화량은 시점 t 의 재고 수준에 비례하고 따라서 시점 t 의 재고 감소율은

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\lambda q(t) - D \quad (1)$$

이 된다. 식 (1)은 일차선형미분방정식으로 해를 구하면,

$$q(t) = q(0)e^{-\lambda t} - \frac{D}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (2)$$

이 되고, 식 (2)는 고객의 수요와 시간에 따른 퇴화를 반영한 시점 t 의 재고 수준을 나타낸다. $q^0(t)$를 시점 t 에 퇴화에 의한 재고 소모량을 고려하지 않은 재고 수준이라고 정의 하면, 퇴화에 의한 재고 소모량

$$q^0(t) - q(t)$$
$$= (q(0) - Dt) - \left(q(0)e^{-\lambda t} - \frac{D}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \right) \quad (3)$$
$$= q(t)(e^{\lambda t} - 1) - Dt + \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) \quad (4)$$

이 된다. 따라서 주기당 주문량, Q 는

$$Q = (q^0(T) - q(T)) + DT \quad (5)$$

이 된다. 수요가 일정한 경우 재고투자비용의 발생으로 인하여 재고 수준이 0이 되었을 때 재주문(reorder)이 발생하게 되므로 $q(T) = 0$이 되고,

$$Q = \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda T} - 1) \quad (6)$$

이 된다. 또한 1회 주문량이 Q 이므로 $q(0) = Q$가 되고, 결국 시점 t 의 재고수준은 다음과 같다.

$$q(t) = \frac{D}{\lambda}(e^{\lambda(T-t)} - 1), \ 0 \le t \le T \quad (7)$$

중간유통자의 연간 이익식, $\Pi(P, T)$ 다음과 같이 다섯 가지 비용 항목으로 구성된다.(그림 1, 2 참고)

(1) 연간 판매수입 $= PD$
(2) 연간 구매비용 $= CQ/T = CD(e^{\lambda T} - 1)/\lambda T$
(3) 연간 주문비용 $= S/T$,
(4) 연간 재고유지비용 $= \frac{H}{T}\int_0^T q(t)dt$
$= \frac{HD(e^{\lambda T} - \lambda T - 1)}{\lambda^2 T}$.
(5) 연간 재고투자비용
1) Case 1($tc_j \le T$) : 신용거래 기간(tc_j) 중의 판매 부분에 해당하는 제품 대금은 신용거래 기간 동안 지불이 유예되어 투자 수익률 I 로 이자 수익이 발생하게 된다. 그림 1 에 나타난 대로 $(0, tc_j)$ 동안의 평균 수요량은 $\frac{1}{2}Dtc_j$ 이고, 이 기간 동안의 수익은 $\frac{1}{2}Dtc_j \cdot tc_j CI$ 가 된다. 지불 유예 기간이 만료됨에 따라 제품 대금은 지불되고, (tc_j, T) 동안의 평균 재고량 $\frac{1}{(T - tc_j)}\int_{tc_j}^T q(t)dt$ 에 대해 재고투자비용 $CR\int_{tc_j}^T q(t)dt$ 이 발생하게 된다.

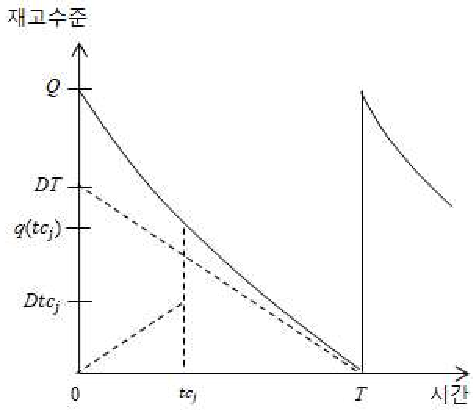

그림 1. 신용기간(tc_j) vs. 주기시간(T), $tc_j \le T$
Figure 1. Credit Period (tc_j) vs. Cycle Time (T).

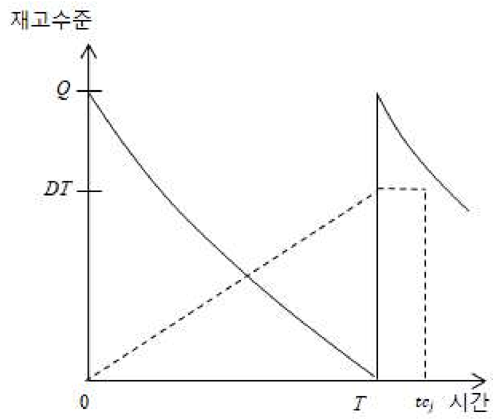

그림 2. 신용기간(tc_j) vs. 주기시간(T), $tc_j > T$
Figure 2. Credit Period (tc_j) vs. Cycle Time (T).

결과적으로

연간 재고투자비용 $= \frac{1}{T}\left\{CR\int_{tc_j}^{T} q(t)dt - \frac{CIDtc_j^2}{2}\right\}$

$= \frac{1}{\lambda^2 T}CRD(e^{\lambda(T-tc_j)} - \lambda(T-tc_j) - 1) - \frac{CIDtc_j^2}{2T}$

이 된다.

(ii) Case 2($tc_j > T$) : 신용거래 기간(tc_j)이 주기 시간(T) 보다 큰 경우 모든 제품 대금은 신용 거래 기간 동안 투자 수익률 I 로 수익이 발생하게 된다. 그림 2 에 나타난 대로 $(0, T)$ 동안의 평균 재고량은 $DT/2$ 이고, (T, tc_j) 동안의 평균 재고량은 DT 가 되어

연간 재고투자비용

$$= -\frac{1}{T}\left\{\frac{DT}{2}TCI + DT(tc_j - T)CI\right\}$$

$$= \frac{CIDT}{2} - CIDtc_j$$

이 된다. 따라서 tc_j 와 T 의 상대적 크기에 따라 $\Pi(P, T)$는 다음과 같이 두 가지 식으로 나타 낼 수 있다.

(1) Case 1($tc_j \le T$)

$$\Pi_{1,j}(P,T) = PD - \frac{CD(e^{\lambda T}-1)}{\lambda T} - \frac{S}{T} - \frac{HD(e^{\lambda T} - \lambda T - 1)}{\lambda^2 T} - \left(\frac{CRD(e^{\lambda(T-tc_j)} - \lambda(T-tc_j) - 1)}{\lambda^2 T} - \frac{CIDtc_j^2}{2T}\right)$$

$$, \ TDC \in [v_{j-1}, v_j), \ j = 1, 2, \cdots, m. \quad (8)$$

(2) Case 2($tc_j > T$)

$$\Pi_{2,j}(P,T) = PD - \frac{CD(e^{\lambda T}-1)}{\lambda T} - \frac{S}{T} - \frac{HD(e^{\lambda T} - \lambda T - 1)}{\lambda^2 T} - \left(\frac{CIDT}{2} - CIDtc_j\right)$$

$$, \ TDC \in [v_{j-1}, v_j), \ j = 1, 2, \cdots, m. \quad (9)$$

III. 중간유통자의 최적 재고정책

본 연구는 식 (8), (9)로 모형화된 중간유통자의 연간 총이익을 최대화하는 판매 가격(P^*)과 발주 주기(T^*)를 구하는 문제 이다. 일단 T^* 를 구하면, 식(6)에 의하여 최적 주문량(Q^*)을 계산 할 수 있다. 식 (8)과 (9)는 식의 구조상 미분은 가능 하지만, 수학적으로 매우 다루기 어렵다는 것을 알 수 있다. 따라서 다음과 같은 지수항에 대한 테일러 급수 전개(a truncated Taylor series expansion), 즉

$$e^{\lambda T} \approx 1 + \lambda T + \frac{1}{2}\lambda^2 T^2 \quad (10)$$

를 적용하면, 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$\Pi_{1,j}(P,T) = PD - CD - \frac{S}{T} - \frac{(H + C\lambda)DT}{2} - \left(\frac{C(R-I)Dtc_j^2}{2T} + \frac{CRDT}{2} - CRDtc_j\right)$$

$$, \ TDC \in [v_{j-1}, v_j), \ j = 1, 2, \cdots, m. \quad (11)$$

$$\Pi_{2,j}(P,T) = PD - CD - \frac{S}{T} - \frac{(H + C\lambda)DT}{2} - \left(\frac{CIDT}{2} - CIDtc_j\right)$$

$$, \ TDC \in [v_{j-1}, v_j), \ j = 1, 2, \cdots, m. \quad (12)$$

식 (11)과 (12)는 Shinn [8]이 발표한 모형에서 H 를 $H + C\lambda$로 바꾼 결과와 동일한 식으로 나타났고, 따라서 본 연구에서 다루는 퇴화성 모형의 경우 H 를 $H + C\lambda$로 바꾼 후 Shinn [8]의 분석 결과를 그대로 적용하여 근사적 해를 구할 수 있다. 다음은 Shinn [8]의 분석 결과에 H 를 $H + C\lambda$로 바꾼 결과이다.

중간유통자의 판매이익을 최대화하는 판매가격과 주문량을 결정하기 위하여 먼저 판매가격을 P^0로 가정하고, $\Pi(P^0, T)$ 의 특성을 분석 해 보면, $\Pi(P^0, T)$는 T에 대한 오목함수(Concave) 임을 알 수 있고, 각각의 극대값은 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$T_{1,j} = \sqrt{(2S + C(R-I)Dtc_j^2)/(H_1 D)}$$

$$, \ D = a - bP^0 \text{ 그리고 } H_1 = H + C\lambda + CR, \quad (13)$$

$$T_{2,j} = \sqrt{2S/(H_2 D)}$$

$$, \ D = a - bP^0 \text{ 그리고 } H_2 = H + C\lambda + CI \quad (14)$$

또한 $T_{i,j}$와 $\Pi_{i,j}(P^0, T)$는 Shinn [8]이 보인대로 다음의 특성을 갖는다.(증명 생략)

Property 1. $T_{1,j} < T_{1,j+1}$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$.

Property 2. $T_{2,j} = T_{2,j+1}$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$.

Property 3. 임의의 T에 대해서 $\Pi_{i,j}(P^0, T) < \Pi_{i,j+1}(P^0, T)$, $i = 1, 2$ 그리고 $j = 1, 2, \cdots, m-1$.

Property 4. 임의의 j 에 대해서 $T_{1,j} \ge tc_j$ 이면, $T_{2,j} \ge tc_j$이고, $\Pi_{2,j}(P^0, T)$ 는 $T < tc_j$ 에서 T에 대한 증가 함수이다. 또한 $T_{2,j} < tc_j$ 이면, $T_{1,j} < tc_j$이고, $\Pi_{1,j}(P^0, T)$ 는 $T \ge tc_j$ 에서 T에 대한 감소함수 이다.

이상의 결과로 부터 다음의 T 값, $T \in I_j = \{T | v_{j-1}/DC \le T < v_j/DC\}$, $j = 1, 2, \cdots, m$ 에서 $\Pi(P^0, T)$의 특성과 관련하여 다음의 정리를 유도 할 수 있다. 이 때 k 는 처음으로 $T_{2,j} < tc_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$, 인 값이다.

Observation 1. 다음의 T, $T \in I_j$, $j \ge k$에 대해서 다음

의 세 가지 경우를 고려 해 볼 수 있다.

(1) 만일 $T_{2,j} < v_{j-1}/DC$ 이면, v_{j-1}/DC 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다.

(2) 만일 $v_{j-1}/DC \le T_{2,j} < v_j/DC$ 이면, $T_{2,j}$ 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다.

(3) 만일 $v_j/DC \le T_{2,j}$ 이면, T^* 를 찾기 위해 T, $T \in I_j$ 는 고려할 필요가 없다.

Observation 2. 다음의 T, $T \in I_j$, $j < k$에 대해서 다음의 네 가지 경우를 고려 해 볼 수 있다.

(1) 만일 $T_{1,j} < v_{j-1}/DC$ 이면, v_{j-1}/DC 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다.

(2) 만일 $v_{j-1}/DC \le T_{1,j} < v_j/DC$ 이면, $T_{1,j}$ 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다.

(3) 만일 $tc_j < v_j/DC < T_{1,j}$ 이면, v_j^-/DC, $v_j^- = v_j - \epsilon$ 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다.

(4) 만일 $v_j/DC \le tc_j < T_{1,j}$ 이면, T^* 를 찾기 위해 T, $T \in I_j$ 는 고려할 필요가 없다.

Observation 3.

(1) 만일 $T_{1,j}$ 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다면, $T^* \ge T_{1,j}$ 이다. 즉, $\Pi(P^0, T)$를 최대화하는 T는 $T_{1,j}$ 보다 큰 값에서 발견된다.

(2) 만일 v_j^-/DC 에서 $\Pi(P^0, T)$, $T \in I_j$ 의 최대값이 나타난다면, $T^* \ge v_j^-/DC$ 이다. 즉, $\Pi(P^0, T)$를 최대화하는 T는 v_j^-/DC 보다 큰 값에서 발견된다.

이상의 정리로 부터 판매가격을 P^0로 가정했을 때, $\Pi(P^0, T)$ 를 최대화하는 T ($T^*(P^0)$)는 $\Omega = \{T_{i,j}(P^0), v_{j-1}/DC \ , v_j^-/DC \ , i = 1, 2, \ j = 1, 2, \cdots, m\}$ 에서 결정되고, 각각의 값들이 $T^*(P^0)$의 후보 값이 되기 위해서는 다음의 조건을 만족해야하는 것을 알 수 있다.

<조건 1> $T_{i,j}(P)$가 $T^*(P)$의 후보가 되기 위한 조건:

(Case 1)

$T_{1,j}(P) \ge tc_j$ 그리고 $v_{j-1}/DC \le T_{1,j}(P) < v_j/DC$,

(Case 2)

$T_{2,j}(P) < tc_j$ 그리고 $v_{j-1}/DC \le T_{2,j}(P) < v_j/DC$.

<조건 2> v_{j-1}/DC 가 $T^*(P)$의 후보가 되기 위한 조건:

(Case 1) $v_{j-1}/DC \ge tc_j$ 그리고 $v_{j-1}/DC > T_{1,j}(P)$,

(Case 2) $v_{j-1}/DC < tc_j$ 그리고 $v_{j-1}/DC > T_{2,j}(P)$.

<조건 3> v_j^-/DC 가 $T^*(P)$의 후보가 되기 위한 조건:

(Case 1) $v_j/DC > tc_j$ 그리고 $v_j/DC \le T_{1,j}(P)$,

(Case 2) 고려할 필요가 없다.

결과적으로 $T^*(P^0)$의 후보 값이 되기 위한 조건을 P 에 관하여 정리하면 다음과 같은 P 에 대한 부등식을 얻게 된다,

$T_{1,j}(P) \ge tc_j$는 $P \ge P1_j$, $P1_j = \frac{a}{b} - \frac{2S}{b(H + C\lambda + CI)tc_j^2}$ (15)

$\frac{v_{j-1}}{DC} \le T_{1,j}(P)$, $R > I$ 는 $P \ge P2_{j-1}$ 또는 $P \le P3_{j-1}$

$$P2_j = \frac{a}{b} + \frac{2SC^2 + \sqrt{4S^2C^4 + 4C^3(R-I)tc_j^2(H + C\lambda + CR)v_j^2}}{2bC^3(R-I)tc_{j+1}^2} \quad (16)$$

$$P3_j = \frac{a}{b} + \frac{2SC^2 - \sqrt{4S^2C^4 + 4C^3(R-I)tc_j^2(H + C\lambda + CR)v_j^2}}{2bC^3(R-I)tc_{j+1}^2} \quad (17)$$

$v_{j-1}/DC \le T_{1,j}(P)$, $R = I$ 는 $P \le P4_{j-1}$

$$P4_j = \frac{a}{b} - \frac{(H + C\lambda + CR)v_j^2}{2bSC^2} \quad (18)$$

$T_{1,j}(P) < v_j/DC$, $R > I$ 는 $P6_j < P < P5_j$

$$P5_j = \frac{a}{b} + \frac{2SC^2 + \sqrt{4S^2C^4 + 4C^3(R-I)tc_j^2(H + C\lambda + CR)v_j^2}}{2bC^3(R-I)tc_j^2} \quad (19)$$

$$P6_j = \frac{a}{b} + \frac{2SC^2 - \sqrt{4S^2C^4 + 4C^3(R-I)tc_j^2(H + C\lambda + CR)v_j^2}}{2bC^3(R-I)tc_j^2} \quad (20)$$

$T_{1,j}(P) < \frac{v_j}{DC}$, $R = I$ 는 $P > P4_j$

$T_{2,j}(P) < tc_j$ 는 $P < P1_j$

$T_{2,j}(P) < \frac{v_j}{DC}$ 는 $P > P7_j$

$$P7_j = \frac{a}{b} - \frac{(H + C\lambda + CI)v_j^2}{2bSC^2} \quad (21)$$

$T_{2,j}(P) \ge v_{j-1}/DC$ 는 $P \le P7_{j-1}$

$tc_{j+1} \le v_j/DC$ 는 $P \ge P8_j$

$$P8_j = \frac{a}{b} - \frac{v_j}{bCtc_{j+1}} \quad (22)$$

$tc_j < v_j/DC$ 는 $P > P9_j$

$$P9_j = \frac{a}{b} - \frac{v_j}{bCtc_j} \quad (23)$$

부등식 (15)에서 (23)로부터 집합 Ω 의 각 T 값들이 T^* 의 후보값이 되기 위한 조건은 다음과 같은 P 의 범위로 변경이 가능하다.

(PR-1) $T_{i,j}(P)$가 $T^*(P)$의 후보가 되는 P의 범위:

표 1. Case 1의 결과($tc \le T$)
Table 1. Results of Case 1($tc \le T$)

j	$T=T_{1,j}(P)$					$T=v_{j-1}/DC$					$T=v_j^-/DC$
	$P\in PR1_j$ and $P\le P_u$	$P_{1,j}$	$T_{1,j}(P_{1,j})$	Q^*	$\Pi(P,T)$	$P\in PR2_j$ and $P\le P_u$	$P_{1,j}$	v_{j-1}/DC	Q^*	$\Pi(P,T)$	$P\in PR3_j$ and $P\le P_u$
1	[1.846, 8.000]	5.535*	0.153*	482*	7265.94*	∅	–	–	–	–	∅
2	∅	–	–			[6.000, 8.000]	6.000	0.200	515	6990.63	∅
3	∅	–	–			[5.333, 8.000]	5.505	0.321	1051	7064.58	∅

* Optimal solution for Case 1.(Annual net profit, $7,265.94).

(Case 1) $PR1_j=\{P|P\ge P1_j\}$ $\cap$ $\{P|P\ge P2_{j-1}$ 또는 $P\le P3_{j-1}\}$ $\cap$ $\{P|P6_j<P<P5_j\}$, $R>I$
$PR1_j=\{P|P\ge P1_j\}$ $\cap$ $\{P|P4_j<P\le P4_{j-1}\}$, $R=I$
(Case 2) $PR1_j=\{P|P<P1_j\}$ $\cap$ $\{P|P7_j<P\le P7_{j-1}\}$

(PR-2) $\frac{v_{j-1}}{DC}$가 $T^*(P)$의 후보가 되는 P의 범위:
(Case 1) $PR2_j=\{P|P\ge P8_{j-1}\}$ $\cap$ $\{P|P3_{j-1}<P<P2_{j-1}\}$, $R>I$
$PR2_j=\{P|P\ge P8_{j-1}\}$ $\cap\{P|P>P4_{j-1}\}$, $R=I$
(Case 2) $PR2_j=\{P|P<P8_{j-1}\}$ $\cap\{P|P>P7_{j-1}\}$

(PR-3) v_j^-/DC가 $T^*(P)$의 후보가 되는 P의 범위:
(Case 1) $PR3_j=\{P|P>P9_j\}$ $\cap$ $\{P|P\ge P5_j$ 또는 $\{P|P\le P6_j\}$, $R>I$
$PR3_j=\{P|P>P9_j\}$ $\cap$ $\{P|P\le P4_j\}\}$, $R=I$

따라서 $P\in PR1_j$인 P에서 $T_{i,j}(P)$는 <조건 1>을 만족하고, 결과적으로 $T_{i,j}(P)$는 $T^*(P)$의 후보가 된다. 이때 $\Pi_{i,j}(P,T)$의 T를 $T_{i,j}(P)$로 치환하면, $\Pi_{i,j}(P,T)$는 P의 일변수 함수 $\Pi^0_{i,j}(P)=\Pi_{i,j}(P,T_{i,j}(P))$가 되고, 결국 $\Pi^0_{i,j}(P)$ 의 최대화 문제로 변환되는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 $P\in PR2_j$인 P에서 <조건 2>에 따라 v_{j-1}/DC 가 $T^*(P)$의 후보가 되고, $P\in PR3_j$인 P에서 <조건 3>에 따라 v_j^-/DC 가 $T^*(P)$의 후보가 되게 된다. v_{j-1}/DC와 v_j^-/DC 역시 P의 함수이므로 $\Pi_{i,j}(P,T)$의 T에 각 값을 치환하면, P의 함수 $\Pi_{i,j}(P,v_{j-1}/DC)$과 $\Pi_{i,j}(P,v_j^-/DC)$를 얻게 된다.

결과적으로 최적해 T^*와 P^*는 다음과 같은 P의 일변수함수의 최대화문제로부터 구할 수 있다.

$$\max_{P,T}\Pi(P,T) = \{ \max_{P\in PR1_j}\Pi^0_{i,j}(P),\ \max_{P\in PR2_j}\Pi_{i,j}(P,v_{j-1}/DC),\ \max_{P\in PR3_j}\Pi_{i,j}(P,v_j^-/DCP) \}. \tag{24}$$

<해법>

단계 1. (Case 1)

1.1 $P\in PR1_j$이고 $P\le a/b$인 P에 대하여 $\Pi^0_{1,j}(P)=\Pi_{1,j}(P,T_{1,j}(P))$, $j=1,2,\cdots,m$,를 최대화시키는 $P_{1,j}$를 결정한다.

1.2 $P\in PR2_j$이고 $P\le a/b$인 P에 대하여 $\Pi_{1,j}(P,v_{j-1}/DC)$, $j=2,3,\cdots,m$,를 최대화시키는 $P_{1,j}$를 결정한다.

1.3 $P\in PR3_j$이고 $P\le a/b$인 P에 대하여 $\Pi_{1,j}(P,v_j^-/DC)$, $j=1,2,\cdots,m-1$,를 최대화시키는 $P_{1,j}$를 결정한다.

단계 2. (Case 2)

2.1 $P\in PR1_j$이고 $P\le a/b$인 P에 대하여 $\Pi^0_{2,j}(P)=\Pi_{2,j}(P,T_{2,j}(P))$, $j=1,2,\cdots,m$,를 최대화시키는 $P_{2,j}$를 결정한다.

2.2 $P\in PR2_j$이고 $P\le a/b$인 P에 대하여 $\Pi_{2,j}(P,v_{j-1}/DC)$, $j=2,3,\cdots,m$,를 최대화시키는 $P_{2,j}$를 결정한다.

표 2. Case 2의 결과($tc>T$)
Table 2. Results of Case 2($tc>T$)

j	$T=T_{2,j}(P)$					$T=v_{j-1}/DC$				
	$P\in PR1_j$ and $P\le P_u$	$P_{2,j}$	$T_{2,j}(P_{2,j})$	Q^*	$\Pi(P,T)$	$P\in PR2_j$ and $P\le P_u$	$P_{2,j}$	v_{j-1}/DC	Q^*	$\Pi(P,T)$
1	∅	–	–	–	–	∅	–	–	–	–
2	[0.000, 5.400)	5.399	0.154	512	7247.5	(5.400, 6.000)	5.535*	0.163*	515	7270.28*
3	∅	–	–	–	–	[0.000, 5.333)	5.3329	0.299	1043	7060.96

* Optimal solution for Case 2. Also this solution is the global optimal solution with its annual net profit, $7,270.28.

단계 3. (최적해)

3.1 단계 1, 2에서 구한 값 중 최대값이 중간유통자의 최적 판매가격(P^*)괴 주문주기(T^*)가 된다.

3.2 T^*를 식 (6)에 대입하여 경제적주문량 Q^*를 결정한다.

Ⅳ. 예 제

중간유통자의 주문량에 따라 종속적으로 허용되는 신용거래가 퇴화성 제품의 재고 모형에 미치는 영향을 분석하기 위하여 다음과 같이 예제를 적용 해 보았다.

(1) $S = 50$[$/회], $C = 3$[$/단위], $H = 0.1$[$/단위·년], $R = 0.15(=15\%)$, $I = 0.1(=10\%)$ 그리고 $\lambda = 0.3$.

(2) 신용거래 기간

구입비용	신용거래기간
$0 \le TDC < \$1,500$	$tc_1 = 0.1$
$\$1,500 \le TDC < \$3,000$	$tc_2 = 0.2$
$\$30,000 \le TDC$	$tc_3 = 0.3$

판매가격에 선형적으로 감소하는 수요($D = a - bP$)를 고려하기 위하여, $a = 10,000$, $b = 1,250$로 가정하고, $P \le a/b(=8)$의 범위에서 최적해를 도출하였다. 최적해 도출 결과는 표 1, 표 2와 같이 나타났다.

Ⅴ. 결 론

본 연구는 Shinn [8]이 분석한 주문량에 따라 종속적으로 신용거래가 허용되는 상황을 고려한 재고 모형을 퇴화성 제품의 경우로 확장하였다. 문제 분석을 위하여 최종 고객의 수요는 중간유통자의 판매가격에 선형적으로 감소한다는 가정 하에 중간유통자의 재고 모형을 분석하였고, 분석 결과에 따르면 공급자로부터 허용되는 신용거래는 중간유통자의 재고 투자 비용을 줄이는 효과적인 수단이 되고, 따라서 중간유통자는 이와 같은 재고 투자 비용의 절감 효과로 부터 최종 고객의 수요 증대를 기대하면서 제품의 판매 가격을 할인할 수 있다는 사실을 확인하였고, 특히 최종 고객의 수요 패턴에 따라 탄력적으로 결정되는 것을 알 수 있었다. 또한 주문량에 따라 주어지는 신용 거래 기간은 중간유통자의 주문량을 증가시키는 요인이지만 제품의 퇴화는 주문량의 증가에 제한적인 요인이 될 수 있어 최적 주문량 결정에는 두 요인의 절충이 필요함을 알 수 있었다.

References

[1] S. K. Goyal, "Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments," J. of Opl Res. Soc., Vol.36, No.4, pp.335-338, 1985.

[2] K. J. Chung, "A theorem on the determination of economic order quantity under conditions of permissible delay in payments," Computers & Operations Research, Vol.25, No.1, pp49-52, 1998.

[3] J. T. Teng, C. T. Chang, M. S. Chern and Y. L. Chan, "Retailer's optimal ordering policies with trade credit financing," International Journal of Systems Sci., Vol.38, No.3, pp.269-278, 2007.

[4] C. Y. Dye and L. Y. Ouyang, "A particle swarm optimization for solving joint pricing and lot-sizing problem with fluctuating demand and trade credit financing," Computers & Industrial Engineering, Vol.60, pp.127-137, 2011.

[5] L. Y. Ouyang, C. H. Ho, and C. H. Su, "An optimization approach for joint pricing and ordering problem in an integrated inventory system with order-size dependent trade credit," Computers & Industrial Engineering, Vol.57, pp.920-930, 2009.

[6] T. Avinadav, A. Herbon and U. Spiegel, "Optimal ordering and pricing policy for demand functions that are separable into price and inventory age," International Journal of Production Economics, Vol.155, pp.406-417, 2014.

[7] J. Shi, R. Y. K. Fung and J. Guo, "Optimal ordering and pricing policies for seasonal products: Impacts of demand uncertainty and capital constraint," Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol.2016, Article ID 1801658, pp.1-13, 2016.

[8] S. W. Shinn "Optimal pricing and ordering policies with price dependent demand linearly under order-size-dependent delay in payments," International Journal of Advanced Culture Technology, Vol.9, No2, pp.91-99, 2021. http://dx.doi.org/10.17703/IJACT.2021.9.2.91

[9] P. M. Ghare and G. F. Schrader, "A model for an exponential decaying inventory," Journal of Industrial Engineering, Vol.14, pp.238-243, 1963.

[10]Y. C. Tsao and G. J. Sheen, "Joint pricing and replenishment decisions for deteriorating items with lot-size and time-dependent purchasing cost under trade credit," International Journal of Systems Sci.. Vol.38, No7, pp.549-561, 2007.