과학교육연구지, 46권 1호, pp. 121-149 (2022.04)
ISSN : 1225-3944
Jour. Sci. Edu, Vol. 46, No, 1, 121-149 (2022.04)
eISSN : 2733-4074

러시아의 국가통합시험에서 수학교과의 서술형 평가 연구

한인기* · 신블라디미르
경상국립대학교

A Study on Descriptive Assessment of Mathematics in Russia's Unified State Examination

Inki Han* · Vladimir Shin
Gyeongsang National University

Abstract : Descriptive assessment is a meaningful assessment method in relation to problem solving ability, reasoning ability, and communication ability as emphasized in mathematics curriculum. In Korea, as performance assessment has been emphasized since the 7th mathematics curriculum, descriptive assessment is being conducted as a method of performance assessment in schools. However, descriptive assessment has not been introduced in the university scholastic ability test for various reasons. Considering that descriptive assessment is emphasized in the mathematics classroom and has sufficient educational value, a serious discussion on the implementation of descriptive assessment in the university scholastic ability test will be necessary. In this study, we analyzed the descriptive assessment of Russia's unified state examination (USE) in the mathematics, which corresponds to Korea's university scholastic ability test. Through a literature review, we investigated how mathematics examination problems were structured in the USE and which mathematical abilities were required for the examination. In particular, the outer structure of the problems was analyzed focusing on the mathematics problems of the USE 2021, and the scoring method of the descriptive problems was also analyzed. The results of this study are expected to provide a variety of information on the possibility of introducing descriptive assessment in the Korean university scholastic ability tests.

keywords : descriptive assessment, Russia's unified state examination, outer structure of the problem, scoring method of the descriptive problem

Ⅰ. 서론

수학교육에 관련된 다양한 평가 중 많은 사람이 관심을 가지는 것의 하나가 대학수학능력시험의 수학 평가일 것이다. 우리나라는 대학수학능력시험에서 오랫동안 선택형과 단답형이 혼합된 형태의 수학 평가를 시행해 왔다.

최근에는 대학수학능력시험의 성격, 난이도, 출제 오류, 시행 횟수 등을 포함하는 전반적인 개선에 대한 다양한 사회적 요구가 이어지고 있다. 특히, Park (2014)은 대학수학능력시험의 구체적인 개선 방안을 제안하면서, '수능의 가장 큰 결함이 선다형 형태의 시험이라는 점이다. 따라서 주관식 형태의 시험을 추가하는 것은 수능의 커다란 약점을 보완하는 역할을 할 것'이라고 제안하기도 했다. 여기서 주관식 형태의 시험은 단답형 평가가 아닌 서술형 평가 또는 논술형 평가를 의미할 것이다.

선택형 평가를 보완할 수 있는 과정 중심의 평가가 이루어져야 한다는 주장은 오래전부터 지속적으로 제기되었다. 1981년에 고시된 제4차 수학과 교육과정 (Park, 1991, p. 493)에서 '문제해결 과정을 포함하는 종합적 사고력과 기능 등도 평가하도록 한다'고 했고, 1987년에 고시된 제5차 수학과 교육과정(Park, 1991, p. 536)에서는 '결과의 평가뿐만 아니라 계획과 과정까지도 고려하여, 문제해결 과정을 포함하는 종합적인 사고력과 기능도 평가하도록 한다'고 명시한 이후, 지금까지 과정 중심의 평가는 수학교육 평가의 주요한 원리 중의 하나로 강조되고 있다.

* 교신저자: 한인기 (inkiski@gnu.ac.kr)
** 2022년 2월 21일 접수, 2022년 3월 22일 수정원고 접수, 2022년 3월 22일 채택
http://dx.doi.org/10.21796/jse.2022.46.1.121

KICE(1999, p.2)는 ‘선택형 평가가 중시되는 상황 속에서 교수.학습의 중요한 목적은 그러한 지식이나 정보를 학생들이 많이 기억할 수 있도록 하는 것이 되고, 교수·학습 활동 속에서의 학생들은 교사가 제시하는 지식이나 정보를 수동적으로 받아들이거나 단순히 재생산하는 존재로 간주된다’고 하면서, 학생들의 문제해결 과정을 평가할 수 있는 서술형 평가를 비롯한 다양한 평가 방법으로의 전환을 강조하였다. 그 후에도 KICE는 중등학교 수학과 수행평가 자료집(KICE, 2003), 수학과의 수행평가 방법 개선 방안(KICE, 2014), 서술형 및 논술형 평가 내실화 방안(KICE, 2019) 등과 같은 연구 자료와 정책 방안을 꾸준히 제시하였다. 특히, Hwang *et al.* (2020, p. 321)은 ‘서술형 평가의 지필 검사는 주어진 문제를 해결하는데 필요한 다양한 종류의 지식과 자료를 수집하고 분석하며, 비판하고 종합하며, 해결 방법을 구안, 실험, 검증, 보고하는 등의 고등 정신 기능들을 평가하는데 유리하다’고 하였다. 서술형 평가는 선택형이나 단답형 평가에 비해 학생들의 문제해결 과정, 추론, 의사소통 등에 대한 다양한 정보를 체계적으로 수집하고 할 수 있는 기회를 제공하기 때문에, 수학과 교육과정의 평가 원칙에도 부합하는 평가 방법이라 할 수 있다.

이러한 다양한 논의와 노력의 결과로 현재 중등학교 수학교육 평가에서는 서술형 평가가 중요한 방법으로 자리잡고 있다. 그러나 대학수학능력시험의 수학 교과에서는 아직 선택형과 단답형의 평가가 이루어지고 있다. 서술형 평가의 장점뿐만 아니라 중등학교 수학교육과 대학수학능력시험의 일관성이라는 측면에서도 대학수학능력시험에서 서술형의 수학 시험을 도입하는 것은 의미있을 것이다.

수학 교실에서 시행했던 서술형 평가의 경험만으로 대학수학능력시험의 서술형 평가 방법에 대해 논의하기는 어려울 것이다. 본 연구에서는 국가적인 수준의 대학입학시험에서 서술형 평가 방법을 사용하고 있는 러시아의 사례를 고찰할 것이다. 현재 러시아에서는 대학을 입학하려면 국가 수준의 시험인 국가통합시험(Unified State Examination, USE)을 보아야 하며, USE의 수학 시험이 단답형과 서술형 문제로 구성되어 있다.

본 연구에서는 USE의 개요, USE에서 수학 시험의 특징, USE에서 요구되는 수학적 능력, USE에 출제된 문제들에 대한 전반적인 논의를 바탕으로, 2021년에 시행된 USE의 수학 문제들을 중심으로 첫째, 단답형 문제와 서술형 문제의 외적 구조를 비교하여 서술형 문제의 특징을 분석하며, 둘째 서술형 문제의 채점 기준을 구체적으로 살펴볼 것이다. 이를 통해, 러시아의 USE에 대한 전반적인 이해를 도모함은 물론, 국가 수준의 USE에 출제된 서술형 문제의 특징, 채점 기준에 대한 다양한 정보를 축적할 수 있을 것으로 기대된다. 그리고 우리나라의 대학수학능력시험의 수학 시험에 서술형 문제가 활용될 수 있는지에 대한 교육적 논의의 기초 자료도 될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. USE에서 수학 시험

USE 이전에 러시아에서는 11학년을 마치면서(우리나라에서는 고등학교를 12학년에 마치지만, 러시아에서는 중등교육을 11학년에 마친다) 국가 수준의 졸업시험을 치르며 그 결과에 따라 졸업증명서를 받은 후에, 다시 대학의 입학시험을 통과해야 대학에 진학할 수 있었다. 러시아의 학생들은 고등학교를 졸업하고 대학교에 입학하기 위해서는 2번의 시험을 통과해야 했다. 만약 고등학교 졸업시험을 통과하지 못하면 고등학교를 졸업은 하지만, 대학 진학은 할 수 없었다. 이러한 경우에 대학에 진학하기 위해선 1년 후에 중등교육 졸업증명서를 위한 재시험을 치러야 했다.

1990년대에 러시아에서는 고등학교 졸업시험과 대학교 입학시험을 하나로 결합한 형태의 시험에 대한 다양한 논의가 진행되었고, 결합된 형태의 시험이 USE이다. 1997년부터는 몇몇 지역에서 USE를 시범적으로 시행하기 시작하였고, 그 후 러시아 전역으로 USE가 확대되었다. 그 결과 2009년부터 많은 대학에서 학생 선발에 USE의 결과를 반영하였고, 일부 대학에서는 USE의 결과와 자체 입학시험으로 학생을 선발하였다. 지금은 USE의 결과를 중심으로 대학교에서 학생을 주로 선발하며, 대학 자체 입학시험은 거의 없어졌다.

USE는 수학, 지질학, 문학, 화학, 러시아어, 역사, 물리, 공통과학, 외국어(영어, 프랑스어, 독일어, 스페인어, 중국어), 생물, 정보과학과 정보통신기술의 과목 시험으로 구성된다. 시험 시간은 수학 심화수준, 물리, 문학, 정보과학과 정보통신기술, 공통과학, 역사, 생물은 3시간 55분, 러시아어, 화학은 3시간 30분, 수학 기본수준, 지질학, 외국어는 3시간이며, 외국어 회화는 12-15분이다. 그래서 전체 USE 시험 기간은 한 달 정도에 이른다. 예를 들어, 2021년의 시험 기간 동안 USE의 전체 시험 일정은 다음 Table 1과 같다(Ministry of Education of the Russian Federation, MERF, 2021). 이때, 시험은 학기가 종료된 후에 치르기 때문에, 학생들은 학교 일정에 구애

Table 1. Time schedule of USE in 2021

날짜	시험 과목	날짜	시험 과목
5월 31일	지질학, 문학, 화학	6월 3일	러시아어
6월 4일	러시아어	6월 7일	수학(심화수준)
6월 11일	역사, 물리	6월 15일	공통과학
6월 18일	외국어, 생물	6월 21일	외국어 회화
6월 22일	외국어 회화	6월 24일	정보과학과 정보통신기술
6월 25일	정보과학과 정보통신기술		

받지 않고 시험을 치르게 된다. 2021년 USE에서는 수학 기본수준의 시험은 치러지지 않았다.

USE에서 수학 시험에 대해 살펴보자. 2014년까지 USE에서 수학은 한 가지 수준으로, 즉 모든 학생이 같은 수준의 시험을 보았다. 그러나 2015년부터 지금까지 USE에서 수학은 기본수준과 심화수준의 두 수준으로 나누어 시험을 치르고 있다(2020년과 2021년에는 코로나 대유행으로 인하여 심화수준 시험만 보았고, 2022년에는 기본수준과 심화수준의 두 수준의 시험이 예고된 상태이다).

USE에서 수학 시험을 기본수준과 심화수준으로 나누어 시행하는 것에 대해 몇 가지 근거를 생각할 수 있다. 첫째는 USE의 수학 시험에서 기본수준과 심화수준은 평가 목표가 다르다. Federal Institute of Pedagogical Measurements (FIPM, 2021a, p. 2)에 의하면, '기본수준의 USE는 학생들의 기본적인 교과 내용의 획득을 확인하기 위해, 특히 일상적인 계산과 실생활에서 발생하는 문제의 해결에 수학적 지식을 사용하는 능력을 확인'하는 것을 지향한다. 즉, 기본수준의 USE에서는 일상생활에 필요한 수학적 지식과 문제해결 능력을 확인하는 것에 초점을 맞추고 있다. 한편, FIPM (2021a, p. 2)은 '심화수준의 USE에서는 수학을 계속 학습하는데 필요한 더 넓은 범위의 수학적 개념들, 방법들을 터득했는지를 확인'한다고 하였다. 이로부터 심화수준의 USE에서는 대학 등의 고등교육기관에서 전문적인 교육을 받는데 필요한 수학적 준비 수준을 확인하는 것을 목표로 한다는 것을 알 수 있다.

둘째, 러시아의 수학과 교육과정이 기본수준과 심화수준으로 나누어져 있다. 러시아의 수학과 교육과정은 2004년에 개정되었고, 지금까지 이 교육과정에 의해 수학교육이 이루어지고 있다. 러시아의 수학과 교육과정은 1학년에서 9학년까지는 단일 수준의 공통 교육과정이고, 10-11학년은 기본수준과 심화수준의 두 수준으로 구성되었다. 러시아 교육과정(MERF, 2004, p. 3)에 의하면, 기본수준은 '공통적인 문화의 형성을 지향하며, 이 수준의 공통교육은 세계관 형성의 문제들, 훈육적인 문제들, 발달적인 문제들, 사회화의 문제들과 관련된다'고 했으며, 심화수준은 '학습자들의 개인적인 성향, 요구에 근거하며, 학습자들에게 미래의 전문적인 교육 또는 전문적인 활동을 준비시키는 것을 의도한다'고 하였다. 10-11학년 수학과 교육과정에서 규정한 기본수준과 심화수준의 성격은 USE의 기본수준과 심화수준의 평가 목표에 반영되었고, 이것이 USE에서 두 수준의 평가로 구현되었다고 할 수 있을 것이다.

셋째, 러시아에서는 10-11학년 수학교과서가 기본수준 교과서와 심화수준 교과서로 구분되어 있다. 한 권의 교과서에 기본수준의 내용과 심화수준의 내용이 따로 기술되는 경우도 있고, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서가 별책으로 출판되는 경우도 있다. 이때, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서는 제시되는 수학 개념과 정리의 양, 정리의 증명 여부, 예제와 연습문제의 양과 수준에서 차이가 난다. 이와 같이 개념, 정리의 양과 수준의 차이가 나는 기본수준과 심화수준 교과서로 수학을 배우기 때문에, USE에서 수학을 기본수준과 심화수준으로 나누어 평가하는 것은 이상하지 않을 것이다.

USE의 수학교과 기본수준과 심화수준에 출제되는 문제들은 문제의 수, 배점, 유형, 난이도 등에서 차이가 난다. 출제된 문제의 개수를 살펴보면, 2017년부터 2019년까지 기본수준은 20문제, 심화수준은 19문제였으며, 2020년과 2021년에는 심화수준 시험만 시행되었으며 문제의 수는 19개였다.

USE 수학 문제의 유형은 기본수준에서는 모두 단답형(답지에 정수나 소수를 기입하는)이고, 심화수준 문제는 단답형 문제와 풀이를 상세히 기술하는 서술형 문제로 구성된다. USE 수학 문제에는 우리나라처럼 5가지 답안 중에 하나를 선택하는 선택형 문제는 없다. 본 연구에서는 USE의 수학 문제 중 서술형 문제를 분석할 것이므로, 심화수준의 문제만을 분석할 것이다. 편의상, 여기서부터는 특별한 언급이 없는 경

우에 USE 수학 문제는 USE 심화수준의 수학 문제를 의미할 것이다.

USE 수학 문제들의 전반적인 구성을 살펴보자. USE 수학 문제는 평가 목표에 따라 제1부와 제2부로 나뉜다. 제1부는 1번에서 8번 문제까지, 제2부는 9번에서 19번 문제까지로 구분된다. USE에서 제1부 문제와 제2부 문제의 개수는 약간씩 변하지만, 제1부는 USE 전체 문제에서 앞번호에 해당하는 8-9개의 문제로 구성되며, 제2부는 뒷번호의 10-11개 정도의 문제에 해당한다.

제1부의 문제들의 평가 목표에 대해 FIPM (2020b, p. 2)은 '제1부의 문제들은 사회생활에 필요한 일반적인 수학적 능력을 평가하는 것으로, 기본적인 계산과 논리 능력과 기능, 그래프와 표로 주어진 정보들을 분석하는 능력, 평이한 확률적인 그리고 통계적인 모델들을 사용하는 능력, 평이한 기하학적 구조를 분석하는 능력을 확인한다'고 하였다. 한편, FIPM (2020b, p. 2)은 '제2부 시험의 문제들은 대학에 진학하여 학업을 계속할 학생들을 효과적으로 선별하기 위해, 전통적으로 심화된 수학 시험을 치루었던 대학들의 요구 수준에 상응하는 지식을 확인한다. 그리고 제2부의 마지막 3문제는 높은 수준의 수학적 준비를 요구하는 대학들의 학생 선발을 위한 것'이라고 하였다. 이때 마지막에 제시되는 높은 수준의 문제는 항상 3문제는 아니다. USE에 이러한 수준의 문제가 2문제인 경우도 있다. 결국, 제1부와 제2부 문제들의 성격을 정리하면, 제1부의 문제들은 중등교육을 마치면서 학생들이 사회생활에 필요한 기본적인 수학적 지식과 능력을 갖추었는지를 확인하는 것을 목표(즉, 중등교육의 졸업시험의 성격)로 하며, 제2부의 문제들은 대학교의 진학을 위한 선발 시험의 성격이 강하다는 것을 알 수 있다.

한편, 제1부와 제2부 문제들의 난이도를 살펴보자. 제1부는 8문제 모두 기본수준의 난이도를 가지며, 제2부는 상향된 난이도와 높은 난이도를 가지는 문제들이다(FIPM, 2021a). 상향된 난이도는 기본수준 난이도에 비해 난이도가 상향되었다는 의미이고, 높은 난이도는 앞에서 기술한 제2부의 마지막 3문제에 해당하는 문제들의 난이도를 의미한다.

제1부, 제2부 문제들의 답안을 작성하는 방법을 살펴보자. 제1부의 문제들은 모두 단답형으로 문제를 해결하면 그 답이 정수나 소수로 얻어지며, 제시된 단답형 답지에 정수나 소수를 적으면 된다. 한편, 제2부의 문제 중 일부는 단답형 문제이고, 일부는 서술형 문제이다. 제2부에 포함되는 문제의 전체 개수는 가끔 바뀌지만, 서술형 문제의 개수는 7문제로 유지되었다. 서술형 문제에 대해 별도의 서술형 답지가 제공되며, 학생들은 서술형 답지에 풀이 과정을 상세하게 적는다. 서술형 문제에서 풀이가 없이 답만 적는 경우에는 해당 문제는 0점으로 채점된다.

FIPM에서는 USE 시험을 치르기 전에 각 문제별로 해결을 위해 요구되는 능력과 풀이 예상 시간을 예고한다. 예를 들어, FIPM (2021c)은 2022년 USE에서 각 수학 문제의 해결을 위해 요구되는 능력, 난이도, 배점, 풀이 예상 시간을 예고하였다. 1번과 2번 문제는 기본 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 각 2분, 3번에서 5번까지는 기본 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 각 3분, 6번 문제는 기본 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 4분, 7번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 6분, 8번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 7분, 9번과 10번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 각 8분, 11번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 9분이며, 이 문제까지는 각 1점씩 배점이 예고되었다. 한편, 12번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 10분(배점 2점), 13번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 20분(배점 3점), 14번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 15분(배점 2점), 15번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 25분(배점 2점)이며, 16번 문제는 상향된 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 35분(배점 3점), 17번 문제는 높은 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 35분(배점 4점), 18번 문제는 높은 난이도 문제로 예상 풀이 시간은 40분(배점 4점)이 예고되었다. 이와 같이, USE 시험 전에 평가 문제에 대한 다양한 정보들을 미리 공개하는 것은 학생들이 체계적으로 평가를 준비하는데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

이제, USE에서 학생들의 점수 분포를 개략적으로 살펴보자. Yashchenko, Semenov, & Vysotsky (2020)에 의하면, 32점 만점 중에서 2018년에는 9점을 맞은 학생들이 가장 많았고, 2019년에는 10점, 2020년에는 9점과 10점을 맞은 학생의 수가 비슷하였다. 예를 들어, 2020년 학생들의 점수 분포는 Figure 1과 같다. 이때, 가로축은 점수이고, 세로축은 학생수이다. 2018년, 2019년의 USE에서도 Table 1과 유사한 점수 분포를 볼 수 있다.

러시아에서는 32점 만점으로 획득한 점수를 100점 만점으로 변환한 점수를 제공한다. Yashchenko, Semenov, & Vysotsky (2020)에 의하면, 2020년 USE에서 100점 만점으로 환산했을 때 평균 점수는 53.94점이고, 0-20점을 받은 학생의 비율은 4.62 %, 21-40점을 받은 학생은 25.91 %, 41-60점을 받은 학생은 25.3 8%, 61-80점을 받은 학생은 37.48 %, 81-100점을 받은 학생은 6.60 %에 해당한다.

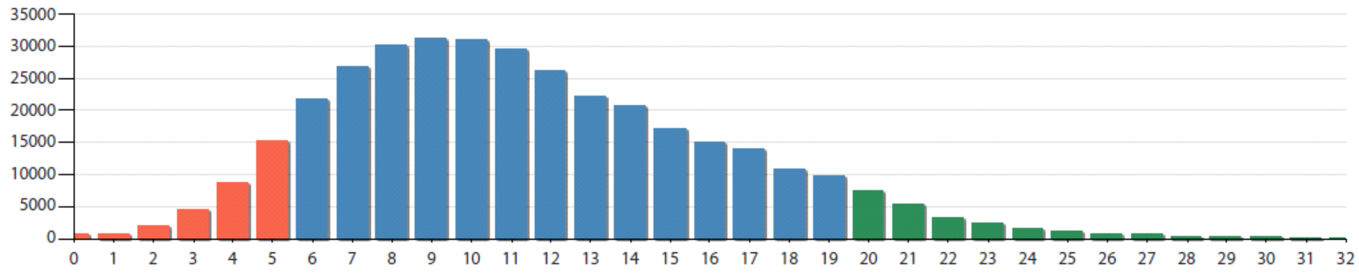


Figure 1. Mathematics score distribution in 2020 USE
(Yashchenko, Semenov, & Vysotsky, 2020, p. 5)

2. USE의 수학에서 요구되는 능력과 관련 수학 문제들

기본수준 USE와 심화수준 USE에서 요구되는 학생들의 수학적 능력, 수학 교과 영역은 동일하다. 수학교과의 USE에서 요구되는 능력(해당 문제에서 평가하려는 능력)과 그 하위요소, 관련된 USE 문제를 구체적으로 살펴보자.

FIPM에서는 USE의 수학 평가 문제의 해결을 위해 요구되는 능력을 크게 6가지로 분류하여 제시하였다: 계산하고 변환할 수 있다; 방정식과 부등식을 풀 수 있다; 함수에 대한 연산을 수행할 수 있다; 기하학적 도형, 좌표, 벡터에 대한 연산을 수행할 수 있다; 평이한 수학적 모델들을 만들고 탐구할 수 있다; 일상생활과 실제에 획득한 지식과 능력을 활용할 수 있다.

각 능력과 그 하위요소들을 자세히 살펴보자. FIPM (2020a)에 제시된 능력 '계산하고 변환할 수 있다'의 하위요소들은 Table 2와 같다.

능력 A와 관련된 USE의 평가 문제들을 실제로 살펴보자. 2019년과 2020년 USE에서는 문제 2019-9 (Yashchenko, Vysotsky, & Semyonov, 2019, p. 31), 2020-9 (Yashchenko, Semenov, & Vysotsky, 2020, p. 8)가 출제되었다.

2019-9[1]. 식 $8\log_{\sqrt[5]{14}} 14$의 값을 구하여라.

2020-9. $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$이고 $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$일 때 $\sin\alpha$의 값을 구하여라.

이 문제들은 Table 2에 제시된 하위요소 A1, A2, A3 모두 관련된다고 할 수 있다. 즉 이 문제들에는 하위요소 A1인 산술연산을 수행하고, A2인 수식과 문자식의 값을 계산하고, A3인 삼각함수를 포함하는 문자식의 변환하는 것에 관련된 문제이다. 2019년과 2020년 USE에서는 능력 A를 평가하기 위한 문제로 분류되어 출제된 것은 이 문제뿐이다.

능력 '방정식과 부등식을 풀 수 있다'에 관련된 하위요소들을 Table 3에서 살펴보자(FIPM, 2020a).

능력 B에 기술된 하위요소들을 보면, 이 능력과 관련하여 USE 평가 문제에서는 유리방정식, 무리방정식, 지수방정식, 삼각방정식, 로그방정식과 이들의 연립방정식, 유리부등식, 지수부등식, 로그부등식과 이들의 연립부등식에 관련된 문제를 해결하는 것이라는 것을 알 수 있다. 2020년 USE에서는 문제 2020-5, 2020-13, 2020-15, 2020-18이 출제되었다(Yashchenko, Semenov & Vysotsky, 2020, pp. 7-9).

Table 2. Ability of calculating and transforming and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
A. 계산하고 변환할 수 있다.	A1*. 구두로, 필산으로 산술연산을 수행한다; 지수가 자연수인 거듭제곱의 근의 값, 지수가 유리수인 거듭제곱의 값, 로그의 값을 구한다.
	A2. 필요한 대입과 변환을 수행하여, 수식과 문자식의 값을 계산한다.
	A3. 알려진 공식과 규칙에 따라 거듭제곱, 거듭제곱근, 로그, 삼각함수를 포함하는 문자식의 변환을 수행한다.

* 요구되는 능력을 A, A1, A2, A3, B, …, F, F1, F2, F3와 같이 표기한 것은 본 연구에서 기술상 편의를 위한 것임.

1) 2020년도 USE의 9번 문제를 의미함.

Table 3. Ability of solving equality, inequality and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
B. 방정식과 부등식을 풀 수 있다.	B1. 유리방정식, 무리방정식, 지수방정식, 삼각방정식, 로그방정식, 이들의 연립방정식을 푼다.
	B2. 함수의 성질과 그래프를 이용하여 방정식, 간단한 연립방정식을 푼다; 방정식과 부등식의 근사적 해를 구하기 위해 그래프 방법을 이용한다.
	B3. 유리부등식, 지수부등식, 로그부등식, 이들의 연립부등식을 푼다.

2020-5. 방정식 $\sqrt{36-4x}=6$을 풀어라.

2020-13.

(a) 방정식 $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=0$을 풀어라.

(b) 구간 $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$에 속하는 이 방정식의 모든 근을 구하여라.

2020-15. 부등식

$$x^2\log_{512}(x+7) \le \log_2(x^2+14x+49)$$

을 풀어라.

2020-18. 연립방정식 $\begin{cases}\sqrt{36-y^2}=\sqrt{36-a^2x^2} \\ x^2+y^2=2x+6y\end{cases}$ 이 정확히 두 개의 서로 다른 해를 가지도록 하는 a값을 모두 구하여라.

문제 2020-5는 하위요소 B1인 무리방정식을 푸는 것에 해당하고, 문제 2020-13은 B1의 삼각방정식을 푸는 것, B2인 방정식의 해를 구하기 위해 그래프를 이용하는 것에 관련된다. 문제 2020-15는 B3인 로그방정식을 푸는 것, B2인 부등식의 해를 구하기 위해 그래프를 이용하는 것에 관련된다. 문제 2020-18은 B1인 무리방정식에 관련된 연립방정식을 푸는 것, B2인 그래프를 이용하여 방정식을 푸는 것에 관련된다. 능력 B를 평가하는 문제로 2021년 USE에는 2020년과 같이 4문제가 출제되었다.

능력 '함수에 대한 연산을 수행할 수 있다'에 관련된 하위요소들을 Table 4에서 살펴보자(FIPM, 2020a).

능력 C의 하위요소들을 보면, 우리나라 수학교과서의 미적분 내용이 관련된다는 것을 알 수 있다. 우리나라에서는 미적분의 내용이 고등학교 수학교육과 대학수학능력시험에서 상당히 큰 비중을 차지하지만, USE에서는 미적분의 내용이 주로 능력 C에만 관련하여 출제되고 있다. 그리고 아래의 문제에서 보는 것과 같이, USE에 출제되는 미적분의 문제들은 우리나라의 대학수학능력시험의 문제와 비교할 때 상당히 평이하다는 것을 알 수 있다.

능력 C와 관련된 USE의 문제들을 살펴보자. 2019년 USE에서는(Yashchenko, Vysotsky, & Semyonov, 2019, p. 29) 문제 2019-7, 2019-12가, 2020년 USE에서는(Yashchenko, Semenov, & Vysotsky, 2020, pp. 14-15) 2020-7, 2020-12가 출제되었다.

2019-7. Figure 2에 함수 $y=f(x)$의 그래프가 주어졌고, x좌표가 x_0인 점에서 함수의 그래프에 대한 접선이 주어졌다. 점 x_0에서 함수 $f(x)$의 도함수 값을 구하여라.

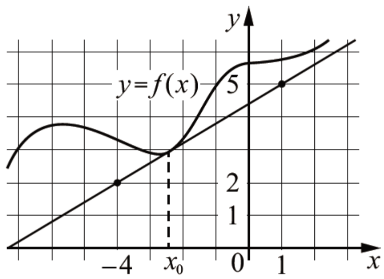


Figure 2. Problem 2019-7

Table 4. Ability of performing operations on functions and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
C. 함수에 대한 연산을 수행할 수 있다.	C1. 다양한 방법으로 주어진 함수에서 변수의 값에 따라 함숫값을 구한다; 그래프로 함수의 성질을 표현하고, 함수의 그래프를 이용해 최댓값과 최솟값을 구한다; 배운 함수의 그래프를 그린다.
	C2. 기본적인 함수의 도함수와 부정적분을 계산한다.
	C3. 평이한 경우에 대해 함수의 단조성을 조사하고, 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

2019-12. 함수 $y = x^3 - 147x + 19$의 극댓점을 구하여라.

2020-7. Figure 3에 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축에 점 1, 2, 3, 4가 표시되었다. 이 점들에서 함수 $f(x)$의 도함수의 값이 가장 작은 것은 어느 점인가? 답에 그 점을 적어라.

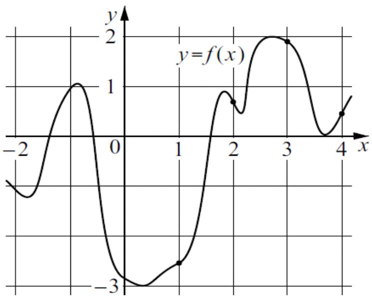


Figure 3. Problem 2020-7

2020-12. 함수 $y = (4 - x) \cdot e^{x+4}$의 극댓점을 구하여라.

USE 문제의 한 특징으로, 같은 능력을 평가하는 같은 번호의 문제는 매년 유사하게 출제되는 것을 들 수 있다. 문제 2019-7과 2020-7, 문제 2019-12와 2020-12를 비교해 보면, 유사한 소재의 문제에 대해 유사한 물음이 제시된다는 것을 알 수 있다.

능력 '기하학적 도형, 좌표, 벡터에 대한 연산을 수행할 수 있다'에 관련된 하위요소들을 Table 5에서 살펴보자(FIPM, 2020a).

능력에 관련된 하위요소들을 살펴보면, 중등학교에서 다루는 기하학 전반에 대한 내용을 포함하고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 평면기하와 공간기하에서 논증기하, 해석기하(좌표적 방법), 벡터를 다루며, 평면도형과 공간도형에서는 길이, 각, 넓이와 같은 기하학적 양을 구하고, 벡터와 관련하여서는 벡터의 좌표, 크기, 벡터들 사이의 각에 관련된 문제들이 다루어진다는 것을 알 수 있다.

능력 D와 관련된 USE의 평가 문제들을 살펴보자. 2021년 USE에서는 문제 2019-3, 2019-6, 2019-8, 2019-14, 2019-16이 출제되었고, 2020년 USE에서도 문제 2020-3, 2020-6, 2020-8, 2020-14, 2020-16이 출제되었다. 여기서는 2019년 USE 문제 중 2019-3 (FIPM, 2019, p. 2), 2019-6 (Yashchenko, Vysotsky, & Semyonov, 2019, p. 29), 2020년 USE 문제 중 2020-8, 2020-14, 2020-16 (FIPM, 2020c)을 살펴보자.

2019-3. Figure 4와 같이 한 칸이 1㎝×1㎝인 모눈종이에 삼각형이 주어졌다. 삼각형의 넓이를 구하여라. 답은 ㎠ 단위로 나타내어라.

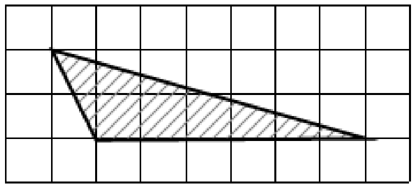


Figure 4. Problem 2019-3

2019-6. Figure 5에 사각형 $ABCD$에 원이 내접하고 있으며, AB=8, BC=10, CD=7이다. 사각형의 네 번째 변의 길이를 구하여라.

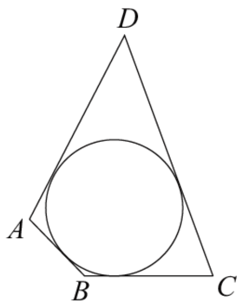


Figure 5. Problem 2019-6

Table 5. Ability of performing operations on geometric figures, vectors and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
D. 기하학적 도형, 좌표, 벡터에 대한 연산을 수행할 수 있다.	D1. 기하학적 양(길이, 각, 넓이)을 구하는 평면도형 문제를 푼다.
	D2. 기하학적 양(길이, 각, 넓이, 부피)을 구하는 평이한 공간도형 문제를 푼다; 공간도형 문제를 풀 때에 평면도형의 지식과 방법들을 이용한다.
	D3. 점의 좌표를 결정하고, 벡터에 대한 연산을 수행하고, 벡터의 좌표, 크기, 벡터들 사이의 각을 계산한다.

2020-8. 정삼각기둥 $ABCA_1B_1C_1$에서 밑면의 넓이는 2이고, 옆모서리는 3이다. 점 A, B, C, A_1을 꼭짓점으로 가지는 다면체의 부피를 구하여라.

2020-14. 정사각뿔 $SABCD$에서 밑면의 변은 6이고 옆모서리 SA는 5이다. 모서리 AD, SB에 점 M, K를 각각 잡았고, $AM=2$, $SK=1$이다.

(a) 평면 CKM은 평면 ABC와 수직을 이룬다는 것을 증명하여라.

(b) 각뿔 $BCKM$의 부피를 구하여라.

2020-16. 삼각형 ABC의 변 AB, BC, AC에 점 C_1, A_1, B_1을 잡았고, $AC_1 : C_1B = 7 : 12$, $BA_1 : A_1C = 3 : 1$, $AB_1 : B_1C = 3 : 4$이다. 선분 BB_1과 CC_1은 점 D에서 만난다.

(a) 사각형 ADA_1B_1이 평행사변형이라는 것을 증명하여라.

(b) 선분 AD와 BC가 수직을 이루며, $AC=21$, $BC=16$일 때, CD를 구하여라.

문제 2019-3, 2019-6, 2020-8은 단답형으로 출제되었고, 2020-14, 2020-16은 서술형으로 출제된 문제이다. 문제 2019-3, 2019-6, 2020-8은 기하학적 양인 넓이, 변의 길이, 부피를 구하는 전형적인 문제라고 할 수 있으며, 문제 2020-14는 공간에서 평면들의 수직을 증명하고 이를 이용하여 각뿔이 부피를 구하는 것이며, 문제 2020-16은 평면에서 사각형이 평행사변형임을 증명하고 이를 이용하여 선분의 길이를 구하는 것이다. 보통 USE의 서술형 평가에서 기하 영역은 2문제가 출제되는데, 그중 하나는 2020-14와 같은 공간도형 문제이고, 나머지는 2020-16과 같은 평면도형 문제로, 모두 증명과 계산하는 것이 혼합된 문제이다.

2016년부터 USE 문제들을 조사해 보면, 하위요소 D3의 벡터에 관련된 문제는 별도로 출제되지 않았다. 물론, 문제 2020-14, 2020-16과 같은 문제를 벡터의 방법을 이용하여 해결할 수도 있을 것이지만, 벡터에 대한 연산을 직접 요구하는 그러한 문제는 출제되지 않았다.

능력 '평이한 수학적 모델들을 만들고 탐구할 수 있다'에 관련된 하위요소들을 Table 6에서 살펴보자 (FIPM, 2020a).

능력 E는 4개의 하위요소를 포함하며, 우리나라 수학교과서에 나오는 문장제가 여기에 해당할 수 있다. 2020년 USE에서는 문제 2020-4, 2020-11, 2020-19가 이 능력에 해당하는 문제이며, 2021년 USE에서도 문제 2021-4, 2021-11, 2021-19가 이 능력에 해당하는 문제이다. 이와 같이 문제들이 분포하는 출제 경향은 매년 반복되고 있다. 예를 들어, 2017년 USE에서도 문제 2017-4, 2017-11, 2017-19가 능력 E에 해당하는 문제로 출제되었다. 이 문제들을 살펴보자 (FIPM, 2017).

2017-3. 수학경시대회에 500명의 학생들이 참가하였다. 이 학생들은 4개의 교실에 나뉘어져 시험을 보았는데, 처음 세 교실에는 150명씩, 네 번째 작은 교실에는 50명이 시험을 보았다. 한 학생을 임의로 뽑았을 때, 이 학생이 작은 교실에서 시험을 보았을 확률을 구하여라.

2017-11. 정지한 물에서 27 km/h의 속도로 이동하는 배가 강을 따라 A지점에서 B지점으로 이동하였다. 이 배는 B지점에 도착하여 5시간을 머물렀고, 다시

Table 6. Ability of making and exploring simple mathematical models and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
E. 평이한 수학적 모델들을 만들고 탐구할 수 있다.	E1. 실제 상황을 대수의 언어로 모델링하고, 문제의 조건에 따라 방정식과 부등식을 만든다; 대수적 도구를 이용하여 만든 모델을 탐구한다.
	E2. 실제 상황을 기하학의 언어로 모델링하고, 기하학적 개념과 정리, 대수적 도구를 이용하여 만든 모델을 탐구한다; 기하학적 양을 구하는 것에 관련된 실제 문제들을 푼다.
	E3. 문제해결 과정에서 논증을 수행하고, 논증의 논리적인 타당성을 평가하고, 논리적으로 타당하지 않는 주장을 인지한다.
	E4. 실제 상황을 확률론과 통계학의 언어로 모델링하고, 평이한 경우에 사건의 확률을 계산한다.

A지점으로 향하였다. 이 배는 A지점을 출발하여 다시 돌아오는데 32시간이 걸렸다고 한다. 만약, 강물의 속도가 1 km/h라고 한다면, 이 배는 몇 km를 이동하였는가?

2017-19. 칠판에 서로 다른 자연수 100개가 적혀있고, 이 수들의 합은 5120이다.
(a) 칠판에 수 230이 적혀있을 수가 있는가?
(b) 칠판에 수 14가 적혀있지 않을 수가 있는가?
(c) 칠판에 적혀있는 14의 배수인 수들의 최소 개수를 구하여라.

살펴본 것과 같이, 능력 E에 해당하는 문제들은 모두 문장제로, 문제해결을 위해서는 하위요소 E1과 같이 문제의 조건에 맞는 방정식 또는 부등식 모델을 만들어야 하며, 이 모델을 이용하여 문제를 해결하게 된다.

예를 들어, 문제 2017-11을 해결하기 위한 수학적 모델을 만들어보자. 두 지점 A와 B사이의 거리를 d라 하자. 배는 A에서 B지점으로 속도 $(27+1)\,\mathrm{km}$의 속도로 움직였고, B에서 A지점으로는 $(27-1)\,\mathrm{km}$의 속도로 움직였다. 그러므로, 배가 A지점에서 출발하여 다시 돌아오는데 걸린 시간을 이용하여 수학적 모델을 만들면, $\frac{d}{28}+5+\frac{d}{26}=32$, 즉 $\frac{d}{28}+\frac{d}{26}=27$이 된다. 등식 $\frac{d}{28}+\frac{d}{26}=27$이 이 문제에 대한 수학적 모델이 된다.

2020년 USE 11번 문제도 2017년 문제와 같이 배가 강을 따라 움직이는 것에 관련된 문장제이며, 2021년에는 11번 문제로 일의 양을 계산하는 문장제가 출제되었다.

능력 '일상생활과 실제에 획득한 지식과 능력을 활용할 수 있다'에 관련된 하위요소들을 Table 7에서 살펴보자(FIPM, 2020a).

능력 F는 앞에서 살펴본 능력 E와 유사하게 생각할 수도 있지만(우리나라의 경우 2017-3, 2017-11과 같은 문장제를 실생활 관련 문제로 이야기하는 경우도 있음), 러시아의 USE에서는 다른 범주로 분류하고 있다. 능력 E에서는 수학적 모델을 만드는 것이 강조되는 반면, 능력 F는 수학적 지식의 활용에 초점이 맞추어진다. 이에 관련된 문제들을 2018년 USE 문제(FIPM, 2018)와 2019년 USE 문제(FIPM, 2019)를 중심으로 살펴보자.

2018-1. 주유소에 들러 계산원에게 1000 루블을 내고 가격이 리터당 28 루블 50 까뻬익인 휘발유 28 리터를 주유하였다. 계산원으로부터 거스름돈을 얼마 받아야 하는가? 루블 단위로 답하여라.

2018-2. Figure 6에서 점은 톰스크에서 2005년 1월 8일부터 24일까지 내린 하루 적설량을 나타낸 것이다. 수평축에는 날짜를, 수직축에는 해당 날에 내린 적설량을 밀리미터 단위로 나타냈다. 그림에서 시각적인 효과를 위해 점들을 선으로 연결하였다. 표에서 처음으로 적설량이 1.5mm인 날은 언제인가?

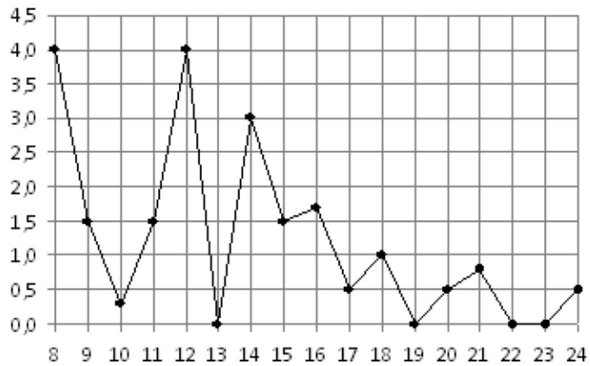


Figure 6. Problem 2018-2

Table 7. Ability of using the acquired mathematics in everyday life and sub-elements

요구되는 능력	요구되는 능력의 하위요소
F. 일상생활과 실제에 획득한 지식과 능력을 활용할 수 있다.	F1. 실제의 수치들, 통계적 특성을 가진 정보들을 분석한다; 공식에 따라 실제 값들을 계산한다; 실제 계산에서 평가와 어림을 이용한다.
	F2. 함수를 이용하여 실제 상황의 양들의 관계를 표현하고, 이들의 그래프를 해석한다; 표, 다이어그램, 그래프에서 필요한 정보를 추출한다.
	F3. 사회-경제적인, 물리적인 성격의 응용문제를 풀고, 최댓값과 최솟값 문제를 풀고, 속도와 가속도를 구하는 문제를 푼다.

2019-10. 소리 신호의 음원과 수신기가 서로 마주보는 방향으로 직선을 따라 움직일 때 수신기에 포착되는 소리 신호의 진동수는 처음의 소리 신호의 진동수 $f_0=150$과 동일하지 않으며, 공식 $f=f_0\frac{c+u}{c-v}$(단위: ㎐)에 의해 정의된다. 이때 c는 소리 신호의 전파 속도이고(단위: ㎧) $u=10$㎧, $v=15$㎧는 각각 수신기와 음원의 속도이다. 수신기에 소리 신호의 진동수가 160㎐보다 작지 않도록 하는 소리 신호 전파의 최대 속도를 구하여라.

2019-17. 7월에 은행에서 6백만루블 대출을 15년 받으려고 계획하고 있다. 대출의 상환 조건은 다음과 같다.

- 매년 1월에 부채가 전년 말과 비교해 x% 만큼씩 증가된다.
- 매년 2월부터 7월까지 부채의 일부를 상환해야 한다.
- 매년마다 7월의 부채는 이전 해의 7월의 부채보다 같은 양만큼 작아야 한다.

부채에 따른 1년 최대지불액이 190만 루블보다 크지 않고 최소지불액에 50만루블보다는 작지 않다고 할 때, x를 구하여라.

문제 2018-1은 능력 F의 하위요소 F1에 관련된 문제이고, 2018-2는 F2, 2019-10은 F1과 F3, 2019-17은 F3에 관련된 문제라고 할 수 있다. 문제 2018-1을 해결하기 위해서는 수식 $1000-(28.5\times28)=202$를 생각해야 한다. 이 수식은 문제 2018-1의 수학적 모델이기도 하다. 문제 2018-1을 능력 E에 해당하는 것으로 생각할 수도 있을 것이다. 그러나 Table 6에 보면, 능력 E의 하위요소 E1에 실제 상황을 방정식, 부등식 등으로 모델링하는 것을 규정하고 있다. 2018-1에서는 방정식이나 부등식을 세우는 것이 아니라 수식을 만들어 문제를 해결하기 때문에, 문제 2018-1을 능력 F에 관련된 것으로 분류하는 것이 나을 것이다.

문제 2019-10에서는 문제상황의 수학적 모델인 공식 $f=f_0\frac{c+u}{c-v}$이 주어졌기 때문에, 이 문제는 문장제이기는 하지만 수학적 모델을 만드는 문제라기보다는 능력 F를 평가하기 위한 문제로 분류될 수 있다.

문제 2019-17은 사회-경제적인 성격의 실생활 문제라 할 수 있다. 물론, 이 문제도 문장제로 해결을 위해서는 적당한 수학적 모델을 만들어야 하지만, 능력 F의 하위요소 F3과 직접 관련되므로, 이 능력에 관련하여 분류된 것으로 생각할 수 있다. 문제 2019-17과 유사한 성격의 문제로, 우리나라에서는 등비수열의 합을 이용하여 해결하는 원리합계에 관련된 문제들을 다룬다. 그러나 문제 29-17은 등비수열의 합을 이용하는 문제가 아니다.

문제 29-17의 풀이를 간단히 살펴보자. 부채가 x% 만큼 증가한다는 것은 이율이 x%라는 뜻이고, 세 번째 조건으로부터 첫 해에 가장 많은 금액을 상환해야 하며, 매년 이자와 원금의 일정한 금액을 상환한다는 것을 알 수 있다. 대출 원금 6백만루블을 S라 하면, 첫 해의 이자는 $\frac{Sx}{100}$이며 이때 $\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}$을 상환해야 할 것이다($n$은 기간으로 이 문제에서 n은 15이다). 그러면, 남은 대출금은 $\left(S+\frac{Sx}{100}\right)-\left(\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}\right)=\frac{n-1}{n}S$가 된다. 이제 두 번째 해의 이자는 $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{Sx}{100}$이며, 두 번째 해에는 $\frac{n-1}{n}Sx+\frac{S}{n}$를 상환하고 남은 대출금은 $\frac{n-2}{n}S$가 된다. 같은 방법으로 상환하면 마지막 해($n=15$)에는 이자 $\frac{1}{n}\cdot\frac{Sx}{100}$가 되어 $\frac{1}{n}\cdot\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}$를 상환하면 모든 대출을 상환하게 된다. 이제, 문제의 조건에 의해 $\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}\le\frac{1.9}{6}S$, $\frac{1}{n}\cdot\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}\ge\frac{0.5}{6}S$가 되며, 첫 번째 부등식에서 $x\le25$, 두 번째 부등식에서 $x\ge25$가 얻어져 구하는 답은 25이다.

결국, 문제 2019-17의 해결은 연립부등식 $\begin{cases}\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}\le\frac{1.9}{6}S\\ \frac{1}{n}\cdot\frac{Sx}{100}+\frac{S}{n}\ge\frac{0.5}{6}S\end{cases}$로 귀착된다. USE 2020년, 2021년에도 문제 2019-17과 같은 사회-경제적인 성격을 가지는 대출 문제가 출제되었다. 그러나 이들은 등비수열의 합을 이용하는 문제가 아니라, 살펴본 것과 같이 방정식이나 부등식을 이용하여 해결하는 문제들이다.

살펴본 USE의 수학과 평가에서 요구되는 능력들은 수학과 교육과정에 기반하고 있다. 러시아의 10-11학년 수학과 교육과정에는 영역별로 학생들에게 요구되는 능력들이 다양하게 나열되어 있다. '수식과 문자식' 영역에서는 6개의 요구되는 능력이 제시되었고, '함수와 그래프' 영역에서는 5개, '수학적 해석의 초보'에서

는 7개, '방정식과 부등식'에서는 7개, '조합·통계·확률이론의 기초' 영역에서는 3개, '기하' 영역에서는 9개의 요구되는 능력이 제시되었다.

수학과 교육과정에 나열된 능력들은 10-11학년에서 수학을 배운 결과로 학생들에게 요구되는 것들이다. 그러므로 이것이 USE의 수학과 평가에서 요구되는 능력들과 완전하게 일치할 수는 없을 것이다. 그러나 수학과 교육과정을 기반으로 USE의 수학과 평가에서 요구되는 능력들, 평가 영역들, 평가 문제의 유형이나 난이도 등이 체계적으로 정리되어 학생들에게 공지된다는 것은 평가에 대한 정보의 공개라는 측면에서 의미있을 것으로 생각된다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 문헌 연구로, 러시아의 수학과 교육과정, 2016년부터 2021년까지 시행된 USE에 관련된 자료와 2022년에 시행될 USE를 공고한 자료들을 분석 대상으로 하였으며, 특히 USE의 전반적인 특징, USE의 수학 시험에 관련된 자료들을 분석하였다. 수학과 교육과정으로부터 러시아 중등학교에서 지도되는 수학의 내용, 범위, 수준별 교육과정에 대해 파악할 수 있으며, 수학과 교육과정과 USE의 수학 출제 범위의 관련성을 알 수 있다.

USE에 관련하여서는 USE의 성격, USE에서 출제되는 교과목, 시험 일정 등을 고찰하였다. USE의 수학 시험에 대한 자료들은 우리나라의 교육과정평가원에 해당하는 러시아의 연방교육평가원(FIPM)에 의해 연구되고 공개된다. 여기서는 FIPM에서 USE의 수학 시험에 대해 공개하는 자료인 USE 수학 모의평가 문제, 평가 범위, 평가에서 요구되는 능력들, 서술형 평가 문제의 채점 방법 및 예시, 평가보고서 등의 자료들을 수집, 분석하였고, FIPM에서 발간하는 USE에 대한 학술잡지인 'Pedagogical measurements'도 수집, 분석하였다.

본 연구에서는 USE의 수학 서술형 문제의 특징을 살펴보기 위해 Krupich (1995), Han (2001, 2009) 등이 제안한 수학 문제의 외적 구조 분석 방법을 이용하였다. 특히 서술형 문제에 대한 외적 구조의 특징을 분석하기 위해 단답형 문제의 외적 구조와 비교하였다. 이를 위해, 2021년 USE 수학 시험에 출제된 모든 단답형 문제와 서술형 문제의 풀이를 찾고, 이를 바탕으로 이 문제들의 외적 구조를 분석하였다. 그리고 서술형 문제에 대해 분석된 외적 구조의 특징을 USE에서의 정답률과 관련시켜서 논의하였다.

한편, USE의 서술형 문제의 채점 방법을 분석하기 위해, 본 연구에서는 FIPM의 자료를 중심으로 서술형 문제의 채점 기준을 분석하였다. 본 연구에서는 USE의 모든 서술형 수학 문제를 대상으로 채점 방법을 분석하지는 않았으며, USE의 수학에 출제된 방정식과 부등식에 관련된 문제인 문제 13, 15, 18의 채점 기준을 연구 대상으로 삼았다. 이를 바탕으로 구체적인 채점 방법, 채점의 예시, 채점의 특징 등을 분석, 제시하였고, FIPM의 채점 기준을 2021년 USE 서술형 문제에 적용하는 방법도 제시하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 단답형 문제와 서술형 문제의 외적 구조

수학 문제의 외적 구조는 문제에 관련된 다음 네 가지 요소를 중심으로 결정된다(Krupich, 1995; Han, 2001, 2009): 첫째, 문제의 가정, 전제들, 주어진 것(X로 표시하자), 둘째 문제해결에 필요한 수학적 지식, 결론에 이르는데 바탕이 되는 또는 사용된 주요한 성질과 식(Y), 셋째 문제해결의 논리적 과정 또는 알고리즘(Z), 넷째 결론, 문제의 구하는 것(W). 이때 외적 구조의 구성 요소 Y, Z는 문제의 비정형성에 밀접하게 관련된다. 특히 수학 교실에서 학생들이 접하는 문제 중에서 비정형적인 문제는 풀이의 바탕이 되는 수학적 지식은 알고 있지만 해에 이르는 논리적 과정을 모르는 경우가 많은데, 이러한 경우는 외적 구조의 요소 Z가 문제의 비정형성을 결정하는 예가 된다.

보통 수학 문제에는 네 가지 요소 X, Y, Z, W 중에서 일부 요소에 미지의(문제해결자에게) 정보가 포함된다. 이때 미지의 정보를 포함하는 요소를 소문자로 나타내 문제의 외적 구조를 표현하게 된다. 가령, 어떤 문제에서 X, Y, Z는 모두 기지의(알려진) 내용으로 구성되고 W에만 미지의 내용이 포함되면, 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$로 표현된다. 만약, 다른 문제에서는 X, Y는 모두 기지의(알려진) 내용으로 구성되고, Z, W에 미지의 내용이 포함되면, 이 문제의 외적 구조는 $XYzw$로 표현된다.

예를 들어, 살펴본 문제 2020-5에서 해결해야 할 방정식이 주어졌으므로 외적 구조의 첫 번째 요소는 대문자인 X로 표시한다. 이 방정식의 해(구하는 것 또는 결론)는 문제에서 직접 주어지지 않았으므로 미지의 내용으로 외적 구조의 구성 요소 W는 소문자인 w로 나타낸다.

한편, 외적 구조에서 Y, Z는 문제해결자와 밀접하게 관련된다. 가령, 문제해결자 M은 방정식 $\sqrt{36-4x}=6$의 양변을 제곱하여 $36-4x=36$을 구한 다음 방정식의 해를 구했다고 하자. 문제해결자 M에게 무리방정식을 푸는 논리적인 절차는 기지의 내용이며(이때 외적 구조의 Z는 대문자 Z로 표현됨), 문제해결의 바탕이 되는 수학적 지식도 기지의 내용이다(외적 구조의 Y요소도 대문자 Y로 표현됨). 이때 문제해결자 M에게 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$가 된다. 한편, 다른 문제해결자 N은 무리방정식을 푸는 논리적 과정을 몰랐지만, 필요한 지식인 완전제곱, 이항 등을 알고 있었다고 가정하자. 그러면, 문제해결자 N에게 이 문제의 외적 구조는 $XYzw$가 된다.

문제의 외적 구조는 문제해결자와는 독립적으로 문제 자체에 의해서 결정되는 것은 아니다. 문제의 외적 구조는 문제해결자와 문제의 체계로 {문제해결자, 문제}로 표현될 수 있으며, 외적 구조의 요소 Y, Z는 문제해결자의 문제해결 자원에 밀접하게 관련된다. 그러나 {문제해결자, 문제}의 체계에서 문제해결자를 수학 교실의 일반적인 학생들 집단으로, 수학적 지식(Y)과 문제해결의 논리적 과정 또는 절차(Z)를 수학교과서에 기술된 지식과 과정으로 가정한다면, 수학 교실의 전형적인 수준에서 수학 문제의 외적 구조를 말할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 서술형 문제의 외적 구조를 단답형 문제의 외적 구조와 비교하여, 서술형 문제의 특징을 기술할 것이다. 이를 위해, 2021년 USE의 단답형 문제인 문제 2021-1에서 2021-12까지의 외적 구조를 간단히 살펴보자(문제들은 Yashchenko, Vysotsky, & Semyonov (2021)에 제시된 것임).

2021-1. 상점에서 가구들을 다양한 방법으로 팔고 있다. 가구 구매자는 가구를 집에서 조립하도록 출장 예약 구매도 있는데, 이때 출장 조립 비용은 가구 가격의 20%가 된다. 장식장의 가격이 3300루블이다. 장식장을 집에서 출장 조립하는 방법으로 구매하려면, 구매자는 몇 루블을 지불해야 하는가?

문제 2021-1의 외적 구조를 분석하기 위해선 문제를 해결해야 한다. 장식장의 가격이 3300, 장식장 조립을 위한 출장비가 $3300\times0.2=660$이므로, 결국 구매자는 $3300+660=3960$루블을 지불해야 한다. 문제 2021-1에서 주어진 정보(X)는 장식장 가격, 출장 조립 비용이 장식장 가격의 20 %이며, 구하는 것(W)은 장식장을 출장 조립으로 구입시 지불하는 총액이고, 문제해결에 필요한 수학적 지식(Y)은 퍼센트, 덧셈, 곱셈 등이고, 문제해결 과정(Z)은 장식장 가격에 출장 조립 비용을 더해 전체 지불 금액을 구하는 것이다.

문제 2021-1에서 외적 구조의 요소 X, Y, Z는 기지의 내용이며, 이 문제에서 미지의 정보는 W에 대한 것이다. 문제 2021-1의 외적 구조는 $XYZw$로 표현된다. 문제 2021-2를 살펴보자.

2021-2. Figure 7에 2005년 모스크바의 매달 평균 기온이 주어졌다. 수평축은 달(月)을 나타내고, 수직축은 기온(섭씨)을 나타낸다. 표에서 평균 기온이 섭씨 -8보다 작은 것은 몇 개의 달인가?

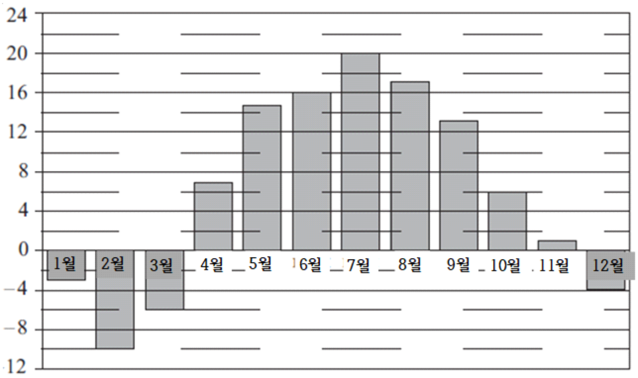


Figure 7. Problem 2021-2

문제 2021-2는 문제해결을 위해 필요한 조건(정보)들이 모두 주어졌고(X), 문제해결에 관련된 수학적 성질(Y), 문제해결 절차(Z)가 기지의 내용이며, 주어진 그림에서 기온이 -8보다 작은 달의 개수인 1만 구하면 된다. 즉 외적 구조의 요소 W는 미지가 되며, 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$이다. 다음 문제들을 살펴보자.

2021-3. Figure 8에는 한 칸이 1×1인 모눈종이에 사다리꼴이 주어졌다. 사다리꼴의 넓이를 구하여라.

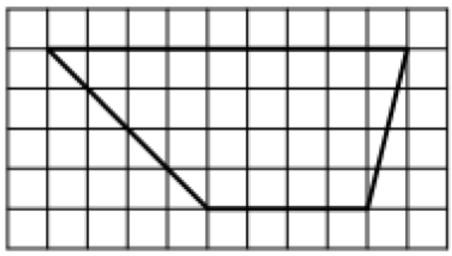


Figure 8. Problem 2021-3

2021-4. 60장의 화학 시험지 중에 3장에는 표백에 대한 문제가 포함되어 있다. 60장의 시험지 중에서 하나를 임의로 뽑았을 때, 표백에 대한 문제가 포함된 시험지를 뽑을 확률을 구하여라.

2021-5. 방정식 $3^{x+2}=81$을 풀어라.

2021-6. Figure 9에 직각삼각형 ABC의 예각 B는 75°이다. 직각인 꼭짓점 C에서 그은 높이 CH와 각의 이등분선 CD 사이의 각을 구하여라. 답은 도(°)로 구하여라.

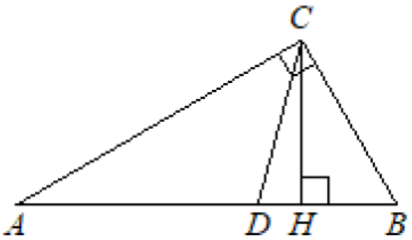


Figure 9. Problem 2021-6

문제 2021-3, 2021-4, 2021-5는 외적 구조가 $XYZw$이다. 이제, 2021-6을 살펴보자. 여기서는 높이 CH와 각의 이등분선 CD사이의 각을 구하는 논리적인 절차를 문제상황에 맞게 문제해결자가 찾아야 한다. 이 문제에서는 요소 Z가 미지의 내용을 포함하며, 구하는 값인 각의 크기도 알려지지 않았다(W도 미지이다). 한편, 이 문제를 해결하기 위해선 직각삼각형에서 직각을 제외한 두 각의 합이 90°, 각의 이등분선의 정의 등이 필요하며, 이들은 알려진 수학적 지식이다. 문제 2021-6은 $XYzw$인 외적 구조를 가진다.

외적 구조가 $XYZw$인 문제들은 문제해결자가 문제해결을 위해 필요한 초기 정보들, 수학적 지식, 해결의 논리적 절차를 알고 있는 것이기 때문에, 계산상의 오류가 발생하지 않으면 성공적으로 문제를 해결할 가능성이 크다. 그러나 $XYzw$인 외적 구조를 가지는 문제는 문제해결자가 문제해결의 논리적 절차(과정)를 스스로 구성해야 하므로, 외적 구조가 $XYZw$인 문제보다는 어려움이 많이 발생할 수 있다. 실제로, Pankratiev (2021)에 의하면, 문제 2021-1, 2021-2, 2021-3, 2021-4, 2021-5에 대한 모스크바 지역 학생들의 평균 정답률은 각각 96.40 %, 98.77 %, 89.31 %, 94.01 %, 93.56 %였지만, 2021-6의 정답률은 58.43%였다. 이제, 문제 2021-7을 살펴보자.

2021-7. 함수 $y=f'(x)$, 즉 함수 $f(x)$의 도함수의 그래프가 구간 $(-8,4)$에서 Figure 10과 같이 주어졌다. 구간 $[-7,-4]$의 어느 점에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 가지는가?

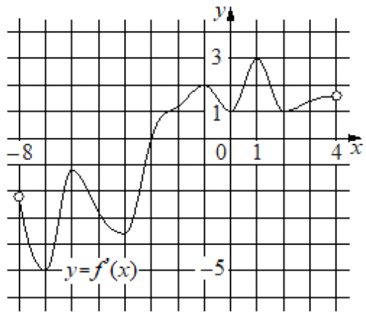


Figure 10. Problem 2021-7

2021-7의 문제상황에서 결론은 '$x=t$에서 함수 $y=f(x)$가 최솟값을 가진다'는 것인데, 이때 최솟값을 구하는 문제라면 외적 구조의 구성 요소 W가 미지의 것이 되고, t를 구하는 문제라면 구성 요소 X가 미지의 것이 된다. 결국 문제 2021-7은 X가 미지인 경우이다. 이 문제의 해결에 필요한 지식으로는 $f'(x)$의 값에 따른 함수의 증감과 그 그래프이며, 이것은 알려진 지식이다. 문제해결의 논리적 과정은 (1) $[-7,-4]$에서 $f'(x)$의 값이 음임을 확인하고, (2) $[-7,-4]$에서 $y=f(x)$는 감소하며, (3) $[-7,-4]$에서 $x=-4$일 때 최솟값을 가진다는 것이다. 이러한 논리적 과정은 수학적으로 준비된 학생들에게는 정형적인 것이 될 것이며 이때의 외적 구조는 $xYZW$이 되고, 그렇지 않은 경우에는 외적 구조가 $xYzW$가 될 것이다.

이러한 구조적인 차이는 문제의 정답률과도 관련된다. Yashchenko, Vysotsky, & Semyonov (2021)에 의하면 문제 2021-7에서 고득점 학생들의 정답률은 93.2%였고, 낮은 점수 학생들의 정답률은 13.8 %였고, Pankratiev (2021)에 의하면 모스크바 지역의 평균 정답률은 56.39 %였다. 이제, 문제 2021-8, 2021-12를 살펴보자.

2021-8. Figure 11에 원뿔이 구에 내접하고 있다. 원뿔 밑면의 반지름은 구의 반지름과 같다. 원뿔의 부피는 24이다. 구의 부피를 구하여라.

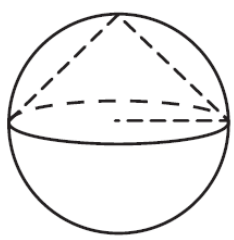


Figure 11. Problem 2021-8

2021-12. 함수 $y = 7 \cdot \ln(x-9) - 7x + 2$의 극댓점을 구하여라.

문제 2021-8에서 구의 부피를 구하려면 구의 부피 공식 $\frac{4}{3}\pi r^3$에서 r값을 구해야 한다. 문제의 조건에서 원뿔의 부피가 24이므로, $\frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{3}\pi r^3 = 24$이다. 이때 $\pi r^3 = 72$이다. 여기까지는 문제의 조건(X)과 알려진 수학적 성질(Y)로부터 얻어지는 것이다. 문제를 해결하기 위해, $\pi r^3 = 72$을 $\frac{4}{3}\pi r^3$에 대입하는 것이 남았다. 여기서는 문제해결의 논리적 절차(Z)와 관련하여 미지의 정보로 간주할 만한 두드러진 내용이 없으므로, 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$로 볼 수 있다. 한편, 문제 2021-12는 극댓점을 찾기 위해 $y = 7 \cdot \ln(x-9) - 7x + 2$의 도함수 y'을 찾아 $y' = 0$인 x값을 구하면 된다. 이때 문제해결의 논리적 과정은 기지이므로 외적 구조는 $XYZw$이다.

Pankratiev (2021)에 의하면, 문제 2021-8, 2021-12에 대한 모스크바 지역의 평균 정답률은 각각 54.80 %, 57.36 %였다. 이 정답률을 문제 2021-8, 2021-12와 같은 $XYZw$인 외적 구조를 가지는 문제 2021-1, 2021-2, 2021-3, 2021-4, 2021-5의 정답률과 비교하면 차이가 크다는 것을 볼 수 있다. 이것을 통해 정답률에 문제의 외적 구조뿐만 아니라 문제해결 과정의 복잡도, 문제의 친숙함 정도, 문제의 소재 및 영역(대수, 기하 등) 등도 영향을 미친다는 것을 간접적으로 알 수 있다. 문제의 풀이를 구성하는 논리적 과정의 복잡성 등은 문제의 내적 구조에서 논의될 수 있는데, 본 연구에서는 외적 구조에 대한 논의로 한정할 것이다. 다음 문제를 살펴보자.

2021-9. 식 $\frac{8\sin 94°}{\sin 47° \cdot \sin 43°}$의 값을 구하여라.

문제 2021-9를 해결하기 위해선 $\sin 47°$를 $\cos 43°$로 바꾸고, 분모 $\cos 43° \sin 43°$에 대해 사인 2배각 공식을 사용하여 $\cos 43° \sin 43° = \frac{1}{2}\sin 86°$로 변형시킨다. 그리고 $\sin 94° = \sin 86°$임을 이용하여 답을 구해야 한다. 이 문제를 해결하는 과정에 필요한 사인과 코사인의 변환 방법, 사인 2배각 공식 등은 기지의 내용이며(Y), 식을 변형하는 논리적인 과정도 충분히 정형적이라 할 수 있다. 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$가 된다. 이 문제의 정답률은 58.93%였다(Pankratiev, 2021). 다음 문제를 살펴보자.

2021-10. 전기회로의 콘센트에 저항이 $R_1 = 54$(Ω)인 전기오븐을 연결하였다. 그리고 전기오븐과 나란히 콘센트에 저항이 R_2(Ω)인 전기온풍기를 연결하려고 한다. 저항이 r_1, R_2인 두 가지 전기용품을 나란히 연결하면 이들의 전체 저항 R은 공식 $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$에 의해 계산된다. 전기회로가 정상적으로 작동하려면 전체 저항이 36Ω보다 작지 않아야 한다. 전기온풍기의 가능한 최소 저항을 구하여라.

문제 2021-10에서 결론은 '전체 저항이 36Ω보다 작지 않아야 한다'는 것이며, 조건 $R_1 = 54$, R_2, $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$가 결론을 만족시켜야 한다. R_2가 주어지지 않았으므로, 외적 구조의 구성 요소 중 X가 미지이다. 문제해결은 부등식 $\frac{54R_2}{54 + R_2} \geq 36$을 생각하여 R_2에 대한 답을 구하게 된다. 이 문제의 외적 구조는 $xYZW$이다. 다음 문제 2021-11을 살펴보자.

2021-11. 384개의 부품을 만드는데 첫 번째 작업자가 걸린 시간은 두 번째 작업자가 480개의 부품을 만드는데 걸리는 시간보다 8시간이 적었다. 그리고 첫 번째 작업자는 두 번째 작업자보다 한 시간에 4개의 부품을 더 만든다. 첫 번째 작업자는 한 시간에 몇 개의 부품을 만드는가?

2021-11은 첫 번째 작업자가 한 시간에 만드는 부품의 개수를 x, 두 번째 작업자가 만드는 부품의 개수를 y라 놓고 연립방정식을 만들어 풀 수 있다. 이때 x, y에 대한 연립방정식은 문제상황마다 다르므로, 문제해결 과정은 비정형적이라 할 수 있다. 외적 구조의 구성 요소 Z는 미지의 내용을 포함하며, 이 문제의 외적 구조는 $XYzw$이다. 이 문제의 정답률은 39.55 %로(Pankratiev, 2021), 단답형 문제 중에서 가장 낮은 정답률을 보였다.

살펴본 것과 같이, 단답형 문제 2021-1, 2021-2, 2021-3, 2021-4, 2021-5, 2021-8, 2021-9, 2021-12는 $XYZw$인 외적 구조를 가지며, 2021-7, 2021-10은 $xYZW$이며, 2021-6, 2021-11은 $XYzw$

인 외적 구조를 가진다. 단답형인 12문제 중 10문제는 외적 구조의 구성 요소 중 한 개의 요소에만 미지의 내용이 포함되었으며, 2문제는 두 요소에 미지의 내용이 포함되어 있다. 특히 외적 구조가 $XYZw$인 문제들은 문제에 조건들, 필요한 지식, 문제해결의 논리적 절차가 이미 알려진 경우이므로, 외적 구조가 $XYzw$인 문제들보다 높은 정답률을 보였다.

이제, 서술형 문제 2021-13에서 2021-19의 외적 구조를 분석하자.

2021-13.

(a) 방정식
$4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}$을 풀어라.

(b) 구간 $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$에 속하는 이 방정식의 해를 구하여라.

2021-13 (a)에서 방정식 $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x = 4\sqrt{3}$을 풀기 위해, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 대입하여 정리하면, $4\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x + 3\sin x = 0$이 된다. 이로부터 $\sin x(2\sin x - \sqrt{3})^2 = 0$이 얻어지며, $\sin x = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$을 만족시키는 일반해를 구하면 된다.

문제 2021-13 (a)의 외적 구조를 조사하자. 이 문제에서는 초기 조건(X)이 주어졌다. 이 문제의 해결에 필요한 지식 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 인수분해, $\sin x = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 일반해 등은 수학 교실에서 다룬다(요소 Y는 기지의 내용으로 구성됨). 이제, 문제해결의 논리적 절차인 (1) $\cos^2 x$를 $\sin x$를 이용해 나타내고, (2) 식을 정리하여 인수분해하고, (3) $\sin x = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 일반해를 구하는 과정이 문제해결자에게 미지(비정형적인)의 것인지 생각하자. 이 논리적 과정을 모르는 학생에게 Z는 미지의 내용을 포함한 요소이며 이때의 외적 구조는 $XYzw$가 되고, 이를 알고 있는 경우 외적 구조는 $XYZw$가 될 것이다.

단순하게 생각하면, 수학적으로 잘 준비된 학생에게 이 문제의 외적 구조는 $XYZw$가 될 것이고, 그렇지 않은 경우에는 $XYzw$가 될 것이다. 일반적인 수학 교실의 교수-학습 상황을 가정한다면, 2021-13 (a)의 외적 구조는 $XYZw$라고 해야 할 것이다.

2021-13 (b)를 살펴보자. 2021-13 (b)의 풀이를 위해 2021-13 (a)의 일반해 $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$(이때 $k, m, n \in Z$)가 주어졌다고 하자. 그러면, $y = \sin x$의 그래프를 이용하여 구간 $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$에 속하는 일반해의 특정한 값을 구하면 된다. 2021-13 (a)의 일반해를 주어진 것으로 가정하면, 2021-13 (b)의 외적 구조는 $XYZw$가 될 것이다. Pankratiev (2021)에 의하면, 문제 2021-13은 서술형 문제 중에서 가장 높은 정답률인 39.82 %를 보였다. 다음 문제를 살펴보자.

2021-14. 정사각뿔 $SABCD$에서 밑면의 변 AD는 14이고 높이 SH는 24이다. 점 K는 옆모서리 SD의 중점이고, 점 N은 모서리 CD의 중점이다. 평면 AKB는 옆모서리 SC와 점 P에서 만난다.

(a) 직선 KP가 선분 SN의 중점에서 지난다는 것을 증명하여라.

(b) 점 P에서 평면 SAB까지 거리를 구하여라.

문제 2021-14는 2021-13과 같이 두 개의 물음으로 구성되어 있다. 2021-14 (a)에서는 주어진 것(X), 문제해결에 필요한 수학적 지식(Y), 결론인 '직선 KP가 선분 SN의 중점에서 지난다'는 것(W)이 주어졌다. 그러므로 이 문제의 외적 구조는 $X??W$와 같은 형태가 될 것이다.

이제, Y와 Z에 대한 정보를 확인하기 위해, 문제를 풀어보자. 문제 2021-14 (a)를 그림으로 나타내자 (Figure 12의 왼쪽 그림). $AB \parallel CD$이므로 평면 ABK와 직선 CD는 평행이다. 그리고 직선 CD와 KP는 같은 평면 SCD에 속하며 만나지 않으므로 $CD \parallel KP$가 된다. 이제, 직선 KP와 선분 SN의 교점을 Q라 하고, 삼각형 SDN을 생각하자. K가 모서리 SD의 중점이고 $DN \parallel KQ$이므로, 삼각형 SDN에서 중점연결정리에 의해 점 Q는 선분 SN의 중점임을 알 수 있다.

문제 2021-14 (a)의 해결에 필요한 수학적 지식은 공간에서 직선과 평면의 평행, 직선의 평행, 삼각형의 중점연결정리 등이며, 이것은 수학교과서에서 다룬다. 그러나 Figure 12에서 $AB \parallel CD$에서 평면 ABK와 직선 CD의 평행성을 보고, 이로부터 $CD \parallel KP$를 유도하는 것과 같은 증명 과정은 문제해결자에게 미지의 내용이다. 그러므로 2021-14 (a)의 외적 구조는 $XYzW$가 된다.

이제, 2021-14 (b)를 살펴보자. 어렵지 않게, 외적 구조의 X, W요소와 관련하여 2021-14 (b)는 $X??w$

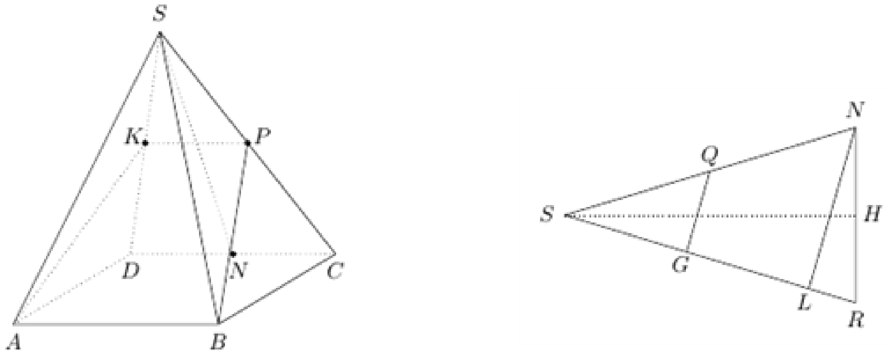


Figure 12. Solution of problem 2021-14

가 된다는 것을 알 수 있다(구하는 것인 점 P와 평면 SAB의 거리가 미지이므로). 2021-14 (b)의 풀이를 생각하자. $AB \parallel CD$이고 $CD \parallel KP$이므로 $AB \parallel KP$이 되며, 이로부터 직선 KP와 평면 SAB는 평행이다. 점 Q가 직선 KP에 속하므로, 점 P에서 평면 SAB까지 거리는 점 Q에서 평면 SAB까지 거리와 같다. 이제, 선분 AB의 중점을 R이라 하고, 삼각형 SNR을 생각하자(Figure 12의 오른쪽 그림은 편의상 삼각형 SNR을 회전시켜 그린 것임). 점 Q, N에서 직선 SR에 내린 수선의 발을 G, L이라 하자. 이때, 선분 QG의 길이가 구하는 거리이다.

문제의 조건에 의해, $\overline{SH}=24$, $\overline{NR}=14$이며, 삼각형 SNR의 넓이는 148이다. 그리고 삼각형 SNR의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{SR}\cdot\overline{NL}$이므로, $\overline{SR}\cdot\overline{NL}=296$이다. 직각삼각형 SHR에서 $\overline{SH}=24$, $\overline{HR}=7$이므로, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{SR}=\sqrt{24^2+7^2}=25$이다. 결국 $\overline{NL}=\frac{296}{25}$이다. 한편, 삼각형 SQG와 SNL의 닮음과 $\overline{SQ}=\overline{QN}$을 이용하면, $\overline{QG}=\frac{1}{2}\overline{NL}$이며, 이로부터 답을 구할 수 있다.

문제 2021-14 (b)의 풀이 과정에는 새로운 정리가 사용되지 않았지만, 그 해결의 논리적 과정은 비정형적이다. 그러므로 문제 2021-14 (b)의 외적 구조는 $XYzw$가 된다.

문제 2021-13 (a), 2021-13 (b)와 마찬가지로 2021-14 (b)도 계산하는 문제인데, 이들의 외적 구조는 다르다. 대수 문제의 경우에는 문제해결을 위한 일반적인 절차(과정, 알고리즘)가 알려진 경우가 있는데 이때 외적 구조는 $XYZw$가 될 수 있다. 그러나 도형 문제는 그렇지 못한 경우가 많다. 2021-14 (b)에서 점 P에서 평면 SAB까지 거리를 구하는 일반적인 절차를 수학교과서에서 다루지 않기 때문에, 문제 2021-14 (b)의 외적 구조는 $XYzw$가 되었다. 한편, Pankratiev (2021)에 의하면 문제 2021-14의 정답률은 16.32%로 문제 2021-13의 정답률의 절반에도 미치지 못하는 수준이다. 이러한 차이는 문제의 외적 구조의 차이, 문제 2021-13은 방정식 문제이지만 2021-14는 공간도형 문제라는 것도 영향을 미쳤을 것으로 생각된다. 다음 문제를 살펴보자.

2021-15. 부등식 $16^{\frac{1}{x}-1}-4^{\frac{1}{x}-1}-2\geq 0$을 풀어라.

문제 2021-15는 지수부등식으로 일반적으로 치환을 이용하여 해결한다. 적당한 치환을 통해 주어진 부등식을 일차부등식 또는 이차부등식으로 변형시켜 문제를 해결한다. 그런데, 이 문제에서는 직접 치환할 수 있는 형태로 식이 주어지지 않았다. 치환을 하려면, 주어진 부등식에서 $16^{\frac{1}{x}-1}-4^{\frac{1}{x}-1}-2=4^{\frac{2}{x}-2}-4^{\frac{1}{x}-1}-2=\frac{4^{\frac{2}{x}}}{16}-\frac{4^{\frac{1}{x}}}{4}-2$ 또는 $16^{\frac{1}{x}-1}-4^{\frac{1}{x}-1}-2=4^{2\left(\frac{1}{x}-1\right)}-4^{\frac{1}{x}-1}-2$와 같이 변형시켜야 한다(여기가 문제해결에서 비정형적인 부분이라 할 수 있다).

이제, $4^{\frac{1}{x}-1}=A$로 치환할 수도 있고, $4^{\frac{1}{x}}=A$로 치환할 수도 있을 것이다. 가령, $4^{\frac{1}{x}}=A$로 치환하자. 이를 위해, $16^{\frac{1}{x}-1}=4^{\frac{2}{x}-2}$로 변형시키자. 그러면, $16^{\frac{1}{x}-1}-4^{\frac{1}{x}-1}-2=4^{\frac{2}{x}-2}-4^{\frac{1}{x}-1}-2=\frac{4^{\frac{2}{x}}}{16}-\frac{4^{\frac{1}{x}}}{4}-2$가 된다. $4^{\frac{1}{x}}=A$라 놓으면, $\frac{A^2}{16}-\frac{A}{4}-2\geq 0$, $A^2-4A-32\geq 0$이 된다. 인수분해하여 부등식을 풀면, $A\leq -4$, $A\geq 8$이다. $A\geq 0$임을 생각하면,

$A \geq 8$, $4^{\frac{1}{x}} \geq 8$, $2^{\frac{2}{x}} \geq 2^3$, $\frac{2}{x} \geq 3$, $\frac{2}{x} - 3 \geq 0$이 된다. 이것을 풀면 해를 구할 수 있다.

문제 2021-15의 해결에 필요한 지식은 이미 학생들에게 알려졌으며, 해결 과정에서 주어진 부등식을 치환이 가능한 식으로 변형시키는 비정형적인 측면에 주목한다면(치환 이후에는 알려진 절차에 따라 문제를 해결하게 됨), 문제 2021-15의 외적 구조는 $XYzw$라 할 수 있다.

2021-16. 긴 밑변이 AD이고 높이가 BH인 사다리꼴 $ABCD$가 원에 내접한다. 직선 BH는 이 원과 점 K에서 만난다.

(a) 직선 AC와 AK가 직교한다는 것을 증명하여라.

(b) 직선 CK와 AD는 점 N에서 만난다. 원의 반지름이 12이고, $\angle BAC = 30^\circ$, 사각형 $BCNH$의 넓이는 삼각형 KNH의 넓이보다 8배가 크다고 할 때, AD의 길이를 구하여라.

문제 2021-16의 풀이는 여기에 소개하지는 않지만, 문제의 외적 구조는 문제 2021-14와 유사하게 논의할 수 있다. 2021-16 (a)는 증명 문제로 $XYzW$인 외적 구조를 가지며, 선분의 길이를 구하는 2021-16 (b)는 $XYzw$가 된다(선분 AD의 길이를 구하는 절차(과정)가 학생들에게 미지의 내용이므로). 2021-16의 정답률은 5.04 %로(Pankratiev, 2021), 서술형 문제 중에서 가장 낮다. 이 문제는 외적 구조나 문제의 구성이 2021-14와 같지만, 정답률에서는 많은 차이가 난다. 문제의 외적 구조 이외에 문제의 어떤 특징이 정답률의 차이를 발생시키는지에 대한 후속적인 연구가 필요할 것이다. 이제, 나머지 문제들의 외적 구조도 살펴보자.

2021-17. 2025년 7월에 30만루블을 6년 대출을 받으려고 계획한다. 대출의 상환 조건은 다음과 같다.

- 2026년 1월, 2027년 1월, 2028년 1월에 부채가 전년 말과 비교해 20 %만큼씩 증가된다.
- 2029년 1월, 2030년 1월, 2031년 1월에 부채가 전년 말과 비교해 r %만큼씩 증가된다.
- 매년 2월에서 6월까지 부채의 일부를 상환해야 한다.
- 매년 7월의 부채는 이전 해 7월의 부채보다 같은 양만큼 작아야 한다.
- 2031년 7월까지 대출을 완전히 갚아야 한다.

대출을 완전히 상환할 때까지 지불한 총액이 49만 8천루블이라고 할 때, r을 구하여라.

2021-17의 문제상황에서 결론은 '대출을 완전히 상환할 때까지 지불한 총액이 49만 8천루블'이라는 것이며, 이를 만족시키기 위한 r을 구해야 한다. 즉 외적 구조의 구성 요소 X가 미지의 정보를 포함하고 있다. 문제의 조건 '매년 7월의 부채는 이전 해 7월의 부채보다 같은 양만큼 작아야 한다'는 것으로부터 매년 이자와 원금의 $\frac{1}{6}$을 상환해야 한다는 것을 알 수 있다.

2026년에는 $\frac{3000000}{6} + 300000 \times 0.2$를 상환하고,

2027년에는 $\frac{3000000}{6} + 250000 \times 0.2$,

2028년에는 $\frac{3000000}{6} + 200000 \times 0.2$,

2029년에는 $\frac{3000000}{6} + 150000 \times \frac{r}{100}$,

2030년에는 $\frac{3000000}{6} + 100000 \times \frac{r}{100}$,

2031년에는 $\frac{3000000}{6} + 50000 \times \frac{r}{100}$을 상환하여 전체 498000이 되도록 r을 구하면 된다. 이러한 문제해결 과정은 문제상황에 따라 문제해결자가 구성해야 하므로, 외적 구조의 요소 Z는 미지가 된다. 이로부터 이 문제의 외적 구조는 $xYzW$이다.

문제 2021-17의 정답률은 12.55 %이다(Pankratiev, 2021). 이 정답률은 외적 구조에서 미지의 요소가 2개 포함된 2021-14 (외적 구조가 $XYzW$, $XYzw$인), 2021-15 (외적 구조가 $XYzw$인)의 정답률보다 낮고, 2021-16 (외적 구조가 $XYzW$, $XYzw$인)보다는 높은 수준이다. 2021-17의 외적 구조가 $xYzW$인 것을 생각하면, 외적 구조에서 미지의 요소가 정답률이나 난이도에 어떻게 영향을 미치는가에 대한 추가적인 연구도 필요할 것으로 생각된다.

2021-18. 방정식 $|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$가 오직 두 개의 서로 다른 근을 가지도록 하는 모든 a값을 구하여라.

문제 2021-18에 방정식이 주어졌지만, 여기서는 방정식을 만족시키는 x값을 구하는 것이 아니다(x값을

구하는 방정식 문제의 외적 구조는 주로 $XYzw$, $XYZw$일 가능성이 많다). 문제 2021-18을 보면, 이 문제상황의 결론은 '방정식이 두 개의 서로 다른 근을 가진다'는 것이며, 이 결론을 만족시키도록 하는 a(주어진 방정식에 포함된)값을 구하는 것이다. 즉 외적 구조의 요소 X가 미지의 내용을 포함한다.

문제해결의 방향을 간단히 살펴보자. $|x^2-a^2|=|x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a}$에서 우변을 이항하여 정리하면, $|x+a|\left(|x-a|-\sqrt{x+a^2-2a}\right)=0$이며, $x=-a$, $|x-a|=\sqrt{x+a^2-2a}$이다. 이때 $x+a^2-2a\ge 0$이다. $|x-a|=\sqrt{x+a^2-2a}$을 양변 제곱하여 풀면, $x=2a$, $x=1$이 된다. 결국, $x+a^2-2a\ge 0$을 만족시키며 $x=-a$, $x=2a$, $x=1$이 오직 두 개의 서로 다른 근이 되도록 하는 a값을 구해야 한다. 이것은 가로축이 x, 세로축이 a인 좌표평면에 $x+a^2-2a\ge 0$의 영역을 표시하여, 이 영역에서 $x=-a$, $x=2a$, $x=1$을 조사하면 해결할 수 있다. 문제해결의 논리적 과정은 비정형적이므로 외적 구조의 요소인 Z는 미지이며, 이 문제의 외적 구조는 $xYzW$이다. 이 문제는 서술형 문제에서 두 번째 낮은 정답률을 보이며, 정답률이 6.08 %이다 (Pankratiev, 2021).

> 2021-19. 세 자리수인 자연수와 이 자연수의 숫자들의 합의 비가 정수이다.
> (a) 이 비가 34가 될 수 있는가?
> (b) 이 비가 84가 될 수 있는가?
> (c) 만약 세 자리수의 첫 번째 숫자가 4라고 하면, 이 비가 가질 수 있는 최솟값을 구하여라.

문제 2021-19는 결론인 비를 구해야 하므로 외적 구조의 요소 W가 미지이다. 여기서는 자세한 풀이를 기술하지는 않겠지만, 문제해결 과정도 비정형적이므로 Z도 미지이다. 그러므로 이 문제의 외적 구조는 $XYzw$가 된다.

단답형 문제에서는 $XYZw$인 외적 구조를 가지는 문제가 8개로 가장 많고, $xYZW$는 2개, $XYzw$는 2개였다. 단답형 문제에 외적 구조가 $XYZw$인 문제가 많다는 것은 주어진 조건들, 알려진 지식들, 알려진 논리적 과정을 통해 문제에서 요구되는 답을 구하는 문제들이 많다는 것을 의미한다. 이러한 문제들은 분석적 사고나 다양한 개념들, 방법들의 종합을 통한 창의적 접근보다는 정확한 계산 능력, 기억력과 밀접하게 관련될 수 있다는 것을 생각하면, 단답형 문제 문제를 통해 학생들의 다양한 사고 능력과 창의적 문제해결의 측면을 평가하기는 어려울 것으로 생각된다.

서술형 문제의 외적 구조는 2021-13 (a), (b)는 $XYZw$이고, 2021-14 (a)는 $XYzW$, 2021-14 (b)는 $XYzw$, 2021-15는 $XYzw$, 2021-16 (a)는 $XYzW$, 2021-16 (b)는 $XYzw$, 2021-17은 $xYzW$, 2021-18은 $xYzW$, 2021-19는 $XYzw$이다. 2021-13, 2021-14 (a), 2021-16 (a)를 제외한 나머지 모든 문제가 두 개의 요소가 미지인 외적 구조를 가졌다. 특히 이 문제들은 문제해결의 논리적 절차인 Z요소가 미지의 내용을 포함하기 때문에, 이러한 서술형 문제들을 해결하기 위해서 문제해결자는 문제상황에 적합한 논리적 절차를 구성해야 했다. 이와 같은 외적 구조는 정답률에 영향을 미치는 한 요인이 될 것으로 추측할 수 있다. 실제로, 단답형 문제의 경우 외적 구조에서 미지의 요소가 1개인 문제들의 평균 정답률은 77.47 %였고, 외적 구조에서 미지의 요소가 2개인 문제들의 평균 정답률은 48.99 %였다.

살펴본 단답형 문제와 서술형 문제의 외적 구조를 정리하면 Table 8과 같다.

Table 8을 보면, 서술형 문제는 단답형 문제에 비해 외적 구조가 다양하다. 이것은 서술형 문제의 경우에 문제해결자가 해결을 위해 찾아야 하는 정보의 종류가 단답형 문제에 비해 다양하다는 것을 의미한다. 2021년 USE의 수학 시험에서 단답형 문제의 평균 정답률은 72.75 %이고, 서술형 문제의 평균 정답률은

Table 8. Outer structure of the mathematics problems of 2021 USE

외적 구조	2021년 USE의 문제 번호									
$XYZw$	2021-1	2021-2	2021-3	2021-4	2021-5	2021-8	2021-9	2021-12	2021-13 (a)	2021-13 (b)
$xYZW$	2021-7	2021-10								
$XYzW$	2021-14 (a)	2021-16 (a)								
$XYzw$	2021-6	2021-11	2021-14 (b)	2021-15	2021-16 (b)	2021-19				
$xYzW$	2021-17	2021-18								

18.03 %였다. 서술형 문제의 평균 정답률이 단답형 문제의 평균 정답률보다 낮은 것을 다양한 관점에서 분석할 수 있겠지만, 외적 구조에서의 차이도 정답률 차이를 발생시키는 하나의 요인이 될 수 있을 것이다.

한편, 2021년 USE의 수학 시험에서 서술형 문제의 외적 구조의 다른 특징은 구조 요소인 X, Y, Z, W 중 미지의 내용을 포함하는 요소가 X, Z, W(외적 구조에서 x, z, w로 표시되는)이며, 모든 문제에서 Y 요소는 기지의 내용이라는 것이다. 이것은 2021년 USE의 수학 시험에는 교육과정이나 교과서를 벗어난 새로운 수학적 지식을 요구하는 문제가 출제되지 않았고, 문제상황의 전제 조건, 문제해결의 논리적 과정, 문제상황에서 얻어지는 결론(값)을 구하는 문제가 출제되었다는 것을 의미한다.

2. 서술형 문제의 채점

러시아는 서술형 평가에 대한 오랜 전통을 가지고 있으며, USE에서 선택형 문제는 출제되지 않는다. USE에서 서술형 문제에 대한 채점이 어떻게 이루어지는가를 살펴보자. FIPM은 USE에 대한 평가 정보들을 공개하는데, 그중에는 서술형 문제의 채점 기준과 방법 등이 포함된다. 여기서는 FIPM에서 제시한 서술형 문제의 채점 기준과 방법을 분석하자.

본 연구에서는 방정식, 부등식에 관련된 문제들을 살펴보자(2021년 USE에서는 문제 13, 문제 15, 문제 18이다). USE의 문제 2021-13에 관련된 채점 기준을 살펴보자. 일반적으로 문제 13은 삼각방정식, 지수방정식, 로그방정식에 대한 문제이며, 2개의 부분 문제 (a), (b)로 구성된다. FIPM (2021b, p. 5)가 제시한 문제 13에 대한 채점 기준표는 Table 9와 같다.

특히 FIPM (2021b)은 부분 문제 (b)에 대해 그래프를 이용하거나 부등식을 이용하는 것과 같은 다양한 방법으로 근을 구할 수 있으며, 만약 수직선이나 수원(number circle)을 이용하는 경우에는 수직선이나 수원에 구간이 표시되어야 하며, 그 구간에 근들이 표시되어야 근거가 제시된 풀이임을 규정하였다.

답안의 작성과 채점에 관련된 구체적인 정보의 공개는 학생들에게는 답안의 작성에 대한 구체적인 방법을 안내하고, 평가자에게는 학생들의 답안을 채점하는 과정에서 발생할 수 있는 다양한 상황에 대해 효과적으로 대처할 수 있는 지침을 제공하게 된다. 그리고 이것은 평가에 대한 정보의 개방이라는 측면에서 교육적인 의미를 부여할 수 있을 것이다.

Table 9의 채점 기준은 우리나라의 서술형 채점 기준과는 차이가 있다. 예를 들어, MOE (2018, p. 121)는 ‘곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하고 그 값을 구하시오’라는 서술형 문제에 대해, 채점 기준을 Table 10과 같이 제시하였다.

Table 10의 채점 기준표에서는 구하는 도형의 넓이를 정적분 $\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx$로 표현하지 못하는 경우에도 1점이 배정되어 있다. 학생이 문제해결을 시도했다는 측면에서는 의미를 부여할 수도 있겠지만, 문제해결 자체에 대해 평가한다는 측면에서는 다른 관점도 존재할 수 있다. 즉, 다음과 같은 논의가 가능할 것이다: 도형의 넓이를 구하는 문제에서 넓이를 구하는 식인 $\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx$를 제시하지 못했는데 과연 점수를 줄 수 있는가? Table 10과 관련하여 가능한 또 다른 논의는 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 풀이의 과정이 올바른 순차성을 가지는 경우에는 점수를 줄 수 없는가?

이에 관련하여, Table 10에서 1점을 받는 경우는 Table 9의 채점 기준에 의하면 점수를 받을 수 없으며, 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 풀이의 과정이 올바른 순차성을 가지는 경우에는 Table 10에서는 점수를 받을 수 없지만 Table

Table 9. Scoring criteria for problem 13

채점 기준	점수
(a), (b) 모두에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다.	2
(a)에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다. 또는 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 이때 (a)와 (b)의 풀이의 모든 과정은 올바른 순차성을 가지고 있다.	1
풀이가 위에서 나열한 기준 중 어느 하나에도 부합하지 않는다.	0
최대 점수	2

Table 10. Scoring criteria for descriptive problem

채점 기준	점수
$y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=-x+\frac{3}{2}$이 만나는 점의 x좌표를 옳게 구하고, 도형의 넓이를 정적분으로 옳게 표현하여 넓이를 바르게 구한 경우	3
$y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=-x+\frac{3}{2}$이 만나는 점의 x좌표를 옳게 구하고, 도형의 넓이를 정적분으로 옳게 표현하였으나 넓이를 바르게 구하지 못한 경우	2
$y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=-x+\frac{3}{2}$이 만나는 점의 x좌표를 옳게 구하였으나, 도형의 넓이를 정적분 $\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx$로 표현하여 넓이를 바르게 구하지 못한 경우	1
무응답 또는 오답을 구한 경우	0

9에서는 1점을 받을 수 있다. 이러한 채점 방법에 대해서는 더 많은 논의가 필요할 것으로 생각된다.

한편, Table 9에서는 문제 (a)의 문제풀이 전체를 하나의 채점 요소로 잡았으며, 문제 (a)에 대해 근거를 제시하면서 올바른 답을 구하면 1점이 주어지며, (a)와 (b)를 근거를 제시하면서 올바르게 풀면 2점이 주어진다. USE에서는 채점 요소를 문제풀이 전체로 잡아 채점 과정을 단순화하였고, Kang (2007)이 지적한 평가 과정의 복잡성, 시간과 노력의 과중과 같은 서술형 평가의 문제점을 어느 정도 해결할 수 있었을 것으로 추측된다.

Table 9와 같은 채점 기준표의 활용은 KICE (2019, p. 5)에서 지적한 '서·논술형 평가는 단일 답 중심의 단답형, 완성형, 선택형 문항이 측정하기 어려운 비판적·창의적 사고력, 문제해결력, 의사소통 능력과 같은 영역에 대해 평가의 범위를 확장하여 사회의 변화에 적응할 수 있는 학습자의 능력을 잴 수 있다'는 서술형 평가의 장점을 유지하면서 국가 규모의 수학 시험에 서술형 평가를 도입할 수 가능성을 제공할 수 있을 것이다.

이제, Table 9를 중심으로 서술형 평가의 채점의 구체적인 사례들을 분석해 보자.

예제 1.

(a) 방정식 $\cos 2x+2=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$을 풀어라.

(b) 구간 $\left[-3\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$에 속하는 이 방정식의 해를 구하여라.

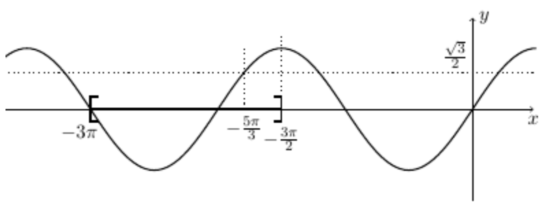
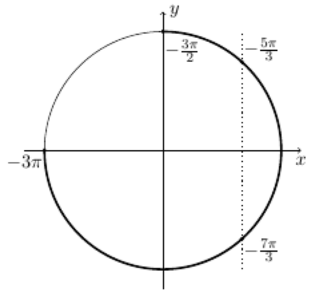
이 문제에 대해 FIPM (2021b, p. 12)에 제시된 풀이를 바탕으로 만든 Table 11과 같은 가상의 답지를 살펴보자.

풀이 1A에서는 예제 1 (a)의 풀이 과정이 전반적으로 올바른 순차성을 가지며 근거있게 기술된 것으로 보일 수 있다. 그러나 방정식 $\cos 2x+2=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$에서 $1-2\sin^2 x+2=\sqrt{3}\sin x$로 진행하는 과정에서 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$이므로, 식 $1-2\sin^2 x+2=\sqrt{3}\sin x$이 아니라 $1-2\sin^2 x+2=-\sqrt{3}\sin x$이 얻어져야 한다. 이로부터 $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-3=0$이 되며, 방정식의 해는 $x=2m\pi-\frac{\pi}{3}$, $x=2n\pi+\frac{4\pi}{3}(m,n\in Z)$가 된다.

예제 1(b)의 해는 (a)에서 얻어진 해 $x=2m\pi+\frac{\pi}{3}$, $x=2n\pi+\frac{2\pi}{3}(m,n\in Z)$에 따라 타당한 근거를 가지고 얻어졌다고 할 수 있지만, (a)의 해 자체가 타당하지 않으므로 (b)에서 얻어진 해도 주어진 방정식의 해는 아니다.

풀이 1A는 Table 9의 채점 기준에 의하면 0점에 해당한다. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$을 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin x$와 같이 변형시킨 것은 계산상의 오류가 아니라, 삼각함수 변환 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$을 잘못한 것이다. 결국 풀이 1A에서는 문제 (b)에 대한 풀이의 논리성과 관계없이 0점을 받게 된다.

Table 11. Various solution of example 1

풀이 1A	풀이 1B
(a) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ $1 - 2\sin^2 x + 2 = \sqrt{3}\sin x$ $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$ 인수분해하면, $(\sin x + \sqrt{3})(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$ $\sin x = -\sqrt{3}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = -\sqrt{3}$을 만족하는 x값은 없음. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $x = 2m\pi + \frac{\pi}{3}$, $x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$(이때 $m,n \in Z$) (b) $y = \sin x$의 그래프에서 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$인 x값을 구간 $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$에서 구하자.  답은 $x = -\frac{5\pi}{3}$이다.	(a) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ $1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$ $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$ $\sin x = t$라 놓으면, $2t^2 - \sqrt{3}t - 3 = 0$. 인수분해하면, $(t - \sqrt{3})(2t + \sqrt{3}) = 0$ $t = \sqrt{3}$, $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $\sin x = \sqrt{3}$을 만족하는 x값은 없다. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$(이때 $n \in Z$) (b) 그림과 같이 구간 $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$에서 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$을 나타내면, 답은 $x = -\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$이다. 

풀이 1B도 풀이 1A와 유사하게 채점할 수 있다. 풀이 1B에서는 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$(이때 $n \in Z$)을 구하는 과정에 오류가 있다. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $x = 2m\pi - \frac{\pi}{3}$, $x = 2n\pi + \frac{4\pi}{3}$(이때 $m,n \in Z$) 또는 $x = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$(이때 $n \in Z$)이어야 한다. 여기서는 $\sin x$의 일반해를 구하는 과정에서 잘못된 답을 구했고, 이것은 계산상의 오류에 해당하지 않는다. 비록 풀이 1B에서 구간 $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$에 속하는 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$(이때 $n \in Z$)의 값을 수원을 이용하여 근거를 제시하면서 구했지만, 예제 1의 올바른 답은 아니다. 그러므로 Table 9의 채점 기준에 의하면 풀이 1B는 0점에 해당한다.

이제, 예제 1 (b)의 근거가 제시된 풀이에 대해 살펴보자. 풀이 1A, 풀이 1B에서는 좌표평면에서 사인함수를 이용하거나 수원을 이용하여 예제 1 (b)의 답을 구했다. 이러한 풀이는 수학적 근거가 충분히 제시된 것이라고 할 수 있다. 예제 1 (b)의 다른 풀이를 살펴보자. 이를 위해, 예제 1 (a)의 올바른 해로 $x = 2m\pi - \frac{\pi}{3}$, $x = 2n\pi + \frac{4\pi}{3}$(이때 $m,n \in Z$) 또는 $x = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$(이때 $n \in Z$)을 구한 후에, 예제 1 (b)를 Table 12와 같이 풀었다고 하자.

풀이 1C에서는 예제 1 (b)를 부등식을 이용하여 수학적인 근거를 제시하면서 올바르게 풀었지만, 풀이 1D에서는 풀이의 근거가 충분히 기술되었다고 보기 어렵다. 비록 풀이 1D에서는 올바른 답 $x = -\frac{7}{3}\pi$, $x = -\frac{8}{3}\pi$을 구했지만, 예제 1 (b)가 다른 해를 갖는지에 대해서 알 수 없기 때문이다. 그러므로 예제 1 (a)에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구한 다음, 예제 1 (b)에 대해 풀이 1D와 같은 답안을 기술했다면, Table 9의 채점 기준표에 따라 이 답안은 1점을 받게 된다(채점 요소 중 '(a)에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다'에 해당함).

이제, 계산상의 오류에 대해서 살펴보자. 문제해결 과정에서 오류가 발생했을 때, 이것이 계산과정에서

Table 12. Various solution of example 1(b)

풀이 1C	풀이 1D
(b) $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$에서 $x=2m\pi-\frac{\pi}{3}$의 값을 구하자. 이를 위해, $-3\pi \le 2m\pi-\frac{\pi}{3} \le -\frac{3\pi}{2}$, $-3 \le 2m-\frac{1}{3} \le -\frac{3}{2}$, $-\frac{8}{3} \le 2m \le -\frac{7}{6}$이다. $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{7}{12}$이므로, 정수 m은 $m=-1$이다. $m=-1$을 대입하면, $x=2m\pi-\frac{\pi}{3}$에서 $x=-\frac{7}{3}\pi$가 된다. 같은 방법으로, $x=2n\pi+\frac{4\pi}{3}$로부터 $-3\pi \le 2n\pi+\frac{4\pi}{3} \le -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{13}{6} \le n \le -\frac{17}{12}$이다. 이때 정수 n의 값은 $n=-2$이며, $x=2n\pi+\frac{4\pi}{3}$에서 $x=-\frac{8}{3}\pi$이다. 답은 $x=-\frac{7}{3}\pi$, $x=-\frac{8}{3}\pi$이다.	(b) $x=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right)$에서 n대신에 정수를 대입하자. $n=0$이면, $x=-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$. $n=-1$이면, $x=-\pi+(-1)\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$ $n=-2$이면, $x=-2\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$ $n=-3$이면, $x=-3\pi+(-1)\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{8\pi}{3}$, $-\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$ 구하는 답은 $x=-\frac{7}{3}\pi$, $x=-\frac{8}{3}\pi$이다.

발생한 것인지, 개념이나 공식의 적용에서 오류가 발생한 것인지에 따라 Table 9의 채점 기준표에서는 다른 점수를 부여하고 있다. 예를 들어, 풀이 1B에서 이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구한다고 가정하자. 이때 풀이를 '이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4(2)(-3)}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{4}$이며, $t=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $t=-\frac{\sqrt{3}}{4}$이다'와 같이 기술하였다면, 이 풀이는 계산상의 오류에 해당할 것이다. 그러나 풀이를 '이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$에서 근의 공식에 의해 $t=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $t=-\frac{\sqrt{3}}{4}$이 된다'고 기술하였다면, 이것은 계산상의 오류로 볼 수 있는 근거가 없으며, 근의 공식을 잘못 적용한 사례로 인정되어야 할 것이다.

이제, 2021년 USE의 문제 15에 관련된 평가 기준을 살펴보자. 문제 15는 분수부등식, 로그부등식, 지수부등식에 대한 문제이며, 배점은 2점이고 FIPM (2021b)에서 제시한 채점 기준은 Table 13과 같다.

풀이 1C에서는 예제 1 (b)를 부등식을 이용하여 수학적인 근거를 제시하면서 올바르게 풀었지만, 풀이 1D에서는 풀이의 근거가 충분히 기술되었다고 보기 어렵다. 비록 풀이 1D에서는 올바른 답 $x=-\frac{7}{3}\pi$, $x=-\frac{8}{3}\pi$을 구했지만, 예제 1 (b)가 다른 해를 갖는지에 대해서 알 수 없기 때문이다. 그러므로 예제 1 (a)에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구한 다음, 예제 1 (b)에 대해 풀이 1D와 같은 답안을 기술했다면, Table 9의 채점 기준표에 따라 이 답안은 1점을 받게 된다(채점 요소 중 '(a)에서 근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다'에 해당함).

이제, 계산상의 오류에 대해서 살펴보자. 문제해결 과정에서 오류가 발생했을 때, 이것이 계산과정에서 발생한 것인지, 개념이나 공식의 적용에서 오류가 발생한 것인지에 따라 Table 9의 채점 기준표에서는 다른 점수를 부여하고 있다. 예를 들어, 풀이 1B에서 이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구한다고 가정하자. 이때 풀이를 '이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4(2)(-3)}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{4}$이며, $t=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $t=-\frac{\sqrt{3}}{4}$이다'와 같이 기술하였다면, 이 풀이는 계산상의 오류에 해당할 것이다. 그러나 풀이를 '이차방정식 $2t^2-\sqrt{3}\,t-3=0$에서 근의 공식에 의해 $t=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $t=-\frac{\sqrt{3}}{4}$이 된다'고 기술하였다면, 이것은 계산상의 오류로 볼 수 있는 근거가 없으며, 근의 공식을 잘못 적용한 사례로 인정되어야 할 것이다.

이제, 2021년 USE의 문제 15에 관련된 평가 기준을 살펴보자. 문제 15는 분수부등식, 로그부등식, 지

Table 13. Scoring criteria for problem 15

채점 기준	점수
근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다.	2
구간으로 표시되는 정답에서 경계에 있는 점을 포함하거나 배제하는 것에서 차이가 있는 답을 근거를 제시하면서 구했다. 또는 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 풀이의 모든 과정은 올바른 순차성을 가지고 있다.	1
풀이가 위에서 나열한 기준 중 어느 하나에도 부합하지 않는다.	0
최대 점수	2

수부등식에 대한 문제이며, 배점은 2점이고 FIPM (2021b)에서 제시한 채점 기준은 Table 13과 같다.

Table 13의 채점 기준표는 Table 9와 유사하다. 얻어진 답이 정답과 다른 경우에 부분 점수를 받는 것은 문제해결 과정이 논리적으로는 타당하지만 계산상의 오류로 인하여 정답을 얻지 못하는 것으로 한정하였다. 그리고 Table 13에서 1점의 첫 번째 예는 정답이 $(2,5)$인데 $(2,5)$를 해로 얻은 경우에 해당한다.

Table 13의 채점 기준표로 서술형 문제를 채점할 때 생기는 의문점 중의 하나가 풀이 과정은 잘못되었는데, 얻어진 답이 정답과 일치하면 몇 점을 받는가이다. Table 13을 보면, 그러한 경우는 '풀이가 위에서 나열한 기준 중 어느 하나에도 부합하지 않는다'에 해당하므로, 0점을 받게 된다.

이제, FIPM (2021b)에 제시된 한 예제를 통해 Table 13의 구체적인 채점 사례를 살펴보자.

예제 2. 부등식

$$\frac{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2\cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5$$

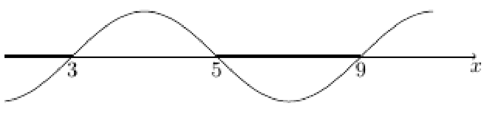
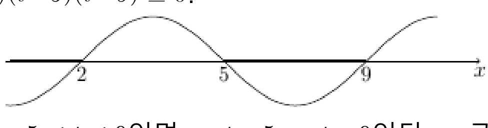
을 풀어라.

Table 14와 같은 가상의 풀이를 살펴보자.

풀이 2A에서는 $t \le 3$, $5 \le t \le 9$를 구한 후에 유리식의 분모가 0이 되는 t값에 대해 $t \ne 5$, $t \ne 9$을 생각하여, $3^x \le 3$, $5 < 3^x < 9$를 생각해야 했다. 그러면 예제 2의 정답은 $(-\infty, 1]$, $(\log_3 5, 2)$가 된다. 그런데 풀이 2A에서 구한 답에는 $[\log_3 5, 2]$와 같이 구간의 양 끝인 $\log_3 5$와 2가 포함되었으며, Table 13의 채점 기준표에 의해 풀이 2A는 1점을 받게 된다.

한편, 풀이 2B에서 $\dfrac{(t^2-6t+4)(t-9)+(t-5)(6t-51)}{(t-5)(t-9)} - t - 5 \le 0$을 정

Table 14. Various solution of example 2

풀이 2A	풀이 2B
$3^x = t$로 놓자. 그러면, $\dfrac{t^2-6t+4}{t-5} + \dfrac{6t-51}{t-9} \le t+5$이고, 통분하면 $\dfrac{(t^2-6t+4)(t-9)+(t-5)(6t-51)}{(t-5)(t-9)} - t - 5 \le 0$ 이것을 전개하여 정리하면, $\dfrac{t^3-9t^2-23t+219-t^3+9t^2+25t-225}{(t-5)(t-9)} \le 0$ $\dfrac{2t-6}{(t-5)(t-9)} \le 0$이다. 이로부터 $2(t-3)(t-5)(t-9) \le 0.$  $t \le 3$, $5 \le t \le 9$이며, $3^x \le 3$, $5 \le 3^x \le 9$이다. $x \le 1$, $\log_3 5 \le x \le 2$이므로, 답은 $(-\infty, 1]$, $[\log_3 5, 2]$이다.	$3^x = t$로 놓자. 그러면, $\dfrac{t^2-6t+4}{t-5} + \dfrac{6t-51}{t-9} \le t+5$이고, 통분하면 $\dfrac{(t^2-6t+4)(t-9)+(t-5)(6t-51)}{(t-5)(t-9)} - t - 5 \le 0$ 이것을 전개하여 정리하면, $\dfrac{t^3-9t^2-23t+219-t^3+9t^2+25t-223}{(t-5)(t-9)} \le 0$ $\dfrac{2t-4}{(t-5)(t-9)} \le 0$이다. 이로부터 $2(t-2)(t-5)(t-9) \le 0.$  $t \le 2$, $5 \le t \le 9$이며, $t \ne 5$, $t \ne 9$이다. 그러므로 $3^x \le 2$, $5 < 3^x < 9$이다. $x \le \log_3 2$, $\log_3 5 < x < 2$이므로, 답은 $(-\infty, \log_3 2]$, $(\log_3 5, 2)$이다.

리하는 과정에서 계산상 오류가 발생하였다. 부등식 $\frac{2t-6}{(t-5)(t-9)} \le 0$이 얻어져야 하는데, 부등식 $\frac{2t-4}{(t-5)(t-9)} \le 0$을 얻었다. 이후의 나머지 풀이 과정은 근거를 제시하면서 올바른 순차성을 따라 기술되었으므로, Table 13의 채점 기준표에 의해 풀이 2B는 1점을 받는다.

Table 9, Table 13의 채점 기준표의 특징 중 하나로 채점 기준이 간단하다는 것을 들 수 있다. 이와 같이 간단한 채점 기준은 KICE (2019, p. 5)가 지적한 '학교 현장에서 선다형 위주의 평가가 이루어지는 것은 학생이 직접 구성한 응답에 대한 채점에 시간과 노력이 많이 들며, 채점의 신뢰도를 확보하는 것이 어렵기 때문'이라는 문제를 어느 정도 해결할 수 있을 것으로 기대된다. 즉 부분 점수 1점에 해당하는 채점 기준이 2가지이기 때문에, 어떤 답안에 부분 점수 1점을 줄 것인가에 대한 의사결정이 명확할 수 있으며, 많은 사람이 다양한 답안을 대규모로 채점을 하여도 안정적이고 신뢰도 높은 채점이 가능할 수 있을 것이다.

러시아의 서술형 문제의 채점 신뢰도와 관련하여 주목할 것은 교육적 전통이다. 러시아에서는 오랫동안 중등학교의 수학교육 평가, 대학입시를 위한 시험에서 서술형 문제가 중심이 되어 왔다. 그래서 러시아는 서술형 평가에 대해 당연한 것으로 수용하고 신뢰하는 사회적 분위기가 형성되어 있다. 오히려 USE의 시행 초기에 단답형 문제가 USE에 포함되는 것에 대해 많은 반대 의견이 있었다. 한편, 러시아에서는 서술형 평가에 관련된 자료들이 학술잡지나 교사용 참고도서의 형태로 대중적으로 폭넓게 공개되어 제공되고 있다. 이러한 것들은 서술형 평가에 대한 사회적 신뢰와 합의를 지탱하는 중요한 역할을 할 것으로 생각된다.

이제, 2021년 USE의 문제 18에 관련된 채점 기준을 살펴보자. 문제 18은 미정의 문자를 포함하는 방정식 또는 부등식 문제이며, 4점이 주어졌다. 이 유형의 문제는 대수식을 기하학적으로 표현하여 해결할 수도 있고, 대수식 자체의 변환을 통해서 해결할 수도 있다.

FIPM은 앞의 문제들과는 달리 일반화된 하나의 채점 기준표를 제시하지 않으며, 대수식의 기하학적 해석을 이용한 문제의 채점 기준표, 대수식의 변환만을 이용한 채점 기준표 등을 구체적인 예제, 풀이와 함께 제시하였다. FIPM (2021b)에 제시된 예제 3을 대수식의 변환을 중심으로 해결한 경우의 채점 기준을 살펴보자.

예제 3. 방정식 $\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$가 정확히 두 개의 서로 다른 근을 가지도록 하는 모든 a값을 구하여라.

방정식 $\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$은 연립방정식 $\begin{cases}|3x|-2x-2-a=0\\x^2-2x-a\neq 0\end{cases}$으로 쓸 수 있다. $|3x|-2x-2-a=0$에서 (i) $x<0$인 경우를 생각하자. 이때 방정식은 $-5x-2-a=0$인데, 이것은 xOa 평면에서 $a=-5x-2$이며 반직선이다. (ii) $x\ge 0$이면 $x-a-2=0$, $a=x-2$이며 이것도 반직선이다. 결국, $|3x|-2x-2=a$는 a값에 따라 근을 개수가 달라진다. $a>-2$이면 $y=|3x|-2x-2$와 $y=a$는 서로 다른 두 근을 가지며, 문제의 조건을 만족시킨다.

이제, 조건 $x^2-2x-a\neq 0$은 $x^2-2x\neq a$이고 $y=x^2-2x$, $y=a$가 만나지 않아야 한다. 즉 앞에서 구한 $a>-2$에서 $y=x^2-2x$와 $y=-5x-2$, $y=x^2-2x$와 $y=x-2$가 만나는 경우의 a값을 제외

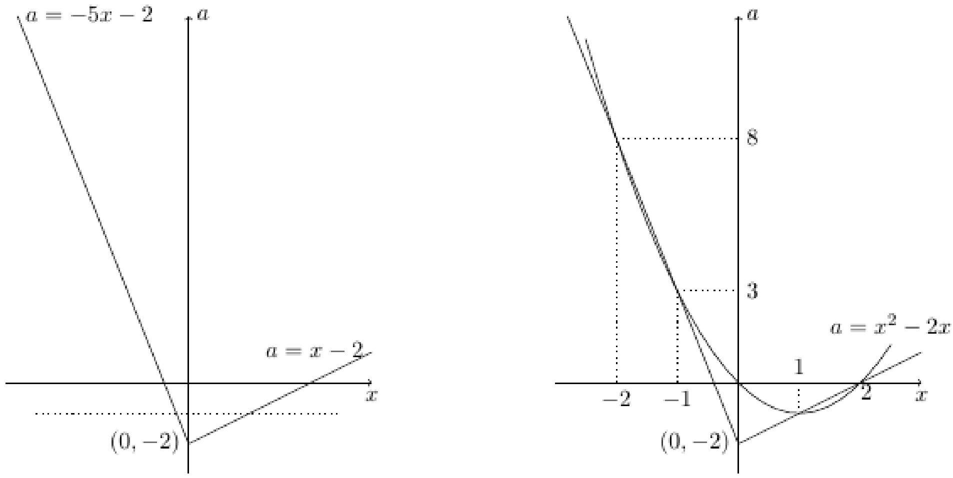


Figure 13. Example 3

Table 15. Scoring criteria for example 3

채점 기준	점수
근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다.	4
올바른 추론을 통해 a값의 집합을 구했는데, 정답과 비교하였을 때 얻어진 답에 $a=-2$가 포함되어 있다.	3
적어도 한 가지 경우의 풀이가 올바르게 제시되었으며, 이때 정답과 비교하였을 때 (i) $a=8$, $a=3$ 또는(그리고) $a=-2$가 포함된 a의 집합을 구했거나 또는 (ii)$a=0$, $a=-1$ 또는(그리고) $a=-2$가 포함된 a의 집합을 구했다. 또는 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 이때 수행된 모든 문제해결 절차는 올바르다.	2
문제의 풀이를 포물선과 반직선의 상호 위치 관계의 탐구로 올바르게 관련시켰다(해석적으로 또는 그래프를 이용하여).	1
풀이가 위에서 나열한 기준 중 어느 하나에도 부합하지 않는다.	0
최대 점수	4

하면, 예제 3의 답인 $-2<a<-1$, $-1<a<0$, $0<a<3$, $3<a<8$, $a>8$을 구할 수 있다. 예제 3의 채점 기준표 Table 15를 살펴보자(FIPM, 2021b, p. 84).

Table 15의 채점 기준표를 Table 9, Table 13과 비교하자. Table 15는 4점의 채점 기준표이고 Table 9, Table 13은 2점 문제의 채점 기준표이기 때문에, Table 15는 Table 9, Table 13의 채점 기준표보다 채점 기준을 더 세분하였다.

Table 15에서는 세분된 채점 기준으로 어떻게 채점의 신뢰성을 확보하려 했는지 살펴보자. Table 15에서 1점을 받으려면 방정식 $\dfrac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$을 연립방정식 $\begin{cases}|3x|-2x-2-a=0\\x^2-2x-a\neq 0\end{cases}$으로 이해하고, 이것을 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 식으로 또는 그래프를 이용하여 제시해야 한다.

$$x\ge 0\text{이면 } \begin{cases}x-2-a=0\\x^2-2x-a\neq 0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x-2=a\\x^2-2x\neq a\end{cases},$$

$$x<0\text{이면 } \begin{cases}-5x-2-a=0\\x^2-2x-a\neq 0\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}-5x-2=a\\x^2-2x\neq a\end{cases}$$

2점을 받는 것은 (i) $x<0$, (ii) $x\ge 0$ 중 한 가지 경우에 대해서 근거를 제시하면서 a값의 범위를 올바르게 구해야 한다. 그리고 3점을 받으려면 Figure 13의 첫 번째 그림에서 서로 다른 두 근을 가지려면 $a>-2$인데, 이때 $a\ge -2$로 잘못 쓰고, 나머지 풀이 과정은 모두 올바르게 기술되어야 한다. 결국, Table 15의 채점 기준표는 문제해결의 중심적인 과정 또는 중심 아이디어의 구성을 바탕으로 부분 점수를 주도록 구성되어 있다.

Table 15의 채점 기준표를 Table 10과 비교해 보자. Table 10에서는 문제해결을 위한 식 $\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx$을 구하지 못해도 1점을 받을 수 있었다. 그러나 Table 15에서는 구체적인 문제해결 과정이 진행되어 문제해결 방법의 탐색 수행에 대한 기록이 없으면 점수를 받지 못하게 되어 있다.

결국 USE에서는 예제 3과 같은 4점 문제는 문제해결의 전반적인 흐름을 고려하여 실질적으로 의미있는 결과가 제시될 때 부분 점수를 주도록 하였다. Table 15를 바탕으로 문제 2021-18의 채점 기준표를 만들어보자.

우선, 문제 2021-18에 대해 앞에서 기술한 해결의 방향을 바탕으로 풀이를 정리하자. xOa평면에 $x\ge -a^2+2a$, $x=-a$, $x=2a$, $x=1$을 표시하고, $x=-a$, $x=2a$, $x=1$이 두 개의 서로 다른 근이 되도록 a값을 구해야 한다.

Figure 14에서 $x\ge -a^2+2a$은 포물선의 바깥 영역이며, 이 영역에서 $x=-a$, $x=2a$, $x=1$이 두 개의 값을 가지는 a값을 구하자. (i) $a=-1$이면, $x=2a$, $x=1$과 $x=-a$의 교점이 두 근이며, (ii) $0\le a<\frac{1}{2}$이면 $x=2a$, $x=1$이 근이 되며, (iii) $\frac{1}{2}<a<3$이면 $x=2a$, $x=1$이 된다. 그 밖의 a값에서는 $x=-a$, $x=2a$, $x=1$이 서로 다른 두 근이 되지 못한다. 그러므로 답은 $a=-1$, $0\le a<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<a<3$이다.

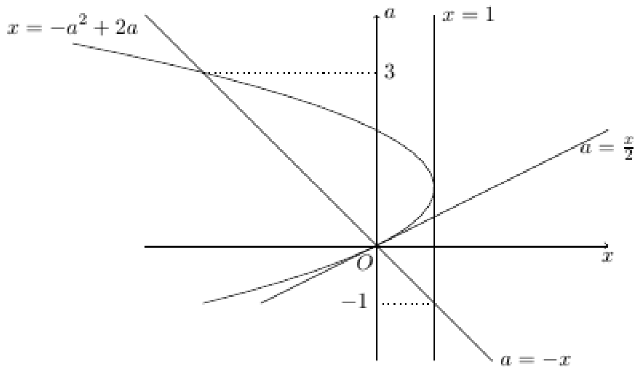


Figure 14. Problem 2021-18

문제 2021-18의 풀이에서 1점을 받으려면 $|x^2-a^2|=|x+a|\cdot\sqrt{x+a^2-2a}$을 인수분해하여 $x=-a$, $x=2a$, $x=1$을 구하고, 무리식 $\sqrt{x+a^2-2a}$의 정의역인 $x+a^2-2a\geq 0$을 식으로 또는 그래프로 나타내야 한다. 2점은 근으로 $a=-1$, $[0,3)$을 구한 경우, 즉 $a=\frac{1}{2}$를 포함하는 근을 구한 경우이다. 이때, $(0,3)$에서 구간에 양 끝은 포함될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 3점은 정답과 비교했을 때 구간의 경계에 있는 점의 포함, 배제에서 차이가 나는 경우에 해당한다. 이를 정리하면, Table 16과 같은 채점 기준표를 얻을 수 있다.

국가 규모의 서술형 평가에서 신뢰도 높은 채점 기준표를 만드는 것은 채점 과정의 간편성과 함께 중요하게 고려해야 하는 요인일 것이다. 여기서는 러시아의 USE에서 사용 중인 채점 기준표 Table 9, Table 13, Table 15를 분석하여, 이들 채점 기준표의 특징들을 살펴보았고, 이를 활용하여 문제 2021-18의 채점 기준표도 만들었다. 우리나라에서는 아직 국가 규모로 수학교과의 서술형 평가를 시행해 본 경험이 적기 때문에, 서술형 평가 문제의 형태, 채점 기준, 채점에서 편의성을 높이는 방법 등에 대한 다양한 연구가 필요할 것이다.

V. 결론 및 제언

대학수학능력시험은 1994년 처음 시행된 이후 지금까지 대학입학 여부를 결정하는 중요한 역할을 해 왔으며, 수학 교수-학습에도 많은 영향을 끼쳐왔다. 그러나 대학수학능력시험에서 가끔 오류가 발생하면서 대학수학능력시험의 성격, 난이도, 출제 유형 등의 개선에 대한 사회적 요구가 증가되고 있다. 그중에는 선택형과 단답형 문제로 구성된 대학수학능력시험에 서술형 문제를 포함시켜야 한다는 의견도 많이 있다.

서술형 평가는 선택형이나 단답형 평가보다 교육적으로 가치가 있다는 사회적 합의가 형성되어 있으며, 중등학교 수학교육 평가에서 서술형 평가가 시행되었

Table 16. Scoring criteria for problem 2021-18

채점 기준	점수
근거를 제시하면서 올바른 답을 구했다.	4
올바른 추론을 통해 a값의 집합을 구했는데, 정답과 비교하였을 때 구간의 경계에 있는 점들이 포함, 배제에서 차이가 난다.	3
올바른 추론을 통해 $a=-1$과 a값의 구간 $[0,3)$을 얻으며, 이때 구간에 양 끝은 포함될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 또는 계산상의 오류로 인하여 올바르지 않은 답들을 얻었지만, 이때 수행된 모든 문제해결 절차는 올바르다.	2
$x=-a$, $x=2a$, $x=1$을 구했고, 이것을 $x\geq -a^2+2a$와 올바르게 관련시켰다(해석적으로 또는 그래프를 이용하여).	1
풀이가 위에서 나열한 기준 중 어느 하나에도 부합하지 않는다.	0
최대 점수	4

고 그 비중도 계속 늘어나고 있다. 그러나 국가 수준의 대학수학능력시험에서 수학 서술형 문제를 도입하여 시행하는 것은 간단한 문제는 아닐 것이다. 이것은 서술형 평가의 도입에 대한 가치판단의 문제가 아니라, 서술형 평가의 실제 시행 과정에 관련된 문제일 것이다. 예를 들어, 대학수학능력시험에서 서술형 문제로 어떤 형태의 수학 문제, 어떤 난이도의 문제를 출제해야 할 것인가, 국가 규모의 시험에서 서술형 문제에 대한 채점은 어떻게 할 것이며, 채점 기준은 어떠해야 할 것인가 등의 문제에 대한 다양한 연구가 필요할 것이다.

본 연구에서는 우리나라의 대학수학능력시험에 해당하는 시험인 USE에서 단답형과 함께 서술형 평가를 시행하는 러시아의 사례를 조사하였다. 본 연구에서는 USE의 개요, USE에서 수학 시험의 특징, USE에서 요구되는 수학적 능력, USE에 출제된 수학 문제들을 조사했고, 2021년에 USE의 수학 문제에 대해 단답형 문제와 서술형 문제의 외적 구조를 비교, 분석하였으며, 서술형 문제의 채점 기준을 구체적으로 분석하였다.

USE의 서술형 문제는 방정식, 부등식, 평면기하, 공간기하, 금융수학, 수의 성질 영역에서 출제되었다. 우리나라의 대학수학능력시험에서는 미적분학에 관련된 문제가 고난이도 문제로 출제되는 경향이 있었는데, USE에서는 높은 난이도의 문제는 2021-18과 같은 문자를 포함하는 방정식(부등식), 2021-19과 같은 수의 성질에 대한 문제이며, 2021년 USE의 경우에 정답률이 가장 낮은 것은 평면기하 문제였다. 한편, 전체 32점 중에서 서술형 문제의 배점은 20점으로 전체의 62.5%에 해당하며, 2021년 USE에서 단답형 문제의 평균 정답률은 72.75%이고, 서술형 문제의 평균 정답률은 18.03%였다. 결국, USE에서는 다양한 영역에서 서술형 문제가 골고루 출제되었고, 서술형 문제의 난이도나 정답률을 단답형 문제와 비교하면 단답형보다 어려운 문제가 서술형으로 출제되었고, 그 점수 비중도 크다는 것을 알 수 있다. 이것을 당연하게 생각할 수도 있지만, 다른 한편으론 대학입학시험에 선택형, 단답형, 서술형 수학 문제를 모두 포함시킨다고 가정할 때, 서술형 문제의 난이도나 점수 비중을 어떻게 결정해야 할 것인가는 어려운 문제가 될 것이다. 본 연구에서 제시한 러시아의 사례는 서술형 문제가 중심이 되어 평가가 이루어진다는 것을 알 수 있다. 이것은 서술형 평가의 교육적 의미나 중요성에 비추었을 때 타당한 접근이라 할 수 있을 것이다.

2021년 USE의 서술형 문제는 외적 구조가 단답형 문제에 비해 다양했다. 단답형 문제는 외적 구조가 대부분 $XYZw$이고 일부 $xYZW$가 있었지만, 서술형 문제는 $XYZw$, $XYzW$, $XYzw$, $xYzW$와 같은 외적 구조를 가지고 있다. 단답형 문제는 외적 구조가 $XYZw$, $xYZW$인데, 이 문제들의 특징은 외적 구조의 요소 Z가 알려졌다는 것이다. 즉 문제해결의 논리적 과정을 문제해결자가 알기 때문에 계산의 오류가 발생하지 않으면 정답을 어렵지 않게 구할 수 있다. 그 결과 단답형 문제의 정답률이 높게 된다. 반면에, 서술형 문제는 대부분 $XYzW$, $XYzw$, $xYzW$와 같이 외적 구조의 요소 Z가 미지인 비정형적인 문제였다. 이러한 서술형 문제의 비정형성은 단답형 문제와 서술형 문제의 평균 정답률의 비교를 통해서도 확인할 수 있다.

서술형 문제의 외적 구조의 다른 특징은 외적 구조의 요소 중 미지의 내용을 포함한 요소가 2개인 경우가 많다는 것이다. $XYzw$는 문제해결의 논리적 과정과 결론이 미지인 경우이고, $xYzW$는 문제의 가정이나 조건의 일부가 미지이고 문제해결의 논리적 과정이 미지인 경우이다. 이와 같이 미지의 내용을 포함한 요소가 2개인 문제를 Kolyagin (1977)은 탐구문제라고 했으며, 이러한 문제의 해결을 위해서는 비정형적인 문제상황에서 다양한 탐색 활동이 중요한 역할을 한다. 결국, USE에서 서술형 문제는 자신의 생각을 수학적으로 표현하는 의사소통 능력뿐만 아니라 비정형적인 문제상황에서 효과적으로 해법을 탐색하는 문제해결 능력, 주어진 명제를 증명하는(외적 구조가 $XYzW$인 경우에) 추론 능력을 요구한다는 것을 알 수 있다.

USE의 서술형 문제의 채점과 관련하여, 본 연구에서는 문제 2021-13, 2021-15, 2021-18과 같은 유형의 방정식, 부등식 문제의 채점 기준표를 분석하였다. FIPM에서 제시한 USE의 서술형 문제 채점 기준표는 우리가 학교에서 학생들의 문제해결 과정에 대한 정보를 얻기 위해 일반적으로 사용하는 것과 비교하면, 다른 점이 있다.

문제해결 과정에 대한 정보 수집을 목적으로 하는 채점 기준표는 문제 이해-해결 과정-답 구하기 등의 문제해결 과정을 중심으로 점수들이 골고루 분배되지만, USE의 채점 기준표는 정답에의 진척 정도를 중심으로 채점 기준이 만들어져 있다. 예를 들어, USE의 문제 2021-13, 2021-15의 채점 기준표에서는 '문제 이해', '해결 과정'까지만 기술된 경우에는 부분 점수가 없으며, 문제 2021-18의 채점 기준표에서는 '문제 이해'만 기술된 경우에는 부분 점수가 없다.

USE에서 2021-13, 2021-15와 같은 유형의 문제에는 2점이 배점되었으며, 채점 기준표를 보면 타당한 논리적인 과정을 거쳐 답을 구했는데 약간의 오류가 포함되면 1점을 받을 수 있고, 그렇지 않은 경우에는

0점으로 처리된다. 이와 같이 간단한 배점과 채점 기준은 학생들의 성취 결과를 섬세하게 평가하는데 한계가 있기는 하지만, 국가적인 규모의 평가에서 서술형 평가의 채점에 효율성, 편이성을 높일 수 있다는 장점도 있다.

한편, 2021-18번과 같은 유형의 문제는 USE에서 4점이 배점되어, 2021-13, 2021-15와 같은 유형의 문제보다는 복잡한 채점 기준표를 가진다. 이때에도 2021-13, 2021-15와 같은 유형의 문제와 마찬가지로, 문제해결의 전반적인 흐름을 중심으로 실질적으로 의미있는 결과가 기술될 때 부분 점수를 주도록 하였다. 즉, 문제해결을 위한 기본 방향과 계획이 수립된 경우에 1점을 받을 수 있으며, 부분적인 경우에 대해 정답을 얻으면 2점, 모든 경우를 고려했지만 얻어진 답에 약간의 오류가 포함되면 3점을 받게 된다. 이러한 채점 기준은 평가자가 문제 풀이를 알고 있는 경우에 큰 어려움없이 채점을 할 수 있다는 장점이 있다. 이것도 많은 학생을 대상으로 서술형 평가를 시행하는 경우에 효과적으로 채점을 할 수 있는 방법의 하나가 될 것이다.

본 연구에서 제시한 USE에 대한 정보와 연구 결과를 통해 USE에 대한 전반적인 이해, USE에 출제된 서술형 문제의 구조적 특징, 단답형 문제와 서술형 문제의 비교, 채점 기준, 국가 규모로 서술형 평가를 시행할 때 채점의 효율성을 높이는 방법에 대한 다양한 정보를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

국 문 요 약

서술형 평가는 수학과 교육과정에서 강조하는 문제해결 능력 신장, 추론 능력, 의사소통 능력과 관련하여 의미있는 평가 방법이라 할 수 있다. 우리나라에서는 제7차 수학과 교육과정 이후로 수행평가가 강조되면서 중등학교에서 수행평가의 한 방법으로 서술형 평가가 이루어지고 있다. 그렇지만, 대학수학능력시험에서는 여러 가지 이유로 서술형 평가가 도입되지 못하고 있다. 수학교실에서 서술형 평가가 강조되고 교육적으로 충분히 가치가 있다는 것을 감안하면, 대학수학능력시험에서 서술형 평가의 실시에 대한 진지한 논의가 필요할 것이다. 본 연구에서는 우리나라의 대학수학능력시험에 해당하는 러시아의 국가통합시험의 수학 교과에서 실시 중인 서술형 평가를 분석하였다. 문헌 연구를 통해, 국가통합시험에서 수학 시험 문제들이 어떻게 구성되었는지, 시험에서 요구되는 수학적 능력은 무엇인지 고찰하였다. 특히, 국가통합시험의 수학 2021년 출제 문제를 중심으로 문제들의 외적 구조를 분석하였고, 서술형 문제들의 채점 방법을 분석하였다. 본 연구의 결과는 우리나라의 대학수학능력시험에서 서술형 문제의 도입 가능성에 대한 다양한 정보를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

주제어: 서술형 문제, 단답형 문제, 문제의 외적 구조, 서술형 문제의 채점

References

Federal Institute of Pedagogical Measurements [FIPM]. (2017). *USE in mathematics 2017*. Retrieved December 15, 2021, from http://shkolkovo.net (In Russian).

FIPM (2018). *USE in mathematics 2018*. Retrieved October 20, 2021, from http://math100.ru (In Russian).

FIPM (2019). *USE in mathematics 2019-far east version*. Retrieved December 15, 2021, from http://kotolis.ru (In Russian).

FIPM (2020a). *Codifier requirements for the level of training of graduates educational organizations to conduct USE mathematics*. Retrieved November 12, 2020, from http://fipi.ru (In Russian).

FIPM (2020b). *Specification control measuring materials to be held in 2021 USE mathematics*. Retrieved November 12, 2020, from http://fipi.ru (In Russian).

FIPM (2020c). *USE in mathematics 2020*. Retrieved December 15, 2021, from http://math100.ru (In Russian).

FIPM (2021a). *Guidelines for teachers, based on an analysis of typical mistakes of USE participants in 2021 in mathematics*. Retrieved October 11, 2021, from http://fipi.ru (In Russian).

FIPM (2021b). *Methodological materials for chairmen and members of subject commissions on checking the completion of problems with a detailed answer to the examination papers of the USE 2021: Mathematics*. Retrieved September 13, 2021, from http://fipi.ru (In Russian).

FIPM (2021c). *Specification control measuring* *materials to be held in 2022 USE mathematics*. Retrieved November 12, 2021, from http://fipi.ru (In Russian).

Han, I. (2001). A study on analyzing structure of mathematical problem, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education, 11*, 279-290.

Han, I. (2009). An analysis of geometrical differentiated teaching and learning materials using inner structure of mathematics problems, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, *23*(2), 175-196.

Hwang, H., Choi, S., Cho, S., & Park, J. (2020). *New theories of mathematics education 2.* Seoul: Mooneumsa.

Kang O. (2007). *Theories of teaching and assessment of mathematics*, Seoul: Kyungmoonsa.

Kolyagin, Yu. (1977). *Problems in teaching mathematics.* Moscow: Prosveshenie. (In Russian).

Korea Institute for Curriculum and Evaluation [KICE]. (1999). *Improvement of assessment methods in high school mathematics.* Seoul: KICE. (Training data CRE 99- 1-3).

KICE (2003). *Performance assessment materials of secondary school mathematics.* Seoul: KICE. (R&D RDM 2003-11).

KICE (2014). *Improvement method of performance assessment: Focusing on Korean, mathematics and English subjects.* Seoul: KICE. (R&D CRE 2014−3).

KICE (2019). *Substantialization method of essay and descriptive assessment of the school.* Choongbuk: KICE.

Krupich, V. (1995). *Theoretical foundations of teaching mathematical problem solvin*g. Moscow: Prometei. (In Russian).

Ministry of Education [MOE]. (2018). *2015 revised curriculum evaluation criteria: High school mathematics*, Sejong: MOE.

Ministry of Education of the Russian Federation [MERF]. (2004). *Federal component of the state standard of general education. Part 2. Secondary (complete) general education.* Moscow: MERF. (In Russian).

MERF (2021). *On approval of the unified schedule and duration of the unified state examination for each academic subject, the requirements for the use of teaching and upbringing means during its conduct in 2021*. Retrieved November 1, 2021, from http://publication.pravo.gov.ru (In Russian).

Pankratiev, A. (2021). *Profile unified state examination in mathematics: Statistics on the solvability of problems and features of the solutions, Lecture Video Materials in MTsNMO.* Retrieved January 22, 2022, from http://youtube.com.

Park, D. (2014). *Three suggestions for improving college entrance examination, JoongAang Ilbo 2014. 12. 03*. Retrieved January 10, 2022, from http://www.joongang.co.kr.

Park, H. (1991). *History of Korean mathematics education.* Seoul: Daehan Textbook Co., Ltd.

Yashchenko, I., Semenov, A., & Vysotsky, I. (2020). Methodical recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes participants of the USE 2020 in mathematics. *Pedagogical measurements, 2020*(3), 3-26.

Yashchenko, I., Vysotsky, I., & Semyonov, A. (2019). Methodical recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes participants of the USE 2019 in mathematics. *Pedagogical measurements, 2019*(3), 23-40.

Yashchenko I., Vysotsky I., & Semyonov A. (2021). Methodical recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes participants of the USE 2021 in mathematics. *Pedagogical measurements, 2021*(4), 3-28.

저 자 정 보

한 인 기 (경상국립대학교 교수)

Vladimir Shin (경상국립대학교 명예교수)