한국학교수학회논문집 제 25 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 25, Number 1, 79-104, March 2022
http://doi.org/10.30807/ksms.2022.25.1.005

일차함수의 문제해결 결과 분석 방법에 관한 연구[1)]

장정희[2)] · 한주완[3)]

학생들이 수학 문제를 어느 정도 해결하는지 조사하여 학생들의 학습에 도움을 주는 일은 매우 중요하다. 이에 이 연구에서는 중학교 함수에 대한 개념 간의 연결성이 문제 풀이 결과에 어떠한 영향을 미치는지 분석하기 위한 4가지 방법(문제 유형별 정·오 분석, 도식화 분석, 영역 그래프 분석, 꺾은선 그래프 분석)을 구성하였으며, 학생들의 학습 상황을 시각적으로 표현하여 직관적 파악이 가능하게 하였다. 이러한 분석 방법은 학생들의 평가 결과를 파악하기 쉽고, 학생의 학습 상황을 직관적으로 파악하여 학습에 도움을 줄 수 있으며, 학생 스스로 자신의 문제점을 모니터링하여 자기 주도 학습 계획을 세우는 데 도움을 줄 수 있으므로 수학 교수 학습에서 활용 가치가 있을 것이다.

주요 용어 : 문제해결, 도식화 분석, 영역 그래프 분석, 꺾은선 그래프 분석

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

학교 단위의 학생 평가는 학생의 학습 성과를 확인하려는데 목적이 있고 그 결과로써 향후 교수 학습 과정의 계획을 세우기 위한 중요한 교육적 행위이다(교육부, 2017; 한국교육과정평가원, 2019). 학생의 학습 활동을 평가하여 그 결과를 토대로 차후의 학습 과정이나 학습지도 계획을 세우는 데 영향을 미치는 요소 중 하나는 학생들이 학습 평가에서 범하는 오류이다. 학교는 학생들이 학교 교육을 통해서 학습한 범위 내에서 평가를 시행하고, 그 범위 내에서 학생들이 범한 오류를 조사하고 분석하여 차후 학습지도 방향에 대한 계획을 세우게 된다. 그러므로 수학교육에서 학생들이 범하는 오류의 원인을 파악하고 교정하는 과정은 매우 중요하다. 오류교정이 중요한 또 다른 이유는 학생들이 수학을 학습하면서 상위개념을 익혀나가는 것도 중요하지만 하위개념이 바르게 정립되어 있지 않으면 모래성 쌓기에 불과한 학습이 될 수 있기 때문이다. 즉, 해당 학년에 대한 학습이 올바르게 정립되지 않고 학년을 올라가게 되면 더 많은 영역에서 학습의 결손이 발생하고, 학습 결손이 누적되면 학습에 대한 흥미와 관심마저 잃게 된다(도종훈·권오병, 2019). 그래서 학생들이 수학의 상위·하위 개념 간의 연결을 어느 정도 시키고 있는지 파악하는 것은 수학 교수 학습에 있어서 매우 중요하다. 이에 학생

---

* MSC2010분류 : 97C70
1) 이 논문은 제1저자의 2022년 박사학위 논문 일부를 재구성한 것임.
2) 부경대학교 대학원생 (with01235@naver.com), 제1저자
3) 부경대학교 강사 (wndhks@naver.com), 교신저자

들이 범하는 오류를 파악하고 교정하기 위한 첫 단계라고 할 수 있는 오류교정 시점을 명확하게 파악하는 방법을 모색하고자 하였으며 가능한 누구나 직관적이고 편리하게 해석할 수 있도록 표현할 방법을 검토하였다.

Gagne(1970)는 학습유형을 위계적으로 분류하여 8단계의 누적 학습 모델을 제시하였다. 상위유형을 습득하는 전제조건으로서 하위유형의 전 단계를 요구하였다. 그는 상위단계의 학습을 위해 하위단계의 학습이 순차적으로 습득되어 상위능력에 종속되며, 이것은 상위능력에 긍정적 전이효과가 있다고 하였다. 장이채 외 3인(2003)은 학교 수학 내에서의 수학교육 교과 과정은 연계성을 바탕으로 학년과 단계가 상승함에 따른 내용의 확장을 꾀하고 있으므로 학년 간 연계성을 수직적 연계성이라 명명하였다. 이전 학년에서의 기본 개념에 대한 이해 부족은 다음 단계의 학습 진행에 차질을 초래하므로 학년 간 수학 개념이 연속선상에서 전개되고 있음을 인식하게 해야 한다고 하였다. 그렇다면 수학 개념을 습득하는데 반드시 순차를 따라야만 하는 것인가? 반례로 학생들은 상위개념을 통해 하위개념을 자연스럽게 습득하기도 한다. 그래서 수학교육에서 학생들이 해당 학습의 내용을 잘 이해하고 있는지를 판단하기 위해서는 전·후의 학습 상황을 살펴 개념 간의 연결이 원활히 이루어지고 있는지 파악해보아야 한다. 이 과정에서 하위개념에 오류나 오개념이 있다면 이를 빨리 파악하여 교정할 수 있도록 하는 것이 교사의 역할 중 하나이다. 교사는 학생의 오류가 발생한 부분을 학생에게 정보를 제공함과 동시에 이를 돕기 위한 학습지도 계획을 수립하여 도움을 줄 수 있어야 한다. 학생은 자신의 수학학습 상황을 파악할 수 있는 학습 과정의 정보를 받아 부족한 부분을 채울 기회를 얻어야 한다. 그렇다면 오류가 발생한 부분을 어떻게 파악할 수 있으며, 교사가 지정한 부분이 오류의 발생 시점이라고 어떻게 확신할 수 있는가? 또한 학습지도 계획은 어느 시점부터 적용해야 학생에게 적합한 도움을 줄 수 있는가? 오류는 단순한 원인으로 인한 것보다 여러 가지 이유가 상호복합적으로 작용하는 경우가 많다. 그래서 오류가 발생했다고 해서 오류가 나타난 영역만 수학 개념의 습득 정도가 미흡하다고 단정 짓기 어렵다. 이에 우리는 오류가 발생한 시점의 전·후 학습 상황을 살펴볼 필요가 있으며, 오류 시점 이후 학생들의 후속 학습의 추이를 지켜볼 필요가 있다. 후속 학습의 결과에 따라 학생이 범한 오류가 단순한 실수인지, 개념의 부족으로 인한 오류인지를 파악할 수 있을 것이다. 여러 가지 상황이 복합적으로 상호작용하여 일어나는 경우, 오류를 수정하는 데 시간과 노력이 요구된다. 그러므로 학생들의 학습 내용에 대한 평가 결과를 다양한 측면으로 파악하는 것이 중요하다. 본 연구는 학생들의 풀이 결과를 정·오 분석을 통하여 전체적인 오류 분포를 살펴보고, 이를 바탕으로 유사 오류 형태를 보이는 학생들의 전·후 학습 추이를 비교 관찰하였다. 이를 위해 도식화, 영역 그래프, 꺾은선 그래프를 이용하여 조사·분석하였다. 선수학습에서 결손이 있는 경우 후속 학습에서 어떤 차이점을 나타내는지를 다양한 방법으로 살펴봄으로써 학생들의 오류 시점을 비교적 정확하게 찾아내고자 하였다. 또한 어느 시점에서 오류가 시작되었는지, 그리고 문제 유형 내에 어느 문제에서 오류가 발생했는지에 따라 학생들의 후속 학습 결과가 얼마나 다른지를 파악하여 학생들을 돕기 위한 학습지도 계획을 수립하는 데 도움이 되고자 하였다.

중학교 2학년 학생을 대상으로 학교 수학에서 학습하는 함수영역에 한정하여 함수에 관한 개념 간의 연결성이 문제해결에 미치는 영향을 살펴보고자 하였다. 학교 수학에서 사용하는 수학 교과서는 학생들이 이해하기 쉬운 수학 개념부터 순차적으로 개념을 학습하도록 구성하고 있으므로 함수는 교과서(2학년 1학기) 구성상 가장 상위개념에 있다고 할 수 있다. 중학교 2학년 1학기 수학학습 과정은 수와 식, 일차부등식과 연립방정식, 일차함수의 순서로 배우게 된다. 함수를 해결하기 위해서는 미지수와 상수를 사용하여 방정식과 부등식을 해결할 수 있어야 하고, 방정식과 부등식을 해결하기 위해서는 문자가 속해 있는 식의 연산을 익혀 단항식과 다항식을 정리하는 방법을 터득해야 하며, 문자가 속해 있는 식을 해결하기 위해서는 문자의 쓰임에 대한 개념을 이해하여야 한다. 그러므로 학년에서

1학기에 학습하는 수학 전 단원을 대표하여 함수에 관련한 문제해결 능력을 조사·분석하여 학생들이 수학 개념 간을 잘 연계시키고 있는지에 대해 알아보고자 하였다.

중학교 1학년 과정을 거쳐 온 학생들이 1학년의 함수 개념과 2학년의 함수 개념을 원활히 연결하고 있는지, 또한 일차함수에 관한 개념들을 잘 이해하고 있는지를 4가지 방법(정·오 분류 및 분석, 도식화, 영역 그래프, 꺾은선 그래프)을 활용하여 조사하고 분석하였다. 첫째, 학생들의 문제해결 결과를 각 문제 유형별로 정·오 분류 및 오류 형태를 조사하였다. 정·오 분류를 통해 학생들이 어떤 문제 유형에서 가장 많은 오류를 보이는지 빈도수를 조사하고, 유형별로 문제를 해결한 결과에 대한 오류 모형을 제공하여 학생들이 문제 간을 어떻게 연결하고 있는지 시각적으로 표현하였다. 둘째, 정·오 분석의 결과를 바탕으로 유사 오류 형태를 보이는 학생들을 그룹 지어 그룹별로 문제해결 정도와 수학 개념 간의 연결이 어떤 관련이 있는지, 풀이 결과에 어떤 차이점을 나타내는지를 도식화하여 비교·분석하였다. 셋째, 도식화한 결과를 영역 그래프를 이용하여 면적으로 제시하고, 그룹별로 문제해결의 차이를 직관적으로 비교할 수 있도록 하였다. 넷째, 학생들의 풀이 결과를 꺾은선 그래프로 나타내어 선수학습과 후속 학습에 해당하는 문제해결에 대한 정보를 한눈에 파악할 수 있도록 하고, 개념 간의 연결과 문제해결 정도를 비교·분석하였다. 다섯째, 앞의 4가지의 분석 결과를 요약하고, 평가 결과를 다양한 방법으로 시각화하였을 때의 활용도와 이점을 제언하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

많은 연구자가 학생들이 범하는 오류의 교정을 위해 오류의 원인을 조사하고 분석하여, 오류 발생 특징을 분류하였다. ‘오류’의 의미는 국어사전에서 ‘그릇되어 이치에 맞지 않는 일’, ‘사유의 혼란, 감정적인 동기 때문에 논리적 규칙을 소홀히 함으로써 저지르게 되는 바르지 못한 추리’, ‘컴퓨터의 연산 처리 결과가 장치의 잘못된 동작이나 소프트웨어의 잘못으로 소기의 것과 다른 결과가 되는 것’이라고 하였다. 또한 ‘error’의 한국어 번역에서는 ‘잘하지 못하여 그릇된 점’, ‘조심하지 아니하여 그르치는 행위’, ‘잘못’, ‘실수를 범하다’, ‘틀림’, ‘잘못된 생각’, ‘과실’, ‘실책’, ‘오심’, ‘오차’, ‘착오’라고 해석되어 있다(표준국어대사전, 1999). Newell(1972)등은 오류가 과정적 지식의 형태를 가지고 있으므로, 어떤 특정 조건이 만족하면 오류가 무의식적이고 자동으로 사용된다고 말하였다. Hiebert(1991)는 지식의 유형을 절차적 지식과 개념적 지식으로 나누고, 이 두 가지 유형이 학생들 머릿속에서 잘 연결되어야 지식을 획득할 수 있다고 하였다. 마찬가지로 수학적 이해는 개념적 지식과 절차적 지식이 서로 잘 연결되어 점진적으로 이루어지는 것이므로 학생들의 오류는 이를 구성해 가는 과정이라고 하였다. 불완전하고 오류 적 관계를 연결하는 개념 고리를 형성하기 위해 오류에 대한 정확한 원인을 파악하여 그에 맞는 교수 학습을 요구하였다. Radatz(1979)는 수학 과제에서 얻은 정보를 획득, 처리, 보유, 재생을 사용한 방식으로 정보처리 관점에 따라 5가지 범주로 오류를 분류하였는데, 언어적 문제로 인한 오류, 공간적 지식의 어려움에 의한 오류, 필수적인 사실과 기술의 불충분한 숙달에 의한 오류, 부정확한 연합 또는 사고의 경직에 의한 오류, 부적절한 공식이나 전략의 적용에 의한 오류로 구분하였다. Brousseau(1986)는 오류가 발생하는 특징을 다음 4가지로 분류하고 있다. 첫째, 종종 수학의 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과이며, 둘째, 때때로 교사에 의한 체계적인 지도과정의 결과로써 나타나기도 하고, 셋째, 학생들이 결함이 있는 절차를 사용하고 교사에 의한 잘못 인식된 오개념을 가지므로 발생하기도 한다. 넷째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이것은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론 과정의 결과이며 그런 방법들

이 때로는 심각한 오류를 유발한다고 하였다(재인용, 윤수찬, 2006). 류한영(1999)은 기본 지식의 결여에서 오는 오류, 조건을 잘 이용하지 못하는 오류, 등식의 미숙에 따른 오류, 애매한 오류, 실수나 부주의로 인한 오류로 분류하였고, 우현철(2000)은 전략 선택의 오류, 이해의 오류, 처리 기술의 오류, 애매 모호한 오류, 반서의 미실행이라고 하였다. 김차숙(2003), 최영우(2007)는 이해의 오류, 처리 기술의 오류, 요구되지 않은 해답, 애매한 오류로 분류하였으며 이수경(2008)은 대수적 표현의 이해 및 변형에 따른 오류, 풀이 방법에 따른 오류, 산술 계산에서의 오류, 해의 의미와 표현에서의 오류, 애매한 오류로 분류하였다.

이 이외에도 박장희, 유시규, 이중권(2012)는 실생활 문장제 문제를 해결하는 과정에서 발생한 오류 유형을 분석하고 분류하여 대표적인 오류 유형을 문장 이해의 부족, 풀이 과정의 오류, 정리나 정의에 대한 왜곡된 이해, 이기 과정(답을 옮기는 과정)의 오류, 기술적 오류, 풀이 과정 생략이라고 하였다. 송순희와 오정현(1997)은 중학교 함수영역에서 발생한 오류들을 김옥경(1990)의 8가지 분류 모델을 채택하여 오류의 모호성을 제외한 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련, 요구되지 않는 해답, 기술적 오류, 풀이 과정의 생략 등 7가지 모델로 재분류하여 세부 내용을 제시하였다. 이렇듯 수많은 학자가 학생들로부터 발생하는 오류를 분석하고 연구하여 오류의 모형을 분류하였다. 그 내용을 자세히 살펴보면 표현 방법은 다르지만, 오류의 발생에 대해 비슷한 원인을 제시하고 있음을 알 수 있다. 학생들이 스스로 범하는 오류 이외에 오류 발생 이유로는 먼저 외적인 원인으로 교사의 오개념에 의한 오류를 생각해 볼 수 있다. 가르치는 사람이 올바른 수학 개념을 가지고 있지 않다면 이러한 교사에게 가르침을 받은 학생들은 오개념이 형성될 수 있음을 주의해야 한다. 다음으로는 수학 교과 과정에 의한 오류이다. 수학 교과서에는 영역에 따른 개념들이 순차적으로 제시된다. 이는 학생들이 더욱 쉽게 수학적 개념을 학습할 수 있도록 위계를 정하고 그에 따라 선형적으로 개념이 제시된다. 그래서 학생들은 교과서에 수록된 순서대로 학습하게 되고, 이로 인해 개념 습득에 구획화가 일어날 수 있다. 이는 다양한 측면의 수학적 개념을 습득하고 확장하여 문제를 해결하는 데 있어서 오개념을 형성하는 원인이 될 수 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 학생들의 오류 발생은 그 이유를 한가지로 규명하기 힘들다. 이러한 오류들은 학생들의 수학 개념 간에 단절을 일으키고 학습 능력의 저하를 가져온다. 교사는 학생들의 문제 해결 과정을 자세히 살펴 오류가 일어난 원인을 찾아 단절을 해소할 수 있는 지도 방안을 학생들에게 제공하여야 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

부산시 소재 A 중학교 2학년 학생 148명을 대상으로 하였다. 개념 간의 연결성과 문제해결 정도를 알아보기 위한 목적으로 연구가 시행되었기 때문에 학생들의 학력 수준을 나누지 않고 2학년 전체 학생을 대상으로 하였다.

2. 검사 도구

검사 도구는 중학교 1학년 수학 내용 중 좌표평면과 그래프(그래프로 나타내기, 그래프의 이해, 관

계식 알기, 정비례 반비례, 정비례의 그래프와 반비례의 그래프), 중학교 2학년 수학 내용 중 일차함수(함수와 함숫값, 일차함수, 일차함수의 그래프, 일차함수의 평행이동, 일차함수와 일차방정식의 관계)와 관련된 내용을 중심으로 10가지 문제 유형으로 분류하였다. 그리고 각 문제 유형마다 3개의 문제를 구성하였다. 학생들의 수학 개념 간의 연결성을 알아보고자 하였으므로 문제의 수준은 교과서에 소개된 기본 유형을 변형·첨삭하여 구성하였다. 문제의 순서는 학교에서 다루는 수학 교과서의 진행 순서에 따랐으며, 문제 간의 위계 또한 교과서상의 위계를 따랐다(김화경 외, 2020a; 2020b; 김원경 외, 2020a; 2020b; 류희찬 외, 2020; 신항균, 2015; 김화경, 2016; 이인석, 2020; 김부미, 김윤민, 2018; 교육부, 2015). 10가지의 문제 유형과 각 유형에 따른 문제는 다음과 같다(<표 Ⅲ-1>, <표 Ⅲ-2>, <표 Ⅲ-3>).

<표 Ⅲ-1> 중학교 1학년 과정에서의 함수 관련 문제

문제 유형	문제 내용
$E_{1j}(j=1,2,3)$ 그래프의 이해 및 나타내기	E_{11}: 좌표로 나타내기 E_{12}: 평면 위에 점 찍기 E_{13}: 그래프의 이해
$M_{1j}(j=1,2,3)$ 정비례와 관계식	M_{11}: 정비례 관계의 대응 표 완성하기 M_{12}: 정비례 관계식 M_{13}: 정비례에 대한 문장 해석
$E_{2j}(j=1,2,3)$ 정비례 그래프	E_{21}: 데이터로 좌표 찍기 E_{22}: 정비례 식과 정비례 그래프 연결 E_{23}: 정비례 그래프의 성질

<표 Ⅲ-2> 중학교 2학년 과정에서의 함수 관련 문제

문제 유형	문제 내용
$M_{2j}(j=1,2,3)$ 함수의 뜻	M_{21}: 함수인지 구별하기 M_{22}: 그래프로 함숫값 구하기 M_{23}: 식으로 함숫값 구하기
$M_{3j}(j=1,2,3)$ 일차함수	M_{31}: 일차함수 식 구하기 M_{32}: 일차함수의 함숫값 구하기 M_{33}: 일차함수 판별하기
$E_{3j}(j=1,2,3)$ 일차함수 그래프	E_{31}: 데이터를 이용하여 그래프 그리기 E_{32}: 일차함수 식을 이용하여 그래프 그리기 E_{33}: 평행이동

중학교 1학년 과정에 속한 함수 관련 내용은 문제 유형을 E_{1j}, M_{1j}, E_{2j}로 분류하였다. 문제 유형 E_{1j}은 '그래프의 이해 및 나타내기'에 관련된 문제로 좌표평면 위에 좌표 나타내기와 제시된 그래프를 보고 해석하는 문제로 구성되어 있다. 문제 유형 M_{1j}는 '정비례의 관계식'에 관련된 문제로 대응 표를 완성하고, 두 양의 관계를 식으로 나타내고, 문장을 읽고 정비례 관계인지를 아는 문제로 구성되어 있

다. 문제 유형 E_{2j}은 정비례 그래프에 관련된 문제로 주어진 데이터를 이용하여 좌표 나타내기와 식과 그래프 연결하기, 그래프를 보고 비례상수의 크기를 비교하는 문제로 구성되어 있다(김화경 외, 2020a; 김원경 외, 2020a; 신항균, 2015; 김부미, 김윤민, 2018; <표 Ⅲ-1>).

중학교 2학년 과정에 해당하는 함수 관련 내용은 문제 유형 M_{2j}, M_{3j}, E_{3j}로 1차 우선 분류하고, 일차함수의 성질에 관련된 내용은 문제 유형 L_{1j}, L_{2j}, L_{3j}, L_{4j}로 2차 분류하여 모두 7가지의 문제 유형으로 나타내었다.

문제 유형 M_{2j}는 ‘함수의 뜻’에 관련된 문제로 문장을 읽고 함수 관계가 맞는지 판별하기, 제시된 그래프를 보고 값 구하기 등으로 문제가 구성되어 있다. 문제 유형 M_{3j}는 ‘일차함수’의 도입에 관련된 문제로 문장을 읽고 일차함수 식으로 나타내고, 함숫값을 구하는 것과 여러 가지 식 중에서 일차함수 식을 찾아내는 문제로 구성되어 있다. 문제 유형 E_{3j}는 ‘일차함수 그래프’에 관련된 문제로 주어진 데이터를 이용하여 그래프 그리기, 식을 이용하여 두 점을 찾아서 그래프 그리기, 주어진 값만큼 평행이동 했을 때 식 구하기로 구성되어 있다(김원경 외, 2020b; 김화경 외, 2020b; 류희찬 외, 2020; <표 Ⅲ-2>).

<표 Ⅲ-3> 중학교 2학년 과정에서의 함수 관련 문제

문제 유형	문제 내용
$L_{1j}(j=1,2,3)$ 일차함수 절편	L_{11}: y 절편 구하기 L_{12}: x 절편 구하기 L_{13}: x, y 절편으로 그래프 그리기
$L_{2j}(j=1,2,3)$ 일차함수 기울기	L_{21}: 두 점(절편)을 이용하여 기울기 구하기 L_{22}: 문장을 읽고 기울기 구하기 L_{23}: 그래프를 보고 기울기 구하기
$L_{3j}(j=1,2,3)$ 일차함수 그래프의 성질	L_{31}: $y=ax+b$의 일차함수 식에서 a, b의 부호와 그래프의 방향 알기 L_{32}: 그래프의 평행 L_{33}: 그래프의 일치
$L_{4j}(j=1,2,3)$ 일차함수 식 구하기	L_{41}: 기울기와 y절편으로 일차함수 식 구하기 L_{42}: 기울기와 한 점으로 일차함수 식 구하기 L_{43}: 두 점을 이용하여 일차함수 식 구하기

문제 유형 L_{1j}[4]은 ‘일차함수 절편’에 관한 문제로 주어진 식을 이용하여 y절편과 x절편 구하기 문제와 절편을 이용하여 그래프 그리기 문제로 구성되어 있다. 문제 유형 L_{2j}은 ‘일차함수 기울기’에 관한 문제로 제시된 그래프의 절편을 이용하여 기울기 구하기와 문장을 읽고 기울기가 바르게 표기된 식 찾기, 주어진 두 점을 이용하여 기울기 구하기 문제로 구성되어 있다. 문제 유형 L_{3j}은 ‘일차함수 그래프의 성질’에 관한 문제로 주어진 그래프를 보고 일차함수 식에서 상수 a, b의 부호 정하기, 두 일차함수 그래프가 평행하거나 일치할 때 상수 a, b의 값 구하기로 구성되어 있다. 문제 유형 L_{4j}는 ‘일차함수 식 구하기’에 관련한 문제로 주어진 조건을 이용하여 일차함수 식을 구하는 문제들로 구성

4) 각 문제 유형(E_{1j}-L_{4j})은 모두 3문제($j=1,2,3$)씩 구성되어 있으므로 각 문제 유형마다 ‘$E_{1j}(j=1,2,3)$’와 같은 방법으로 표현함이 마땅하나 편의상 ‘$(j=1,2,3)$’을 생략하여 ‘E_{1j}’와 같이 나타내어도 같은 의미이다.

되어 있다(김원경 외, 2020b; 김화경 외, 2020b; 류희찬 외, 2020; <표 Ⅲ-3>).

3. 자료 수집 및 분석 방법

1) 자료 수집

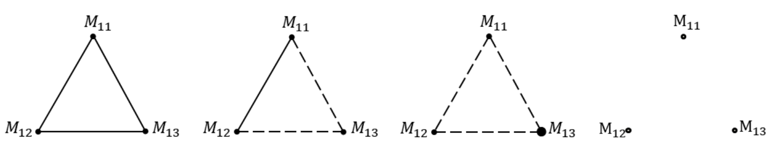
중학교 1학년과 2학년 수학 교과서에 수록된 함수 내용을 토대로 학습 내용을 10가지의 소주제로 나누어 대표 문제 유형을 구성하였다. 수학 교과서에 기반하여 소주제별로 기본 문제들을 선별하였다. 문제 유형별로 3개씩의 기본 문제를 구성한 검사지를 학생들에게 제시하여 제시된 모든 문제를 풀이하도록 하였다. 일차함수를 학습하고 2개월 정도 지난 시점인 2020년 10월 둘째 주에 같은 요일, 같은 시간(1차시)에 실시하고 테스트가 끝난 이후 검사지를 수집하였다. 함수와 관련한 30개의 문제 내용은 앞에서 설명한 <표 Ⅲ-1>, <표 Ⅲ-2>, <표 Ⅲ-3>와 같다.

2) 분석 방법

(1) 문제 유형별 정·오 분석

먼저, 학생들이 각 문제 유형별로 어느 정도의 문제해결 능력을 보이는지 알기 위해 148명의 평가 결과를 10개 문제 유형으로 분류하여 문제 유형별로 각 문제에 대한 학생들의 반응을 세 문제 모두 해결, 두 문제해결, 한 문제해결, 모두 미해결로 나누어 각각의 빈도와 백분율을 조사하였다. 그리고 학생들이 중학교 함수에서 범하는 오류의 이유를 조사하였다. 각 문제 유형에 구성된 세 개의 문제를 어느 정도 이해하고 있는지, 문제 간에 연결이 이루어지고 있는지를 파악하기 위해 오류 모델과 함께 오류의 이유를 제시하였다. 각 문제 유형마다 세 문제로 구성되어 있으므로 삼각형의 변과 꼭짓점을 이용하는 것이 가장 효율적으로 표현할 수 있어 오류 모델은 삼각형을 이용하였다. 삼각형의 세 꼭짓점은 세 개의 문제를 의미하며, 삼각형의 변은 변의 양 끝에 있는 두 꼭짓점에 있는 문제 간의 연결을 의미한다. 한 변의 양 끝에 해당하는 두 개의 문제를 모두 해결하면 변을 실선으로 표현하고, 하나를 해결하지 못하면 변을 점선으로 표현하여 두 문제 사이가 연결되는 것과 연결되지 못하는 것을 표현하였다. 예를 들어 문제 유형 E_{2j}의 평가 결과를 오류 모델로 표현해 보면 E_{2j}에 속한 세 개의 문제 -E_{21}, E_{22}, E_{23}-을 삼각형의 세 꼭짓점 A(E_{21}), B(E_{22}), C(E_{23})에 각각 배치하자. 학생이 세 문제 중에 E_{21}와 E_{23}을 해결하고 E_{22}을 해결하지 못하였다고 가정하자. 이는 삼각형 모형에서 변 AB 와 변 BC는 점선으로 표현하고 변 AC만 실선으로 표현될 것이다. 또는 세 개의 문제 중 하나의 문제, 예를 들어 E_{21}만 해결하였다고 가정하자. 이러한 경우에 점 A를 다른 꼭짓점에 비해 진하게 표현하고 세 개의 변은 점선으로 나타냄으로써 세 문제 간에 연결이 이루어지고 있지 않음을 표현할 것이다. 세 문제를 모두 해결하지 못하였을 때는 변을 그리지 않고 꼭짓점의 위치만을 나타내어 모든 문제를 해결하지 못한 것과 동시에 어떤 연결성도 없음을 보일 것이다.

오류 모델의 예시:

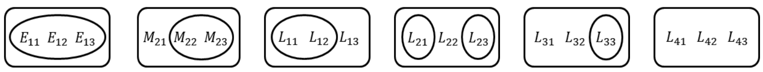


위의 오류 모델은 문제 유형 M_{1j}의 문제해결 형태를 나타낸 것이다. 첫 번째 삼각형은 세 문제를 모두 해결한 경우이고, 두 번째 삼각형은 M_{11}, M_{12}을 해결한 경우를 나타낸 것이다. M_{11}, M_{12}을 잇는 변은 실선으로 나타내고 나머지 변은 점선으로 표현하였다. 세 번째 삼각형은 M_{13}만 해결한 경우이고, 네 번째 삼각형은 세 개의 문제를 모두 해결하지 못한 경우이다.

삼각형 오류 모델은 각 문제 유형에서 나타나는 학생들의 반응을 직관적으로 파악할 수 있게 한다. 오류 형태의 시각화를 통해 학생들이 각 문제 유형에서 범한 오류 문항을 빨리 파악할 수 있고, 빈도수를 통해 학생들이 어떤 문제에서 가장 많은 오류를 보이는지 알 수 있으므로 이 과정은 수학 학습지도 계획을 수립하는데 중요한 자료가 될 뿐만 아니라 학습 보완 계획 및 차후 수업 계획 시간을 절약할 수 있다.

(2) 도식화 분석

위의 정·오 분석 결과를 토대로 선수학습에서 같은 오류 모델을 가진 학생들끼리 그룹으로 묶어 5개의 그룹으로 나누고 각 그룹에 속한 학생마다 개개인의 문제 풀이 결과를 한눈에 파악할 수 있도록 검사지의 평가 결과를 도식화하여 표현하였다. 이것은 학생 개개인의 문제해결 정도를 파악하고, 오류가 어느 시점에서 시작되었는지, 어느 유형에서 학생들의 오류 빈도가 높은지 등을 파악하기에 쉽다. 또한 학생별로 유형별 문제해결 결과를 비교하기가 쉽고 선수학습의 오류 시점이나 해결 빈도에 따라 후속 학습의 결과가 어떻게 달라지는지 등도 비교·조사하기가 편리하다. 도식화는 10개의 문제 유형은 띠 모양으로 나타내어 그룹별 학생들의 평가 결과를 나열하여 문제마다 비교하기 편리하도록 직사각형 도형으로 표현하였다. 각 문제 유형마다 구성된 세 개의 문제는 사각형 안에 문제 기호를 써서 한 개의 사각형이 하나의 문제 유형과 그에 속한 세 개의 문제들을 나타내도록 하였다. 문제를 해결한 경우는 문제 기호를 타원으로 묶어주고, 그렇지 못한 경우에는 타원에서 문제 기호를 제외하여 해결과 미해결 문제를 표현하였다. 예를 들어 E_{2j} 문제 유형의 세 문제를 모두 해결하였으면 세 기호를 하나의 타원으로 묶어서 모두 해결하였음을 나타내었고, 이웃한 두 문제를 해결하였으면 해결한 문제들을 하나의 타원으로 묶고, 해결하지 못한 문제를 타원에서 제외하였다. 만약 이웃하지 않은 두 문제를 해결하였으면 해결한 문제를 각각 타원으로 묶어서 나타내었다. 하나의 문제를 해결하였으면 해결한 문제만을 타원으로 묶어서 나타내었다.

도식화의 예시: 

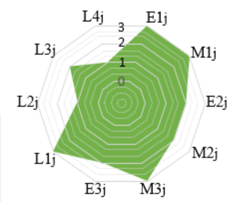
위의 예시에서 첫 번째 도식화는 문제 유형 E_{1j}에 속한 세 문제를 모두 해결한 경우이다. 두 번째부터 네 번째 도식화의 경우 문제 유형 M_{2j}, L_{1j}, L_{2j}에서 두 개의 문제를 해결한 경우이고, 다섯 번째 도식화는 해당 문제 유형에서 1개의 문제를 해결한 경우이다. 그리고 마지막 여섯 번째 도식화의 경우는 세 문제 모두 해결하지 못한 경우이다.

도식화를 활용하면 학생 개인의 평가 결과를 직사각형 내의 타원 크기나 타원의 위치로 오류가 있는 문제 유형을 파악하기 쉽고, 학생들끼리 문제해결 결과를 비교하려면 개인의 도식을 세로로 나열하여 어느 시점에서 오류가 발생했는지, 오류의 발생 시기에 따라 문제해결 결과가 어떻게 달라졌는지, 각 문제의 오류의 빈도는 어느 정도인지 비교 및 파악이 쉽다.

(3) 영역 그래프 분석

10가지의 문제 유형을 나타내기에 가장 적합한 정십각형 도형을 이용하여 10개의 꼭짓점이 10가지의 문제 유형을 의미하도록 하였다. 각 문제 유형마다 문제해결 개수를 나타내기 위해 정십각형의 닮음 도형을 이용하여 해당하는 문제 유형의 해결 개수를 대응점에 표시하고, 표시한 점들을 연결하여 만들어진 다각형으로 개인의 문제해결 영역을 나타내었다. 다각형을 만드는 방법은 우선 닮음 정십각형 도형을 중심이 겹치도록 4개를 포개어서 도형의 크기가 작은 순서부터 해결 개수 0개, 1개, 2개, 3개를 의미하도록 구성하였다. 각 문제 유형마다 세 문제 중 해결한 문제 수가 0개인 경우 닮음 정십각형 중 가장 작은 정십각형의 대응점에 점으로 표시하고, 해결한 문제 수가 1개인 경우는 닮음 정십각형 중 두 번째로 작은 정십각형의 대응점에 표시, 해결한 문제 수가 2개인 경우에는 닮음 정십각형 중 세 번째 크기의 정십각형에 해당하는 문제 유형의 대응점을 찾아 점으로 표시하였다. 그리고 3문제를 모두 해결하였을 때 가장 큰 정십각형에서 해당하는 문제 유형의 대응점을 찾아 점으로 표시하여 10가지 문제 유형의 해결 결과를 모두 같은 방법으로 표시하여 10개의 표시된 점을 이어 다각형을 그렸다. 이렇게 그려진 다각형의 면적은 학생의 평가 결과에 대한 수학 문제해결 영역을 의미한다.

영역 그래프의 예시:



위의 그래프는 시계 방향으로 문제 유형 E_{1j}부터 L_{4j}까지, 문제해결 개수를 영역으로 나타낸 것이다. 문제 유형 E_{1j}, M_{1j}, M_{3j}, L_{1j} 은 모두 해결, 문제 유형 E_{2j}, M_{2j}, E_{3j}, L_{3j}은 두 문제를 해결, 문제 유형 L_{2j}, L_{4j}는 한 문제를 해결한 경우를 나타낸 것이다.

도식화한 것을 도형의 넓이(면적)로 표현하면 오류 정도에 따라 전체 문제의 해결 정도를 파악할 수 있고, 어느 부분에서 오류가 발생했는지에 따라서 전체 문제해결의 넓이에 차이가 있는지를 직관적으로 비교할 수 있다. 영역 그래프에서 넓이의 차이를 보인다는 것은 선수학습에서의 오류가 문제해결 영역에 영향을 미쳤다는 의미로 해석할 수 있고, 오류가 발생한 시점을 문제의 근원지로 판단하여 학습의 결손 영역을 보완할 학습계획 구축에 도움이 된다.

(4) 꺾은선 그래프 분석

앞서 3가지 분석 방법으로 학생들의 문제 풀이 결과를 분석하였다. 첫째, 학생들의 평가 결과를 오류 모델을 통해 학생들의 문제 유형별 오류 형태와 그에 대한 빈도수를 조사하였다. 둘째, 도식화를 통해 학생의 문제 풀이 결과에서 오류가 발생한 문제 유형을 빠르게 파악하거나 여러 학생의 도식을 이용하여 서로의 결과를 비교하였다. 셋째, 영역 그래프를 통해서 선수학습에서의 오류로 인한 전체 문제 풀이 개수에 차이가 있는지를 조사·분석하였다. 이 3가지의 분석 방법은 전체 문제에서 정답·오답의 위치를 알아보거나 전체적인 문제 해결량을 파악하기는 쉽지만, 문제 유형별 연결성이나 전체 문제 풀이의 흐름을 알아보기에는 다소 불편함이 있다. 또한 개개인의 평가 결과를 나타낸 것이므로 방대한 양의 자료가 쌓인다는 단점이 있다. 이에 꺾은선 그래프를 이용하여 그룹별 학생들의 문제 풀

이 결과를 한 프레임에 그래프로 나타내 그룹 내의 학생들 문제 풀이 결과를 비교하거나, 첫 문제 유형부터 마지막 문제 유형까지의 문제해결 흐름을 조사하거나, 문제 유형 간의 연결이 원활한지를 파악하였다.

꺾은선 그래프의 가로축에 10가지의 문제 유형을 표기하고, 세로축에 문제의 개수를 표기하여 문제 유형마다 해결한 문제 수를 가로축과 세로축이 만나는 지점에 점으로 표시한 다음 표시한 점들을 선으로 연결하여 꺾은선 그래프를 그렸다. 꺾은선 그래프는 10가지 문제 유형의 해결 결과를 전체적으로 파악할 수 있게 하고, 꺾은선의 위치를 통하여 오류 개수가 많은 지점과 그렇지 않은 지점을 명확히 구분할 수 있다. 이를 통하여 문제 유형 간의 연결성을 알 수 있다. 선의 위치가 아래로 많이 치우쳐 있으면 오류 빈도가 높다는 의미이고, 선의 위치가 위로 많이 치우쳐 있으면 해결 빈도가 높다는 의미이다. 또한 선의 굴곡이 심하면 문제해결의 흐름이 원만하지 못하다는 의미이고, 그래프의 굴곡이 완만하면 문제 유형마다 비슷한 해결 정도를 보인다는 의미이다. 그러므로 그래프의 굴곡이 심한 부분은 해당하는 문제 유형에 관련한 전과 후의 개념에 문제가 생겼다는 것을 짐작할 수 있으며, 차후 그래프의 위치가 아래쪽으로 많이 치우침을 보이면 개념의 결손이 향후 학습에 문제를 일으켰다는 것을 알 수 있게 한다. 꺾은선 그래프는 학생의 오류 발생 시기와 문제를 해결한 상태를 한눈에 볼 수 있고 그래프의 굴곡으로 개념 간의 연결성을 짐작할 수 있다. 그래프의 굴곡은 학생의 학습 상태를 나타내며 굴곡이 심하거나 아래쪽에 치우쳐 있을수록 학생의 수학 개념에 대한 인지가 낮음을 나타낸다. 하나의 꺾은선 그래프 프레임에 같은 그룹에 속한 학생들의 데이터를 모두 그려서 그룹 내 학생들끼리의 결과를 비교할 수도 있지만, 그룹마다 한 명의 대표 학생을 뽑아 하나의 꺾은선 그래프 프레임에 데이터를 그려서 그룹별 특징을 비교하는 것도 가능하다. 또한 필요에 따라 한 프레임에 여러 학생의 데이터를 그려서 알고자 하는 바를 비교·분석하는데 활용할 수 있다.

Ⅳ. 분석 결과

1. 문제 유형별 정·오 분석 결과

10가지의 문제 유형별 정·오 분석 결과 중 문제 유형 간의 직접적 연결성이 있는 3가지 문제 유형의 분석 결과이다. 문제 유형 E_{2j}와 L_{2j}, L_{4j}은 모두 기울기와 관련된 문제가 포함되어 있다. 이 3가지 문제 유형의 풀이 결과 분석을 통해 하위개념에서 오류를 범한 학생들이 상위개념의 문제에서도 오류를 범하는지를 조사하여 오류의 연관성을 알아보았다. 그래서 하위개념 간의 연결에 단절이 생기면 상위 학습에 영향이 나타나는지를 조사하고자 하였다.

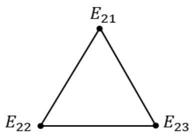
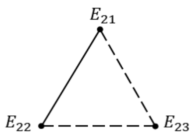
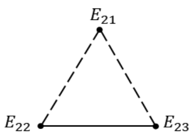
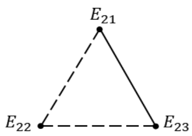
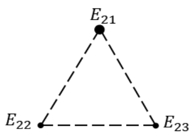
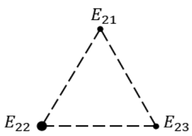
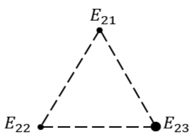
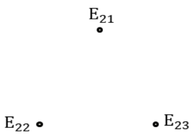
1) 문제 유형 $E_{2j}(j=1,2,3)$의 분석 결과

문제 유형 E_{2j}에 속해 있는 세 개의 문제는 각각 E_{21}, E_{22}, E_{23}로 표현하였다. E_{21}는 정비례 데이터를 좌표로 나타내기, E_{22}는 정비례 식과 정비례 그래프를 선으로 연결하기, E_{23}는 정비례 그래프를 보고 비례상수의 크기를 비교하는 문제이다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> $E_{2j}(j=1,2,3)$ 정비례 그래프의 문제 유형

문제 기호	내용
E_{21}	데이터를 좌표로 나타내기
E_{22}	식과 정비례 그래프 연결하기
E_{23}	그래프의 성질

<표 Ⅳ-2> $E_{2j}(j=1,2,3)$ 정비례 그래프의 오류 유형

오류 모델	내용	반응 수(%)
	E_{21}, E_{22}, E_{23}의 세 문제를 모두 해결한 경우	28(19)
	E_{21}와 E_{22}의 두 문제는 해결하고 E_{23}의 $y=ax$, $y=bx$, $y=cx$을 보고 a,b,c의 대소관계를 바르게 표현하지 못한 경우	21(14)
	정비례 관계의 표를 보고 6개의 순서쌍을 평면 위에 바르게 나타내지 못하였으나 E_{22}와 E_{23}는 해결한 경우	18(12)
	E_{21}는 해결하고 E_{22}는 해결하지 못하였으나 E_{23}는 해결한 경우	5(3)
	E_{21}만 해결하고 E_{22}와 E_{23}는 틀린 경우	18(12)
	E_{21}와 E_{23}는 틀리고 E_{22}는 해결한 경우	23(16)
	E_{21}와 E_{22}에서 오류를 보이고 E_{23}은 해결한 경우	4(3)
	E_{21}, E_{22}, E_{23} 모두 틀린 경우	31(21)

문제 유형 E_{2j}의 문제 풀이 결과를 분석한 것은 다음과 같다(<표 Ⅳ-2>). 학생들의 문제 풀이 결과를 살펴보면, E_{23}의 경우 전체 148명 중 93명의 학생들이 오류를 보였다. 학생들은 정확한 수가 주어진 식의 경우에는 잘 해결하는 모습을 보이지만 E_{23}과 같이 미지수가 주어진 식의 경우에는 해결하기 어려워하는 것으로 나타났다. 정·오 분석의 오류 모델은 삼각형의 모양과 반응 수만으로도 학생들이 문제를 어느 정도 해결하고 있는지, 또한 각 문제 간의 연결을 학생들이 어느 정도 하고 있는지 직관적으로 알 수 있게 한다. 다음의 표를 보면 세 문제를 모두 해결한 학생 수는 28명이고 모두 해결하지 못한 학생 수는 31명으로, 전체 학생들이 문제 유형 E_{2j}의 문제를 잘 해결하지 못하고 있음을 알 수 있다. 또한 세 개의 문제 중 한 문제만을 해결한 경우를 비교해 보려면 오류 모델 중 꼭짓점 하나를 진하게 표현하고 선분들이 점선으로 이루어져 있는 삼각형 모양을 찾으면 된다. 이러한 삼각형 모양들과 빈도수를 살펴보면 E_{22}을 해결한 학생 수가 가장 많으며 E_{23}을 해결한 학생 수가 가장 적음을 알 수 있다. 오류 모델만으로도 문제를 어느 정도 해결했는지 쉽게 알 수 있고, 빈도수와 연관을 지어보면 수학 개념의 학습 정도를 파악할 수 있다. 학생들의 문제해결 결과를 이렇게 시각적으로 표현하면 학생들의 학습 상태를 파악하기 쉽다. 학생들은 문제 유형 E_{2j}에서 식과 그래프가 모두 주어진 상황에서는 서로 연결하는 것을 해결할 수 있지만, 둘 중 한 가지만을 제시하여 스스로 표현하거나 해결해야 하는 문제일 경우에는 해결하기 어려워한다는 것을 알 수 있다. 오류 모델과 빈도수를 참고하여 학생들의 학습 결손을 돕기 위한 학습지도 계획을 빠른 시간 내에 계획할 수 있다.

2) 문제 유형 $L_{2j}(j=1,2,3)$의 분석 결과

문제 유형 L_{2j}에 속한 문제는 L_{21}, L_{22}, L_{23}로 표기하였으며 그 내용은 다음의 표와 같다(<표 Ⅳ-3>).

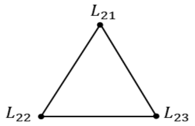
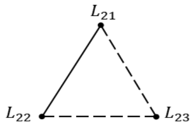
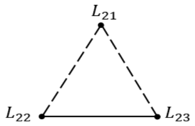
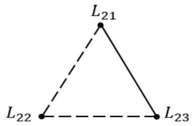
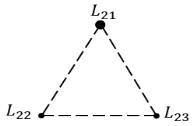
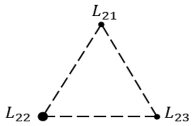
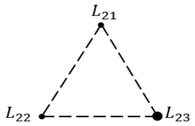
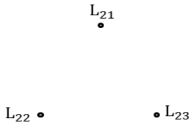
<표 Ⅳ-3> $L_{2j}(j=1,2,3)$ 일차함수 기울기의 문제 유형

문제 기호	내용
L_{21}	그래프의 두 절편을 이용하여 기울기 구하기
L_{22}	x와 y의 증가량을 표현한 문장을 읽고 기울기 구하기
L_{23}	주어진 두 점을 이용하여 기울기 구하기

L_{2j}는 기울기에 관련한 문제들로 한 문제만 해결한 경우를 비교해 보면 그래프를 이용하거나 문장을 해석하여 기울기를 구하는 문제는 해결 빈도수가 각각 8명, 3명인데 반해 서로 다른 두 점을 주었을 때 기울기를 구한 학생의 수는 19명으로 비율이 가장 높았다. 이는 학생들이 기울기에 대한 개념의 이해보다 대수식에 대한 연습의 경험치가 더 많아서 익숙한 대수식으로 접근하여 해결하는 것으로 보인다. 결국 학생들은 기울기에 대한 개념을 이해하고 있다고 하기보다는 단순히 공식에 의하여 연산을 이행한 것이라고 볼 수 있다. 문제 유형 L_{2j}에 대한 학생들의 반응을 살펴보면 문제 유형 E_{2j} 보다 세 문제를 모두 해결하지 못한 학생 수가 더 높게 나타났다. 또한 서로 연관이 있는 문제인 E_{22}나 E_{23}에서 오류를 보인 학생들이 L_{2j}에 속한 문제에서 역시 오류를 보이는 현상을 보였다. 학생들은 E_{2j}에서 그래프를 보고 기울기가 표기된 식을 바르게 연결하지 못하거나, 그래프를 보고 기울기의 크기를 바르게 비교하지 못하였다. 그리고 이들은 문제 유형 L_{2j}에서 그래프의 절편을 이용하여 기울기를 구하지 못하거나, 증가량에 대한 문장을 읽고 식을 바르게 찾지 못하거나, 서로 다른 두 점을 이용하여 기울기를 바르게 계산하지 못하는 결과를 보였다.

다음은 문제 유형 L_{2j}의 오류를 분석한 뒤, 오류 모델을 이용하여 문제 간의 연결성과 오류 이유를 제시한 것이다(<표 Ⅳ-4>).

<표 Ⅳ-4> $L_{2j}(j=1,2,3)$ 일차함수 기울기의 오류 유형

오류 모델	내용	반응 수(%)
	모두 해결한 경우	44(30)
	L_{21}과 L_{22}는 구했으나 L_{23}는 구하지 못한 경우	4(3)
	두 절편을 이용하여 기울기 구하기(L_{21})는 해결하지 못하고,L_{22}, L_{23}는 해결한 경우	7(5)
	두 절편과 서로 다른 두 점을 이용하여 기울기 구하기(L_{21}, L_{23})는 잘 해결하였으나 L_{22}는 구하지 못한 경우	12(8)
	L_{21}는 구했으나 L_{22}와 L_{23}는 해결하지 못한 경우	8(5)
	L_{21}와 L_{23}는 해결하지 못하고 L_{22}만 해결한 경우	3(2)
	L_{21}, L_{22}는 틀렸는데 L_{23}는 해결한 경우	19(13)
	모두 해결하지 못한 경우	51(34)

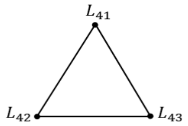
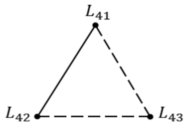
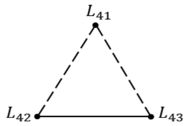
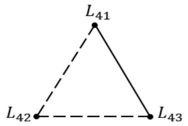
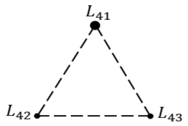
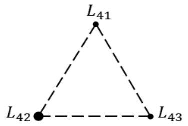
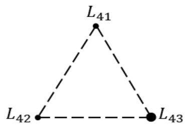
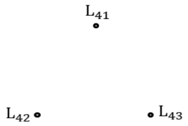
3) 문제 유형 $L_{4j}(j=1,2,3)$의 분석 결과

문제 유형 L_{4j}은 주어진 조건을 이용하여 일차함수 식을 구하는 문제로 구성되어 있다. 문제 L_{43}은 서로 다른 두 점을 이용하여 기울기를 구하는 것에서 L_{2j}의 문제 중 L_{23}와 공통점이 있다(<표 Ⅳ-5>).

<표 Ⅳ-5> $L_{4j}(j=1,2,3)$ 일차함수 식 구하기의 문제 유형

문제 유형	내용
L_{41}	기울기와 y절편이 주어졌을 때 일차함수 식 구하기
L_{42}	기울기와 한 점을 주었을 때 일차함수 식 구하기
L_{43}	서로 다른 두 점을 주었을 때 일차함수 식 구하기

<표 Ⅳ-6> $L_{4j}(j=1,2,3)$ 일차함수 식 구하기의 오류 유형

오류 모델	내용	반응 수(%)
	모두 해결한 경우	54(36)
	L_{41}, L_{42}는 구하고 서로 다른 두 점을 주었을 때 일차함수 식 구하기(L_{43})는 해결하지 못한 경우	13(9)
	L_{41}는 구하지 못했으나 L_{42}와 L_{43}는 구한 경우	4(3)
	L_{41}와 L_{43}는 해결하고 기울기와 한 점을 주었을 때 일차함수 식 구하기(L_{42})는 풀지 못한 경우	3(2)
	L_{41}의 경우만 식을 구하고 L_{42}와 L_{43}는 구하지 못한 경우	14(9)
	L_{42}만 식을 구한 경우	0(0)
	L_{43}의 조건일 때만 식을 구한 경우	0(0)
	L_{41}, L_{42}, L_{43} 모두 해결하지 못한 경우	60(40)

분석 결과를 살펴보면 세 문제를 모두 해결하거나 세 문제 모두 해결하지 못한 경우로 양분화되어 있음을 알 수 있다. 이는 일차함수 식에 대한 이해가 부족한 학생들은 하위수준의 문제뿐만 아니라 세 문제를 해결하는데 모두 어려움을 겪는 것으로 판단된다(<표 Ⅳ-6>).

세 가지의 문제 유형을 해결한 결과를 비교해 보면 모두 기울기의 개념에 대한 인지 부족으로 인해 오류를 보였다. 정비례 그래프에서 기울기에 따른 비례상수의 대소관계를 비교하지 못한 학생이 이후 일차함수 그래프에서 기울기에 대한 부호를 결정하는 문제에서도 오류를 보였다. 또한 그래프를 통해 주어진 좌표나 조건으로 주어진 두 점을 이용하여 일차함수 기울기를 구하는 문제도 해결하지 못하였다. 이것은 선수학습의 개념 인지 부족이 후속 학습에 있어서 다양한 측면으로 결손이 나타남을 보여준다. 그러므로 교사가 학생들을 위한 교수 학습 계획을 세울 때 개념 간의 연결을 지도할 필요가 있으며, 현행 학습 전·후의 개념이 잘 이어지고 있는지 확인할 필요가 있다.

2. 도식화 분석 결과

학생들의 문제 풀이 결과를 문제 유형별로 정·오 분석하고, 분석한 결과를 자세히 살펴보니 유사한 오류 형태를 보이는 학생들이 있었다. 유사 오류 형태를 보이는 학생들을 조건에 따라 5개의 그룹으로 나누어 그룹별로 문제 풀이 결과에 어떤 차이가 있는지 조사하였다. 5개의 그룹으로 분류한 조건은 다음과 같다.

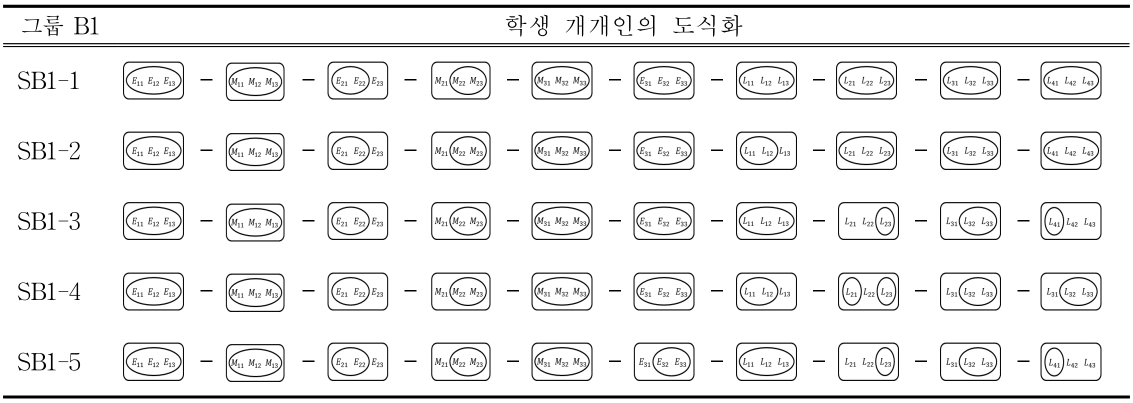
그룹A～그룹C는 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}에서 오류가 없는 학생들을 대상으로 문제 유형 E_{2j}의 오류 개수에 따라 세분화하였다. 그룹A는 문제 유형 E_{2j}에서 오류가 없는 학생들이다. 그룹B는 문제 유형 E_{2j}에서 오류가 1개 있는 학생들이다. 그룹B는 오류를 범한 문제가 몇 번째 문제이냐에 따라 다시 그룹 B1과 그룹 B2로 분류하였다. 그룹 B1은 문제 E_{23}에서 오류를 범한 학생들이고 그룹 B2는 문제 E_{22}에서 오류를 범한 학생들이다. 그룹C는 문제 유형 E_{2j}에서 오류가 2개 있는 학생들이다.

그룹D와 그룹 E는 문제 유형 M_{3j}에서 오류가 있고 없고에 따라 분류한 학생들이다. 그룹D는 문제 유형 M_{3j}에서 오류가 없으면서 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}의 오류 유무에 따라 다시 세 그룹으로 세분화하였다. 그룹 D1은 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}에서 오류가 없는 학생들의 집단이고, 그룹 D2는 문제 유형 E_{1j}에서는 오류가 없고 M_{1j}는 오류가 있는 학생들이다. 그룹 D3는 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}에서 모두 오류가 있는 학생들이다. 그룹 E는 M_{3j}에서 오류가 있으며 그룹D와 같이 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}의 오류 유무에 따라 세 그룹으로 세분화하였다. 먼저, 그룹 E1은 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}에서 오류가 없는 학생들이고, 그룹 E2는 문제 유형 E_{1j}에서만 오류가 없는 학생들이다. 그리고 그룹 E3는 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}에서 모두 오류가 있는 학생들이다.

이렇게 분류된 학생들의 문제 풀이 결과를 모두 도식화하여 그룹별로 차이점을 비교해 보았다. 앞서 분석한 문제 유형별 정·오 분석 결과와 연결성을 보이기 위하여 $E_{2j}(j=1,2,3)$의 오류 개수에 따라 분류한 그룹의 도식화 결과를 살펴보겠다. 모든 도식화의 순서[5]는 문제 유형 E_{1j}을 시작으로 M_{1j}, E_{2j}, M_{2j}, M_{3j}, E_{3j}, L_{1j}, L_{2j}, L_{3_j}, L_{4j}의 순서이며 각 직사각형 안에 해당 유형에 속한 세 개의 문제를 $\square_{i1}$, $\square_{i2}$, $\square_{i3}(i=1,2,3 \text{ or } 1,2,3,4)$로 표기하였다.

다음은 그룹 B1에 속한 학생들의 풀이 결과 도식화이다(<그림 Ⅳ-1>).

5) 모든 도식화의 문제 배열 순서는 E_{1j}, M_{1j}, E_{2j}, M_{2j}, M_{3j}, E_{3j}, L_{1j}, L_{2j}, L_{3_j}, L_{4j} 이다.

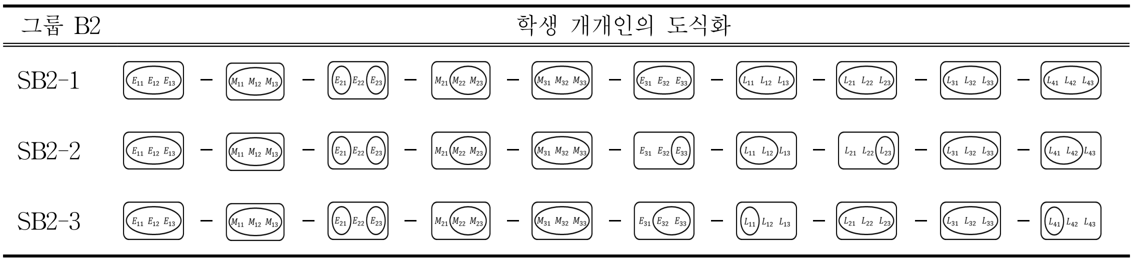


<그림 Ⅳ-1> 그룹 B1 학생들의 문제 풀이 결과의 도식화

도식에서 SB1-1[6]의 문제 풀이 결과를 살펴보면 문제 유형 E_{1j}와 M_{1j}는 모두 해결하고 E_{2j}의 문제 중 E_{23}가 오류인 학생이다. 후속 문제 풀이 결과를 살펴보면 문제 유형 M_{2j}의 첫 번째 문제에서 오류를 범하고, M_{3j}와 E_{3j}는 모두 해결하였다. 문제 유형 L_{1j}에서는 세 번째 문제에서 오류를 보였으며, L_{2j}에서는 두 번째 문제, L_{3j}와 L_{4j}에서는 각각 첫 번째 문제에서 오류를 보였다(<그림 Ⅳ-1>).

E_{23}은 그래프를 보고 비례상수 크기를 비교하는 문제이며, 이 문제에서 오류를 보인 학생 중 3명의 학생은 x와 y의 변화량을 설명하는 문장을 읽고 기울기가 바르게 표시된 일차함수 식을 찾는 문제 L_{22}에서 공통된 오류를 보였다. 그리고 일차함수 그래프의 개형을 보고 일차함수 식에서 x의 계수와 상수의 부호를 결정하는 문제 L_{31}에서도 공통된 오류를 보였다. E_{23}와 L_{22}, L_{31}는 교과 과정의 순서상 위계관계에 있으며 문제 유형 L은 문제 유형 E보다 상위 문제이다. 하위 문제에서 오류를 보인 학생들은 관련된 상위 문제에서 오류를 반복한다는 것을 위의 분석 결과로 짐작할 수 있다.

다음은 그룹 B2의 도식화이다(<그림 Ⅳ-2>).



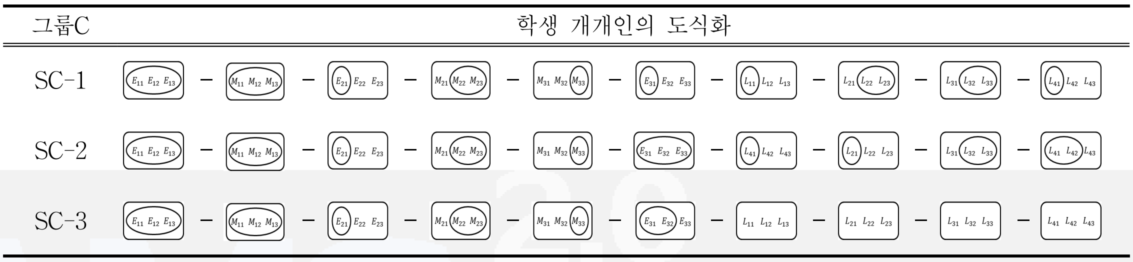
<그림 Ⅳ-2> 그룹 B2 학생들의 문제 풀이 결과의 도식화

SB2-2의 도식을 살펴보면 문제 E_{22}에서 오류를 범하고, M_{2j}의 첫 번째 문제에서 오류를 보였다. 문제 유형 E_{3j}에서 E_{31}과 E_{32} 두 문제를 해결하지 못하였고, L_{13}에서도 오류를 보였다. 그리고 L_{21}와

6) 학생들은 ‘Student’의 ‘S’를 붙여 그룹 B1의 첫 번째 학생은 SB1-1, 두 번째 학생은 SB1-2. 등으로 표기하였다.

L_{22}, L_{43} 역시 해결하지 못하였다. 그룹 B2의 도식을 살펴보면 SB2-1학생은 두 문제의 오답 이후 후속 학습 문제에서 오류가 없는 것을 알 수 있다. 이는 단순한 실수에 의한 오류로 보아도 좋을 것이다. 하지만 SB2-2와 SB2-3의 경우 후속 학습에서 꾸준히 오류가 발생하고 있음을 보아 개념 간의 연결이 끊겨있음을 알 수 있다(<그림 Ⅳ-2>). 문제 E_{22}는 정비례식과 정비례 그래프를 연결 짓는 문제이다. 이 문제에서 오류를 보인 학생들은 문제 E_{23}에서 오류를 보인 학생들에 비해 후속 학습에서 오류의 수가 더 많았다. 문제의 위계관계를 고려했을 때, E_{22}가 E_{23}보다 하위 문제이므로, 하위 문제에서 오류를 보인 학생들이 상위 문제에서 오류를 보인 학생들보다 후속 학습의 결과가 더 좋지 않음을 두 그룹을 통해 비교할 수 있다.

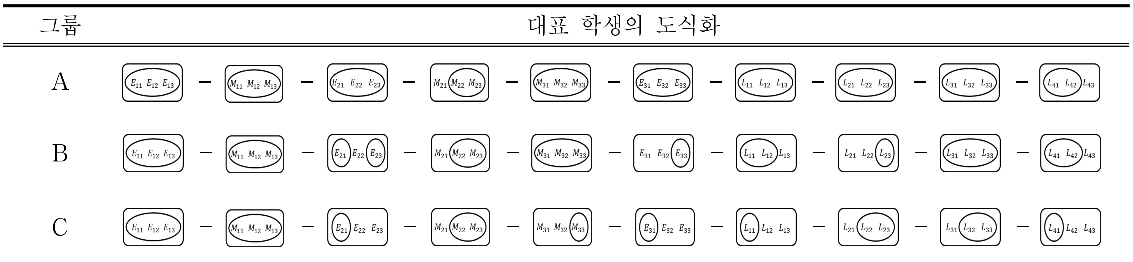
그룹C는 문제 유형 E_{2j}의 문제 중 두 문제에서 오류를 보인 학생들-E_{21}은 해결, E_{22}와 E_{23}은 미해결-이다. 학생들의 도식을 살펴보면 위의 두 그룹에 비해 후속 학습으로 진행될수록 해결하지 못한 문제 수가 많음을 직관적으로 볼 수 있다. 이 중 SC-3은 일차함수의 성질에 관련한 문제 유형 L의 모든 문제에서 오류를 보였다(<그림 Ⅳ-3>).



<그림 Ⅳ-3> 그룹C 학생들의 문제 풀이 결과의 도식화

다음은 그룹A, 그룹B, 그룹C에서 임의로 한 학생을 추출하여 세 그룹의 도식을 비교하였다(<그림 Ⅳ-4>).

문제 유형 E_{2j}의 오류 개수에 따른 후속 학습의 결과를 살펴보면 오류 개수가 많아질수록 문제해결 수가 줄어듦을 직관적으로 파악할 수 있다. 이는 문제 유형 E_{2j}에 해당하는 수학적 개념에 대한 인지 부족이 후속 학습에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.



<그림 Ⅳ-4> 그룹 B1, 그룹 B2, 그룹C 대표 학생들의 문제 풀이 결과의 도식화

그룹A 학생의 도식을 보면 먼저 10가지의 문제 유형 중 문제 유형 M_{2j}과 문제 유형 L_{4j}에서 오류가 있음을 알 수 있다. 자세히 살펴보면 문제 유형 M_{2j}의 문제 중에는 M_{21}문제에서 오류를 보였고,

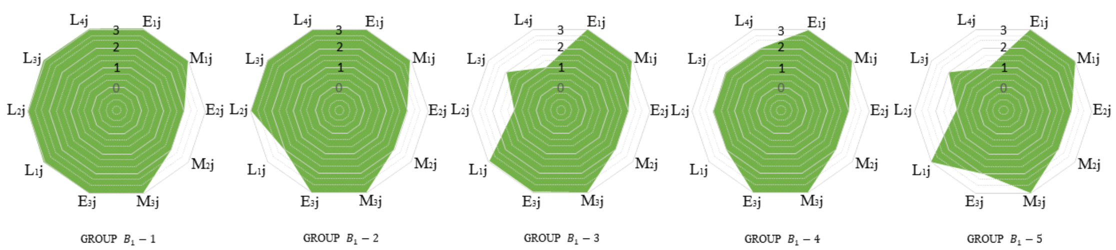
문제 유형 L_{4j}에서는 L_{43}문제에서 오류를 보이고 있음을 파악할 수 있다. 그룹B 학생은 E_{1j}, M_{1j}, M_{3j}, L_{3j}문제 유형을 모두 해결하였음을 알 수 있다. 이를 제외한 나머지 유형 중 E_{2j}문제 유형에서는 E_{22}에서 오류를, 문제 유형 M_{2j}에서는 M_{21}문제에서, 문제 유형 E_{3j}에서는 E_{31}, E_{32}문제에서 오류를 보임을 알 수 있다. 그 밖에도 문제 유형 L_{1j}, L_{2j}, L_{4j}에서도 오류가 나타나고 있음을 파악할 수 있다. 그룹C 학생은 두 개의 문제 유형을 제외한 모든 문제 유형에서 오류를 보인다. 두 번째 학생과 비교해 각 문제 유형별 해결 정도를 비교해 보았을 때 각 문제 유형에 속한 세 개의 문제 중 하나의 문제만 해결한 경우가 더 많이 발생하고 있음을 알 수 있다(<그림 Ⅳ-4>). 이들 세 학생의 도식화 결과를 분석해 보면 세 번째 유형 $E_{2j}(j=1,2,3)$의 오류 개수에 따라 후속 문제의 해결 정도가 다르게 나타남을 파악할 수 있다. 이는 세 번째 문제 유형 E_{2j}에 관련한 함수 개념에서 문제가 발생하였음을 발견할 수 있다.

도식화는 학생 개개인의 문제해결 결과를 직관적으로 파악하거나, 두 명 이상 학생들의 문제해결 결과를 비교할 때 용이하다. 각 문제 유형별로 같은 결과를 보이는 학생들끼리 분류하여 비교하거나, 특정한 문제 유형만을 비교하는 등 필요에 따라 다양하게 활용할 수 있다. 하지만 도식화는 문제 유형별 연결이나 문제 간의 연결성을 파악한다든지 전체 문제해결의 흐름을 알기에는 다소 불편함이 있다. 또한 자료가 방대해짐에 따라 한눈에 비교하기에는 무리가 있다. 그래서 이를 보완하여 전체적 흐름이나 학습 상태를 파악할 수 있는 분석 방법을 더불어 모색하였다.

3. 영역 그래프 분석 결과

도식화한 결과를 정십각형을 이용하여 문제해결 정도를 한눈에 파악할 수 있도록 영역을 나타내어 차이점을 분석하였다. 영역 그래프의 모델은 정십각형을 이용하였다. 또한 크기가 서로 다른 닮음 도형 4개를 이용하여 그림과 같이 배치하여 문제해결 수를 나타내도록 하였다. 중심으로부터 가장 작은 정십각형은 0개의 문제를 해결한 영역을 나타내고, 두 번째로 작은 정십각형은 1개의 문제를 해결한 영역을 나타낸다, 또한 세 번째 크기의 정십각형은 2개의 문제를 해결한 영역을, 가장 큰 정십각형은 세 개의 문제를 모두 해결한 영역을 나타낸다. 정십각형의 꼭짓점은 10개의 문제 유형을 의미한다. 문제 유형의 순서는 문제 유형 E_{1j}을 시작으로 시계 방향으로 M_{1j}, E_{2j}, M_{2j}, M_{3j}, E_{3j}, L_{1j}, L_{2j}, L_{3_j}, L_{4j}의 순서이다.

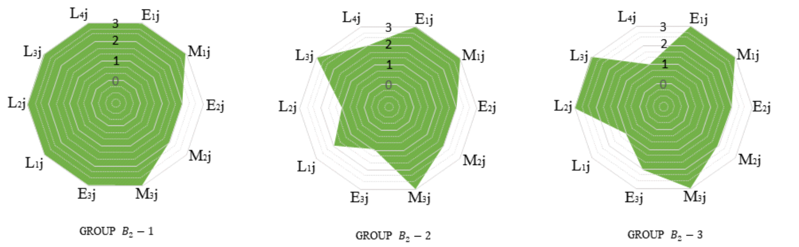
먼저, 그룹 B1에 속해 있는 다섯 명의 학생들-B1-1, B1-2, B1-3, B1-4, B1-5-의 도식화의 결과를 영역 그래프를 이용하여 나타내면 다음과 같다(<그림 Ⅳ-5>).



<그림 Ⅳ-5> B1 그룹 학생들의 문제해결 영역

위의 그래프에서 B1-3의 그래프를 살펴보면 E_{1j}와 M_{1j}는 모두 해결하고, E_{2j}와 M_{2j}는 하나의 오류

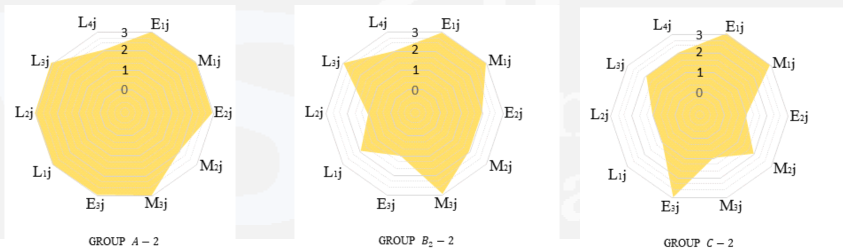
가 있다. 그리고 M_{3j}와 E_{3j}, L_{1j}에서는 오류가 없고, L_{2j}에서 2개의 오류가, L_{3j}에서 1개의 오류, L_{4j}에서 2개의 오류를 보인 문제해결 결과를 영역으로 나타낸 것이다.



<그림 Ⅳ-6> B2 그룹 학생들의 문제해결 영역

그룹 B2에 속한 학생들의 도식화를 영역으로 나타내어 보면 위의 그래프와 같다(<그림 Ⅳ-6>).

그래프에 대한 설명은 <그림 Ⅳ-5>과 같다. 다음은 세 그룹-그룹A, 그룹B, 그룹C-에 속한 학생 중 임의로 한 명씩을 추출하여 그룹별로 문제해결 결과를 비교해 본 것이다(<그림 Ⅳ-7>). 그룹에 따라 문제를 해결한 영역에 차이가 있음을 시각적으로 확인할 수 있다. 앞서 설명한 바와 같이 세 그룹의 차이점은 문제 유형 E_{2j}의 해결 정도이다. E_{2j}의 오류 개수에 따라 추후 학습의 추이를 살펴본 결과 오류 개수가 많아질수록 문제를 해결한 영역의 넓이가 줄어들고 있음을 확인할 수 있다.



<그림 Ⅳ-7> 그룹A, B, C 학생들의 문제해결 영역 비교

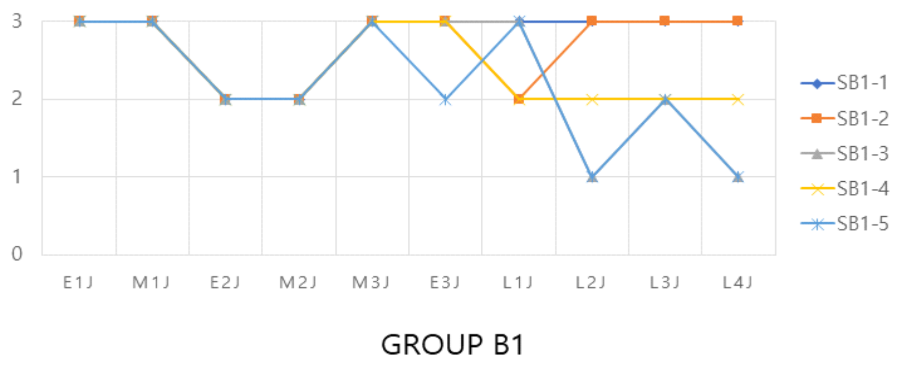
그룹A에 속한 학생은 도식화에서 보았듯이 M_{2j}문제 유형에서 하나의 문제를 해결하지 못하였고, L_{4j}문제 유형에서도 한 문제에서 오류를 보였다. 그 결과를 다각형의 넓이로 표현한 것이다. 그룹B에 속한 학생은 문제 유형 E_{1j}, M_{1j}, M_{3j}, L_{3j}은 유형에 속한 세 문제를 모두 해결하였고, 나머지 문제 유형에서는 1개 또는 2개의 오류를 보였다. 그 결과를 정십각형을 이용하여 영역으로 나타낸 것이다. 그룹C에 속한 학생은 3개의 문제 유형 E_{1j}, M_{1j}, E_{3j}을 제외하고 나머지 7개의 문제 유형에서 1개 또는 2개의 오류를 범한 것을 도형의 넓이로 표현한 것이다. 세 학생의 결과를 영역 그래프로 비교해 보면 세 번째 문제 유형인 E_{2j}의 오류 개수에 따라 전체 문제를 해결한 영역이 좁아지고 있음을 알 수 있다. 첫 번째 학생은 세 번째 문제 유형 E_{2j}에서 오류가 없었고, 두 번째 학생은 하나의 오류가, 세 번째 학생은 두 개의 오류가 있었다. 그래프를 통하여 학생이 E_{1j}와 M_{1j}을 모두 해결하였어도 세 번째 문제 유형 E_{2j}의 해결 개수에 따라 이후 학습 결과가 다르게 나타남을 알 수 있다. 다시 말하면 문제 유형 E_{2j}의 해결 정도가 후속 학습에 영향을 미치고 있다는 사실을 분명히 파악할 수 있으며 E_{2j}에 관련한 함수 개념의 습득에 문제가 생겼음을 알 수 있다.

이처럼 영역 그래프를 이용하면 학생들의 문제해결 결과를 다각형의 넓이를 통하여 한눈에 파악할 수 있고, 그룹별, 학생별로 영역 비교가 가능하다. 또한 특정 문제 유형의 해결 개수에 따른 후속 학습의 결과를 직관적으로 비교할 수 있다.

4. 꺾은선 그래프 분석 결과

학생들의 문제 풀이 결과에서 문제 간의 연결을 살펴보기 위해 꺾은선 그래프를 이용하여 전체적인 문제해결의 흐름을 살펴보았다.

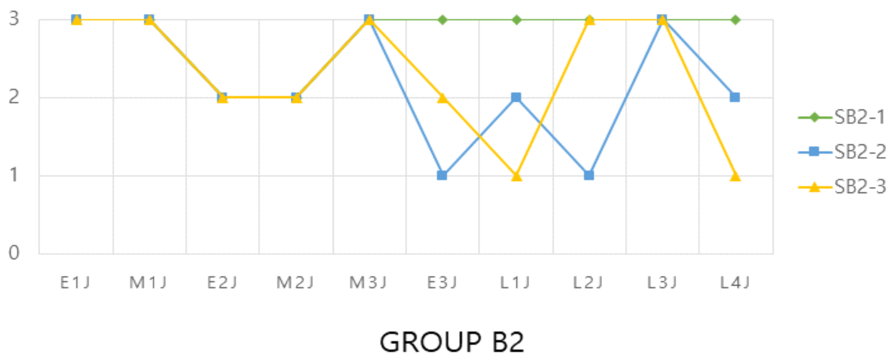
다음은 그룹 B1에 속한 학생들의 문제해결 결과를 하나의 프레임에 꺾은선 그래프로 표현한 것이다(<그림 Ⅳ-8>). 이렇게 그룹별로 하나의 프레임을 이용해서 그래프를 나타내면 학생별로 문제해결의 흐름을 비교하기가 편리하다.



<그림 Ⅳ-8> 문제 유형 $E_{2j}(j=1,2,3)$ 중 E_{22}가 오류인 학생들

위의 그래프는 세 번째 문제 유형 E_{2j}에 구성된 세 개의 문제 중 두 번째 문제 E_{22}에서 오류가 나타난 학생들의 문제해결 결과를 나타낸 꺾은선 그래프이다. 학생마다 문제 유형 E_{2j} 이후 후속 문제 풀이 결과를 비교 분석해 보면 SB1-1학생과 SB1-2학생은 문제 유형에 따라 한 문제 정도의 오류를 보여 후속 학습의 내용을 대체로 이해하고 있다고 판단할 수 있다. 하지만 SB1-3과 SB1-4, SB1-5학생은 후속 학습이 진행될수록 미해결 문제 수가 증가하고 있음을 알 수 있다. SB1-4학생의 경우 대체로 문제를 해결하고 있는 것으로 보이지만 자세히 살펴보면 문제 유형 L 구간에서는 세 문제를 모두 해결한 문제 유형이 없다. 이는 후속 학습이 진행됨에 따라 더 많은 오류가 생길 수 있음을 미루어 짐작할 수 있다. 그러므로 이 시기에 적합한 교수 학습이 이루어진다면 앞으로 발생할 더 많은 오류를 미리 예방할 수 있을 것이다.

다음은 그룹 B2에 속한 학생들의 문제 풀이 결과를 꺾은선 그래프로 나타낸 것이다(<그림 Ⅳ-9>).

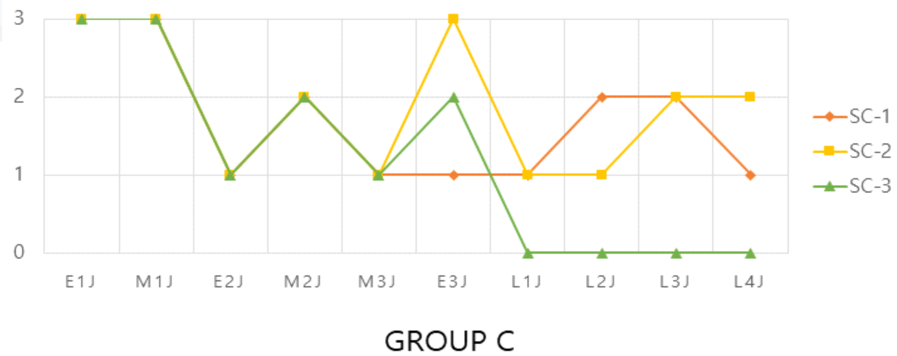


<그림 Ⅳ-9> 문제 유형 $E_{2j}(j=1,2,3)$ 중 E_{23}가 오류인 학생들

위의 그래프는 문제 유형 E_{2j}의 속한 문제 중 E_{23}에서 오류를 보인 학생들의 문제해결 결과를 하나의 프레임에 나타낸 것이다. SB2-1학생의 경우 후속 학습에서 오류가 없는 것으로 보아 2개의 오류는 실수로 인한 것으로 판단할 수 있다. SB2-2와 SB2-3학생의 경우는 후속 학습으로 진행될수록 1학년 과정의 선수학습에서의 문제 풀이 결과보다 현저히 낮은 문제해결 정도를 보인다. 또한 <그림 Ⅳ-8>의 그래프와 비교해봐도 E_{23}에서 오류를 범한 학생들이 E_{22}에서 오류를 범한 학생들보다 더 많은 오류를 발생시키고 있음을 알 수 있다.

<그림 Ⅳ-8>과 <그림 Ⅳ-9>의 두 그래프를 비교해 보면 <그림 Ⅳ-9> 그래프의 굴곡 정도가 더 심하며 그래프의 위치가 아래쪽으로 치우쳐 있는 구간이 더 많은 것을 볼 수 있다. 이는 학생들이 E_{22} 문제보다 E_{23} 문제에서 오류를 보였을 때 후속 학습의 습득 및 이해도가 더 낮음을 보여준다.

다음은 그룹C에 속한 학생들의 문제 풀이 결과를 나타낸 꺾은선 그래프이다(<그림 Ⅳ-10>).



<그림 Ⅳ-10> 문제 유형 $E_{2j}(j=1,2,3)$ 중 오류가 2개인 학생들

위의 그래프는 문제 유형 E_{2j}의 속한 문제 중 2개의 문제에서 오류를 보인 학생들의 문제해결 결과이다. 앞에서 보인 두 그룹의 그래프에 비해 굴곡이 심하며, 그래프의 위치가 아래쪽으로 치우쳐 있음을 볼 수 있다. 이는 학생들이 E_{2j}의 해결 정도가 낮을수록 이후 후속 학습에 대한 이해도와 문제해결

능력이 낮아짐을 알 수 있다.

교사는 필요에 따라 다양한 기준으로 그룹을 나눌 수 있으며, 하나의 프레임 위에 그룹별로 평가 결과를 꺾은선 그래프를 이용하여 나타내면 비교·분석이 용이하다. 또한 그룹에 속한 학생들의 평가 결과에 대한 전체적인 흐름을 파악하기가 쉬워 문제를 발생시키는 지점을 알아내는 데 도움이 된다.

Ⅴ. 결론

중학교 1, 2학년의 함수 관련 단원에 한정하여 단원을 주제별로 세분화하고, 문제 유형을 10가지로 분류하여 문제 유형마다 각 3개씩의 문제를 구성하였다. 30개의 문제로 구성된 검사지를 부산시 소재 모 중학교 2학년 학생들을 대상으로 평가를 시행하고, 평가 결과를 조사·분석하여 중학교 2학년 학생들이 함수 관련 문제를 어느 정도 해결하며 개념 간의 연결을 어느 정도 하고 있는지를 알아보고자 하였다. 그리하여 개념 간의 연결이 원활하지 못한 영역을 문제해결 결과를 토대로 찾고자 하였다. 이를 위해 오류가 나타나는 지점의 전·후 문제 풀이 결과를 살펴볼 필요가 있으며 선수 학습과 후속 학습의 문제해결 결과로써 더욱 정확한 오류 시점을 판단할 수 있다. 문제 풀이 결과를 분석하기 위하여 정·오 분석과 도식화, 영역 그래프, 꺾은선 그래프의 4가지 방법을 이용하였다. 분석 결과를 간편하고 직관적으로 파악할 수 있도록 시각화하여 표현하였다. 분석 결과 중학교 1학년 과정의 함수 관련 개념(문제 유형 E_{1j}, M_{1j}, E_{2j})이 명확하게 인지되어 있지 않은 학생들, 즉 오류가 많은 경우에 중학교 2학년 과정의 함수 단원(문제 유형 M_{2j}, M_{3j}, E_{3j}, L_{1j}-L_{4j})에서 결손 개념과 연계되는 다양한 영역에서 더 많은 오류를 보였다. 또한 함수 관련 개념 중 일부를 잘 이해하고 그와 관련된 문제를 해결하였어도 전·후 수학 개념이 바르게 인지되어 있지 않으면 학습이 진행될수록 오류가 늘어나는 것을 시각적으로 파악할 수 있었다. 학생들의 평가 결과를 단지 점수로만 제시하였을 때는 학생들의 학습 결손 부분을 파악하기 어렵고, 진위를 알 수 없다. 그러나 이렇게 직관적 파악이 가능한 자료를 구축하여 누구나 쉽게 학습 상황을 해석할 수 있게 하면 학생 상담이나 부모 상담의 자료로도 활용도가 높다. 이러한 자료는 점수와 상관없이 학생들의 영역별 이해도를 파악할 수 있고, 개념 간의 연결성도 알 수 있다. 그래서 결손 부분의 이전과 이후 학습의 연결을 원활하게 도울 수 있다.

본 논문은 학생들이 학습한 수학적 개념에 관련한 평가의 결과로써 개념 간의 연결성을 조사하여 학생들의 학업 향상을 위해 도움이 필요한 부분을 빠르게 파악하는 방법을 모색하였다. 학생들의 학업을 돕기 위한 효율적 방안을 모색하기 위해 학생들과 교사에게 학습 상황을 직접적으로 보여주어 부족한 부분을 빨리 파악하고 대처할 수 있도록 시각적 자료를 구축하였다. 학생들의 평가 결과를 시각화시키면 학생들의 학습 상황을 신속하고 편리하게 파악할 수 있고, 학생이 진학하거나 전학을 해도 학생의 학습 습득 상태를 쉽고 빠르게 파악할 수 있어 새로운 학생을 파악하는 데 걸리는 시간을 절약할 수 있다. 학생들의 문제 풀이 결과를 시각화하여 개념의 연결이 미흡한 부분과 학습 결손이 일어난 부분을 교사나 학생에게 보여주면 수학 개념의 보충이 필요한 시점을 파악하기에 편리할 뿐만 아니라 서로 간에 학습이 부족한 부분에 대한 공감이 형성되어 상호협력할 수 있다. 이러한 분석 방법이 주는 이점을 우선 학생의 관점에서 살펴보면, 학생이 자신의 학습 결손 부분을 스스로 파악하기가 쉽지 않다. 단순히 '잘 기억나지 않는다. 방정식이 어렵다, 함수를 잘하지 못한다.' 등으로 파악할 뿐이다. 그러므로 이러한 정보를 제공하면 학생은 자신의 학습 상황에 대한 모니터링이 가능해지므로 자신의 학습 상황을 바르게 인식하고 자기주도학습 계획을 세우는 데 구체적인 도움을 받을 수 있다. 또한 이러한 자료를 보유하고, 자신에게 제공한 교사에 대해 학생은 선생님이 자신의 학업에 관심과

성의를 쏟고 있다고 느낄 것이다. 이러한 반응은 서로 간의 신뢰도를 높이고, 학생에게 긍정적 사고를 일으킨다. 이는 수학학습의 향상에 긍정적 효과로 이어질 수 있다. 교사의 입장에서의 이점은, 학생에게 도움이 필요한 부분을 비교적 정확하게 파악할 수 있고, 학습 향상을 돕기 위한 학습자료 제작 및 학습지도 계획에 유용하게 활용할 수 있다. 수업 시간 내에 학생들의 결손 부분을 모두 보완하기는 현실적으로 어렵다. 하지만 이러한 자료가 구축되어 있으면 학생들의 개별과제를 준비하거나 개별지도 계획을 세우는데 드는 경제적·시간적 비용을 절감할 수 있다. 예를 들어 A 학생의 꺾은선 그래프 분석 결과, 그래프의 굴곡(그래프의 굴곡이 완만하지 않거나 아래로 치우쳐 있으면 개념 연결이 원활하지 않다는 의미이다)이 심하게 나타났다면 굴곡이 시작되는 전과 후의 학습 결과를 살펴 굴곡을 가져온 원인이 되는 가장 적절한 시점을 파악할 수 있다. 이 밖에도 기존의 수학 교수 학습 방법을 계발하는 자료로 활용할 수 있고, 현재뿐만 아니라 이전부터의 학습 과정을 살펴볼 수 있어 학생의 학습 성장을 지속해서 지켜볼 수 있다. 또한 학생에 대한 자료 공유를 통해 학습 환경이 바뀌더라도 일관성 있는 지도를 이어나갈 수 있다. 후속 연구로 이러한 방법을 통해 부족한 부분을 빨리 파악하고 적절한 시점의 개념을 보완하여 개념 간의 연결이 원활하게 이루어질 수 있도록 적시에 대처하여, 학습지도 이후 학생의 학습 상황이 개선되고 있는지 비교·관찰하여 오류나 오개념이 바로 잡혀가는 상황을 관찰할 수 있다. 또한, 문제 유형을 목적에 맞게 나누어 분석하여 학생들이 어려워하는 영역에 대해 구체적인 지표를 세울 수 있다. 예를 들면 문제 유형$E_i\,(i=1,2,3)$은 그래프 그리기와 관련된 문제이다. 문제 유형$M_i\,(i=1,2,3)$은 연산과 관련 있는 문제이고, 문제 유형$L_i\,(i=1,2,3,4)$은 일차함수의 성질과 특징에 관련된 문제로 구성되어 있다. 분류 기준을 E, M로 하여 분석하면 연산과 그래프에 대한 학생들의 반응을 비교·분석할 수 있다.

본 연구는 일차함수에 한정하여 학생들의 문제 풀이 결과를 바탕으로 개념 간의 연결이 원활한지 그렇지 못한지를 알아보고, 학생들에게 도움이 필요한 시점을 파악하는데 시각적 자료의 구축을 제언하고자 하였다. 수학교육에 종사하는 교육자로서 언제나 학생들에게 도움을 줄 수 있는 준비가 되어 있어야 한다. 학생들에게 직접적으로 수학학습에 도움을 주는 방법에 대해 고민하고, 학생들의 처지에서 생각하고, 학생들이 수학 개념에 더 가깝게 접근할 수 있도록 끊임없는 노력이 필요하다.

참고 문헌

국립어학원 **표준국어대사전**(1999).

교육부(2017). **과정을 중시하는 수행평가 어떻게 할까요:중등**, 한국교육과정평가원, 연구자료 OMR 2017-19-2.

교육과학기술부(2011). **중학교 수학과 교육과정**, 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책8].

교육부(2015). **중학교 수학과 교육과정**, 교육부 고시 제2015-74호[별책8].

김남희 외(1979). **예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구**, 제3판, 서울, 경문사.

김부미, 김윤민(2018). 2015개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 1학년 그래프 단원 분석, **대한수학교육학회: 수학교육학연구 제 28권**, 제 4호.

김차숙, 류희찬(2003). **중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구**, 대한수학교육학회, 수학교육학연구 발표대회 논문집, 405-426.

김원경 외(2020a). **중학교 수학1**, 교육부 검정 2017.9.8., 한국검인정교과서협회, 서울, ㈜비상교육.

김원경 외(2020b). **중학교 수학2**, 교육부검정 2018.9.14., 서울, ㈜비상교육.

김화경(2016). **2015개정교육과정 교수·학습자료-중학교수학-**, 서울, 교육부.

김화경 외(2020a). **중학교 수학1**, 교육부검정 2017.9.8., 서울, ㈜좋은책신사고.

김화경 외(2020b). **중학교 수학2**, 교육부검정, 서울, ㈜좋은책신사고.

도종훈, 권오병(2019). 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함한 식의 계산에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석, **한국학교수학회 논문집 제 22권,** 제 1호, 1-21.

류희찬 외(2020). **중학교 수학2**, 교육부검정 2018.9.14., 서울, ㈜천재교육.

류한영(1999). **중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류분석에 관한 연구**, 한국교원대학교, 교육대학원 석사학위논문.

박장희, 유시규, 이중권(2012). 실생활 문장제의 해결과정에 나타나는 오류유형 분석, **한국학교수학회 제 15권,** 제 4호, 699-718.

송순희, 오정현(1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, **한국수학교육학회지 시리즈 A: 수학교육 제 36권,** 제 1호, 11-22.

신항균(2015). **중학교 수학1 지도서**, 서울, ㈜지학사.

우현철(2000). **이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 원인 분석과 교정에 관한 연구,** 한국교원대학교, 교육대학원 석사학위논문.

윤수찬(2006). **서술형 형가 문항 답안 작성시 나타나는 오류 유형 분석**, 서울시립대학교, 교육대학원 석사학위논문.

이소라, 구예리(2020). 중학교 학생을 위한 수학불안 검사 개발 연구, **학국학교수학회 논문집 제 23권,** 제 4호, 469-489.

이수경(2008). **중학생의 수학자신감과 수학불안에 관한 연구,** 대구가톨릭대학교, 교육대학원 석사학위논문.

이인석(2020). 2015개정 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서 검토, **한국수학교육학회 시리즈 E: 수학교육 제 34권,** 제 2호, 69-117.

이헌수, 김영철, 박영용, 김민정(2015). 일차방정식과 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류, **한국학교수학회 논문집 제 18권,** 제 3호, 269-279.

장이채, 김태균, 정인철, 송주현(2003). 중학 수학의 연계적인 교수 학습 방법에 관한 연구:함수 영역을

중심으로, **한국학교수학회 논문집 제 6권**, 제 2호, 21-37.

최영우(2007). **'일차방정식' 문제 해결 과정에서 발생하는 오류분석연구-중학교 1학년을 대상으로 -**, 강원대학교, 교육대학원 석사학위논문.

최은형(2004). **함수의 그래프에 대한 이해와 오류 분석에 관한 연구:중학교 2학년을 대상으로**, 한국교원대학교, 교육대학원 석사학위논문.

한국교육과정평가원(2019). **교육평가의 종류 및 방법**, KICE.

James Hiebert, Diana Wearne, Susan Taber(1991). *Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations.* Elementary School Journal, 321p ~ 341p ISSN 0013-5984 E-ISSN 1554-8279, The University of Chicago Press.

Radatz, H.(1979). *Error analysis in mathematics education*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.10, No.3, pp.163-172.

Gagně, R. M.(1970). *The conditions of learning(2nd ed)*, New York, Holt Rinehart and Winstern.

Newell, A., & Simon, H. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

A Study on The Analysis Method of Problem Solving Results of Linear Functions

Jang, Cheong Hee[2] · Han, Ju-Wan[3]

Abstract

It is very important to help students learn by examining how well students solve math problems. Therefore, in this study, four methods(error analysis by problem type, schematization analysis, area graph analysis, and broken line graph analysis) were constructed to analyze how the connectivity between concepts of middle school functions affects the problem solving results. The students' learning situation was visually expressed to enable intuitive understanding. This analysis method makes it easy to understand the evaluation results of students. It can help students learn by understanding their learning situation. It will be useful in mathematics teaching and learning as it can help students to monitor their own problems and make a self-directed learning plan.

Key Words : Problem Solving, Schematization Analysis, Area graph Analysis, Broken line graph Analysis

Received February 28, 2022
Revised March 16, 2022
Accepted March 18, 2022

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70

2) Pukyong National University Graduate School (with01235@naver.com)
3) Pukyong National University (wndhks@naver.com), Corresponding Author