

선형 이상체에 의한 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식

임형래*

부산대학교 지구과학교육과

Closed-form Expressions of Vector Gravity and Gravity Gradient Tensor due to a Line Segment

Hyoungrae Rim*

Department of Earth Science Education, Pusan National University

요약

이 논문에서는 선형 이상체에 대한 벡터 중력과 중력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 축대칭성을 가지는 이상체를 멀리서 관측하면 선형 이상체로 근사가 가능하므로 선형 이상체에 대한 중력 및 중력 변화율 해석해가 필요하다. 선형 이상체에 대한 중력 퍼텐셜을 1차원 적분식으로 정의하고 이를 직교 좌표계에서 미분하여 벡터 중력을 유도한다. 중력 변화율 텐서 반응식은 벡터 중력을 직교 좌표계에서 한 번 더 미분하여 유도한다.

주요어

중력, 중력 변화율 텐서, 선형 이상체

ABSTRACT

Closed-form expressions of vector gravity and gravity gradient tensor based on a line segment are derived. If a cylindrical object with axial symmetry is observed from a distance, it is possible to approximate it as a line segment; therefore, it is necessary to compute the gravity and the gravity gradient tensor due to a line source by using closed-form expressions. The gravitational potential for a line segment is defined as a one-dimensional integral, and this integral is differentiated with respect to the Cartesian coordinate system to derive the vector gravity. The expressions of the gravity gradient tensor are derived by differentiating the vector gravity once more in the same coordinate system.

KEYWORDS

Gravity, Gravity gradient tensor, Line segment

서론

화산 관입암과 같은 원통형 이상체를 상당히 먼 곳에서 중력 반응을 측정하면 선형 이상체의 반응과 비슷하게 측정된다. 이것은 물리 탐사 반응의 측정에서 일반적인 현상인데 3차원 이상체의 크기에 비해서 측정 거리가 멀면 모두 점 소스로 근사할 수 있는 경우와 비슷하다. 따라서 중력 및 중력 변화율 해석에서 초기 단계에서 매우 복잡한 원통형 이상체의 반응식을 바로 사용하지 않고, 선형으로 근사한 식으로 일차적인 반

응을 계산해보는 것을 적용한다. 즉 중력 자료의 해석 초기에는 간단한 선형 이상체로 근사해서 측정 중력 자료와 반응을 비교해 보고 실제 이상체의 물리적인 규모를 정밀하게 분석할 때 다시 원통형 이상체로 해석하는 단계를 거친다.

널리 알려진 지구물리 관련 서적에는 선형 이상체의 중력 반응은 무한 길이를 가지는 선형 이상체에 대한 소위 “로그 퍼텐셜(logarithm potential)”을 정의하여 중력과 중력 변화율 텐서를 계산한다(Telford *et al.*, 1990; Blakely, 1996; Sheriff, 2002; LaFehr and Nabighian, 2012; Lowrie and Fichtner,

Received: 25 January 2022; Revised: 21 February 2022; Accepted: 24 February 2022

*Corresponding author

E-mail: brim2017@pusan.ac.kr

Address: 2 Busandaehak-ro, 63 beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 46241, Korea

©2022, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

2020). 그러나 일반적인 선형 이상체는 길이가 유한하고 임의의 방향으로 주향과 경사를 가지고 있으므로, 이에 대한 중력 및 중력 변화율 반응을 효과적으로 해석하기 위해서는 선형 이상체에 대한 중력 및 중력 변화율 텐서의 해석해가 필요하다.

이 논문에서는 유한한 길이와 임의의 방향으로 주향 및 경사를 가지는 일반적인 선형 이상체에 대한 중력 및 중력 변화율 텐서의 해석해를 유도한다. 선형 이상체에 대한 중력 퍼텐셜을 무한 직선의 로그 퍼텐셜이 아닌 1차 적분 형태로 정의한 후, 직교 좌표계에서 미분을 수행하여 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식을 유도한다.

선형 이상체의 벡터 중력

Fig. 1과 같이 길이가 $L = \sqrt{(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 + (\varsigma_1 - \varsigma_0)^2}$ 이고 주향(α)과 경사(δ)를 가지는 선형 이상체에 의한 측정점 (x, y, z) 에서 중력 퍼텐셜 $U(x, y, z)$ 은 식 (1)과 같이 정의된다(Blakely, 1996). G 는 중력 상수이고 λ 는 선형 이상체의 선 밀도이다. 측정점에 해당하는 좌표계 (x, y, z) 는 북쪽이 x 축, 동쪽이 y 축, 깊이 방향이 z 축으로 설정한 오른손 직교 좌표계를 이용한다. 선형 이상체에 해당하는 직교 좌표계 (ξ, η, ς) 도 동일한 좌표계를 적용한다.

$$U(x, y, z) = G\lambda \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\varsigma)^2}} \quad (1)$$

선형 이상체에 대한 직선의 방정식을 주향(α)과 경사(δ) 및 선분의 시작점 $(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0)$ 으로 표현하면 식 (2)이다(Arffen *et al.*, 2012).

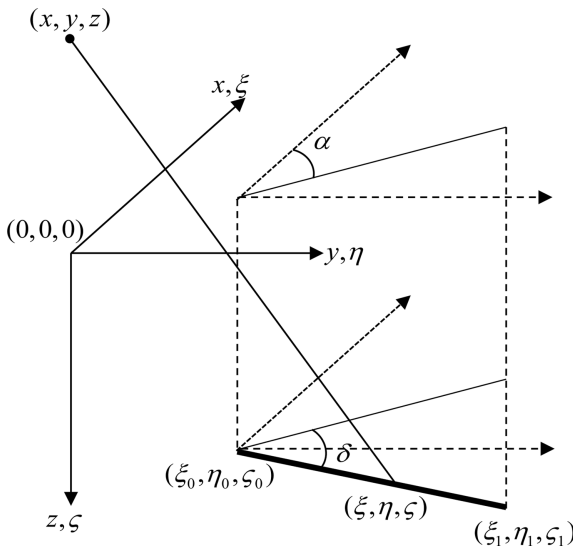


Fig. 1. The schematic geometry of a line segment with a strike α measured clockwise from the north, and the dip δ measured downward from the horizontal. The point (x, y, z) is observation point and the beginning and ending limits of the line segment are $(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0)$ and $(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1)$, respectively.

$$\frac{\xi - \xi_0}{\cos \delta \cos \alpha} = \frac{\eta - \eta_0}{\cos \delta \sin \alpha} = \frac{\varsigma - \varsigma_0}{\sin \delta} \quad (2)$$

따라서 식 (1)에 포함된 η 와 ς 를 ξ 로 표현하면 식 (3)이다.

$$\begin{aligned} \eta &= \xi \tan \alpha - \xi_0 \tan \alpha + \eta_0 \\ \varsigma &= \xi \tan \delta \sec \alpha - \xi_0 \tan \delta \sec \alpha + \varsigma_0 \end{aligned} \quad (3)$$

선형 이상체의 주향(α)과 경사(δ), 및 시작점 $(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0)$ 을 이용하여 중력 퍼텐셜(식 1)을 변수 ξ 만이 포함된 식으로 변형하면 식 (4)가 된다.

$$U(x, y, z) = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{(-\xi + x)^2 + (-\xi \tan \alpha + y')^2 + (-\xi \tan \delta \sec \alpha + z')^2}} \quad (4)$$

여기서 ξ 축 적분 구간은 $[\xi_0, \xi_1] = [\xi_0, \xi_0 + L \cos \delta \cos \alpha]$ 이고 y' 와 z' 는 각각 식 (5)으로 정의한다.

$$\begin{aligned} y' &= y + \xi_0 \tan \alpha - \eta_0 \\ z' &= z + \xi_0 \tan \delta \sec \alpha - \varsigma_0 \end{aligned} \quad (5)$$

또한 선형 이상체의 직선의 방정식(식 2)를 이용하면 미소 적분 길이(dl)가 ξ 축 방향의 미소 적분 길이($d\xi$)로 치환된다.

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\varsigma)^2} \\ &= d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\varsigma}{d\xi}\right)^2} \\ &= d\xi \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \delta \sec^2 \alpha} \\ &= d\xi \sec \delta \sec \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 선형 이상체에 대한 중력 퍼텐셜(식 4)을 간단하게 정리하면 식 (7)으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= G\lambda \sec \delta \sec \alpha \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{r} d\xi \\ &= G\lambda \sec \delta \sec \alpha I(0, 1) \end{aligned} \quad (7)$$

여기에 필요한 변수 r, a, b, c 는 식 (8)~(11)로 정의된다.

$$r = \sqrt{c\xi^2 + 2b\xi + a} \quad (8)$$

$$a = x^2 + y'^2 + z'^2 \quad (9)$$

$$b = -(x + y' \tan \alpha + z' \tan \delta \sec \alpha) \quad (10)$$

$$c = \sec^2 \delta \sec^2 \alpha \quad (11)$$

선형 이상체의 중력 퍼텐셜(식 7)에서 $I(0, 1)$ 은 정적분 함수인데 선형 이상체에 의한 중력 및 중력 변화율 텐서를 유도하는데 필요한 정적분 함수들은 부록 A에 정리하였다.

주향(α)과 경사(δ)를 가지는 선형 이상체에 의한 벡터 중력은 간단하게 표현한 중력 퍼텐셜(식 7)을 직교 좌표계에서 각

축 방향으로 미분하여 유도한다.

$$g_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{(\xi - x)}{r^3} d\xi = G\lambda \sec \delta \sec \alpha [-xI(0,3) + I(1,3)] \quad (12)$$

$$g_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{(\xi \tan \alpha - y')}{r^3} d\xi = G\lambda \sec \delta \sec \alpha [-y'I(0,3) + \tan \alpha I(1,3)] \quad (13)$$

$$g_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{(\xi \tan \delta \sec \alpha - z')}{r^3} d\xi = G\lambda \sec \delta \sec \alpha [-z'I(0,3) + \tan \delta \sec \alpha I(1,3)] \quad (14)$$

벡터 중력에 필요한 변수 y' 와 z' 는 식 (5)에서 정의하였고 정적분 함수 $I(0,3)$ 과 $I(1,3)$ 은 부록 A에 정리하였다.

선형 이상체의 중력 변화율 텐서

주향(α)과 경사(δ)를 가지는 선형 이상체에 의한 중력 변화율 텐서는 벡터 중력(식 12 ~ 14)을 직교 좌표계에서 미분하여 구한다

$$g_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} -I(0,3) + 3x^2 I(0,5) - 6xI(1,5) \\ +3I(2,5) \end{array} \right] \quad (15)$$

$$g_{yy} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} -I(0,3) + 3y'^2 I(0,5) - 6y' \tan \alpha I(1,5) \\ +3 \tan^2 \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (16)$$

$$g_{zz} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} -I(0,3) + 3z'^2 I(0,5) - 6z' \tan \delta \sec \alpha I(1,5) \\ +3 \tan^2 \delta \sec^2 \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (17)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} 3xy'I(0,5) - 3(y'+x \tan \alpha)I(1,5) \\ +3 \tan \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (18)$$

$$g_{xz} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} 3xz'I(0,5) - 3(z'+x \tan \delta \sec \alpha)I(1,5) \\ +3 \tan \delta \sec \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (19)$$

$$g_{yz} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial y} = G\lambda \sec \delta \sec \alpha \left[\begin{array}{l} 3y'z'I(0,5) - 3(y' \tan \delta \sec \alpha + z' \tan \alpha)I(1,5) \\ +3 \tan \delta \tan \alpha \sec \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (20)$$

선형 이상체의 중력 변화율 텐서를 구하는데 필요한 정적분 함수들은 부록에 수록하였다. 중력 변화율 텐서는 퍼텐셜 이론에 따라 대각 성분 합 ($g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$)은 “0”이고 비대각 성분은 서로 대칭인 성질을 갖는다(Blakely, 1996).

벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 모델링

길이가 300 m, 시작점은 (-20 m E, -100 m N, 20 m), 주향은 30°, 경사는 10°인 선형 이상체에 대한 벡터 중력(Fig. 2)과 중력 변화율 텐서(Fig. 3) 반응을 지표면에서 모델링하였다. 선밀도는 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서에 단순히 선형적으로 비례하므로 임의 값을 설정할 수 있는데 여기서는 계산의 편의를 위해서 1 g/cm로 설정하였다. 수직 중력은 주향 방향으로 선형 이상체의 모양을 반영하고 있고 경사 방향으로 그 크기가 줄어 들고 있음을 보여준다. 벡터 중력의 수평성분은 이상체에서 서로 부호가 바뀌는 전형적인 양상을 보여준다.

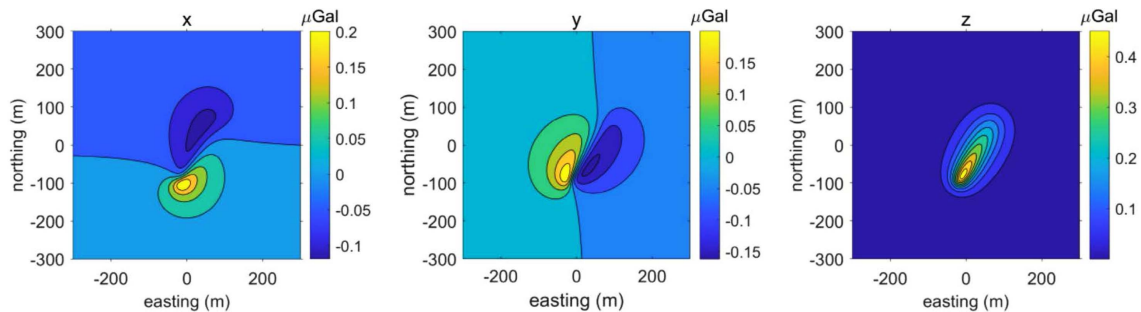


Fig. 2. Vector gravity due to a line segment with the length of 300 m. The beginning point is (-100 m N, -20 m E, 20 m). The strike and dip of the line segment are 30° and 10°, respectively. The line density of the segment is 1 g/cm. The observation points are located on the the sea level.

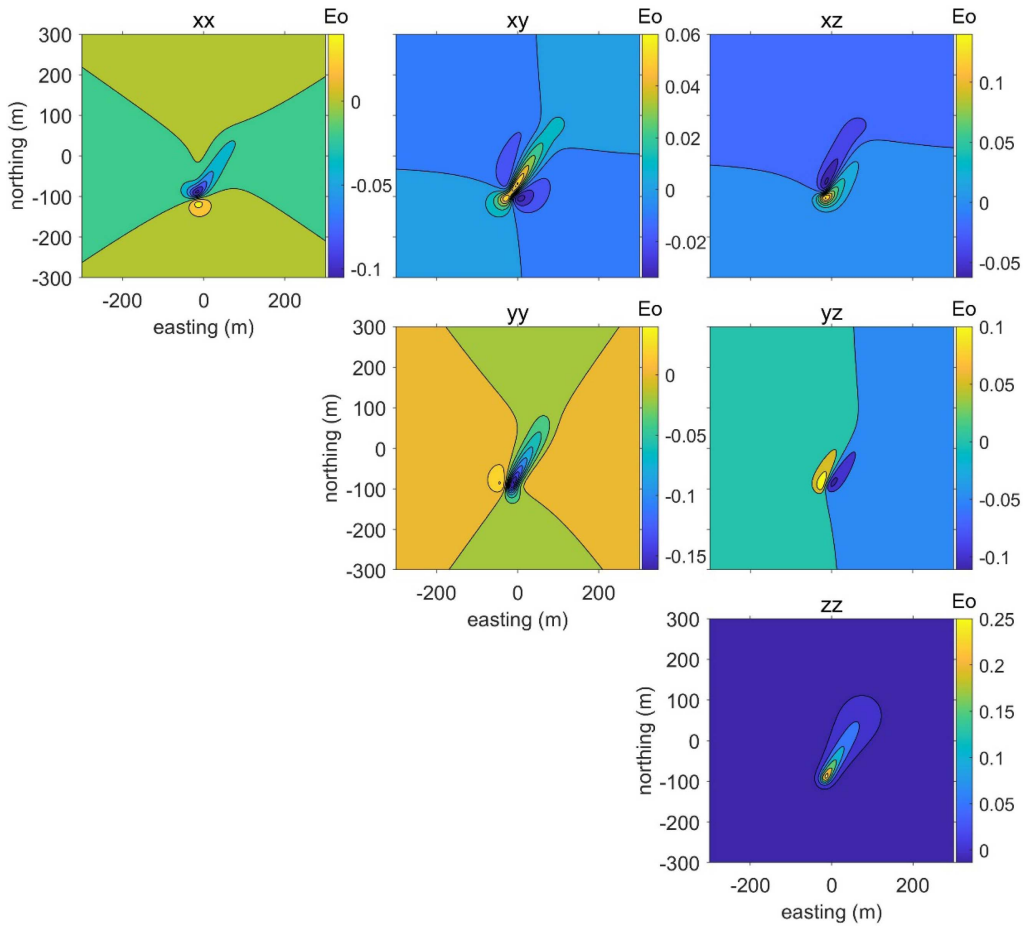


Fig. 3. Gravity gradient tensor due to the line segment used in Fig. 2.

중력 변화율 텐서 반응(Fig. 3)의 전반적인 양상은 점원 이상체의 반응 패턴(Blakely, 1996; Rim, 2020; Rim, 2021)과 유사하지만 주향 방향으로 길어지고 경사 방향으로 작아지는 전형적인 중력 변화율 텐서 반응을 잘 보여준다.

원통형 이상체를 선형 이상체로 근사 가능한 관측점과 이상체 사이의 거리를 파악하기 위하여 원통형 이상체와 선형 이상체에 대한 수직 중력 성분을 비교하였다(Fig. 4). 원통형 이상체에 대한 수직 중력은 Rim and Li (2016)의 식 (2)를 이용하였다. Fig. 4는 원통형 이상체에 의한 수직 중력과 원통형 이상체를 선형으로 근사한 수직 중력과의 차이의 최대값을 원통형 이상체의 수직 중력 최대값으로 정규화하여 표현하였다. 원통형 이상체를 선형으로 근사하여 해석할 때 원통형 이상체 반지름의 15 배 이상 떨어져서 중력을 측정하는 경우 5% 이하의 오차 수준으로 원통형 이상체를 선형으로 근사할 수 있다. 측 방향 대칭성을 가지는 원통형 이상체에 대해 원통 반지름의 15 ~ 20 배 정도 이상 떨어진 거리에서의 중력 및 자력 반응은 원통형 이상체를 선형 이상체로 근사하여 해석하는 것이 가능하다(LaFehr and Nabighian, 2012). 이런 경우 복잡한 형태의 원통형 이상체의 중력 및 중력 변화율 계산식을 이 는

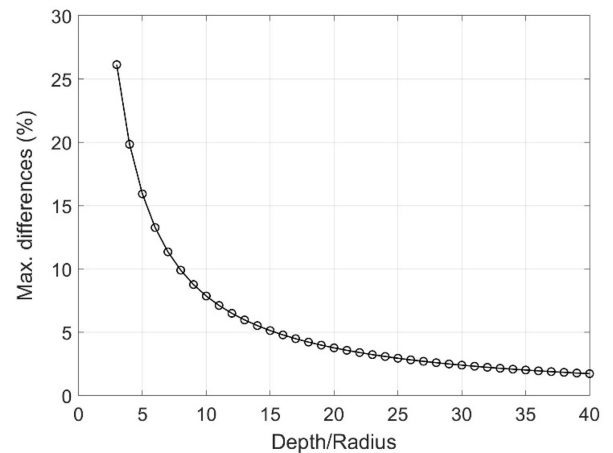


Fig. 4. Maximum differences of vertical gravity components of a vertical cylinder according to ratios between the depth to the top of the vertical line and the radius of the cylinder held constant. The differences are normalized relative to the maximum vertical gravity resulting from the cylinder.

문에서 유도한 단순한 형태인 선형 이상체에 대한 해석해로 대체할 수 있으므로 효율적인 모델링이 가능하다.

결론

주향과 경사가 있고 유한한 길이를 가지는 선형 이상체에 대한 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 선형 이상체에 대한 직선의 방정식을 이용하여 선형 이상체에 대한 중력 퍼텐셜을 단일 축 변수만을 가지는 식으로 정의하였다. 이렇게 정의된 중력 퍼텐셜을 직교 좌표계에서 1차 미분하여 벡터 중력을 구하고, 한번더 미분하여 중력 변화율 텐서를 구한다. 먼저 적분이 포함됨된 중력 퍼텐셜 식을 미분한 후 마지막 단계에서 적분을 수행하는 방법을 이용하였고, 최종 적분을 간단히 표현하기 위하여 다항식과 관측점과 선형 이상체와의 거리 역승의 곱으로 정의한 정적분 함수를 도입하였다. 주향과 경사를 가지는 선형 이상체에 대한 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응을 모델링한 결과 선형 이상체의 모양을 반영한 중력 및 중력 변화율 이상 반응을 구할 수 있었다.

감사의 글

저자는 선형 이상체에 대한 중력 및 중력 변화율에 대한 해석해가 필요하여 유도할 가치가 있다고 제안한 Colorado School of Mines의 Yaoguo Li 교수에게 감사드립니다. 논문에 대한 상세한 의견을 제시하여 완성도를 높여 주신 익명의 심사위원께 감사드립니다. 이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2019R1F1A1055093).

References

Arfken, G. B., Weber H. J., and Harris, F. E., 2012, *Mathematical methods for physicists 7th ed.*, Elsevier.

Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, doi:10.1017/CBO9780511549816

LaFehr, T. R., and Nabighian, M. N., 2012, *Fundamentals of gravity exploration*, Society of Exploration Geophysicists, doi:10.1190/1.9781560803058.

Lowrie, W., and Fichtner, A., 2020, *Fundamentals of Geophysics 3rd ed.*, Cambridge University Press, doi:10.1017/9781108685917.

Rim, H., and Li, Y., 2016, Gravity gradient tensor due to a cylinder, *Geophysics*, **80(4)**, G59-G66, doi:10.1190/GEO2015-0699.1.

Rim, H., 2020, The closed-form expressions of magnetic gradient tensor due to a circular cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23(2)**, 67-71, doi:10.7582/GGE.2020.23.2.067. (in Korean with English abstract)

Rim, H., 2021, Closed-form expressions of the vector gravity and gravity gradient tensor due to a circular disk, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **24(1)**, 1-5, doi:10.7582/GGE.2021.24.

1.1. (in Korean with English abstract)

Sheriff, R. E., 2002, *Encyclopedic Dictionary of Applied Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, doi:10.1190/1.9781560802969.

Telford, W., Geldart, L., and Sheriff, R., 1990, *Applied Geophysics 2nd ed.*, Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139167932.

Zwillinger, D., Moll, V., Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M., 2014, *Table of Integrals, Series, and Products 8th ed.*, Academic Press, doi:10.1016/B978-0-12-384933-5.00002-3.

부록 A: 선형 이상체의 중력과 중력 변화율 텐서 반응식 유도에 필요한 정적분 함수

선형 이상체의 중력과 중력 변화율 텐서를 유도하기 위하여 필요한 정적분 함수를 부록에 정리하였다. 적분 구간 $[\xi_0, \xi_1]$ 인 다항식 차수 μ 와 거리의 역승수 ν 로 구성된 정적분 함수는 식 (A-1)과 같이 정의한다.

$$I(\mu, \nu) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\xi^\mu}{r^\nu} d\xi \quad (A-1)$$

벡터 중력에 필요한 정적분 함수는 식 (A-2), (A-3)이다(Eq. 2.264.5 and 2.264.6 in Zwillinger *et al.*, 2014).

$$I(0, 3) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{r^3} d\xi = \frac{c}{\Delta} \left(\frac{\xi_1}{r_1} - \frac{\xi_0}{r_0} \right) + \frac{b}{\Delta} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (A-2)$$

$$I(1, 3) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\xi}{r^3} d\xi = -\frac{b}{\Delta} \left(\frac{\xi_1}{r_1} - \frac{\xi_0}{r_0} \right) - \frac{a}{\Delta} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (A-3)$$

중력 변화율 텐서의 유도에 필요한 정적분 함수는 식 (A-4) ~ (A-6)이다(Eq. 2.263.1, and 2.263.3 in Zwillinger *et al.*, 2014).

$$I(0, 5) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{r^5} d\xi = \frac{2c^2}{3\Delta^2} \left(\frac{\xi_1}{r_1} - \frac{\xi_0}{r_0} \right) + \frac{2bc}{3\Delta^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{c}{3\Delta} \left(\frac{\xi_1}{r_1^3} - \frac{\xi_0}{r_0^3} \right) + \frac{b}{3\Delta} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \quad (A-4)$$

$$I(1, 5) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\xi}{r^5} d\xi = -\frac{2bc}{3\Delta^2} \left(\frac{\xi_1}{r_1} - \frac{\xi_0}{r_0} \right) - \frac{2b^2}{3\Delta^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{b}{3\Delta} \left(\frac{\xi_1}{r_1^3} - \frac{\xi_0}{r_0^3} \right) - \frac{a}{3\Delta} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \quad (A-5)$$

$$I(2, 5) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\xi^2}{r^5} d\xi = \frac{b^2 + ac}{3\Delta^2} \left(\frac{\xi_1}{r_1} - \frac{\xi_0}{r_0} \right) + \frac{b^3 + abc}{3c\Delta^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{4b^2 - 2ac}{6c\Delta} \left(\frac{\xi_1}{r_1^3} - \frac{\xi_0}{r_0^3} \right) + \frac{ab}{3c\Delta} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \quad (A-6)$$

여기서 ξ_0 는 선형 이상체 시작점의 x 좌표이고, 정적분 함수의 적분 구간 하한이 된다. 선형 이상체의 길이 L , 주향 α , 및

경사 δ 로 다른 쪽 끝의 x 좌표이자 적분 구간의 상한(ξ_1)을 표시하면 식 (A-7)이 된다.

$$\xi_1 = \xi_0 + L \cos \delta \cos \alpha \quad (\text{A-7})$$

측정점과 선형 이상체의 양쪽 끝단 사이의 거리는 식 (A-8)로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{c\xi_0^2 + 2b\xi_0 + a} \\ r_1 &= \sqrt{c\xi_1^2 + 2b\xi_1 + a} \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

이 식에 필요한 변수들은 식 (A-9)~(A-12)로 주어진다. 관측점의 y 과 z 좌표를 변형한 변수 y' 과 z' 은 본문에서 식 (5)로 정의했다.

$$a = x^2 + y'^2 + z'^2 \quad (\text{A-9})$$

$$b = -(x + y' \tan \alpha + z' \tan \delta \sec \alpha) \quad (\text{A-10})$$

$$c = \sec^2 \delta \sec^2 \alpha \quad (\text{A-11})$$

$$\Delta = ac - b^2 \quad (\text{A-12})$$

부록 B: z축을 기준으로 유도한 선형 이상체의 중력 및 중력 변화율 텐서

임의의 주향과 경사를 가지는 선형 이상체를 수평 축 중 하나인 'x' 축을 기준으로 중력 및 중력변화율 텐서 반응식을 유도하여 이상체의 경사가 90° 인 경우 발산하는 근본적인 특이점이 존재한다. 따라서 주로 수직 방향을 갖는 선형 이상체에 대하여 모델링할 때 특이점을 피하기 위하여 'z' 축을 기준으로 유도한 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식을 기술한다.

z 축을 기준으로 유도한 벡터 중력과 중력 변화율 텐서는 다음과 같다.

$$g_x = G\lambda \csc \delta [-x' I(0,3) + \cot \delta \cos \alpha I(1,3)] \quad (\text{B-1})$$

$$g_y = G\lambda \csc \delta [-y' I(0,3) + \cot \delta \sin \alpha I(1,3)] \quad (\text{B-2})$$

$$g_z = G\lambda \csc \delta [-z I(0,3) + I(1,3)] \quad (\text{B-3})$$

$$g_{xx} = G\lambda \csc \delta \left[\begin{array}{l} -I(0,3) + 3x'^2 I(0,5) - 6x' \cot \delta \cos \alpha I(1,5) \\ + 3 \cot^2 \delta \cos^2 \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (\text{B-4})$$

$$g_{yy} = G\lambda \csc \delta \left[\begin{array}{l} -I(0,3) + 3y'^2 I(0,5) - 6y' \cot \delta \sin \alpha I(1,5) \\ + 3 \cot^2 \delta \sin^2 \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (\text{B-5})$$

$$g_{zz} = G\lambda \csc \delta [-I(0,3) + 3z^2 I(0,5) - 6z I(1,5) + 3I(2,5)] \quad (\text{B-6})$$

$$g_{xy} = G\lambda \csc \delta \left[\begin{array}{l} 3xy' I(0,5) - 3(x' \cot \delta \sin \alpha + y' \cot \delta \cos \alpha) I(1,5) \\ + 3 \cot^2 \delta \sin \alpha \cos \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (\text{B-7})$$

$$g_{yz} = G\lambda \csc \delta \left[\begin{array}{l} 3y' z I(0,5) - 3(y' + z \cot \delta \sin \alpha) I(1,5) \\ + 3 \cot \delta \sin \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (\text{B-8})$$

$$g_{zx} = G\lambda \csc \delta \left[\begin{array}{l} 3x' z I(0,5) - 3(x' + z \cot \delta \cos \alpha) I(1,5) \\ + 3 \cot \delta \cos \alpha I(2,5) \end{array} \right] \quad (\text{B-9})$$

여기서 필요한 변수들은 다음과 같다.

$$\xi_1 = \xi_0 + L \sin \delta \quad (\text{B-10})$$

$$x' = x + \xi_0 \cot \delta \cos \alpha - \xi_0 \quad (\text{B-11})$$

$$y' = y + \xi_0 \cot \delta \sin \alpha - \eta_0 \quad (\text{B-12})$$

$$r_1 = \sqrt{c\xi_1^2 + 2b\xi_1 + a} \quad (\text{B-13})$$

$$r_0 = \sqrt{c\xi_0^2 + 2b\xi_0 + a} \quad (\text{B-14})$$

$$r^2 = a + 2b\xi + c\xi^2 \quad (\text{B-15})$$

$$c = \csc^2 \delta \quad (\text{B-16})$$

$$b = -(x' \cot \delta \cos \alpha + y' \cot \delta \sin \alpha + z) \quad (\text{B-17})$$

$$a = x'^2 + y'^2 + z^2 \quad (\text{B-18})$$

선형 이상체에 대해 x축을 기준으로 유도한 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식과 z축을 기준으로 유도한 반응식은 정확히 같다. z축을 기준으로 유도한 반응식들은 마찬가지로 경사가 0° 인 경우 (수평면과 평행한 경우) 발산하는 특이점을 갖는다. 실제 현장에서 이 반응식들을 적용할 때는 배사나 향사와 같이 수평 방향 선형 이상체로 근사할 경우에는 본문처럼 'x'축을 기준으로 유도한 반응식을 이용하고, 화산암 관입과 같이 주로 수직인 선형 이상체에 대해서는 'z'축을 기준으로 유도한 반응식을 활용한다.