

Squeezing in a Josephson-junction-based Parametric Amplifier

김동환¹, 김덕영¹, 김재일¹, 이수용^{1,2}

¹국방과학연구소 국방첨단과학기술연구원 신기술연구부

²과학기술연합대학원대학교 무기체계공학

1. 서 론

초전도 양자 컴퓨팅 시스템에서는 마이크로파 광자에 의하여 큐비트(qubit)[1] 상태 정보가 전달되는데, 이때 빠르고 정확하게 초전도 큐비트를 읽어내기 위하여 낮은 잡음의 마이크로파 증폭기가 사용된다. 10GHz의 마이크로파 광자는 진공상태에서 3cm의 파장을 가지는데, 상온에서는 열적 요동만으로도 600개가 넘는 잡음 광자가 발생한다. 이 때문에 0.1 K 이하의 낮은 온도에서 초전도 양자 컴퓨팅 시스템을 다루는 것이 유리하다. 이처럼 저온에서 신호를 증폭하거나 진공 잡음을 줄이기 위하여 조셉슨 매개변수 증폭기(Josephson-junction-based Parametric Amplifier: JPA)가 널리 사용된다. 1980년대 후반 Yurke et al.[2]에 의하여 연구된 이후로 여러 형태의 조셉슨 매개 증폭기가 소개되었을 뿐만 아니라, 최근에는 진공 잡음에 의한 고전 측정 한계를 압축(squeezing) 현상에 의하여 측정의 정밀도를 향상시키는 연구에도 활용되고 있다. 뿐만 아니라 잡음 온도[3], nanomechanical resonator의 위치 측정[4], 큐비트의 quantum jump 관측[5]에도 조셉슨 매개 증폭기가 사용되었다. 이 글에서는 매개변수 증폭기의 원리와 조셉슨 접합에 관하여 살펴본 후, 조셉슨 매개 증폭기의 연구 현황에 대하여 기술하고자 한다.

2. 매개변수 증폭기 (Parametric Amplifier)

매개변수 증폭기는 비선형 매질과 펌프 입력을 이용하여 입력 신호를 증폭시키는 현상을 의미하는데, 생성되는 신호(signal) 및 대기(idler) 모드의 주파수가 같은 경우에는 축퇴 매개변수 증폭기(degenerate

parametric amplifier: 줄여서 DPA)라 하고, 주파수가 다른 경우에는 비축퇴 매개변수 증폭기(non-degenerate parametric amplifier: 줄여서 NDPA)라고 한다[6].

축퇴 매개변수 증폭기(DPA)에서, ω 의 주파수를 갖는 입력 신호가 2ω 의 주파수를 갖는 펌프 입력과 함께 $\chi^{(2)}$ 의 비선형성을 갖는 매질에서 상호 작용하여 신호가 증폭된다. 해당 시스템은, Interaction picture에서 식(1)과 같이 시간 독립적인 Hamiltonian으로 표현되고, 여기에서 χ 는 비선형 매질의 2차 비선형 감수율(susceptibility)과 펌프의 진폭에 비례하는 상수에 해당된다.

$$H_I^{\text{DPA}} = i\hbar \frac{\chi}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) \quad (1)$$

입력 신호가 진공 상태라고 가정하고 시간에 따른 Hamiltonian의 evolution을 살펴보면 식(2)의 진공 압축 상태(squeezed vacuum state)로 표현된다.

$$|\psi(t)\rangle_a = \sqrt{\text{sech}(\chi t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(\frac{1}{2} \tanh(\chi t)\right)^n |2n\rangle_a \quad (2)$$

입력 신호가 결맞음 상태(coherent state: 고전 상태에 가장 가까운 양자 상태)인 경우에는 출력 상태가 squeezed coherent state가 된다. 축퇴 매개 증폭기(DPA)가 입력 신호에 가해지면, 입력 신호의 한쪽 quadrature(예, 위치 연산자)를 증폭하는 반면 90도 차이 나는 quadrature(예, 운동량 연산자)에는 압축 현상(표준 편차가 진공 상태보다 감소)이 일어난다. 참고로, 한쪽 quadrature에 일어난 압축 현상을 이용하여 진공 요동(vacuum fluctuation)이 나타내

는 표준 양자 한계(Standard Quantum Limit)를 뛰어넘어 하이젠버그 한계(Heisenberg Limit: 양자역학적 궁극적인 측정 한계)의 측정 정밀도를 얻을 수 있다. 참고로, 이와 유사한 현상을 비선형 매질의 3차 비선형 감수율을 이용하여 얻을 수 있다.

비축퇴 매개변수 증폭기(NDPA)에서는, $\omega_1 + \omega_2$ 의 주파수를 갖는 펌프 빔이 비선형 매질에서 ω_1 과 ω_2 의 주파수를 갖는 두 개의 입력 신호와 상호작용한다. Interaction picture에서 시간 독립적인 Hamiltonian으로 표현되고, 식(3)에서 χ 는 비선형 매질의 2차 비선형 감수율(susceptibility)과 펌프의 진폭에 비례하는 상수에 해당된다.

$$H_I^{NDPA} = i\hbar\chi(\hat{a}^+\hat{b}^+ - \hat{a}\hat{b}) \quad (3)$$

입력 신호가 진공 상태라고 가정하고 시간에 따른 Hamiltonian의 evolution을 살펴보면 식(4)와 같이 이중 모드 진공 압축 상태(two-mode squeezed vacuum state)로 표현된다.

$$|\psi(t)\rangle_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_s^n}{(1+N_s)^{n+1}}} |n\rangle_a |n\rangle_b \quad (4)$$

여기에서 $N_s = \sinh^2(\chi t)$ 는 생성된 신호 및 대기 모드의 평균 광자수를 의미한다. 이중 모드 진공 압축 상태는 전형적인 연속 변수 얽힘 상태로 연속 변수 양자 전송, 벨 부등식 테스트, 양자 센싱 등에서 고려된다.

3. 조셉슨 접합 (Josephson Junction)

초전도 회로는 손실이 없기 때문에 낮은 잡음의 증폭기를 구현하는데 적합하다. 이 경우 조셉슨 접합이 회로에 비선형성을 부여하는 핵심 구성요소가 된다. 조셉슨 접합은 두 개의 초전도체가 얇은 절연체를 사이에 두고 마주하고 있을 때 전류가 저항 없이 흐르는 시스템을 말한다[8]. 절연체가 충분히 얇을 경우 터널링 효과에 의해 쿠퍼쌍(Cooper pair)이 통과할 수 있는데 이 경우 전기 저항

은 0이지만 회로에 추가적인 인덕턴스를 주게 된다. 따라서 조셉슨 접합은 회로의 유도 저항(reactance)을 변화시키는 parametric amplification에 활용할 수 있다.

초전도체는 거시적 파동함수(ψ)로 기술되는데 조셉슨 접합의 두 초전도체는 각각의 파동함수 사이에 위상차가 존재하게 된다. 이 위상차 $\phi(t)$ 는 유명한 조셉슨 공식에 의해 주어진다.

$$I = I_c \sin \phi(t), \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{2e}{\hbar} V(t) \quad (5)$$

조셉슨 접합의 에너지는 식(6)과 같이 위상차의 코사인함수로 주어지는데 위상에 대한 4차 이상의 기여도 때문에 비선형성이 나타나게 된다.

$$E = \int IV dt = -E_J \cos \phi(t) \approx \frac{1}{2} E_J \phi^2 - \frac{1}{24} E_J \phi^4 + \dots \quad (6)$$

조셉슨 접합 내부에서는 쿠퍼쌍의 수가 국소적으로 줄어들게 된다. 그런데 접합으로 들어오고 나가는 전류량을 유지하기 위해서는 전하 전달체, 즉 쿠퍼쌍이 더 빠르게 움직여야 한다. 이에 따른 높은 운동에너지가 회로의 인덕턴스에 영향을 주게 되는데 이를 kinetic inductance라고 한다[9].

4. 조셉슨 매개 증폭기 (Josephson Parametric Amplifier)

조셉슨 매개 증폭기를 구현하는 구조는 크게 세 가지 정도가 있다. 이들은 각각 하나의 조셉슨 접합으로 이루어진 공진기형 증폭기, 조셉슨 접합들을 고리 모양으로 연결한 조셉슨 고리 변조기(Josephson Ring Modulator: JRM), 그리고 수많은 조셉슨 접합을 이용해 비선형 도파관(waveguide)을 만드는 조셉슨 진행파 매개 증폭기(Josephson Traveling Wave Parametric Amplifier: JTWPA)이다. JTWPA는 다

른 방식들과 다르게 공진기를 이용하지 않고 신호가 통과하는 도파관에서 바로 증폭이 일어난다는 점에 차이가 있다.

우선 가장 간단한 예시로 조셉슨 접합을 하나만 이용하는 경우에 신호의 증폭, 압축이 어떻게 일어나는지 살펴본다. 고유 주파수가 ω 인 조셉슨 접합과 축전기로 이루어진 공진기에 주파수 $\omega_p (\approx \omega)$ 인 펌프를 입사하는 경우를 생각하자. 이를 기술하는 Hamiltonian은

$$H/\hbar = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{K}{2} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + i(\epsilon e^{-i\omega p t} \hat{a}^\dagger - h.c.) \quad (7)$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 K 가 비선형성을 주는 Kerr 계수이다. $\hat{a} = \alpha e^{-i\omega p t} + \hat{b}$ 와 같이 펌프에 의한 영향에 대해 선형화 하고 \hat{b} 에 대한 삼차항 이상을 무시하면 다음과 같은 Hamiltonian을 얻는다.

$$H/\hbar = \tilde{\omega} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{K}{2} (\alpha^2 e^{-2\omega p t} \hat{b}^{\dagger 2} + \bar{\alpha}^2 e^{2\omega p t} \hat{b}^2) \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\epsilon/\hbar}{\kappa/2 + i(\omega - \omega p) + iK|\alpha|^2} \quad (9)$$

$$\tilde{\omega} = \omega + 2K|\alpha|^2 \quad (10)$$

여기서 κ 는 공진기의 손실이다. 이 Hamiltonian은 식(1)에서 기술한 것과 동일하다. 이러한 공진기와 외부의 상호작용은 input-output theory로 기술할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_S^o \\ \hat{a}_I^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_S^i \\ \hat{a}_I^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$S_{11} = (g^2 + \chi_S^{-1} \chi_I^{-1}) / (\chi_S^{-1} \chi_I^{-1} - g^2)$$

$$S_{12} = -g e^{-i\theta} \kappa / (\chi_S^{-1} \chi_I^{-1} - g^2)$$

$$S_{21} = -g e^{i\theta} \kappa / (\chi_S^{-1} \chi_I^{-1} - g^2)$$

$$S_{22} = (g^2 + \chi_S^{-1} \chi_I^{-1}) / (\chi_S^{-1} \chi_I^{-1} - g^2)$$

$$g e^{i\theta} = -iK\bar{\alpha}^2/\hbar, \quad \chi_j^{-1} = \kappa/2 + i(\tilde{\omega} - \omega_j),$$

($j = S, I$) $\omega_S + \omega_I = 2\omega p$ 이다. 여기서 \hat{a}_j^i, \hat{a}_j^o 는 각각 주파수 ω_j 에서 공진기에 대해 들어가고, 나가는 모드의 소멸 연산자이다.

식(11)의 행렬은 ω_S, ω_I 가 공진기의 선폭 κ , 측정 장비의 선폭 등에 의해 구분이 되지 않으면 DPA를, 구분이 된다면 NDPA를 설명한다.

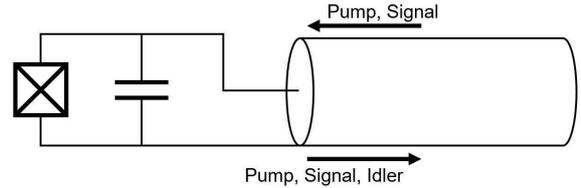


그림 1 조셉슨 접합 하나를 이용한 매개 증폭기

식(10)에서 알 수 있듯이 위와 같은 방식의 매개 증폭기는 이용하는 펌프의 세기에 따라 공진기의 고유 주파수가 변한다. 또한 펌프, 신호, 대기 모드의 주파수가 모두 비슷하며 공간상으로 분리되어 있지 않으므로 신호 처리에 복잡함이 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해 조셉슨 접합을 두 개의 조셉슨 접합을 이용하는 SQUID(Superconducting QUantum Interference Device) 구조로 대체하여, SQUID를 통과하는 자기선속을 변조하는 것으로 매개 증폭기를 만들 수 있다[7, 10].

조셉슨 고리 변조기의 기본적인 구조는 네 개의 동일한 조셉슨 접합을 고리로 연결하고 각 꼭짓점을 축전기를 통해 외부와 연결한 것이다[11]. 이렇게 형성한 회로는 3개의 공진 모드를 가진다. 각 모드의 소멸 연산자를 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 라 했을 때 상호작용을 기술하는 Hamiltonian은 아래와 같은 항에 비례한다.

$$(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)$$

\hat{c} 모드에 대해 주파수 $\omega p \approx \omega_a + \omega_b$ 인 펌프를 넣어주고 이전의 분석과 유사하게 선형화하고 회전과 근사를 적용하면 상호작용을 기술하는 Hamiltonian은 아래와 같은 항에 비례한다.

$$\hat{a} \hat{b} e^{i\omega p t} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{-i\omega p t}$$

이는 식(3)에 기술된 것과 같이 NDPA를

나타내는 Hamiltonian이다. 조셉슨 고리 변조기를 이용하는 경우 \hat{a} , \hat{b} 의 두 모드는 공간적으로 분리되어 있기 때문에 하나의 조셉슨 접합을 이용한 매개 증폭기와는 다르게 DPA로 사용할 수 없다.

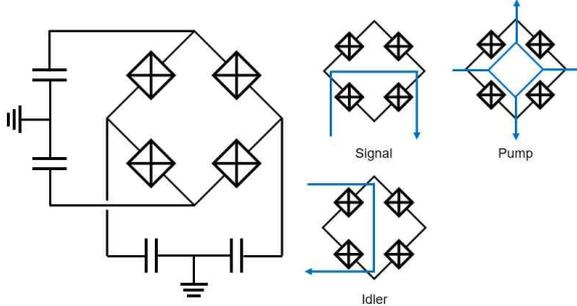


그림 2 조셉슨 고리 변조기의 회로도. 오른쪽은 세 공진 모드의 방향을 도식화한 것이다.

조셉슨 고리 변조기를 이용한 증폭기 또한 입력 신호와 출력 신호의 관계를 식 (11)의 행렬을 통해 나타낼 수 있다. 여기서 $\omega_S + \omega_I = \omega_P$, $\chi_S^{-1} = \kappa_a/2 + i(\omega_a - \omega_S)$, $\chi_I^{-1} = \kappa_b/2 + i(\omega_b - \omega_I)$ 이며 S_{12} , S_{21} 의 분자의 κ 는 $\sqrt{\kappa_a \kappa_b}$ 로 대체된다. $\kappa_{a,b}$ 는 각 모드의 손실을 나타내며 $ig e^{i\theta}$ 는 Hamiltonian에서 $\hat{a}\hat{b}e^{i\omega_P t}$ 의 계수이다. 위상 보존 증폭률은 $G = |S_{11}|^2$ 으로 정의되며 이 값은 $\omega_a + \omega_b = \omega_P$, $\omega_S = \omega_a$ 일 때 $g = \sqrt{\kappa_a \kappa_b}/2$ 에서 발산한다. 큰 증폭률을 갖는 증폭기는 펌프의 세기를 조절해서 g 가 $\sqrt{\kappa_a \kappa_b}/2$ 보다 조금 작은 값을 갖도록 하여 만든다. 입력 신호의 주파수 ω_S 에 대한 G 를 구하면 대역폭을 계산할 수 있다. 계산의 편의를 위해 $\omega_a + \omega_b = \omega_P$ 를 가정하자. $\omega_S = \omega_a$ 일 때의 증폭률을 G_0 라 했을 때 G_0 가 큰 영역에서 증폭률은 다음과 같이 근사된다.

$$G(\omega_S) = \frac{G_0}{1 + (\omega_S - \omega_a)^2 G_0 / \Gamma^2} \quad (12)$$

$$\Gamma = \frac{\kappa_a \kappa_b}{\kappa_a + \kappa_b}$$

식(12)에서 알 수 있듯이 증폭률은 로렌치안 형태를 띠며 대역폭(HWHM) B 는

다음과 같이 주어진다.

$$B \sqrt{G_0} = \Gamma \quad (13)$$

증폭률이 증가함에 따라 대역폭은 줄어들며, 공진기의 선폭에 의해 관계가 결정된다.

조셉슨 진행과 매개 증폭기는 수많은 유도기와 축전기로 이루어진 마이크로파 도파관에서 모든 유도기를 조셉슨 접합으로 대체한 구조를 갖는다[12]. 이 비선형 도파관을 통해 에너지를 공급하는 펌프와 신호, 대기 모드를 입력하면 신호, 대기 모드가 증폭, 압축된다. 하나의 $5\text{mm} \times 5\text{mm}$ 기판 위에 조셉슨 접합과 축전기 하나씩으로 이루어진 단위를 수천 개 가량 그려서 조셉슨 진행과 매개 증폭기를 만들 수 있다. 조셉슨 접합은 구조상 축전용량을 가질 수밖에 없으며, 이 축전용량에 의해 도파관은 비선형 분산 곡선을 갖는다. 이 비선형 분산 곡선과 조셉슨 접합의 Kerr 효과는 에너지 보존과 위상 맞춤을 동시에 만족하기 어렵게 만들며 증폭이 되는 신호와 대기 모드의 주파수를 제한한다. 이를 극복하기 위해 중간 중간 추가적인 공진기를 넣는 등의 방법을 이용한다.

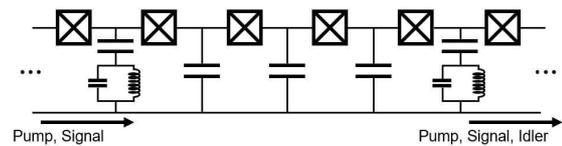


그림 3 조셉슨 진행과 매개 증폭기의 회로도. 중간에 추가적인 LC 회로는 위상 맞춤을 위한 것임.

조셉슨 진행과 매개 증폭기는 앞서 소개한 두 방식과 달리 공진기를 이용하지 않아서 증폭 대역폭이 공진기의 선폭에 의해 제한받지 않는다. 일반적으로 조셉슨 진행과 매개 증폭기는 20dB의 증폭률에서 수 GHz 단위의 대역폭을 갖는다. 이러한 넓은 대역폭을 가진 증폭기가 있으면 광대역에서의 압축 신호를 생성하거나 여러 큐비트의 신호를 동시에 증폭할 수 있는 등의 이점이 있다.

5. 결 론

조셉슨 접합은 마이크로파 영역의 양자 기술에서 손실이 없는 비선형 소자로 매우 중요한 역할을 한다. 본 글에서 매개변수 증폭기와 조셉슨 접합의 간단한 원리에 대해 소개하고 조셉슨 접합을 이용하여 매개변수 증폭기를 만드는 방식에 대해 살펴보았다. 또 매개변수 증폭기를 이용하여 신호의 증폭 및 압축이 일어남을 살펴보았다.

참고문헌

- [1] Z. Kim et al., "Decoupling a Cooper-Pair Box to Enhance the Lifetime to 0.2ms", Physical Review Letters 106, 120501 (2011).
- [2] B. Yurke et al., "Observation of Parametric amplification and deamplification in a Josephson parametric amplifier", Physical Review A, 39, 2519 (1989)
- [3] M.A. Castellanos-Beltran et al., "Amplification and squeezing of quantum noise with a tunable Josephson metamaterial", Nature Physics 4, pp.929-931 (2008)
- [4] J.D Teufel et al., "Nanomechanical motion measured with an imprecision below that at the standard quantum limit", Nature nanotechnology, 4, pp.820-823 (2009)
- [5] R. Vijay, D.H. Slichter, and I. Siddiqi, "Observation of quantum jumps in a superconducting artificial atom", Physical Review Letters 106, 110502 (2011).
- [6] D.F. Walls and G.J. Milburn, "Quantum Optics", 2nd edition, Springer (2007).
- [7] A. Roy and M. Devoret, "Introduction to parametric amplification of quantum signals with Josephson circuits", Comptes Rendus Physique 17, pp.740-755 (2016)
- [8] J. Aumentado, "Superconducting Parametric Amplifiers", IEEE Microwave magazine 21, pp.45-59, August (2020)
- [9] S. Kwon et al., "Gate-based superconducting quantum computing", J. Appl. Phys. 129, 041102 (2021)
- [10] S. Boutin et al., "Effect of Higher-order nonlinearities on amplification and squeezing in Josephson Parametric Amplifiers", Physical Review Applied, 8, 054030 (2017)
- [11] N. Roch et al., "Widely Tunable, Nondegenerate Three-Wave Mixing Microwave Device Operating near the Quantum Limit", Phys. Rev. Lett., 108, 147701 (2012)
- [12] M. Esposito et al., "Perspective on traveling wave microwave parametric amplifiers", Appl. Phys. Lett., 119, 120501 (2021)

저자이력

■ 김동환

2016-2019년 서울대 수학/물리학 학사
현재 국방과학연구소 과학기술전문사관

■ 김덕영

2003-2010년 KAIST 물리학 박사
2010-2014년 Penn State Univ.
2015-2017년 Los Alamos Nat. Lab
2018-2019년 IBS YSF
현재 국방과학연구소 선임연구원

■ 김재일

2004-2010년 Univ. of Maryland, College Park, 물리학 박사
2010-2012년 Joint Quantum Institute
현재 국방과학연구소 책임연구원

■ 이수용

2003-2009년 KAIST 물리학 박사
2009-2012년 Texas A&M Univ. at Qatar
2012-2015년 Centre for Quantum Technologies, Nat. Univ. Singapore
2015-2019년 고등과학원(KIAS), 서울
2021.9~현재 UST 무기체계공학 부교수
현재 국방과학연구소 선임연구원