韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.4.627
제 36집 제 4호, 2022. 12. 627-644

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 4, Dec. 2022. 627-644

Veprtskii의 방법을 활용한 각의 삼등분 도구 제작

한 인 기 (경상국립대학교, 교수)

본 연구에서는 아르키메데스의 삽입방법에 기반한 다양한 각의 삼등분 도구들을 조사하고, 일부 도구들을 제작하여 특징을 비교하였다. 이를 통해, 삼등분 도구의 제작 및 활용에서 사용의 편이성, 삼등분되는 각의 임의성, 구조의 간결성 등의 요소를 고려해야 한다는 것을 알았다. 기술한 요소들을 고려하여, 수학교실에서 활용할 수 있는 각의 삼등분 도구로 Veprtskii가 1888년에 제안한 도구에 주목하였다. 본 연구에서는 Veprtskii가 제안한 방법을 개선하여 나무 젓가락과 철끈을 이용하여 각의 삼등분 도구를 제작하였다. 이때, 제작된 도구는 첫째, 다른 삼등분 도구에 비해 부품의 개수가 적고, 구조나 제작도 간단하였고, 둘째 사용 방법도 편리하며, 셋째 특정한 각이 아닌 임의의 각의 삼등분을 나타내며, 넷째 제작 비용이 저렴하고 제작 과정도 간단했다. 이 도구는 수학교실에서 삼각형의 외각의 성질, 이등변삼각형의 성질과 관련된 탐구 활동에서 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅰ. 서론

최근 들어, 수학과 교육과정에서 매체 및 교구를 활용한 수학 교수-학습이 강조되고 있다. 2011년에 고시된 2009개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011, p.126)에서는 공학적 도구뿐만 아니라 '구체적인 조작과 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하고 수학 주제에 대해 모둠으로 토론함으로써 수학 학습의 효율을 높일 수 있도록 수학 교과교실을 구축하여 활용한다'고 하면서, 구체적이고 경험적인 대상에 대한 수학적 활동을 수학적 개념과 원리의 이해, 학생들의 토론으로 연결시킬 수 있는 수학 교수-학습 환경의 구축을 강조하였다.

2015개정 수학과 교육과정(교육부, 2015, p.38)에서는 교수-학습 방법의 하나로 매체 및 도구 활용 학습을 제시하면서 '학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고'와 같이 규정하였고, 김응태, 박한식, 우정호(2004, p.245)는 '수학의 학습을 위한 활동을 유발시키기 위한 현실의 한 단편이 다름 아닌 교구'라고 하였다. 결국, 수학 매체 및 교구를 활용한 수학교육에서는 학생들의 흥미를 유발시키고, 구체적인 수학적 활동을 수학적 개념, 원리와 연결시킬 수 있는 가능성을 찾을 수 있을 것이다.

이러한 관점에서 수학 교사와 수학교육 전문가들이 수학 교수-학습에 활용할 수 있는 수학체험 도구에 관심을 가지고, 새로운 수학체험 도구를 개발하거나 기존의 것들을 새로운 맥락에서 그 교육적 가치를 재조명하는 것은 의미롭다고 할 수 있다. 예를 들어, 수학교사단체, 지역 교육청, 각급 학교 등이 주관하여 수학체험행사를 개최하거나(고주연, 박미미, 신인선, 2019; 안승석, 2012; 김민정, 2011 등), 수학체험 도구의 개발 및 활용에 대한 수학교육학적 연구(서보억, 2020; 장훈, 2008; 김기원, 도혜경, 2010 등)에서는 추상적인 수학적 개념을 구체적이고 경험적으로 조작할 수 있는 도구(활동)의 형태로 구현하거나 그러한 가능성을 제시하였다. 이를 통해 수학교실에서 학생들의 수학적 탐구 활동의 폭을 확장시키고, 수학 교수-학습의 효율성을 높일 수 있으며 수학교육학 연구의 외연을 확장시킬 수 있으므로, 이들 연구의 가치를 긍정적으로 평가할 수 있을 것이다. 특히, 개발 및 제작되는 수학체험 도구들이 중등학교 학교수학과 밀접하게 관련되며, 학생들이 손쉽게 조작, 탐구할 수 있으며,

* 접수일(2022년 11월 18일), 심사(수정)일(2022년 12월 14일), 게재확정일(2022년 12월 14일)
* MSC2000분류 : 97U60
* 주제어 : 각의 삼등분 도구, 수학체험, 수학 교구, 교구 제작

제작 비용과 제작 과정이 저렴하고 평이하다면, 그러한 수학체험 도구들은 수학 교실에서 폭넓게 활용될 수 있을 것이며, 수학교육의 개선을 위한 의미있는 역할을 할 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서는 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외각의 성질을 기반으로 하는 각의 삼등분 도구의 제작에 대해 논의할 것이다. 특히, 각의 삼등분선 작도를 위해 아르키메데스가 고안한 삽입방법에 기반한 다양한 각의 삼등분 도구들을 제작하고 이들의 특징을 연구의 배경으로 살펴볼 것이다.

고은성(2021)의 주장처럼 교구를 수학적 개념에 대한 구체적인 모델로 본다면, 각의 삼등분 도구의 제작에서는 각의 삼등분 도구를 이용해 임의의 각을 삼등분할 수 있는지, 사용이 편리한지, 구조적으로 간결한지 등에 대한 측면은 중요하게 고려되어야 할 것이다. 본 연구에서는 연구의 배경에서 다양한 각의 삼등분 도구들을 삼등분되는 각의 임의성, 사용의 편의성, 구조적 간결성 등을 중심으로 비교하였다. 이를 바탕으로, 수학교실에서 사용될 수 있는 각의 삼등분 도구로 1888년에 Veprtskii가 제안한 것에 주목하였다.

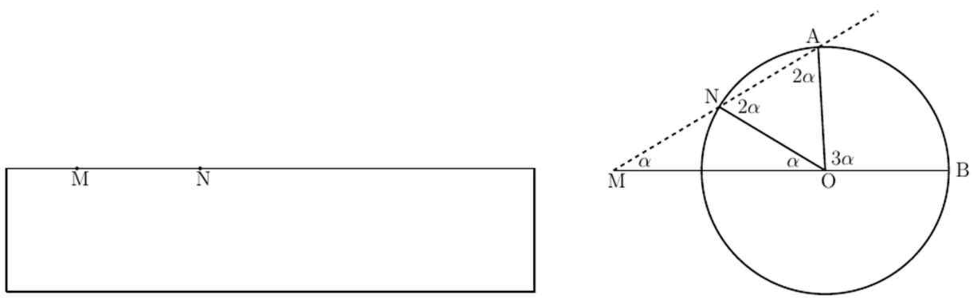
본 연구에서는 Veprtskii의 방법을 개선하여 각의 삼등분 도구를 제작하고, 제작을 위한 소재의 선택, 각의 삼등분 작도, 제작 과정의 유의점 등에 관련된 몇 가지 논의를 제시하고, 다른 각의 삼등분 도구와 비교하여 그 장점을 기술할 것이다. 본 연구를 통해, 아르키메데스의 삽입방법에 근거한 다양한 각의 삼등분 도구들의 특징을 알 수 있으며, 수학교실에서 제작, 사용할 수 있는 각의 삼등분 도구에 관련된 다양한 정보도 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 그리고 개발되어 사용 중인 수학체험 도구의 개선 방향에 대한 시사점도 줄 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 연구의 배경

눈금없는 자(작도 문제의 해결에 사용되는 자는 눈금없는 자이므로, 이후에 작도와 관련하여 '자'로 기술된 것은 눈금없는 자를 의미함)와 컴퍼스를 이용하여 임의의 각을 삼등분하는 작도문제를 오랫동안 수학자들이 해결하려고 시도하였다. 후에 자와 컴퍼스를 이용하여 임의의 각을 삼등분할 수 없다는 것이 삼차방정식의 근을 이용하여 증명되었다(삼차방정식의 근과 작도가능성에 대한 논의는 한인기(2019)의 114-118쪽을 참고할 수 있다). 이와 함께 임의의 각을 삼등분하는 작도문제의 해결을 위한 다양한 방법들이 고안되었다(수학의 역사에서 이 작도문제의 해결을 위한 다양한 시도는 김진호, 김용대, 서보억(2011), 한인기(2019), Bunt L., Jones P. & Bedient J. (1976), Yates R. (1971) 등을 참고할 수 있다). 그러한 방법 중에서 잘 알려진 것이 삽입방법이다. 삽입방법에서는 자에 일정한 선분을 표시한 후에, 자를 움직여서 선분을 원하는 위치에 끼워 넣고 이 선분을 지나는 직선을 작도하여 문제를 해결하게 된다.

1. 아르키메데스의 삽입방법

아르키메데스는 삽입방법을 이용하여 각의 삼등분 문제에 대한 다음과 같은 풀이를 제시하였다(한인기, 2019; Bunt L., Jones P., Bedient J., 1976). 중심이 O인 원을 작도하고, 원의 지름을 지나는 직선을 작도한다. 이제, 자에 원 O의 반지름에 해당하는 선분 MN을 표시한다. 자를 적당히 움직여 가면서 점 M은 원 O의 지름의 연장선에 속하며, 다른 점 N은 원 O에 속하도록 위치를 정한다. 이 자와 원 O의 다른 교점을 A라 하자([그림 Ⅱ-1]). 그러면, 삼각형 NMO는 $\overline{NM}=\overline{NO}$인 이등변삼각형이므로, $\angle NOM=\angle NMO=\alpha$가 된다. 이때 각 ONA는 삼각형 NMO의 외각이므로, $\angle ONA=2\alpha$이다. 한편, 삼각형 ONA는 $\overline{ON}=\overline{OA}$인 이등변삼각형이며, $\angle ONA=OAN=2\alpha$이다. 이제, 각 AOB는 삼각형 AOM의 외각이므로, $\angle AOB=\alpha+2\alpha=3\alpha$가 된다. 결국, 각 OMN은 각 AOB의 $\frac{1}{3}$이다.



[그림 Ⅱ-1] 아르키메데스의 삽입방법(자와 원)

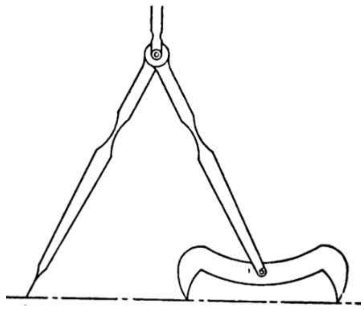
아르키메데스의 삽입방법에 의한 각의 삼등분 작도는 임의의 각을 삼등분하는 작도문제의 해법으로는 인정받지는 못했다. 유클리드 원론의 공준에서는 두 점을 지나는 직선을 작도할 수 있고, 선분을 연장하여 직선을 작도할 수 있다고 규정하고 있다. [그림 Ⅱ-1]에서 지름의 연장선에 점 M을 잡을 수 있지만, 직선 MA를 작도하려면 점 N 또는 A의 위치를 결정해야 한다. 가령 점 N의 위치를 결정한다고 하자(만약 점 N의 위치가 결정되면, 점 A는 직선 MN과 원 O의 교점으로 그 위치가 결정될 수 있다).

점 N의 위치는 평면이나 도형(직선, 원 등)에 속하는 임의의 점이거나 도형들의 교점(직선과 직선의 교점, 직선과 원의 교점 등)으로 결정될 수 있다. 그런데, [그림 Ⅱ-1]에서 점 N은 평면이나 도형의 임의의 점도 아니고 도형들의 교점으로 결정된 것이 아니다. 아르키메데스는 삽입방법을 이용하여 선분 MN이 표시된 자를 지름의 연장선과 원 위에서 움직이면서 M, N의 적당한 위치를 결정하였다(선분의 한끝 M은 지름의 연장선에 속하며, 다른 끝 N이 원 위에 놓이도록). 이와 같은 방법으로 직선 MA를 작도하여 얻어진 풀이는 작도문제의 해법으로는 인정되지 않는다.

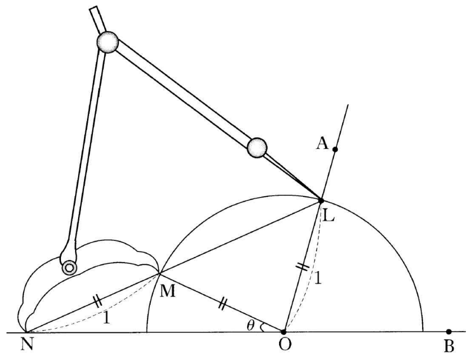
비록 삽입방법을 이용한 아르키메데스의 풀이 방법은 각을 삼등분하는 작도문제의 해법으로 인정되지는 않았지만, 이 풀이 방법은 사용된 수학적 성질들이 평이하고(이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외각의 성질이 사용됨) [그림 Ⅱ-1]에 포함된 도형들(원, 직선, 삼각형)도 단순하여 다른 방향의 수학 탐구의 기초가 되었다.

2. 아르키메데스 삽입방법을 활용한 각의 삼등분 도구

[그림 Ⅱ-1]에 관련된 새로운 방향의 수학 탐구로 각의 삼등분 도구의 고안을 들 수 있다. [그림 Ⅱ-1]에서 선분 MN이 표시된 자를 대신할 수 있는 도구로 헤르메스(H. Hermes)는 컴퍼스([그림 Ⅱ-2], 삼등분 도구1이라 하자)를 1883년에 고안하였다(Yates, 1971; 김진호, 김용대, 서보억, 2011). [그림 Ⅱ-3]에 제시된 헤르메스 컴퍼스를 이용한 각의 삼등분을 보면, [그림 Ⅱ-1]에서 자를 컴퍼스로 바꾸고 나머지는 아르키메데스의 풀이 방법과 같다는 것을 알 수 있다.

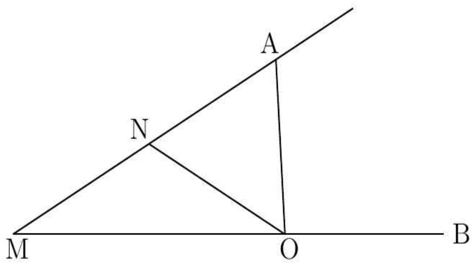


[그림 Ⅱ-2] 헤르메스 컴퍼스 (그림 출처: Yates, 1971, p.34)

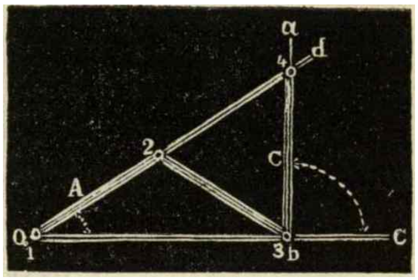


[그림 Ⅱ-3] 헤르메스 컴퍼스(삼등분 도구1)를 이용한 각의 삼등분 (그림 출처: 김진호, 김용대, 서보억, 2011, p.123)

[그림 Ⅱ-1]에서 원을 제거하면, [그림 Ⅱ-4]와 같이 선분으로 이루어진 각의 삼등분을 나타내는 도형들을 얻을 수 있다. 이때, $\overline{AO}=\overline{ON}=\overline{MN}$이며, 삼각형 OAN과 NMO는 이등변삼각형이다. [그림 Ⅱ-4]를 막대를 이용하여 만든 각의 삼등분 도구가 [그림 Ⅱ-5]이다.

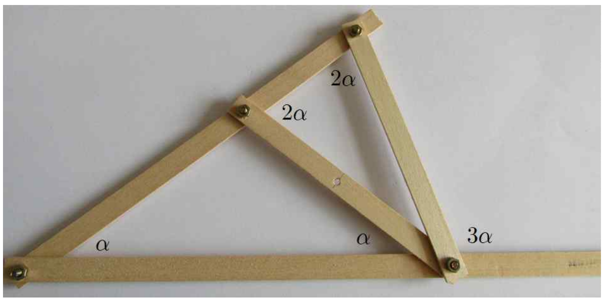


[그림 Ⅱ-4] 각의 삼등분



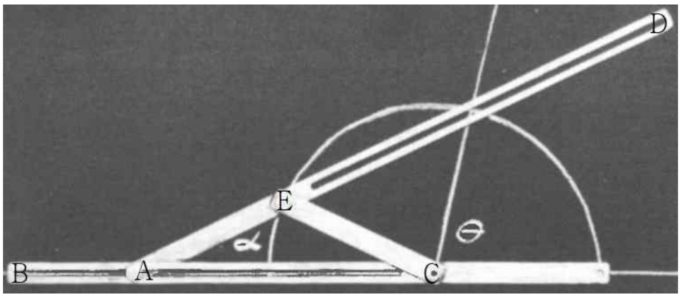
[그림 Ⅱ-5] 각의 삼등분 도구(그림 출처: Shpachinskii, 1891, p.43)

[그림 Ⅱ-5]를 막대를 이용하여 재현한 것이 [그림 Ⅱ-6]이다([그림 Ⅱ-6]을 삼등분 도구2라 하자). 각의 삼등분 도구2는 [그림 Ⅱ-4]를 기반으로 그대로 만들 수 있다는 장점이 있다. 그러나 삼각형의 각 꼭짓점이 고정되어, 특정한 위치에서만(특정한 각에 대해서만) 각의 삼등분을 구할 수 있다.



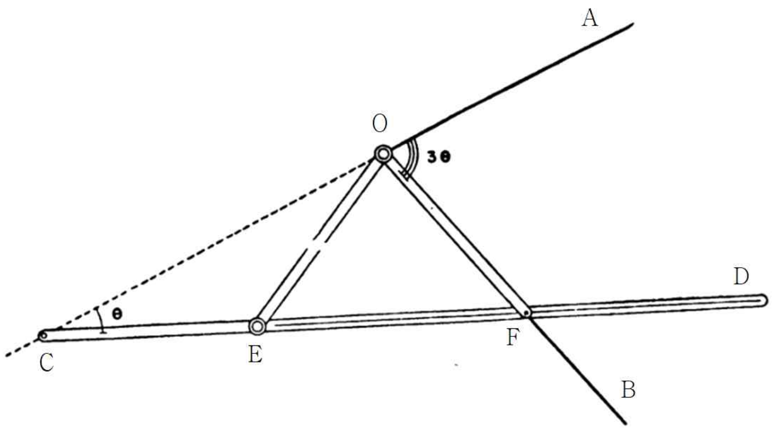
[그림 Ⅱ-6] 각의 삼등분 도구2

각의 삼등분 도구2의 구조적인 단점(이등변삼각형의 모든 꼭짓점이 고정되었다는 것)을 개선한 각의 삼등분 도구로 [그림 Ⅱ-7]이 있다([그림 Ⅱ-7]를 삼등분 도구3이라 하자). 삼등분 도구3은 3개의 막대로 구성되었다. 이때, 막대 AD와 BC의 교점인 A는 B에서 C까지 움직일 수 있다. [그림 Ⅱ-7]에서 점 A가 C의 방향으로 움직이고 점 E는 원 위를 따라 움직이게 된다. 그러면, 원과 막대 AD의 교점을 표시하여, 이 교점을 점 C와 연결하면 θ가 얻어진다. 이때, 점 A의 위치에 따라 다양한 크기의 각 θ가 얻어질 수 있으며, $\theta=3\alpha$가 된다.

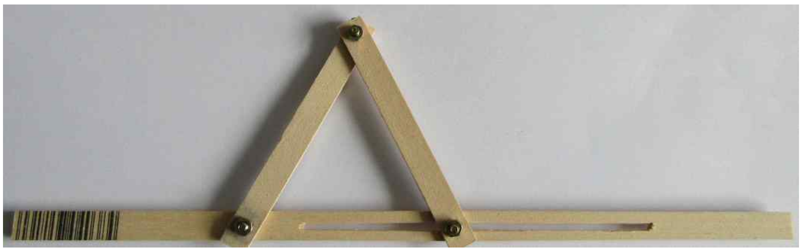


[그림 II-7] 각의 삼등분 도구3(그림 출처: Bunt L., Jones P., Bedient J., 1976, p.106)

[그림 Ⅱ-7]과 같이 각의 삼등분 도구에서 막대를 움직여 다양한 각들의 삼등분을 구하는 다른 도구를 살펴보자. [그림 Ⅱ-8]은 3개의 막대로 이루어진 각의 삼등분 도구인데, 선분 OF의 끝점 F가 선분 ED사이를 이동할 수 있으며, 이때 다양한 크기의 각 AOF를 얻을 수 있다. [그림 Ⅱ-8]에서 삼각형 ECO는 $\overline{EC}=\overline{EO}$인 이등변삼각형이고, 삼각형 OEF도 $\overline{OE}=\overline{OF}$인 이등변삼각형이므로, $3\angle OCE=\angle AOF$가 성립한다. [그림 Ⅱ-9]는 [그림 Ⅱ-8]을 막대를 이용하여 재현한 것이다([그림 Ⅱ-9]를 삼등분 도구4라 하자).

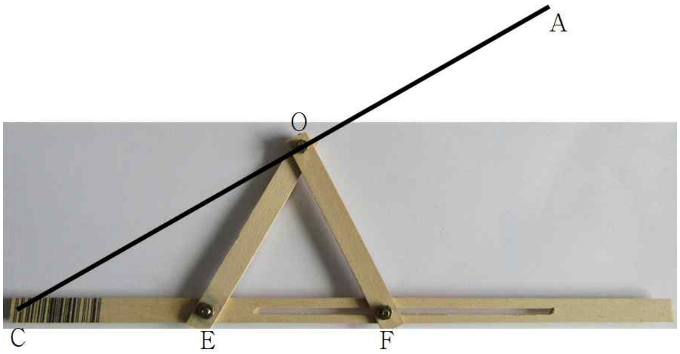


[그림 II-8] 3개의 막대를 이용한 각의 삼등분 도구(그림 출처: Yates, 1971, p.34)



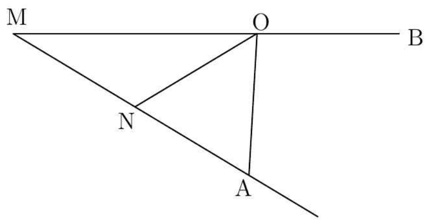
[그림 II-9] 각의 삼등분 도구4

[그림 Ⅱ-9]를 이용하여 각의 삼등분을 실제로 구해보자. [그림 Ⅱ-10]에서 점 F를 움직이면서 점 O의 위치를 다양하게 잡을 수 있다. 이때, 점 C와 O의 위치를 표시한 다음, 자를 이용하여 점 C와 O를 연결하는 직선을 작도하자. 그러면, 각 AOF를 얻을 수 있으며, $\angle AOF = 3\angle OCE$가 된다.



[그림 II-10] 각의 삼등분 도구4를 이용한 각의 삼등분 찾기

각의 삼등분 도구4는 삼등분 도구3과는 다른 구조를 가진다. [그림 Ⅱ-9]의 구조를 어떻게 얻을 수 있는지 살펴보자. [그림 Ⅱ-4]를 직선 MB에 대해 대칭시켜 [그림 Ⅱ-11]을 얻을 수 있다. 이제, [그림 Ⅱ-11]에서 점 A를 중심으로 점 M을 시계 반대방향으로 약 45°만큼 회전시킨 다음 직선 MA를 수평이 되도록 하면, [그림 Ⅱ-8]이 얻어진다.



[그림 II-11] 직선 MB에 대한 [그림 II-4]의 대칭

살펴본 4종류의 각의 삼등분 도구를 비교해 보자. 삼등분 도구1을 이용하려면, 반원과 지름의 연장선이 작도된 종이가 필요하고, [그림 Ⅱ-3]의 특정한 각 AOB에 대해서만 크기가 $\frac{1}{3}$인 각을 얻을 수 있다. 삼등분 도구2는 삼등분 도구1과 마찬가지로 특정한 각에 대해서만 $\frac{1}{3}$인 각을 얻을 수 있지만, 반원이나 지름의 연장선이 작도된 종이를 준비할 필요가 없다. 이런 측면에서 보면, 삼등분 도구2가 삼등분 도구1에 비해 사용이 편리하다고 할 수 있다.

한편, 삼등분 도구1과 삼등분 도구2의 단점인 특정한 각에 대한 삼등분을 개선한 것이 삼등분 도구3이다. 삼등분 도구3은 3개의 막대로 구성되며, [그림 Ⅱ-7]에서와 같이 나무로 된 선분 ED와 BC의 중간에 길을 만들어 다양한 각에 대한 삼등분을 구할 수 있게 하였다. 그러나 삼등분 도구3을 이용하려면 반원이 작도된 종이가 필요하다.

삼등분 도구4는 삼등분 도구3의 활용에서 필요했던 반원이 작도된 종이 없이 각의 삼등분을 얻을 수 있다는 데에 장점이 있다. 삼등분 도구4도 삼등분 도구3과 같이 3개의 막대로 구성되지만, [그림 Ⅱ-8]에서 $\overline{CE}=\overline{EO}=\overline{OF}$와 같이 되도록 막대의 길이를 조정하였다. 그 결과 이등변삼각형 ECO, OEF가 얻어지며, 추가적인 반원의 작도없이 각의 삼등분을 얻을 수 있었다. 살펴본 내용을 표로 정리하면, <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 삼등분 도구들의 비교

	삼등분 도구1	삼등분 도구2	삼등분 도구3	삼등분 도구4
사용의 편이성	사전 작도(원, 지름) 필요	사전 작도 불필요	사전 작도(원, 지름) 필요	사전 작도 불필요
삼등분되는 각의 임의성	특정한 각	특정한 각	임의의 각	임의의 각
구조적 간결성	헤르메스 컴퍼스	4개의 막대로 구성	3개의 막대로 구성	3개의 막대로 구성

삼등분 도구를 사용할 때의 편이성(반원이 작도된 추가적인 종이의 필요)을 고려하면, 삼등분 도구2, 삼등분 도구4가 삼등분 도구 1, 삼등분 도구3에 비해 더 나은 도구라 할 수 있으며, 임의의 각에 대한 삼등분을 얻을 수 있다는 측면에서는 삼등분 도구3, 삼등분 도구4가 삼등분 도구1, 삼등분 도구2보다 더 개선된 도구라 할 수 있다. 그리고 구조의 간결성(사용된 막대의 개수)을 고려하면, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4가 삼등분 도구2보다 바람직하다고 할 수 있다(삼등분 도구2에는 막대가 4개가 사용되고, 삼등분 도구3과 삼등분 도구4에는 3개의 막대가 사용됨).

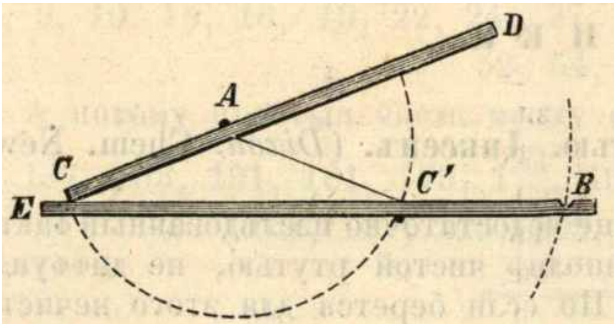
살펴본 4종류의 삼등분 도구가 모두 아르키메데스의 삽입방법에 기반한다(모두 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 외각의 성질이 사용됨)는 것을 고려하면, 기술한 것과 같은 사용의 편이성, 분할되는 각의 임의성, 구조의 간결성은 삼등분 도구의 비교에서 의미있는 요인이 될 수 있을 것이다. 그렇다면, 사용의 편이성, 분할되는 각의 임의성, 구조의 간결성, 그리고 삼등분 도구의 제작 과정의 간편성, 제작 비용 등을 고려한다면, 더 개선된 각의 삼등분 도구는 어떠한 것이 있을까?

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. Vepritskii의 각의 삼등분 도구

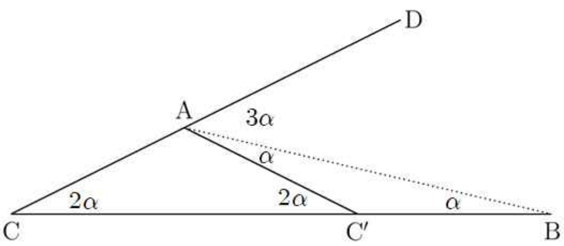
Vepritskii(1888)가 제안한 임의의 각을 삼등분하는 도구는 2개의 자와 끈으로 구성된다. 자가 2개 있다고 하

자. 첫 번째 자인 CD에 임의의 선분 AC를 생각하자. 두 번째 자에 점 C′을 잡고, $\overline{AC}=\overline{AC'}$이 되도록 점 A와 C′를 끈으로 연결한다. 그리고 두 번째 자에 $\overline{AC'}=\overline{C'B}$인 점 B를 잡아서, 점 B의 위치에 구멍을 뚫는다(그림 Ⅲ-1). 점 B에 연필을 꽂고 움직이면 두 번째 자는 점 C를 따라 미끄러지듯 움직이게 된다.



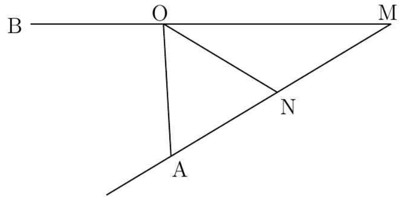
[그림 Ⅲ-1] Vepritskii의 각의 삼등분 도구

이제, [그림 Ⅲ-1]에서 각의 삼등분을 찾아보자. [그림 Ⅲ-1]에서 점선으로 된 부분을 지우고, 자를 선으로 단순화하자. 그리고 점 A와 B를 연결하면 [그림 Ⅲ-2]를 얻을 수 있다. [그림 Ⅲ-2]에서 $\overline{AC}=\overline{AC'}=\overline{C'B}$이다. 삼각형 C′AB는 $\overline{AC'}=\overline{C'B}$인 이등변삼각형이며, $\angle ABC'=\angle BAC'$이다. 그리고 삼각형 ACC′도 $\overline{AC}=\overline{AC'}$인 이등변삼각형이며, $\angle ACC'=\angle AC'C$이다. 이때, 각 AC′C는 이등변삼각형 C′AB의 외각이므로, $\angle AC'C=2\angle ABC'$이다. 한편, ∠DAB는 삼각형 ACB의 외각이므로, $\angle DAB=\angle ABC'+\angle ACC'$이다. $\angle ACC'=2\angle ABC'$인 것을 생각하면, $\angle DAB=3\angle ABC'$이고 $\angle ABC'=\frac{1}{3}\angle DAB$가 된다.

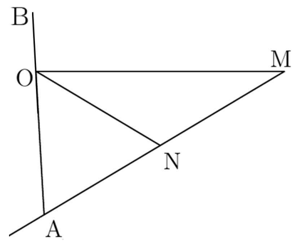


[그림 Ⅲ-2] 선으로 표현된 Vepritskii의 각의 삼등분 도구

이제, [그림 Ⅲ-2]가 [그림 Ⅱ-4]와 어떤 관계인지 살펴보자. [그림 Ⅱ-4]를 180°만큼 회전시키면 [그림 Ⅲ-3]이 되고, 선분 MO의 연장선에 OB를 잡는 대신에 선분 AO의 연장선 OB를 잡자. 그러면 [그림 Ⅲ-4]가 얻어진다. 이때 [그림 Ⅲ-4]에서 $\overline{OA}=\overline{ON}=\overline{NM}$이다. 이제, [그림 Ⅲ-4]에서 점 A를 중심으로 점 M을 시계방향으로 약 45°만큼 회전시킨 다음 직선 AM을 수평이 되도록 하면, [그림 Ⅲ-2]가 얻어진다.



[그림 III-3] [그림 II-4]를 180°만큼 회전

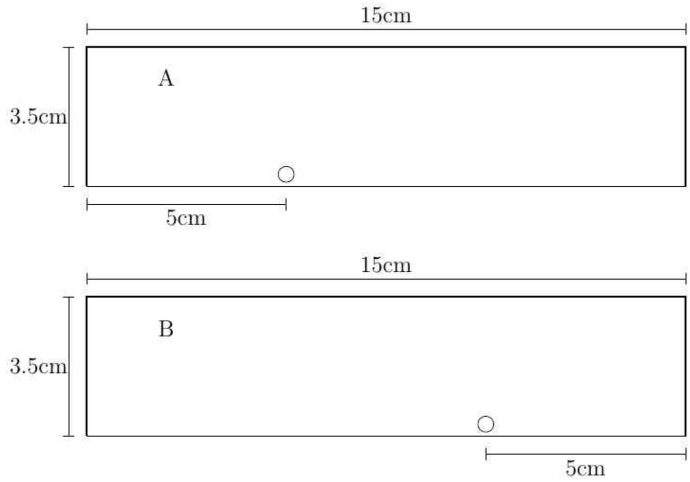


[그림 III-4] [그림 III-3]과는 다른 연장선

[그림 Ⅲ-4]를 각의 삼등분 도구4의 구조인 [그림 Ⅱ-11]과 비교해 보자. [그림 Ⅲ-4]와 [그림 Ⅱ-11]에서는 $\overline{OA}=\overline{ON}=\overline{NM}$이 성립하며, 모두 이등변삼각형 OAN, NOM이 포함되어 있다. 그러나 [그림 Ⅲ-4]에는 이등변삼각형 OAN의 변 OA를 연장하는 보조선 OB가 있지만, [그림 Ⅱ-11]에는 이등변삼각형 NMO의 변 MO를 연장하는 보조선 OB가 있다. 결국, [그림 Ⅲ-4]를 기반으로 하는 각의 삼등분 도구는 각의 삼등분 도구4와는 다른 구조를 가지게 된다.

2. 각의 삼등분 도구의 제작

Vepritskii는 자와 끈을 이용하여 만든 각의 삼등분 도구를 제안하였다. 본 연구에서는 15㎝ 자 2개 A, B와 철끈을 이용하여 각의 삼등분 도구를 제작하였다. 쉽게 구입할 수 있는 자를 이용하여 [그림 Ⅲ-5]와 같은 도안을 만들었다. 자 A, B에 드릴을 이용하여 지름이 2㎜인 구멍을 뚫었으며 철끈을 이용하여 자를 연결하였다.

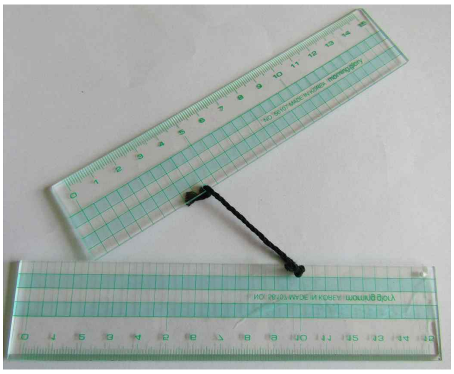


[그림 III-5] 각의 삼등분 도구 제작을 위한 자의 도안

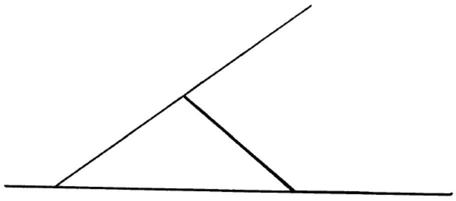
[그림 Ⅲ-6]은 [그림 Ⅲ-5]의 도안을 기반으로 자를 이용하여 만든 각의 삼등분 도구이다([그림 Ⅲ-6]을 삼등분 도구5라 하자). [그림 Ⅲ-6]에서 위쪽에 있는 자가 [그림 Ⅲ-5]의 자 A에 해당하며, 아래쪽에 있는 자가 [그

림 Ⅲ-5]의 자 B에 해당한다. [그림 Ⅲ-6]에서 위쪽에 있는 자의 눈금을 보면 4.5에 해당하는 곳에 구멍이 있다. 이것은 자의 앞쪽에 눈금이 표시되지 않은 부분의 길이가 0.5㎝라는 감안하였기 때문이다. 그리고 아래쪽의 자에는 15의 눈금에 구멍을 뚫어서 자의 끝부분임을 표시하고 Vepritskii와 같이 연필을 꽂을 수 있도록 하였다.

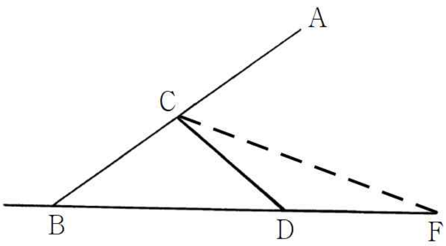
이제, [그림 Ⅲ-6]에 있는 도형들을 선으로 나타내면 [그림 Ⅲ-7]을 얻을 수 있다. [그림 Ⅲ-7]에 알파벳으로 첨자를 붙이고 점 C와 F를 연결하면 [그림 Ⅲ-8]이 된다. 이때, 삼각형 CBD와 DCF가 이등변삼각형이므로, $\angle CFD = \frac{1}{3}\angle ACF$가 되며, 각 CFD는 각 ACF의 $\frac{1}{3}$이다.



[그림 Ⅲ-6] 자로 만든 각의 삼등분 도구5



[그림 Ⅲ-7] 각의 삼등분 도구5에서 각



[그림 Ⅲ-8] 각의 삼등분 도구5에서 각의 삼등분

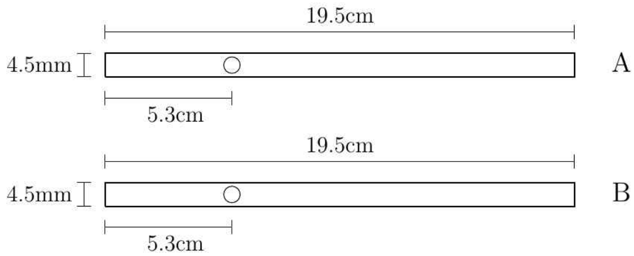
[그림 Ⅲ-6]과 같이 자를 이용하여 각의 삼등분 도구5를 만들면, 제작 비용이 거의 들지 않으며 [그림 Ⅲ-7]에서와 같은 선분들을 긋기가 쉽다는 장점이 있다. 그리고 삼등분 도구5를 삼등분 도구4와 비교해 보자. [그림 Ⅱ-10]에 있는 삼등분 도구4는 제작 과정에서 막대들을 서로 연결하는 부분이 3곳이 있으며(막대들을 연결하기 위해 3개의 막대에 총 5개의 구멍을 뚫어야 함), 점 F가 움직일 수 있도록 막대에 길(구멍)을 만들어야 하는 어려움이 있었다. 그러나 [그림 Ⅲ-6]의 삼등분 도구5에서는 자에 2개의 구멍만 뚫고 구멍들을 철끈으로 연결하면 도구가 완성된다. 제작 과정에서 보면, 삼등분 도구5가 삼등분 도구4에 비해 편리하다는 것을 알 수 있다.

한편, 삼등분 도구5를 만들 때에 자를 이용하였는데, 일반적으로 사용되는 자는 폭이 넓다([그림 Ⅲ-6]에 있는 자의 폭은 3.5㎝임). 이로 인해, 각의 삼등분 도구5를 사용하여 각의 삼등분을 표시하는 과정에서 도구의 조작에 불편함이 발생할 수 있다.

본 연구에서는 이러한 불편함을 개선하기 위해, 각의 삼등분 도구를 나무젓가락을 이용하여 제작하였다. 일반

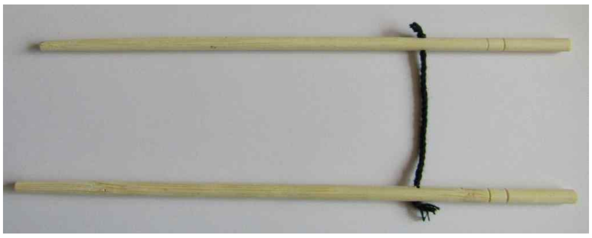
적으로 구할 수 있는 나무젓가락은 단면이 직사각형인 것과 원형인 것이 있다. 나무젓가락의 재질과 두께의 균일성을 비교해 보니 각의 삼등분 도구의 제작에는 원형의 나무젓가락이 더 적합한 것으로 판단되었다.

원형의 나무젓가락은 지름은 4.5㎜이고, 길이는 19.5㎝인 것을 사용하였다. 원형의 나무젓가락을 기반으로 각의 삼등분 도구의 도안을 [그림 Ⅲ-9]와 같이 만들 수 있다. 나무젓가락에는 한끝으로부터 5.3㎝ 떨어진 곳에 지름이 2㎜인 구멍을 뚫었다.



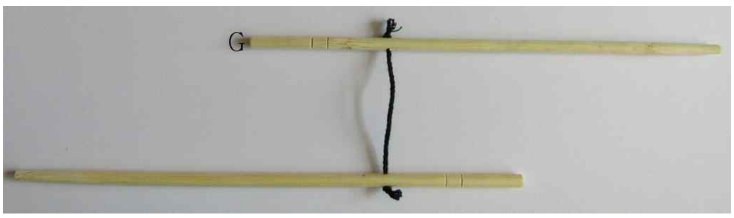
[그림 Ⅲ-9] 각의 삼등분 도구 제작을 위한 나무젓가락 도안

본 연구에서는 [그림 Ⅲ-9]의 도안, 원형의 나무젓가락 2개, 철끈을 이용하여 [그림 Ⅲ-10]과 같이 각의 삼등분 도구를 제작하였다([그림 Ⅲ-10]을 삼등분 도구6이라 하자). 나무젓가락에 뚫린 구멍을 통해 철끈으로 2개의 나무젓가락을 연결하였다. 이때, 두 나무젓가락의 사이가 5.3㎝가 되도록 철끈의 길이를 결정하였다.

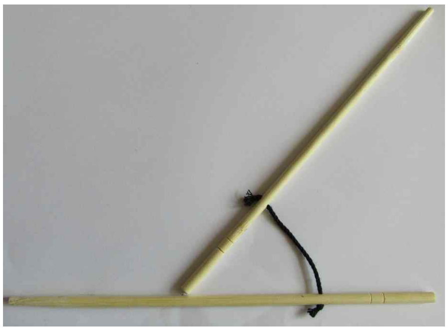


[그림 Ⅲ-10] 나무젓가락으로 만든 각의 삼등분 도구6

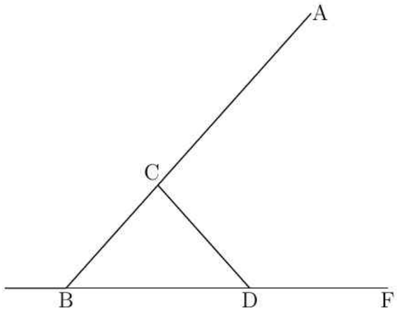
삼등분 도구6을 이용하여 각의 삼등분을 나타내기 위해, 우선 [그림 Ⅲ-11]과 같이 위쪽에 있는 나무젓가락을 뒤집어 놓는다. 그리고 [그림 Ⅲ-11]에서 G의 위치가 아래쪽에 있는 나무젓가락의 긴 부분에 접하도록 이동시킨다([그림 Ⅲ-12]). 이제, [그림 Ⅲ-12]에서 각들을 선을 이용하여 나타내고 첨자를 붙이면 [그림 Ⅲ-13]이 된다.



[그림 Ⅲ-11] 각의 삼등분 도구6에서 젓가락의 위치 변화

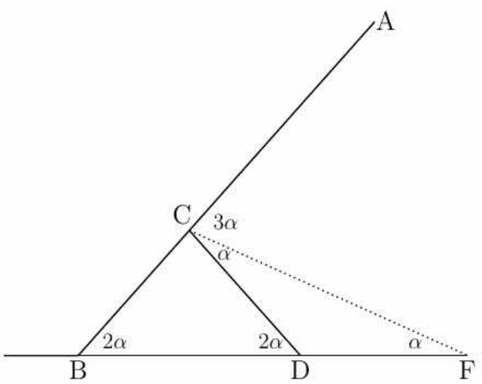


[그림 Ⅲ-12] 각의 삼등분 위치 결정



[그림 Ⅲ-13] 각의 삼등분 도구6에서 각

[그림 Ⅲ-13]에서 점 C와 F를 연결하면, [그림 Ⅲ-14]가 된다. 이때, 이등변삼각형 DCF에서 $\angle DFC = \angle DCF = \alpha$가 되며, 각 CDB는 이등변삼각형 DCF의 외각이므로 2α이다. 그리고 이등변삼각형 CDB에서 $\angle CDB = \angle CBD = 2\alpha$이다. 한편, 각 ACF가 삼각형 CBF의 외각이라는 것을 생각하면, $\angle ACF = \angle CBF + \angle CFB = 3\alpha$가 된다는 것을 알 수 있다. 이로부터 각 CFD는 각 ACF의 $\frac{1}{3}$이라는 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-14] 각의 삼등분 도구6에서 각의 삼등분

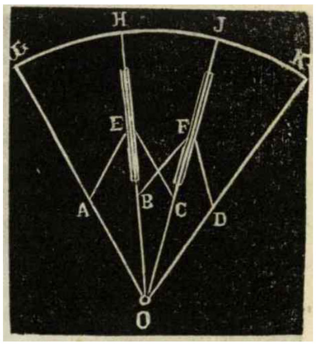
자로 만든 삼등분 도구5와 비교할 때, 나무젓가락을 이용한 각의 삼등분 도구6의 장점은 나무젓가락의 지름이 자의 폭에 비해 매우 작기 때문에, 각의 삼등분 위치를 결정하기 위해 나무젓가락을 이리저리 움직이는 과정이 편리하다는 것이다. 한 가지 염두에 두어야 할 것은 [그림 Ⅲ-12]를 [그림 Ⅲ-13]과 같은 선으로 표현하기 위해, 직선을 긋기 위한 목적의 자가 추가적으로 필요하다는 것이다.

한편, 삼등분 도구1, 삼등분 도구2와 비교할 때, 삼등분 도구6은 구조적으로 유연하므로 원하는 크기의 각에 대해 삼등분인 각을 구할 수 있다. [그림 Ⅲ-12]에서 위쪽에 있는 나무젓가락을 아래쪽 나무젓가락을 따라 좌우로 움직이면서 다양한 각([그림 Ⅲ-13]에서 각 ACD)을 얻을 수 있으며, [그림 Ⅲ-14]에서 같이 각 ACF의 $\frac{1}{3}$인 각 AFD를 얻을 수 있다.

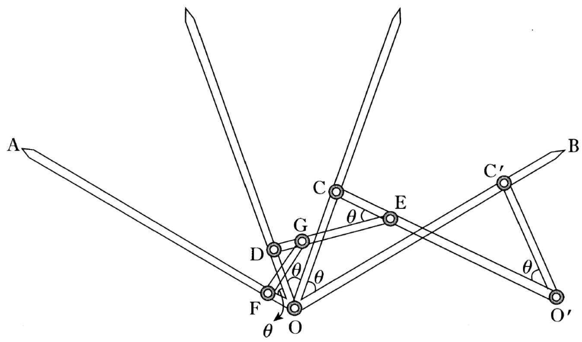
삼등분 도구3, 삼등분 도구4와 비교하면, 삼등분 도구6은 구조적으로 간단하며 제작이 편리하다. 삼등분 도구3, 삼등분 도구4는 3개의 막대로 구성되어 있는데, 막대들에 여러 개의 구멍을 뚫고 나사 등으로 연결하며, 일부 막대가 움직일 수 있도록 다른 막대에 홈을 내야 했다. 그러나 삼등분 도구6에서는 2개의 나무젓가락에 각 한 개의 구멍을 만들어 철끈으로 연결하면 완성되기 때문에, 제작의 편의성이라는 측면에서 커다란 장점을 가질 수 있다.

이와 같은 구조적인 간결성이나 제작의 편이성은 각을 삼등분하는 다른 도구들([그림 Ⅱ-1]의 아르키메데스 방법에 근거하지 않은)과 비교하면 더욱 두드러진다. 예를 들어, 삼등분 도구7은 2개의 컴퍼스 GOJ와 HOK로 만들어진 것이다([그림 Ⅲ-15]를 부채꼴로 생각한다면 컴퍼스 GOJ는 첫 번째 반지름 OG와 세 번째 반지름 OJ로 된 것이며, 컴퍼스 HOK는 두 번째 반지름 OH와 네 번째 반지름 OK로 된 것이다). 이때, 반지름 OH는 각 GOJ의 이등분선이고 반지름 JO는 각 HOK의 이등분선이 되도록 해야 한다. 그러면 ∠GOH = ∠HOJ = ∠JOK가 되며, ∠GOK가 삼등분된다. 삼등분 도구7의 바탕이 되는 수학적 생각은 직관적으로 간단하지만, 삼등분 도구7을 제작하려면 선분 HO, JO에서 점 E, F가 움직일 수 있도록 하고, 선분 OH, OJ가 각 GOJ, HOK의 이등분선이 되도록 고정하는 어려움이 발생할 수 있다.

한편, [그림 Ⅲ-16]에 있는 켐페의 삼중꼴(삼등분 도구8이라 하자)에서 선분 OD, OC는 각 AOB의 삼등분선이 된다(제작 단계나 삼등분선의 증명은 김진호, 김용대, 서보억(2011)에 상세하게 제시되어 있다). 삼등분 도구8은 8개의 막대를 나사 등으로 연결한 구조를 가진다. 막대를 움직이면서 여러 종류의 각에 대한 삼등분선을 얻을 수 있지만, 구조적으로나 제작 과정은 삼등분 도구6과 비교하면 훨씬 복잡하다는 것을 볼 수 있다.

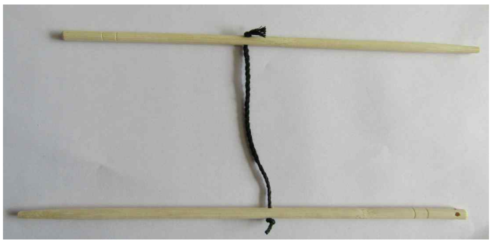


[그림 Ⅲ-15] 삼등분 도구7 (그림 출처: Shpachinskii, 1891, p.43)

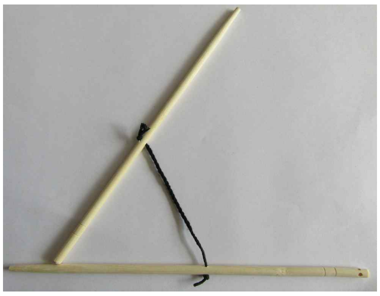


[그림 Ⅲ-16] 켐페의 삼중꼴을 활용한 각의 삼등분 도구(삼등분 도구8) (그림 출처: 김진호, 김용대, 서보억, 2011, p.136)

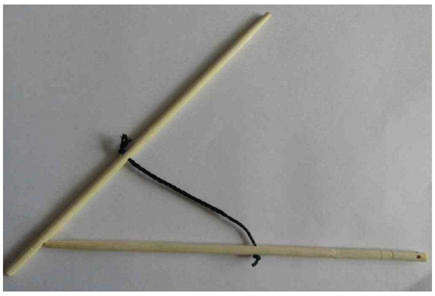
이제, 각의 삼등분 도구를 제작할 때에 나무젓가락에 뚫는 구멍의 위치와 관련하여 주의할 점을 살펴보자. 만약, [그림 Ⅲ-17]과 같이 나무젓가락의 중간에 구멍을 뚫어 철끈으로 두 나무젓가락을 연결하였다고 하자. 그러면, [그림 Ⅲ-18]과 같이 각의 삼등분이 되도록 위치를 잡을 수도 있지만, [그림 Ⅲ-19]와 같이 각의 삼등분 위치를 만들 수 없는 경우도 발생하게 된다.



[그림 III-17] 각의 삼등분을 위한 다른 도구



[그림 III-18] 각의 삼등분 위치

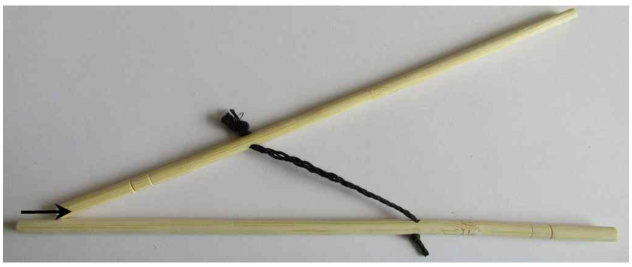


[그림 III-19] 각의 삼등분을 얻을 수 없는 경우

그렇다면, 각의 삼등분 위치를 항상 만들 수 있으려면, 나무젓가락의 어느 부분에 구멍을 뚫어 각의 삼등분 도구를 만들어야 하는가? [그림 Ⅲ-20]과 같이, 각의 삼등분 도구에서 나무젓가락 두 개가 일렬로 놓이는 경우를 생각하자.

[그림 III-20] 나무젓가락이 일렬로 놓이는 경우

이 경우에 [그림 Ⅲ-20]에서 위쪽에 있는 나무젓가락의 A지점을 아래쪽의 나무젓가락을 따라 왼쪽으로 움직일 수 없으므로, [그림 Ⅲ-19]와 같은 경우는 발생할 수 없다. 한편, 위쪽에 있는 나무젓가락의 A지점을 아래쪽의 나무젓가락을 따라 오른쪽으로 움직이게 되면, [그림 Ⅲ-21]과 같이 각의 삼등분 위치가 만들어진다.



[그림 III-21] 각의 삼등분 위치

결국, [그림 Ⅲ-20]에서 $\overline{CD}$가 $\overline{AB}$와 철끈을 합한 것보다 크면, [그림 Ⅲ-20]과 같이 항상 각의 삼등분 위치를 만들 수 있다. 즉, 부등식 $\overline{CD} > \overline{AB} + \overline{BC}$가 성립해야 각의 삼등분 위치를 항상 찾을 수 있는 도구를 만들 수 있다. 각의 삼등분 도구를 만들 때 철끈의 길이($=\overline{BC}$)가 $\overline{AB}$, $\overline{CE}$와 같다는 것을 생각하면, 부등식 $\overline{CD} > \overline{AB} + \overline{BC}$로부터 부등식 $\overline{CD} > 2\overline{CE}$를 얻을 수 있다. 결국, [그림 Ⅲ-20]에서 $\overline{CE}$가 나무젓가락 $\overline{DE}$의 $\frac{1}{3}$이하가 되도록 점 C의 위치를 잡고, 점 C의 위치에 구멍을 뚫어 두 나무젓가락을 연결하면, 각의 삼등분 위치를 항상 찾을 수 있는 도구를 만들 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

우리나라 수학과 교육과정에서는 매체 및 교구를 활용해 학생들의 흥미를 유발하고 수학 교수-학습의 효율성, 다양성을 모색할 것을 권고하고 있다. 수학 교수-학습에서 이러한 접근은 학생들이 수학적 지식을 경험적이고 실험적인 수학적 활동과 관련시켜 구성할 수 있는 기회를 가진다는 측면에서 의미있는 방향 설정이라 할 수 있다. 특히, 최근에 수학적 개념과 방법을 다양한 매체와 교구를 통해 경험할 수 있는 수학체험활동이 전국적으로 보급, 확산되는 것은 주목할 만하다. 이러한 추세에 발맞추어 수학교육학 분야에서도 다양한 교구들을 교육적인 관점에서 분석, 제작, 체계화하고, 이들의 다양한 교육적 활용 가능성을 모색하는 것은 충분히 가치있는 연구가 될 것이다.

본 연구에서는 각의 삼등분선 작도를 위해 아르키메데스의 삽입방법에 기반한 다양한 각의 삼등분 도구들을 조사하고, 일부 도구들을 제작하여 그 특징을 비교, 분석하였다. 이를 통해, 삼등분 도구의 제작 및 활용에 필요한 특징으로 사용의 편이성, 삼등분되는 각의 임의성, 구조의 간결성을 분석하였으며, 이에 덧붙여 제작의 간편성과 제작 비용도 고려해야 함을 밝혔다.

기술한 삼등분 도구의 제작 및 활용의 필요 조건들을 고려하여, 수학교실에서 쉽게 재료를 구할 수 있으며 제작도 간단한 도구로 Veprtskii가 제안한 각의 삼등분 도구에 주목하였다. Veprtskii는 자와 끈을 이용하여 만들 수 있는 각의 삼등분 도구를 제안하였다. 본 연구에서는 자와 철끈을 이용하여 삼등분 도구5를 만들었다. 그런데, 자는 일정한 폭이 있기 때문에, 삼등분 도구5를 이용하여 각의 삼등분 위치를 결정하는데 불편함이 발생하였다. 이를 개선하기 위해, 본 연구에서는 Veprtskii의 방법을 개선하여 나무젓가락과 철끈을 이용하여 삼등분 도구(삼등분 도구6으로 명명한)를 제작하였다.

삼등분 도구6과 다른 삼등분 도구들과의 비교를 통해 알 수 있는 삼등분 도구6의 장점은 다음과 같다. 첫째, 삼등분 도구6은 삼등분 도구1, 삼등분 도구2, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4에 비해 부품의 개수, 구조나 제작의 편이성에서 장점을 가진다. 삼등분 도구6은 2개의 나무젓가락과 철끈을 만들어졌으며, 이것은 헤르메스 컴퍼스를 이용하는 삼등분 도구1, 4개의 막대를 볼트와 너트로 연결한 삼등분 도구2, 3개의 막대를 볼트와 너트로 연결한 삼등분 도구3과 삼등분 도구4에 비해 부품의 개수도 적고, 구조나 제작도 간단하였다. 특히, 삼등분 도구2, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4에서는 나무막대들이 직접 연결되므로, 이를 위해 나무막대의 연결 부분에 구멍을 뚫고 볼트와 너트를 이용하여 연결해야 했다. 반면에, 삼등분 도구6에서는 나무젓가락들이 직접 연결되지 않고, 철끈이 2개의 나무젓가락 사이를 연결하게 되므로 제작 과정이 간단하였다.

둘째, 삼등분 도구6은 사용의 편이성에서도 긍정적으로 평가할 수 있다. 삼등분 도구1, 삼등분 도구3을 이용하여 각의 삼등분을 나타내려면 반원, 지름의 연장선이 표시된 종이가 필요했지만, 삼등분 도구6은 사용상 이러한 제약이 따르지 않는다. 그리고 삼등분 도구3, 삼등분 도구4에서는 막대를 지정된 홈(통로)을 통해서 이동시켜야 하므로, 도구를 파손하지 않으려면(홈이 파인 막대는 옆쪽이 부러질 가능성이 있음) 조심스럽게 막대를 움직여야

한다. 반면에, 삼등분 도구6은 나무젓가락을 원하는 위치로 제한없이 움직일 수 있으며 파손의 위험도 없다.

셋째, 삼등분 도구6은 특정한 각이 아닌 임의의 각의 삼등분을 나타낼 수 있다. 삼등분 도구1, 삼등분 도구2는 특정한 각의 삼등분만 나타낼 수 있지만, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4는 임의의 각의 삼등분을 나타낼 수 있다. 임의의 각의 삼등분을 나타낸다는 점에서 보면, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4, 삼등분 도구6은 같은 장점을 가진다고 할 수 있다.

삼등분 도구6의 장점을 덧붙인다면, 제작 비용이 저렴하고 제작 과정이 간단하다는 점이다. 삼등분 도구6의 부품은 나무젓가락 2개, 철끈이므로, 부품을 구입하는 비용이 거의 발생하지 않는다. 그리고 나무젓가락에 구멍을 하나씩 뚫어서 철끈으로 연결하여 제작하기 때문에, 제작 과정도 간단하다. 특히, 삼등분 도구들을 수납할 때에 삼등분 도구6은 삼등분 도구1, 삼등분 도구2, 삼등분 도구3, 삼등분 도구4에 비해 차지하는 공간이 적기 때문에, 대량의 보관에서도 장점을 가진다고 할 수 있다.

기술한 장점들을 생각하면, 수학교실에서 삼각형의 외각의 성질, 이등변삼각형의 성질과 관련한 탐구활동에서 삼등분 도구6이 폭넓게 활용될 수 있을 것으로 생각된다. 그리고 학생들은 구체적이고 경험적인 활동에 포함된 수학적 내용의 의미를 알고, 이러한 활동에서 수학적 탐구를 수행할 기회를 가질 수 있을 것으로 기대된다.

한 가지 덧붙인다면, 수학 교구나 수학체험활동 관련 재료들이 개발되어 교사들에게 소개되거나 판매되고 있다. 그런데, 수학 교실에서 사용하는 경우 이러한 교구나 재료들의 구입에 많은 비용이 소요되는 경우가 있다. 이러한 고비용은 수학교실에서 적당한 교구를 선택하여 활용하는 데에 제한점이 될 수 있다. 수학교실에서 매체 및 교구를 적극적으로 활용하기 위해서는 다양한 수학 교구나 수학체험활동 소재를 개발하는 것뿐만 아니라, 주변에서 쉽게 접할 수 있는 재료, 부품들을 이용하여 학생들이나 교사들이 쉽게 제작하고 활용할 수 있는 방법들도 함께 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

고은성 (2021). 초등수학 교수학습에서 수학적 교구의 역할 분석, 초등교육연구, **32(2)**, 321-331.

Ko, E. (2021). Analysis of the Role of Mathematical Teaching Aids in Elementary Teaching and Learning, *Journal of Elementary Education Research,* **32(2)**, 321-331.

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부.

Ministry of Education, Science, and Technology (2011). *Mathematics Curriculum.* MOEST.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부.

Ministry of Educaion (2015). *Mathematics Curriculum.* MOE.

고주연・박미미・신인선 (2019). 수학체험전을 운영한 중학생들의 의사소통 역량 변화, 수학교육학연구, **29(1)**, 113-141.

Ko, J., Park, M. & Shin, I. (2019). A Study on the Change of Communication Competence of Middle School Students Running Mathematics Experience Exhibition, *Journal of Educational Research in Mathematics,* **29(1)**, 113-141.

김기원・도혜경 (2010). 금강비 측정 교구 개발 및 체험수학활동, East Asian mathematical journal, **26(2)**, 281-299.

Kim, K., & Do, H. (2010). A Development of Geumgang Ratio Caliper and Mathematics Experience, *East Asian mathematical journal,* **26(2)**, 281-299.

김민정 (2011). 영재학생을 위한 작은 수학체험전, 한국수학교육학회 제16회 국제수학영재교육세미나 프로시딩, 193-201.

Kim, M. (2011). Small Mathematical Experience for Gifted students, *KSME Proceedings of the 16th International Seminar on Education of Gifted Students in Mathematics*, 193-201.

김응태・박한식・우정호 (2004). 수학교육학개론. 서울대학교출판부.

Kim, E., Park, H., & Woo, J. (2004). *Introduction to Mathematics Education*. SNU Press.

김진호・김용대・서보억 (2011). 3대 작도 문제 해결을 위한 곡선과 기구. 교우사.

Kim, J., Kim Y., & Suh B. (2011). *Curves and Mechanisms for Solving the Three Major Construction Problems*, Kyowoo.

서보억 (2020). 수학체험교구 개발 모형 및 이를 적용한 최대공약수 교구 개발 연구. 수학교육 논문집, **34(4)**, 587-603.

Suh, B. (2020). A Study on the Model for the Development of Tools for Math Activities & it's Application, *Communications of Mathematical Education,* **34(4)**, 587-603.

안승석 (2012). 전북수학체험전 운영과 방향, 한국수학교육학회 2012 추계학술대회 프로시딩, 251-259.

An, S. (2012). A Management and Direction of Jeonbuk Mathematics Experience Exhibition, *Proceedings of the KSME 2012 Fall Conference on Mathematics Education*, 251-259.

장훈 (2008). 체험수학-교구를 이용한 삼각형의 내심과 외심 지도, 한국수학교육학회 전국수학교육연구대회 프로시딩 제40회, 37-45.

Jang, H. (2008). Mathematics Experience-Teaching inner center and circumcenter of triangle using instruments of education, *KSME Proceedings of National Meeting of Mathematics Education the 40th*, 37-45.

한인기 (2019). 수학사도 배우고 수학도 알고. 교우사.

Han, I. (2019). *Learning History of Mathematics and Knowing Mathematics*. Kyowoo.

Bunt L., Jones P. & Bedient J. (1976). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Dover Publ.

Shpachinskii, E.K. (1891). Matematicheskie Melochi, *Vestnik Opytnoi Fiziki i Elementarnoi Matematiki*, **122**, 40-43. (In Russian)

Vepritskii A.I. (1888). O Mexanicheskoi Trisektsii Urla, *Vestnik Opytnoi Fiziki i Elementarnoi Matematiki*, **41**, 112-113. (In Russian)

Yates R. (1971). *The Trisection Problem*. NCTM.

A Fabrication of an Angle Trisection Tool Using Veprtskii's Method

Han, Inki
Gyeongsang National University
E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

In this study various angle trisection tools based on Archimedes' insertion method were investigated, some tools were fabricated and their characteristics were compared. Through these works, it was found that factors such as the convenience of use, arbitrariness of the trisected angle, and simplicity of structure should be considered in the production and utilization of the trisection tool.

Considering the factors described above, attention was paid to the method proposed by Veprtskii A.I. in 1888 as a making method of the angle trisection tool. In this study, we improved the method proposed by Veprtskii A.I., we used two wooden chopsticks and a string to make an angle trisection tool. The improved trisection tool had fewer parts than other trisection tools, a simple structure, and more convenient usage. In particular, this tool divided an arbitrary angle(not a specific angle) into the same three parts, and the production cost was low and the production process was simple. This tool is expected to be widely used in concrete activities related to the properties of the exterior angles of triangles and the properties of isosceles triangles in mathematics classrooms.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60
* Key words : fabrication of an angle trisection tool, Archimedes′ insertion method, mathematics teaching tools, mathematics experience