韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2022.25.1.81
2022. 1. 제 25권, 제 1호, 81-100

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2022, Vol. 25, No. 1, 81-100

초등 수학 개방형 과제의 해법 공간 분석 연구

김남균(청주교육대학교, 교수)† · 김수지(개신초등학교, 교사) · 송동현(종촌초등학교, 교사)
오민영(연서초등학교, 교사) · 이현정(샛별초등학교, 교사)

본 연구의 목적은 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 틀을 개발하고 그 유용성과 적용 가능성을 학생들의 해법 공간 분석 사례를 바탕으로 탐색하는 것이다. 문헌검토와 선행연구를 바탕으로, 학생들의 개방형 과제의 해법을 구조적으로 분석하는 틀로 결과 공간(Outcome spaces), 방법 공간(Method spaces), 표현 공간(Representation spaces)의 하위 공간으로 조직화한 해법 공간 분석 틀(OMR-framework)을 개발하였다. 약수와 배수 주제의 개방형 과제 유형 중 역 과제와 구성활동적 과제를 개발하고 초등학교 5~6학년 학생 181명에게 과제를 해결하게 하였다. 해법 공간 분석 틀(OMR-framework)을 적용하여 학생들의 해법 공간을 분석한 결과, 해법 공간과 방법 공간에서 역과제와 구성활동적 과제에 대한 학생의 약수와 배수 개념 이해의 특성과 문제해결에서 사용되는 가역적인 사고 및 조작과 구성의 사고 방법을 알 수 있었다. 그리고, 학생의 표현 공간에서 형식적인 수학적 표현 외에 학생들이 구성한 비형식적인 다양한 표현 방식을 분석할 수 있었다. 학생들이 해결한 것을 결과, 방법, 표현의 관점에서 해결의 특징을 분석할 수 있을 뿐 아니라 해법 공간을 이루는 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 사이의 연결성도 탐색할 수 있었다.

I. 서론

고차원적인 사고와 수학 역량을 기르는 것을 목표로 하는 수학 수업에서는 개방형 과제가 많이 활용된다. 개방형 과제란 학생들이 다양한 해법을 구성할 수 있는 과제를 말한다. 개방형 과제에 대해 학생들이 구성한 해법은 해결 결과의 양과 질에서 다양하거나 해결 방법이 다양할 수 있다. Becker와 Shimada(2004)에 따르면 개방형 교수법은 개방형 과제를 과제로 제시하여 그곳에 내재하는 해법의 다양성을 이용하여 수업을 전개하고, 학생들이 이전에 학습했던 자신의 지식, 기능, 사고 방법을 결합함으로써 뭔가 새로운 것을 발견하는 경험을 제공하는 수학지도 방법이다. 김남균(2019)에 의하면, 개방형 교수법에서 중요한 것은 과제뿐만 아니라 과제를 해결하는 과정에 학생들이 적극적이고 창의적으로 해결하도록 돕는 교사의 안내이다. 그런데 Bingolbali(2011)는 교사들이 다양한 해법들에 익숙하지 않고 개방형 과제에 대한 학생들의 다양한 해법을 분류하고 평가하거나 옳은지 그른지 판단하는 데 어려움이 있다고 하였다.

개방형 과제와 개방형 교수법에 관한 선행연구를 살펴보면 개방형 과제를 이용하여 학생의 수학적 창의성을 평가할 수 있고 개방형 교수법을 활용하여 학생의 창의성을 신장시킬 수 있음을 연구하고 보고한 연구가 다수이다. 개방형 과제에 대한 학생의 해법을 Leikin(2009a)의 수학적 창의성 측정 모델을 사용하여 분석하고 채점한 연구(e.g. 하수현, 이광호, 2014; 이대현, 2014)와 개방형 과제의 일종인 다중해법 과제에서 학생들이 제시한 다중해법의 질적 차이를 분석한 연구(e.g. 백동현, 이경화, 2017) 등이 그 예이다. 근래에는 수학학습과 창의성 신장에 개방형 과제가 유용함을 바탕으로 개방형 교수법으로 수업하는 교사의 전문성 신장에 관한 연구(e.g. 김남균, 2019)가 이루어졌다.

김남균(2019)은 교사들은 개방형 교수법을 시도하고 적용하는 데 있어 이론적 이해는 어렵지 않았지만, 실제 수업 실행에 어려움을 겪었으며 학생의 반응을 검토하고 관련 연구를 참고하여 학생의 사고를 확장하는 활동을 수업에 추가 보완해야 한다고 주장하였다. 그런데 개방형 과제에 대한 학생의 해법을 분석한 연구(e.g. 박화영, 김수환, 2006; 김은혜, 박만구, 2011; 백동현, 이경화, 2017)는 주로 학생의 과제해결 전략을 분석하였으며 해법의 특징을 분석하여 학생의 이해를 탐

* 접수일(2021년 12월 23일), 심사(수정)일(2022년 1월 6일), 게재확정일(2022년 1월 18일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 개방형 과제, 해법 공간, 약수와 배수
* 이 논문은 청주교육대학교 대학발전연구과제(과제번호 CJE2020D027) 연구 수행 결과로 작성된 것임
† 교신저자 : ngkim@cje.ac.kr

색하는 논의는 많지 않았다. 그리고 연구자마다, 과제마다 학생의 해법을 분석하는 방법에 차이가 있었다.

Leikin(2007)은 개방형 과제의 해결 과정을 다양한 측면에서 분석하고자 해법 공간(Solution spaces) 개념을 제안하였다. Leikin(2009b)은 해법 공간을 교사가 수업을 계획할 때 활용할 수 있으며 해법 공간 분석을 통해 학생의 수학적 지식, 문제해결, 창의성 면의 특징을 알 수 있다고 하였다. 개방형 과제를 탐구하는 학생들의 학습 기회가 많아지도록 하는 데 있어 학생들의 해법을 체계적이고 일관되게 분석하고 분석한 결과를 바탕으로 학생의 이해를 탐색할 필요가 있다. 이때 Leikin(2007, 2009a, 2009b)의 해법 공간 개념은 개방형 과제에 대한 학생들의 다양한 해법을 분석하고 해법의 특징과 학생의 이해를 파악에 도움이 될 것이다.

이와 같은 필요성에 따라 본 연구에서는 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 틀을 개발한 다음 그 유용성과 적용 가능성을 탐색하는 연구를 수행하였다. 개방형 과제 중에서 약수와 배수 주제의 역 과제와 구성활동적 과제를 개발하고, 문헌검토와 선행연구를 토대로 해법 공간 분석 틀을 개발하였다. 개발한 해법 공간 분석 틀을 적용하여 실제 학생의 개방형 과제 해결 사례를 분석하여 유용성과 적용 가능성을 탐색하였다. 본 연구를 통해 개방형 과제에 대한 학생 해법을 체계적으로 분석하는 방법을 제안하고 궁극적으로 개방형 과제의 활용과 개방형 교수법 실행에 도움이 되고자 한다.

II. 이론적 배경

본 장에서는 개방형 과제의 의미와 특징을 살펴본 다음 해법 공간의 의미와 특징을 탐색한다. 개방형 과제의 개발과 해법 공간 분석 틀 개발에 대한 시사점을 얻기 위함이다. 해법 공간의 구성은 수학적 내용과 수학적 사고가 두루 영향을 주기 때문에 본 연구의 범위인 역 과제와 구성활동적 과제의 해결 관련 사고에 관한 선행연구를 살펴보았다.

1. 개방형 과제의 의미와 특징

개방형 과제에 대한 정의에 관한 서술은 연구자마다 차이가 있지만, 그 의미에서 공통된 부분을 찾을 수 있다. 권오남 외(2005)와 신인선과 김시명(2006)은 개방형 문제를 출발 상황은 명확하지만, 목표 상황에 해당하는 정답은 여러 가지인 문제로 정의하였다. 이대현(2008)은 개방형 문제가 다양한 문제해결 전략이나 다양한 해가 존재하는 문제라고 하였다. 김은혜, 박만구(2011)는 개방형 문제를 문제 접근방법에 따라 다양한 해결 전략을 이용하여 여러 가지 답을 산출할 수 있는 문제라고 하였다. 선행연구를 종합하여 볼 때, 개방형 과제의 의미는 '과제를 해결하는 과정이나 해결한 결과가 다양할 수 있는 과제'라고 할 수 있다.

Pehkonen(1997, as cited in 백동현, 이경화, 2017)은 문제의 출발 상황과 목표 상황을 구분할 때, 넓은 의미의 개방형 문제(open problem)란 출발 상황이나 목표 상황이 열린 문제를 의미하며, 수학 수업에서 주로 쓰이는 좁은 의미의 개방형 문제(open-ended problem)란 출발 상황은 닫혀 있지만, 목표 상황은 열려있는 문제라고 하였다. 이때 목표 상황의 개방을 두 가지로 세분화할 수 있는데, 답이 여러 개인 상황과 답은 하나지만 해결 과정이 열려있는 상황이다(백동현, 이경화, 2017). 본 연구에서 사용한 개방형 과제는 좁은 의미의 개방형(open-ended)이며 그 중 답이 여러 개인 과제이다.

선행연구에서 밝힌 개방형 과제의 특징은 수학적 사고, 능력, 태도 등에 관한 것이 있다. 권오남 외(2005)와 신인선, 김시명(2006)에 따르면 개방형 문제의 특징은 학생들이 다양한 접근방식 중 적절한 것을 선택하고 그 이유를 설명할 수 있으며 다양한 사고와 고차원적 사고력을 발휘할 수 있다. 이대현(2008)에 의하면 개방형 문제는 문제해결자의 수학적 능력이나 특성에 따라 다양한 반응이 가능하다는 특징이 있다. Nodda(1995, as cited in 권오남 외, 2005)는 개방형 문제는 정형화되어 있지 않기 때문에 모든 학생에게 적합하고 친숙하며 흥미롭고 문제해결 후 성취감을 느낄 수 있으며 학생 수준에 따라 변화 가능하다고 밝혔다.

坪田耕三(1993, as cited in 정동권, 1996)는 개방형 문제의 유형을 여섯 가지로 분류하였는데, 관계나 법칙을 찾아내는 문제, 분류하는 문제, 수량화의 문제, 역 문제, 조건 불비의 문제, 구성활동적 문제가 그것이다. 본 연구에서 사용한 과제는 역 과제와 구성활동적 과제이며 각 과제의 의미와 특징은 다음과 같다.

가. 역 과제의 의미와 특징

Krutetskii(2014)는 역 문제를 순행 문제와 대비되는 개념으로 제시하였다. 역 문제는 순행 문제와 그 주제는 같으나 순행 문제의 미지수가 조건으로 주어지고, 순행 문제의 조건 중 일부가 미지수로 바뀐 문제이다. 역 문제의 특징은 문제해결자의 사고과정을 역방향으로 바꾼다는 점이다. 이때 순행 문제의 조건이 역 문제의 미지수로 바뀌면서 열렸기 때문에 문제해결자는 다양한 길을 통해 역행할 수 있다. 즉 역 과제에서는 도착지 또는 도착 과정이 다양하므로 해법의 다양성이 확보된다.

Krutetskii(2014)에 따르면 조건 부족 문제는 문제해결에 필요한 정보 자체가 부족하게 주어졌기 때문에 정보 수집에 관한 사고를 관찰하고자 할 때 사용된다. 그런데 역 문제는 문제해결에 필요한 정보는 문제에 주어졌다고 보고 정보 수집보다는 정보 처리에 관한 사고를 관찰할 때 사용된다. 한 문제가 한 유형과 일대일 대응되지 않을 수 있으며 관찰자의 의도에 따라 문제의 유형은 정해질 수 있다. 예를 들어, 임송현(2014)은 넓이가 36㎠인 직사각형의 둘레를 구하는 문제를 조건 부족 문제라고 하였고, 김은혜, 박만구(2011)는 넓이가 48㎠인 평면도형을 10개 그리는 문제를 역 문제이면서 구성활동적 문제라고 보았다. 수학 교과서에서는 보통 주어진 길이를 사용하여 넓이를 구하도록 하므로 거꾸로 넓이가 주어진 점에서 역 문제로 파악할 수 있다. 문제해결에 필요한 길이 조건을 문제해결자가 넓이 값을 고려하여 정해야 하기 때문에 조건 부족 문제로 볼 수도 있다.

나. 구성활동적 과제의 의미와 특징

坪田耕三(1993, as cited in 정동권, 1996)에 따르면 구성활동적 문제에서 구성활동이란 실제로 학생이 어떤 것을 만들어 보게 하는 활동이다. 구성활동의 예에는 입체도형의 전개도를 자유롭게 접어보고 입체도형을 구성하는 활동, 한 변의 길이가 주어진 이등변삼각형을 기하판 위에 구성하는 활동 등이 있다. 다만, 구성활동이 교구를 사용한 실물 제작을 의미하는 것은 아니다.

고은성 외(2008)는 구성활동이란 표현을 정다면체를 직접 제작하고 그 특징을 탐구하여 정다면체의 정의를 구성한다고 할 때 사용하였다. 임재훈(2012)은 구성활동이란 표현을 넓이 모델과 길이 모델을 사용하여 분수의 곱셈 알고리즘을 구성한다고 할 때 사용하였다. 구성활동에서 구성의 대상은 실물이 아닌 수학적 정의, 성질, 알고리즘 등일 수 있고 구성활동에 반드시 조작 교구를 사용해야 하는 것도 아님을 알 수 있다.

정두영, 김도상(2000)은 수학 교수 학습 과정에서 구체적인 조작 활동을 통해 학생이 스스로 지식을 구성(construction)할 수 있다고 표현하였다. 신동선, 류희찬(1998, 양은경, 신재홍, 2014에서 재인용)에 따르면 현재의 기하 교육은 연역적 증명에 강조를 두고 있으나 기하학적 개념이나 원리들이 학생들에게 의미 있게 이해되는 것이 중요한바, 이를 위해서는 학생들이 연역 이전에 수학적 지식을 탐구하는 '구성'의 과정이 필요하다. 본 연구의 구성활동적 과제는 김연주, 나귀수(2009)의 연구처럼 학생들로 하여금 어떤 것을 실제로 만들거나 그리는 등 구성하여 해결하거나 구성한 과정을 종합 반성하여 문제해결에 타당하게 접근하도록 하는 과제를 말한다.

2. 해법 공간과 해법 공간 분석

이 부분에서는 예 공간의 개념을 바탕으로 해법 공간의 개념을 탐색한다. 그리고 해법 공간 개념을 적용하여 학생들의 해법을 분석하는 방법에 관한 선행연구를 살펴보고 해법 공간 분석 틀에 관한 시사점을 도출한다.

가. 해법 공간의 의미와 특징

Leikin과 Levav-Waynberg(2008, Tsamir et al., 2010에서 재인용)는 해법 공간(Solution spaces)을 개인, 집단, 또는 전문가가 보유한 문제에 대한 해법의 모음(collection)을 나타내는 것으로 정의하였다. Leikin(2007)은 개방형 과제의 일종인 다중해법 과제에 대한 학생들의 다양한 해법을 분석하면서, Watson과 Mason(2005)의 예 공간 개념을 확장하여 학생의 수학적 창의성을 측정에 해법 간 개념을 제안하였다. 해법 공간에 관한 연구는 예 공간 연구에 비해 매우 적게 이루어졌다. 해법 공간의 의미와 특징을 예 공간에 관한 선행 연구에서 살펴보는 것이 적절해 보인다.

우선 Watson과 Mason(2015)의 예 공간 개념과 학생들의 예 공간 구성에 관한 연구(e.g. 오민영, 2020;

오민영, 김남균, 2021)를 살펴보면, 예 공간은 서로 관계있는 예들로 채워진 구조물로서 예들의 단순한 모임은 아니다. 해법 공간을 이루는 해법들은 서로 관련이 있으며 따라서 해법들 사이 연결성을 분석할 필요가 있다. 선행연구(e.g. Leikin, 2009a, 2009b)에서는 해법 공간의 특징 탐색 연구에서 다양한 해법을 분석하였지만 다양한 해법의 연결지어 관련성과 특징을 도출하지 않은 것으로 보인다.

둘째, 예 공간은 개인적이고 상황적이기 때문에 예 공간을 구성하는 사람과 상황에 따라 구성된 예 공간은 달라질 수 있다. Leikin과 Lev(2013)의 연구에 따르면 해법 공간은 과제 의존적이다. 오민영(2020)은 학생들은 과제설계에 따라 스스로 예 공간을 구성하고 확장할 수 있다고 보았다. 따라서 과제를 제시하고 학생들이 해법 공간을 원활하게 구성할 수 있게 안내하는 교사의 역할이 중요하다.

셋째, 사다리꼴 넓이 공식 탐구 학습과정에서 학생들이 생성한 예를 분석한 연구(오민영, 김남균, 2021)를 보면 예 공간을 구성하는 과정에서 학생들은 귀납적으로 예들에 담긴 일반성을 포착하기도 하고 포괄성이 높은 일반적인 예를 생산해 내기도 하였다. 마찬가지로 개방형 과제에 대한 학생의 다양한 해법도 일반성과 효용성에서 차이가 있을 것이며, 해법 공간을 이루는 해법 중 포괄성이 높은 해결 방법과 해결 결과의 특징에 주목할 필요가 있다.

나. 해법 공간 분석

개방형 과제에 대한 학생의 다양한 해법을 분석한 선행연구(e.g. 박화영, 김수환, 2006; 김은혜, 박만구, 2011; 백동현, 이경화, 2017)는 대부분 결과가 한 가지이고, 방법이 여러 가지인 개방형 과제를 사용하였다. 선행연구에서 해법 분석은 방법에 대한 분석이 주를 이루고, 과제와 연구자에 따라 분석방법이 일관되지 않았다. 해법의 다양성을 수업에서 적극적으로 이용하기 위해서는 해법을 다양한 측면에서 체계적이고 일관되게 분석하는 방법이 필요하다.

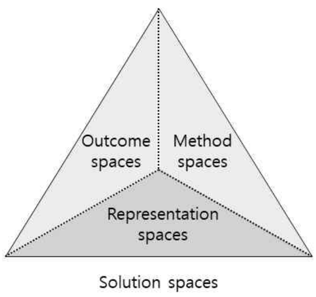
Leikin(2009a)에서 학생들의 해법 공간을 분석한 방법을 살펴보면 다음과 같다. 서로 다른 해법으로 분류되는 기준은 크게 수학적 개념을 다르게 표현한 경우와 서로 다른 수학적 성질을 사용한 경우이다. 즉, Leikin(2009a)는 수학적 표현과 수학적 성질을 바탕으로 해법 공간을 분석했음을 알 수 있다. 그런데 해법 공간은 과제 의존적 특성이 있으므로 Leikin(2009a)이 사용하는 과제의 특성을 살펴볼 필요가 있다. Leikin의 연구(e.g. Leikin, 2007; 2009a; 2009b, Leikin & Lev, 2013)에서 사용되는 다중해법 과제(Multiple solution tasks)는 개방형 과제의 일종이지만 답이 하나이고 그 답을 내기 위한 과정이 여러 개인 과제이다. 본 연구에서 사용하는 개방형 과제는 답이 여러 개인 개방형 과제이기 때문에 차이가 있다.

Tsamir et al.(2010)은 해결한 결과와 해결하는 방법이 모두 다양한 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 틀을 제안하였다. Tsamir et al.(2010)은 해법 공간 개념을 두 가지로 세분화하였는데 하나는 결과 공간(Outcome spaces)이고 다른 하나는 방법 공간(Method spaces)이다. 과제에 대한 해법(Solutions)은 결과(Outcomes)와 결과를 내기 위해 쓰인 방법(Methods)으로 이루어진다는 점을 바탕으로 결과 공간과 방법 공간을 새롭게 정의하였다. Tsamir 등(2010)은 학생들이 구성한 결과 공간과 방법 공간을 각각 분석한 다음 결과 공간과 방법 공간을 연결 지어 교차 분석하였다. Tsamir et al.(2010)의 연구는 5, 6세의 유아들의 해법을 대상으로 한 연구였지만, 답이 여러 개인 과제의 해법 공간을 분석한 최근 연구(e.g. Bingölbali & Bingölbali, 2020)에서도 결과 공간과 방법 공간의 개념이 초등학생 대상으로 적용되었다. 따라서 Tsamir et al.(2010)의 결과 공간, 방법 공간 개념이 유용하며 초등학생의 해법을 대상으로도 적용 가능함을 알 수 있다. 한편 Tsamir et al.(2010)에서 과제의 적용은 면담을 통해 이뤄졌기 때문에 학생의 수학적 표현을 수집 분석되지 않은 것으로 보이다. 해법 공간 분석 연구(예 e.g. Leikin, 2009a)에서는 학생들의 표현에 초점을 두어 분석한 바 있다. 본 연구에서는 검사지를 수집하고 학생들의 지필 기록을 바탕으로 학생들의 해법 공간을 분석하기 때문에 Tsamir et al.(2010)의 연구 방법과 차이가 있다. Palmér와 van Bommel(2018)은 조합 과제에 대한 학생들의 해법을 조합 체계와 표현의 관점에서 분석하였으며 해법 공간 분석은 학생들이 지필 기록한 자료를 토대로 이뤄졌다. 따라서 본 연구와 같이 검사지의 기록을 바탕으로 학생들의 해법 공간을 분석하는 경우 Leikin(2009a), Palmér와 van Bommel(2018)의 제안대로 해법의 표현을 분석할 필요

가 있다. 표현은 일반적으로 맥락적, 시각적, 언어적, 신체적, 상징적 표현으로 분류되는데(NCTM, 2014, p25), 본 연구에서 표현이란 Leikin(2009a), Palmér와 van Bommel(2018)의 표현과 같이 시각적, 상징적 표현을 의미한다.

종합해 보면, 결과는 하나이지만 해결 방법이 여러 개인 과제의 경우 방법에 초점을 두어 해법 공간을 분석할 수 밖에 없다. 반면에 결과와 방법이 둘 다 개방된 과제의 경우 해법 공간 분석은 결과와 방법에 대해 모두 이뤄져야 한다. 해결한 결과와 방법을 다양하게 표현할 수 있으므로, 학생이 해결 결과를 기록한 경우에는 학생 해결의 수학적 표현도 분석할 필요가 있다. 따라서 해법을 결과(Outcomes), 방법(Methods), 표현(Representations)으로 나누어 분석하는 것은 해법 공간에 대한 체계적인 접근으로 적절하고 유용하다고 판단된다.

이상과 같은 이론적 검토를 토대로 본 연구에서는 해법 공간을 결과 공간(Outcome spaces), 방법 공간(Method spaces), 표현 공간(Representation spaces)으로 구조화하여 개방형 과제에 대한 학생의 해법을 분석하였다. [그림 1]은 본 연구에서 구조화한 해법 공간 분석 틀로 OMR-framework이라고 명명하고자 한다.



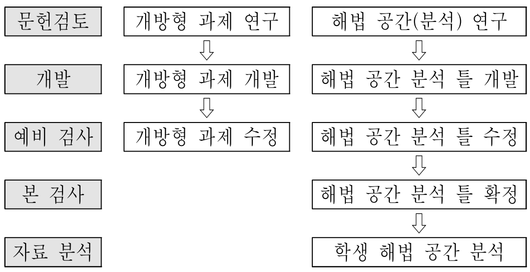
[그림 1] 해법 공간 분석 틀(OMR-framework)

분석 틀의 OMR은 해결 결과(Outcome)를 의미하는 O, 해결 방법(Method)를 의미하는 M, 표현(Representation)을 의미하는 R을 결합한 것이다. OMR-framework은 해법 공간을 결과 공간(O-spaces), 방법 공간(M-spaces), 표현 공간(R-spaces)으로 나누어 분석함을 의미한다. 결과(O)란 답과 해결 과정이 여러 가지인 개방형 과제를 해결하여 찾을 수 있는 복수의 결과들을 의미한다. 방법(M)이란 그러한 결과들을 내기 위해 행해진 여러 가지 방법들로 한 결과를 내기 위해 한 가지 이상의 방법들이 사용될 수 있고 한 가지 방법을 사용하여 여러 개의 결과를 낼 수도 있다. 표현(R)이란 결과와 방법에 대한 표현으로 한 학생이 한 가지 이상의 표현을 사용할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 절차

본 연구 내용은 개방형 과제의 해법 공간을 분석하는 틀을 개발하고 약수와 배수 주제의 역 과제와 구성 활동적 과제에 적용하여 분석 틀의 유용성과 적용 가능성을 탐색하는 것이다. 연구의 수행을 위하여 먼저 개방형 과제에 관한 연구와 해법 공간 및 해법 공간 분석에 관한 연구를 검토하였다. 문헌검토 결과를 바탕으로 개방형 과제와 해법 공간 분석 틀을 개발하였다. 본 연구에서 개발한 개방형 과제를 초등학교 5, 6학년 학생 69명에게 적용하여 예비 검사하고, 예비 검사결과를 토대로 개방형 과제와 해법 공간 분석 틀을 수정하였다. 수정한 개방형 과제를 초등학교 5, 6학년 학생 181명에게 적용하여 본 검사하고 해법 공간 분석 틀을 확정하였다. 본 검사결과를 바탕으로 본 연구에서 개발한 해법 공간 분석 틀에 따라 학생들이 구성한 해법 공간을 분석하였다. 앞서 서술한 연구의 절차를 요약하면 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 연구 절차

2. 연구대상

본 연구의 대상은 본 검사에 참여한 초등학교 5, 6학년 학생 181명이다. 예비 검사는 S시의 J초등학교와

C시의 G초등학교 5, 6학년 학생 69명을 대상으로 이루어졌다. 본 검사는 S시의 J초등학교, C시의 G초등학교와 J초등학교 5, 6학년 학생 181명을 대상으로 진행하였다. 본 검사 대상인 181명은 예비 검사 대상과 다른 학생들이다. 기초학력 진단검사 결과 기준 점수에 미달한 학생 수는 S시 J 초등학교의 경우 5학년 1개 반이 1명, 나머지 3개 반은 0명이다. C시의 G 초등학교의 경우 학급당 0~2명이었고, C시의 J 초등학교의 경우 2명이었다. 세 학교는 교육열이 심하지도, 부족하지도 않은 지역에 위치하며 보통의 학력 수준이라는 평을 받는다.

본 검사에 참여한 학생들이 약수와 배수 단원을 학습한 시기는 5학년의 경우 본 검사 한 달 전, 6학년의 경우 본 검사 일 년 전이다. 본 검사에 참여한 학생들의 소속과 수는 [표 1]과 같다.

[표 1] 연구대상

소속	수 (n=181)
S시, J초등학교	5학년 2개 학급 (n=48)
	6학년 2개 학급 (n=42)
C시, G초등학교	5학년 1개 학급 (n=23)
	6학년 2개 학급 (n=42)
C시, J초등학교	6학년 1개 학급 (n=26)

3. 개방형 과제 개발: 역 과제와 구성활동적 과제

개방형 과제의 다양한 해법을 살펴보면 한 과제가 여러 가지 수학 주제와 관련 있음을 알 수 있다. 이 때문에 교사들은 개방형 과제를 수업의 어느 시점에서 사용해야 할지, 영재 학생이 아닌 일반 학생들을 대상으로도 개방형 과제를 적용할 수 있을지 의문을 가질 수 있다. 이에 본 연구에서는 일반 학생들을 대상으로 한 약수와 배수 단원 수업에서 개방형 과제를 활용할 수 있도록 약수와 배수를 주제로 하는 개방형 과제를 개발 및 적용하였다. 적어도 약수와 배수 수업에서 본 연구에서 개발한 약수와 배수를 주제로 한 개방형 과제를 적용할 수 있다고 가정한 것이다. 물론 본 과제들은 약수와 배수 이외의 지식, 기능을 사용하여도 해결할 수 있다는 점에서 여전히 개방형 과제의 특징에 부합한다.

본 연구의 참여자들은 일반 학생들이므로 개방형 과제를 개발하기 위해 먼저 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서 5학년 1학기 2. 약수와 배수 단원을 분석하였다. 분석 결과 교과서에는 개방형 과제가 충분하지 않았고 제시된 개방형 과제도 관계나 법칙을 찾는 과제 유형에 한정되어 있었다. 이에 본 연구에서 개발하고 예비 검사를 통해 수정한 역 과제와 구성활동적 과제는 각각 [그림 3]과 [그림 4]와 같다.

2 공배수가 24인 두 수의 쌍을 가능한 많이 찾으세요.

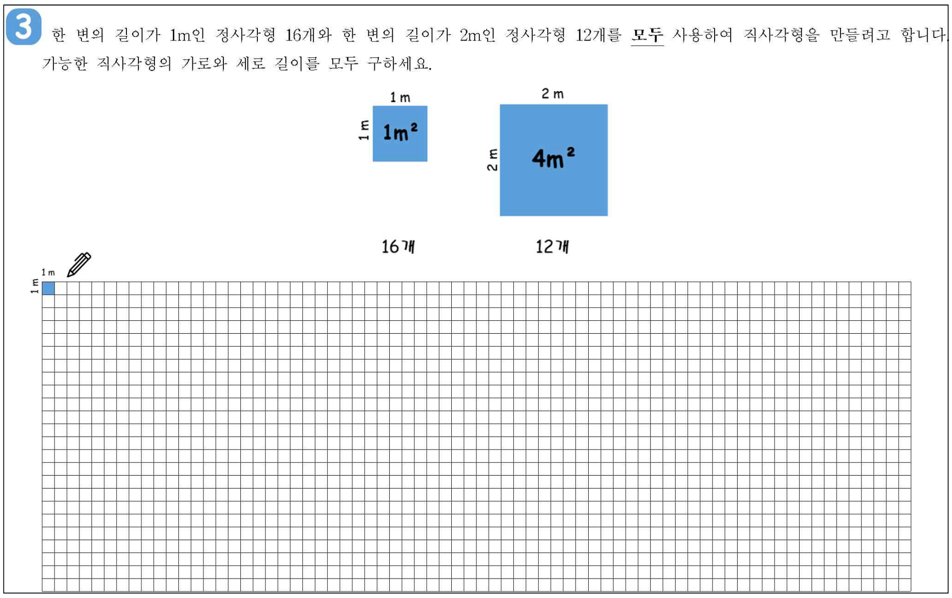
[그림 3] 개방형 역 과제

[그림 3]에 제시된 역 과제는 공배수가 24인 두 수의 쌍을 가능한 한 많이 쓰는 과제로 두 수가 주어질 때 두 수의 공배수를 찾는 순행 과제와 짝을 이룬다. 학생들은 순행 과제를 교과서를 통해 익히 접하였고 이런 경우 Krutetskii(2014)에 따르면 역 과제는 순행 과제와 따로 제시될 수 있다.

[그림 4]에 제시된 구성활동적 과제는 한 변의 길이가 1m인 정사각형 16개와 한 변의 길이가 2m인 정사각형 12개를 모두 사용하여 만들 수 있는 직사각형의 가로와 세로를 구하는 과제이다. 직사각형을 모눈에 그릴 것을 과제에서 지시하지는 않았으나 ‘직사각형을 만들려고 합니다.’라는 표현과 모눈 근처의 볼펜 표시를 통해 직사각형을 직접 구성하게 하였다. 구성활동적 과제의 경우 예비 검사결과 두 종류의 정사각형 중 한 종류의 정사각형만 사용하여 직사각형을 구성한 응답들이 발견되었다. 본 검사에서는 두 종류의 정사각형을 ‘모두’ 사용할 것은 강조하여 수정하였다.

4. 자료 수집 및 분석

본 연구에서 수집한 자료는 연구대상 학생 181명이 해결한 역 과제와 구성활동적 과제의 해결지이다. 본 검사를 실시하면서 교사는 검사지를 배포하고 별도의 지도를 하지 않고 학생들이 문제를 해결하도록 충분히 시간을 주었다. 연구대상 학생은 개별적으로 문제를 해결하였다. 수집한 자료를 역 과제와 구성활동적 과제의 해법 공간 분석 틀에 따라서 분석하였다. 자료



[그림 4] 개방형 구성활동적 과제

분석은 본 검사지를 바탕으로 해법 공간 분석 틀에 근거하여 이뤄졌다.

가. 역 과제의 해법 공간 분석 틀

역 과제의 해법 공간 중 결과 공간은 24의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24로 만든 두 수의 쌍 36개로 이뤄진다. 체계적인 조합 과제의 해법 공간을 분석한 Palmér와 Bommel(2018)에 의하면 서로 다른 조합이란 한 항목을 고정하고 다른 항목을 바꾸는 것이다. 본 연구의 역 과제가 24의 약수인 수 8개를 두 개씩 조합하는 과제라는 점을 고려하면 (2, 3)과 (2, 4)는 다른 결과이지만, (2, 3)과 (3, 2)는 같은 결과이다. 중복한 결과가 제외된 결과 공간은 [그림 5]와 같이 36개의 결과로 구성된다. 학생들은 두 수의 쌍을 표현할 때 ‘a, b’나 ‘a와 b’ 등 다양한 표현방식을 사용하는데 이는 표현 공간 분석 시엔 서로 다른 표현으로 분석되지만, 결과 공간 분석 시엔 같은 결과로 분석된다. 예를 들어, ‘1, 3’과 ‘1과 3’은 둘 다 24의 약수 1과 3을 조합하여 만든 같은 결과이다.

1,1							
1,2	2,2						
1,3	2,3	3,3					
1,4	2,4	3,4	4,4				
1,6	2,6	3,6	4,6	6,6			
1,8	2,8	3,8	4,8	6,8	8,8		
1,12	2,12	3,12	4,12	6,12	8,12	12,12	
1,24	2,24	3,24	4,24	6,24	8,24	12,24	24,24

[그림 5] 역 과제의 결과 공간(O-spaces)

역 과제의 해법 공간 중 방법 공간은 24의 약수 중 두 수를 조합하는 방법 5개로 이뤄진다. 방법은 ‘앞 수 고정(Fixing the first number), 뒷 수 고정(Fixing the second number), 두 수 변동(Leaving the numbers alone), 쌍 위치 변환(Switching pair position), 같은 수 조합(Combining the same numbers)’이며 [표 2]는 방법 공간을 이루는 5개의 방법과 방법별 대표 사례이다.

앞 수 고정이란 쌍을 이루는 두 수 중 앞에 쓴 수를 고정하고 뒤에 쓴 수를 바꾸는 방법이다. [표 2]의 앞 수 고정 예시를 살펴보면 앞 수로 1을 고정하고 뒷 수를 1, 2, 3 등으로 변형하고 있다. 뒷 수 고정이란 쌍을 이루는 두 수 중 뒤에 쓴 수를 고정하고 앞에 쓴 수를 바꾸는 방법이다. [표 2]의 뒷 수 고정 예시를 보

면 뒷 수를 24로 고정하고 앞 수를 2, 4, 6 등으로 변형하고 있다. 두 수 변동이란 쌍을 이루는 두 수를 모두 바꾸는 방법으로 앞 수 또는 뒷 수를 고정한 경향이 보이지 않는다. 쌍 위치 변환이란 중복한 결과를 생성하여 결과의 개수를 늘린 방법이다. [표 2]의 쌍 위치 변환 예시를 살펴보면 (1, 24), (2, 12) 등이 있음에도 (24, 1), (12, 2) 등이 있다. 같은 수 조합은 [표 2]의 예시에서 볼 수 있듯이 (4, 4), (2, 2) 등 한 가지 수로 두 수의 쌍을 만든 방법이다

[표 2] 역 과제의 방법 공간(M-spaces)

방법	예시
앞 수 고정	1.1 / 1.2 / 1.3/1.4 / 1.6 / 1.12 / 1.8
뒷 수 고정	(2,24), (4,24), (6,24), (8,24), (12,24)
두 수 변동	/1,24/ 6,4/2,12/3,8/2,6/1,12/2,12/
쌍 위치 변환	1,24/2,12/3,8/4,6/ 6,4/8,3/12,2/24,1
같은 수 조합	(4.4) (2.2) (3.3).(6.6) (12.12)

역 과제의 해법 공간 중 표현 공간은 두 가지로 나뉘는데 하나는 쌍을 나타내는 표현들로 이뤄진 공간이고, 다른 하나는 쌍과 쌍을 구분하는 표현들로 이뤄진 공간이다. 먼저 쌍을 나타내는 표현들로 이뤄진 표현 공간은 총 5개 표현으로 구성되며 ‘a, b’, ‘(a, b)’, ‘a와 b’, ‘a×b’, ‘a-b’가 그것이다.

다음으로 쌍과 쌍을 구분하는 표현들로 이뤄진 표현 공간은 총 5개 표현으로 구성되며 ‘/’을 사용한 경우, ‘,’를 사용한 경우, ‘빈칸’을 둔 경우, ‘줄 바꿈’을 한 경우, ‘삼각형 모양으로 배열’한 경우였다. [표 3]은 역 과제의 표현 공간을 이루는 10개 표현을 요약한 것이다.

[표 3] 역 과제의 표현 공간(R-spaces)

쌍을 나타내는 표현	쌍과 쌍을 구분하는 표현
a, b	/
(a, b)	,
a와 b	빈칸
a×b	줄 바꿈
a-b	삼각형 배열

나. 구성활동적 과제의 해법 공간 분석 틀

구성활동적 과제의 해법 공간 중 결과 공간은 넓이가 64㎡인 직사각형의 가로와 세로이다. 과제의 조건을 살펴보면 한 변의 길이가 2m인 정사각형을 사용하여 직사각형을 구성해야 하므로 가로 또는 세로가 1m인 직사각형은 만들어질 수 없다. 따라서 결과 공간을 이루는 결과는 총 5개로 다음 [표 4]와 같다. 직사각형의 가로와 세로는 학생들이 수로 쓴 경우, 직사각형을 그린 경우 모두에서 파악할 수 있다.

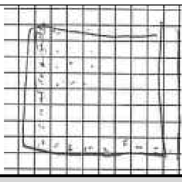
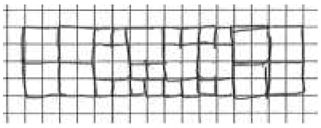
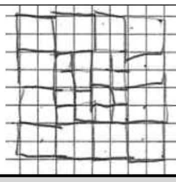
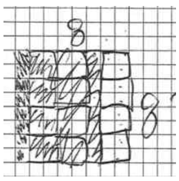
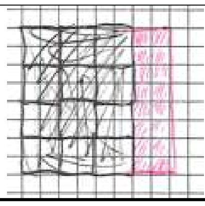
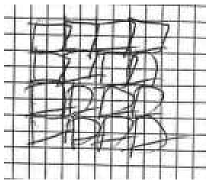
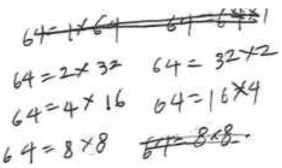
[표 4] 구성활동적 과제의 결과 공간(O-spaces)

직사각형의 가로 (m)	직사각형의 세로 (m)
2	32
4	16
8	8
16	4
32	2

본 연구에서 구성활동적 과제는 두 종류의 정사각형을 사용하여 넓이가 64㎡인 직사각형을 만드는 과제이다. 넓이의 측정과 관련된 구성 방법이 사용되므로 Sarama와 Clements(2009)의 넓이 측정 학습 경로를 바탕으로 방법 공간 분석 틀을 설정하였다. 방법 공간을 구성하는 방법의 유형은 [표 5]에 제시된 7가지가 있다. [표 5]는 구성활동적 과제에 대한 본 연구대상 학생들의 답을 각 방법의 유형별 대표 사례로 정리한 표이다.

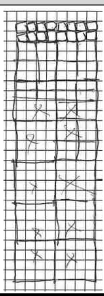
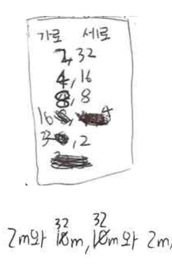
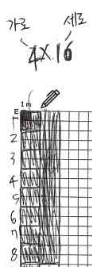
변으로 넓이 측정(Side-to-side area measurer)은 사고가 넓이가 아닌 길이에 머물러 있는 방법이다. [표 5]의 예시를 살펴보면 언뜻 넓이가 64㎡인 것을 알고 한 변의 길이가 8m인 정사각형을 구성한 것으로 보이나, 실제로는 과제의 지시문에 적힌 16이란 숫자를 보고 한 변의 길이를 8m로 설정한 경우였다. 초보적인 덮기(Primitive coverer)란 행이나 열을 반복하지 않고 단위를 불규칙적으로 사용하여 직사각형을 구성한 방법이다. 넓이 단위 연결 및 반복(Area unit relater and repeater)이란 한 변의 길이가 1m인 정사각형끼리, 한 변의 길이가 2m인 정사각형끼리 연결하고 반복하나 행 또는 열을 반복하지는 않은 방법이다. 행 구성(Partial row structurer)은 행 또는 열을 반복하나 두 종류의 정사각형을 번갈아 사용하며 직사각형을 구성

[표 5] 구성활동적 과제의 방법 공간(M-spaces)

연번	1	2		3
방법	변으로 넓이 측정	초보적인 덮기		넓이 단위 연결 및 반복
예시				
연번	4	5	6	7
방법	행 구성	행렬 구성	넓이 보존	곱셈으로 구조화
예시				

한 방법이다. 행렬 구성(Row and column structurer)은 행과 열을 반복하는데 한 종류의 정사각형을 모두 사용한 후 다른 한 종류를 사용한 방법이다. 넓이 보존(Area conserver)은 여러 단위를 모아 새 단위로 바꾸는 방법이다. [표 5]의 넓이 보존 예시를 살펴보면 한 변의 길이가 1m인 정사각형 4개를 한 변의 길이가 2m인 정사각형으로 바꾸어 사용하고 있다. [표 5]의 넓이 단위 연결 및 반복의 예시를 보면 한 변의 길이가 1m인 정사각형 16개가 모여져 있으나 여전히 내부선이 있으므로 새 단위를 만들었다고 보기 어렵다. 마지막으로 곱셈으로 구조화(Array structurer)란 곱셈하여 64가 되는 두 수를 구하여 넓이가 64㎡인 직사각형의 가로와 세로를 찾은 방법이다.

[표 6] 구성활동적 과제의 표현 공간(R-spaces)

표현	도형	수	도형&수
예시			

구성활동적 과제의 해법 공간 중 표현 공간은 넓이를 구하는 방법이 도형으로만 이루어지는지, 직사각형의 가로와 세로의 길이만 작성하는지, 도형을 그리고 넓이 구하는 식을 함께 쓰는지의 3가지 방법으로 유형화하고 분석하였다. [표 6]은 구성활동적 과제의 표현 공간과 각 표현의 대표 사례를 나타낸 것이다.

다. 자료 분석 방법

본 연구의 목적이 학생들의 오류와 오개념 파악에 있지 않으므로 정답만을 분석하였다. 정답과 오답을 분류하는 기준은 과제에서 구하도록 요구한 바를 결과로 바르게 썼는가였다. 역 과제의 경우 24의 약수 중 두 수를 조합한 결과들이 정답으로 분류되었다. 구성활동적 과제의 경우 직사각형의 가로와 세로를 [표 4]와 같이 구한 결과들이 정답으로 분류되었다. 해법 공간 분석은 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 순서로 하였다. 먼저 결과 공간 분석 틀에 따라 적절한 결과를 산출한 답을 분류하였다. 그리고 각 결과를 내기 위해 사용한 방법을 방법 공간 분석 틀에 근거하여 코딩하였다. 마지막으로 결과와 방법에 대한 표현을 표현 공간 분석 틀에 따라 코딩하였다. 4명의 연구자가 2명씩 팀을 이루어 한 팀은 S시 J 초등학교의 본 검사지를 분석하고, 다른 한 팀은 C시의 G 초등학교와 J 초등학

교의 본 검사지를 분석하였다. 코딩 결과가 팀 내에서 일치하지 않는 경우 수학교육 전문가를 포함한 연구자 5명 전원이 모여 코딩이 일치할 때까지 거듭 논의하였다. 이처럼 연구자들 간 교차검토 및 수학교육 전문가와의 지속적인 협의를 통해 삼각검증하고 분석의 신뢰도와 타당도를 확보하였다.

코딩 결과를 바탕으로 결과 공간의 결과, 방법 공간의 방법, 표현 공간의 표현 별 응답 개수와 비율을 구한 후 응답 개수에 따른 특징 또는 경향을 파악하였다. 그리고 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 사이의 연결성을 파악하기 위하여 각 공간을 교차 분석하고 의미 있는 특징을 탐색하였다. 과제별 해법 공간의 특징을 잘 드러내기 위하여 역 과제는 학생 수, 구성활동적 과제는 사례 수로 분석 결과를 제시하였다.

Ⅳ. 학생 해법 공간 분석 결과

본 연구 내용은 해법 공간을 분석하는 틀을 개발하고 약수와 배수 주제의 개방형 과제 중 역 과제와 구성활동적 과제에 적용하여 실제 학생의 해법 공간 분석 사례를 근거로 분석 틀의 유용성과 적용 가능성을 탐색하는 것이다. 다음에서는 역 과제와 구성활동적 과제의 해법 공간을 차례로 분석하여 제시하였다.

1. 역 과제의 해법 공간(OMR－spaces) 분석

역 과제의 해법 공간을 해법 공간 분석 틀(OMR-framework)을 적용하여 결과 공간(Outcome spaces), 방법 공간(Method spaces), 표현 공간(Representation spaces)으로 분석하고 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간을 교차 분석하여 해법들 사이 유기적인 연결과 특징을 살펴보았다.

가. 결과 공간 (O-spaces) 분석

학생들이 구성한 결과 공간은 24의 약수 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24를 조합한 36개의 쌍으로 이루어진다. (a, b)의 각 쌍별로 응답한 학생의 인원 및 비율은 [표 7]과 같다. 본 검사에 참여한 181명의 응답을 반영하였으며, 비율은 (응답 학생 수)÷전체 학생 수(181명)×100의 값을 소수 첫째 자리에서 반올림하였다. (a, b)와 (b, a)는 같은 응답으로 처리하였다.

결과 공간을 구성하는 각 쌍의 응답 인원을 분석한 결과, 곱해서 24가 되는 쌍 (4, 6), (3, 8), (2, 12)를 결과 공간에 포함한 학생이 60% 이상으로 가장 많았다. 반면 (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (24, 24)처럼 (a, b)의 a와 b가 같은 수 조합은 10% 미만으로 응답이 가장 적었다.

[표 7] 역 과제의 학생 결과 공간 (n=181) *학생 수(%)

24	86 (47.5)	42 (23.2)	33 (18.2)	36 (19.9)	35 (19.3)	36 (19.9)	40 (22.1)	9 (5.0)
12	30 (16.6)	110 (60.8)	34 (18.8)	35 (19.3)	36 (19.9)	36 (19.9)	8 (4.4)	
8	27 (14.9)	36 (19.9)	111 (61.3)	34 (18.8)	45 (24.9)	8 (4.4)		
6	26 (14.4)	42 (23.2)	39 (21.5)	113 (62.4)	10 (5.5)			
4	26 (14.4)	47 (26.0)	41 (22.7)	8 (4.4)				
3	25 (13.8)	42 (23.2)	7 (3.9)					
2	29 (16.0)	9 (5.0)						
1	5 (2.8)							
b / a	1	2	3	4	6	8	12	24

* 60% 이상의 응답률을 보인 결과 공간에는 음영을 진하게, 10% 이하의 응답률을 보인 결과 공간에는 음영을 연하게 표시함.

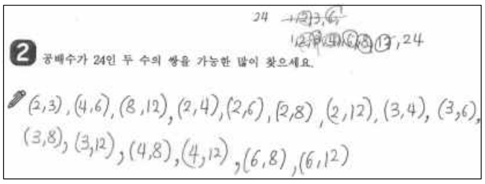
결과 공간은 응답한 결과의 개수에 따라 크게 세 가지로 나눌 수 있었다. 응답 결과 개수에 따라 구분한 학생 수와 비율은 [표 8]과 같다.

[표 8] 학생들의 응답 결과 수 (n=181)

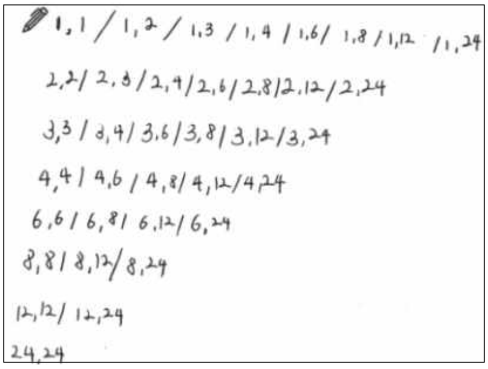
<table>
<tr><th>응답
결과
개수</th><th>15~36</th><th colspan="3">5~14</th><th>1~4</th><th>0</th></tr>
<tr><td rowspan="2">학생
수
(%)</td><td rowspan="2">36
(20)</td><td colspan="3">27
(15)</td><td rowspan="2">73
(40)</td><td rowspan="2">45
(25)</td></tr>
<tr><td>6
(3)</td><td>11
(6)</td><td>10
(6)</td></tr>
<tr><td>유형</td><td>Ⅰ</td><td>Ⅱ</td><td>Ⅲ</td><td>Ⅳ</td><td>Ⅴ</td><td>-</td></tr>
</table>

* (비율)=(응답 학생 수)÷전체 학생 수(181명)×100
* 소수 첫째 자리에서 반올림

학생들 응답 결과 수가 15~36개인 응답 구간, 5~14개인 응답 구간, 1~4개인 응답 구간에서 결과 공간 상에 유의미한 패턴이 발견되었다. 패턴이 드러난 응답 결과를 Ⅰ~Ⅴ로 유형화하였다. 각 유형별 학생 수와 해법 공간의 특징 및 사례는 다음과 같다.



[그림 6] 결과 공간 유형 I 의 사례1



[그림 7] 결과 공간 유형 I 의 사례2

첫째, 결과 공간 유형Ⅰ은 해결 결과의 수가 15~36개인 경우로, 36명이 이에 해당한다. 결과 공간을 15개 이상으로 구성한 학생은 [그림 6]처럼 24의 약수 중 1과 24를 제외한 수들끼리 조합을 하여 15개의 쌍을 찾기도 하고, [그림 7]처럼 24의 약수를 모두 조합하여 36개의 쌍을 모두 찾기도 하였다.

유형Ⅰ결과 공간을 결정짓는 중요한 특징은 [표 9]에서 찾을 수 있다. 유형Ⅰ의 응답을 한 학생 36명 중 32명이 [표 9]에 음영으로 표시된 15개의 쌍을 포함한 답을 하였다. 14개 이하로 찾은 학생들은 음영 부분을 답을 찾지 못하였다. [표 9]의 음영 부분은 결과 공간의 구성에서 양적인 차이를 보이는 결과 공간의 중요한 특징이라고 할 수 있다.

[표 9] 결과 공간 유형의 특징 *학생 수(%)

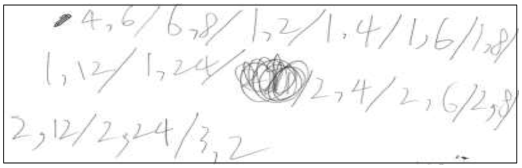
b \ a	1	2	3	4	6	8	12	24
24	86 (47.5)	42 (23.2)	33 (18.2)	36 (19.9)	35 (19.3)	36 (19.9)	40 (22.1)	9 (5.0)
12	30 (16.6)	110 (60.8)	34 (18.8)	35 (19.3)	36 (19.9)	36 (19.9)	8 (4.4)	
8	27 (14.9)	36 (19.9)	111 (61.3)	34 (18.8)	45 (24.9)	8 (4.4)		
6	26 (14.4)	42 (23.2)	39 (21.5)	113 (62.4)	10 (5.5)			
4	26 (14.4)	47 (26.0)	41 (22.7)	8 (4.4)				
3	25 (13.8)	42 (23.2)	7 (3.9)					
2	29 (16.0)	9 (5.0)						
1	5 (2.8)							

둘째, 결과 공간 유형Ⅱ는 5~14개의 해결 결과를 찾은 학생 6명의 해결에서 나타난 패턴이다. 유형Ⅱ의 결과 공간은 24의 약수와 1을 조합한 점이 특징이다. 유형Ⅱ의 학생 수가 6명으로 가장 적었는데 이 유형의 학생들은 24의 약수와 1의 조합 외에 앞 수가 2, 3, 4, 6인 조합을 추가하기도 하였다. 결과 공간 유형Ⅱ는 [표 10]과 같은 형태로 나타났으며 학생 사례는 [그림 8]과 같다.

[표 10] 결과 공간 유형II (n=6)

b \ a	1	2	3	4	6	8	12	24
24	5	1						
12	4	5						
8	4	2	5		1			
6	2	3		6				
4	2	4	3					
3	4	4						
2	5							
1								

＊ 숫자는 각 쌍을 응답한 학생 수(명)를 나타냄.



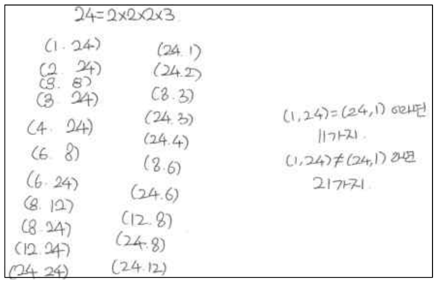
[그림 8] 결과 공간 유형II의 사례

셋째, 5~14개의 결과로 결과 공간을 구성한 유형 중 유형Ⅲ은 24의 약수와 24를 조합한 점이 특징이다. 유형Ⅲ의 학생 수는 11명이며 이 유형의 학생들은 24의 약수와 24의 조합 외에도 뒷 수가 6, 8, 12, 24인 조합을 추가하였다. 결과 공간 유형Ⅲ의 형태는 [표 11]과 같으며 그 사례는 [그림 9]와 같다.

[표 11] 결과 공간 유형III (n=11)

b \ a	1	2	3	4	6	8	12	24
24	7	11	7	11	10	10	11	3
12		1	1	1	1	2	1	
8			4		3			
6				1	1			
4								
3								
2								
1								

＊ 숫자는 각 쌍을 응답한 학생 수(명)를 나타냄.



[그림 9] 결과 공간 유형III의 사례

넷째, 결과 공간 유형Ⅳ는 5~14개로 결과 공간을 구성한 학생 중 곱해서 24가 되는 두 수의 쌍인 (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6) 외에 몇 개의 쌍을 더 구한 학생 10명이 해당하는 유형이다.

다섯째, 결과 공간 유형Ⅴ는 결과 공간을 1~4개의 결과로 구성한 유형으로 연구대상의 약 40%인 73명이 이 유형에 해당하였다. 73명 중 80%가 넘는 학생이 곱해서 24가 되는 쌍 (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)으로 결과 공간을 구성한 점이 특징적이다. 결과 공간 유형Ⅴ는 [표 7]의 진한 음영과 [표 9]에 밑줄 표시된, 좌상우하 대각선 부분이다.

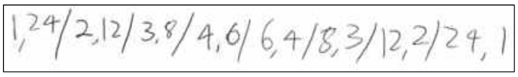
나. 방법 공간(M-spaces) 분석

학생들이 결과 공간 구성에 사용한 방법은 앞 수 고정, 뒷 수 고정, 두 수 변동, 쌍 위치 변환, 같은 수 조합이었다. 방법별 학생 수는 [표 12]와 같으며, 본 검사에 참여한 181명 중 하나도 응답하지 못한 45명을 제외하고 1개 이상의 응답을 한 136명을 대상으로 하였다. [표 12]의 학생 수의 합이 136명을 웃도는 까닭은 한 학생이 결과를 내는데 여러 방법을 사용하기 때문이다. [그림 10]은 두 수 변동과 쌍 위치 변환 방법을 사용한 사례로 이처럼 한 학생의 방법 공간에 다수의 방법이 포함되기도 하였다. [표 12]를 살펴보면 앞 수 혹은 뒷 수의 고정 없이 쌍의 두 수가 변동된 사례가 가장 많았으며, 같은 수 조합 방법의 사례가 가장 적었다.

[표 12] 역 과제의 방법 공간 (n=136)

방법	앞 수 고정	뒷 수 고정	두 수 변동	쌍 위치 변환	같은 수 조합
학생 수	37	24	91	29	14

* 총 181명에서 45명을 제외하여 1개 이상의 응답을 한 136명을 대상으로 함.



[그림 10] 두 수 변동과 쌍 위치 변환 사례

다. 표현 공간(R-spaces) 분석

학생들이 주어진 과제의 결과 공간을 구성하기 위해 사용한 표현 공간은 쌍을 나타내는 표현들로 이루어진 공간과 쌍과 쌍을 구분하는 표현들로 이루어진 공간으로 나누어 살펴볼 수 있다.

쌍을 나타내는 표현들로 이루어진 표현 공간과 각 표현을 사용한 학생 수는 [표 13]과 같고, 본 검사에 참여한 181명 중 1개 이상의 응답을 한 136명을 대상으로 하였다. [표 13]의 기타에는 a:b, a.b, a/b, a b, 표 등이 있었으며, [표 13]의 학생 수의 합이 137인 이유는 a,b 표현과 a:b 표현을 중복하여 사용한 학생이 1명 있었기 때문이다. 표현 공간 분석 결과 약 72%의 학생이 a,b 혹은 (a, b)와 같이 쉼표를 사용하여 쌍 안의 두 수를 구분하고 있음을 확인할 수 있었다.

[표 13] 쌍을 나타내는 표현 공간 (n=136)

표현	a,b	(a,b)	a와 b	a×b	a-b	기타
학생 수	68	30	11	15	5	8

* 총 181명 중 1개 이상 응답한 136명을 대상으로 함.

쌍과 쌍을 구분하는 표현들로 이루어진 표현 공간 및 표현 별 학생 수는 [표 14]와 같다. 삼각형 배열로 표현을 한 7명의 학생은 다른 표현을 중복하여 사용한 까닭에 [표 14]의 학생 수의 합이 143이다. 기타는 결과를 1개만 기록하여 쌍과 쌍을 구분할 필요가 없었던 학생과 - 표시를 사용한 학생의 표현에 해당한다. 쌍을 나타낼 때 쌍의 두 수를 a×b로 표현한 15명 중 13명은 빈칸으로 쌍과 쌍을 구분하는 표현 공간의 패턴이 보였다.

[표 14] 쌍과 쌍을 구분하는 표현 공간 (n=136)

표현	/	,	빈칸	줄 바꿈	삼각형 배열	기타
학생 수	11	37	24	62	7	2

라. 역 과제의 해법 공간(OMR-spaces) 특징 분석

역 과제의 해법 공간 중 결과 공간과 방법 공간 사이(O-M), 결과 공간과 표현 공간 사이(O-R)에서 일정한 특징을 발견할 수 있었고, 방법 공간과 표현 공간 사이(M-R)에는 일정한 특징이 발견되지 않았다. 먼저 결과 공간과 방법 공간 사이(O-M)에서 발견되는 특징은 다음과 같다.

첫째, [표 15]와 같이 결과 공간의 결과 수와 방법 공간의 방법을 교차하였을 때, 결과 공간을 15개 이상의 쌍으로 구성하여 결과 공간 유형 Ⅰ에 해당하는 36명의 학생 중 33명이 앞 수 고정 방법을 사용하였다. 이는 [표 12]에서 전체 방법 공간 중 두 수 변동 방법이 절반을 차지했던 것과 비교할 때 유의미하다. 즉, 학생들이 앞 수 고정 방법을 단일하게 혹은 다른 방법과 중복하여 사용함으로써 결과 공간을 더 풍부하게 구성하였다고 생각할 수 있다.

[표 15] 결과 수별 방법 공간 (n=136)

방법 \ 결과 수	1~4개	5~14개	15~36개
앞 수 고정	0	4	33
뒷 수 고정	1	12	11
두 수 변동	68	15	8
쌍 위치 변환	22	2	5
같은 수 조합	0	4	10

* 표 안의 숫자는 학생 수(명)를 나타냄.
* 한 학생이 다수의 방법을 사용하기도 하므로 표의 학생 수의 합은 [표 12]와 같이 195임.

둘째, [표 12]에서 쌍 위치 변환 방법을 사용한 학생 29명 중 [표 15]를 보면 22명이 4개 이하의 결과들로 결과 공간을 구성하였다. 이 학생들은 두 수의 곱이 24인 쌍만 구성하여 결과 수가 제한적이었고 쌍 위치를 변환하여 결과 수를 늘리고 있었다. 셋째, [표 12]와 [표 15]를 보면 같은 수 조합 방법을 사용한 학생 14명 중 10명이 15개 이상의 결과들로 결과 공간을 구성하였다. 같은 수 조합 방법으로 구성된 결과 공간은

[그림 11]과 같다.

N=14

b \ a	1	2	3	4	6	8	12	24
1	5							
2	8	9						
3	7	10	7					
4	8	10	10	8				
6	8	10	9	11	10			
8	8	9	12	9	11	8		
12	9	11	10	10	10	9	8	
24	10	11	11	11	11	11	10	9

[그림 11] 같은 수 조합 방법이 사용된 결과 공간 (n=14)

앞 수 고정, 뒷 수 고정, 두 수 변동 방법 중에서 한 방법을 일관성 있게 사용하였을 때, 응답 결과 수에 따른 학생 수를 나타내면 [표 16]과 같다. 본 검사에서 1개 이상의 응답을 한 136명 중 단일한 방법을 사용한 114명을 대상으로 하였다. 앞 수 고정 방법을 단일하게 사용한 22명 중 90%가 넘는 20명의 학생이 결과 공간을 15개 이상으로 풍부하게 구성한 반면, 뒷 수 고정 방법을 단일하게 사용한 12명 중 80%가 넘는 10명의 학생이 결과 공간을 5개 이상 14개 이하로 구성하였다. 뒷 수 고정 방법을 단일하게 사용한 학생은 24의 약수들과 24간의 조합을 생각해내었으나, 24의 약수들과 24 외의 조합은 생각해내지 못하여 결과 공간이 제한적이었다.

[표 16] 방법별 결과 수 (n=114)

결과 수 \ 방법	앞 수 고정	뒷 수 고정	두 수 변동
1~4개	0	1	68
5~14개	2	9	12
15~36개	20	2	0

* 표 안의 숫자는 학생 수(명)를 나타냄.
* 1개 이상 응답을 한 136명의 학생 중 단일한 방법을 사용한 114명을 대상으로 함.

결과 공간과 표현 공간 사이(O-R)에 발견되는 특징은 다음과 같다. 첫째, 삼각형 배열 표현 공간을 구성한 학생은 7명 모두 [그림 7]과 같이 15개 이상의 쌍으로 결과 공간을 풍부하게 구성하였다. 둘째, 쌍의 두 수를 a×b로 표현한 학생 15명 중 14명은 결과 공간이 (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)으로 제한적이고 응답 결과 개수가 4개 이하였다. 이를 통해, 표현 공간에 학생의 수학에 대한 이해가 나타남을 알 수 있다. 두 수의 쌍을 삼각형 모양으로 배열한 학생은 24의 약수 조합을 구해야 함을 인식하고 이를 규칙적으로 배열하였다. 그런데 공배수가 24인 두 수를 곱해서 24가 되는 두 수로 인식한 학생은 두 수를 곱셈식을 사용하여 표현하였다. 즉, 수학에 대한 이해가 표현 공간, 결과 공간의 차이로 드러남을 알 수 있다.

2. 구성활동적 과제의 해법 공간(OMR－spaces) 분석

구성활동적 과제의 해법 공간 또한 해법 공간 분석틀을 적용하여 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간으로 나누어 분석하고 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 사이 연결과 그 특징을 살펴보았다.

가. 결과 공간(O-spaces) 분석

학생들이 구성한 결과 공간은 넓이가 64㎡인 직사각형의 가로와 세로로 이루어진다. 이때 직사각형의 가로와 세로를 각각 a와 b로 바꾸어 (a, b)로 표현하면 다음과 같이 (2, 32), (4, 16), (8, 8), (16, 4), (32, 2)로 나타낼 수 있다. 학생들이 구성한 결과 공간의 사례 수 및 비율은 [표 17]과 같다.

[표 17] 구성활동적 과제의 결과 공간 (c=134)

결과	(2, 32)	(4, 16)	(8, 8)	(16, 4)	(32, 2)
사례 수 (%)	12 (9)	21 (16)	50 (37)	30 (22)	21 (16)

a와 b는 각각 가로와 세로이므로 (a, b)와 (b, a)는 서로 다른 응답으로 처리하고 본 검사에서 정답으로 처리된 134개의 사례를 반영하였다. 먼저, 가로와 세로가 모두 8인 (8, 8)을 구한 사례는 전체 사례 134개 중 50개(약 37%)로 가장 많았다. 반면 가로는 2이고 세로는 32인 (2, 32)를 구한 사례는 전체 사례 134개 중 12개(약 9%)로 응답이 가장 적었다. 또한, 학생들은 세로

가 긴 직사각형보다 가로가 긴 직사각형의 가로와 세로를 많이 구하였다. (16, 4)를 구한 사례는 전체 134개 중 30개로 21개를 구한 (4, 16)보다 9개(약 1.4배), (32, 2)를 구한 사례는 전체 134개 중 21개로 12개를 구한 (2, 32)보다 9개(약 1.8배) 많이 구하였다.

나. 방법 공간(M-spaces) 분석

학생들이 주어진 과제의 결과 공간을 구성하기 위해 사용한 방법 공간은 Sarama와 Clements(2009)의 넓이 측정을 위한 학습 경로에 따라 총 7가지로 나타났다. 변으로 넓이 측정, 초보적인 덮기, 넓이 단위 연결 및 반복, 행 구성, 행렬 구성, 넓이 보존, 곱셈으로 구조화가 그것이다. 학생들이 결과를 내기 위해 사용한 방법별 사례 수 및 비율은 [표 18]과 같으며, 결과 공간 분석처럼 본 검사에서 정답으로 처리된 134개의 사례를 반영하였다.

[표 18] 구성활동적 과제의 방법 공간 (c=134)

방법	변으로 넓이 측정	초보적인 덮기	넓이 단위 연결 및 반복	행 구성	행렬 구성	넓이 보존	곱셈으로 구조화
사례수 (%)	3 (2)	5 (4)	2 (1)	15 (11)	29 (22)	22 (16)	58 (43)

변으로 넓이 측정 사례는 3개(약 2%), 초보적인 덮기 사례는 5개(약 4%), 넓이 단위 연결 및 반복 사례는 2개(약 1%), 행 구성 사례는 15개(약 11%), 행렬 구성 사례는 29개(약 22%), 넓이 보존 사례는 22개(약 16%), 곱셈 구조화 사례는 58개(약 43%)로 나타났다. 학생들이 주로 사용한 방법은 곱셈 구조화, 행렬 구성, 넓이 보존 순이었다. 이러한 방법은 직사각형의 가로와 세로를 곱셈적인 관계로 생각한다는 공통점이 있다.

다. 표현 공간(R-spaces) 분석

학생들이 주어진 과제의 결과 공간을 구성하기 위해 사용한 표현 공간은 직접 그림을 그려 나타내는 도형적 표현과 가로와 세로를 (a, b) 등의 표현으로 나타내는 수적 표현으로 나누어 볼 수 있다. 이에 학생들이 결과를 응답하기 위해 사용한 표현에 따른 사례의 개수 및 비율은 [표 19]와 같다. 여기에서도 결과 공간 분석처럼 본 검사에서 정답으로 처리된 134개의 사례를 반영하였으며, 두 가지 방법이 동시에 나타났으면 도형·수적 표현으로 처리하여 중복 코딩은 없었다.

[표 19] 구성활동적 과제의 표현 공간 (c=134)

표현	도형	수	도형·수
사례 수 (%)	30 (22)	17 (13)	87 (65)

직접 그림을 그려 도형으로 나타낸 사례는 30개(약 22%), (a, b)와 같이 순서쌍으로 표현한 사례는 17개(약 13%), 두 가지 방법으로 동시에 표현한 사례는 87개(약 65%)로 나타났다. 학생들이 주로 사용한 표현은 도형·수, 도형, 수의 순이었다.

라. 구성활동적 과제의 해법 공간(OMR-spaces) 특징 분석

구성활동적 과제의 해법 공간을 이루는 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 사이에서 일정한 특징을 발견할 수 있었다. 먼저, 결과 공간과 방법 공간 사이에서 학생들의 응답 사례를 분석한 결과는 [표 20]과 같다.

[표 20] 결과 공간과 방법 공간의 관계 (c=134)

결과 / 방법	(2, 32)	(4, 16)	(8, 8)	(16, 4)	(32, 2)
변으로 넓이 측정	-	-	3	-	-
초보적인 덮기	-	2	3	-	-
넓이 단위 연결 및 반복	-	-	2	-	-
행 구성	1	2	6	4	2
행렬 구성	-	4	16	5	4
넓이 보존	-	2	8	9	3
곱셈으로 구조화	11	11	12	12	12
사례 수 (%)	12 (9)	21 (16)	50 (37)	30 (22)	21 (16)

* 표 안의 숫자는 사례 수(개)를 나타냄.

첫째, 방법 공간은 결과 공간마다 다르게 나타난다. 가로와 세로가 모두 8인 (8, 8)을 구한 사례에서 변으로 넓이 측정 등 7가지 방법이 모두 드러났다. 반면 가로는 2이고 세로는 32인 (2, 32)를 구성한 사례는 행 구성과 곱셈 구조화와 같이 2가지 방법으로 다른 직사

각형보다 단순했다. 또한, 방법 공간을 기준으로 결과 공간을 살펴보면 곱셈 구조화뿐만 아니라 행 구성 방법에서도 모든 직사각형에서 성공한 사례가 나타났다. 반면 변으로 넓이 측정, 넓이 단위 연결 및 반복 방법은 (8, 8)에서만 성공적으로 시도되었다.

둘째, 학생들이 가장 많이 사용한 방법은 결과 공간마다 다르다. 가로와 세로가 모두 8인 (8, 8)을 구한 사례에서는 행렬 구성 방법이 가장 많이 사용되었다. 반면 이외의 결과를 구한 사례에서는 곱셈 구조화 방법이 가장 많이 사용되었다. 또한, 방법 공간을 기준으로 결과를 살펴보면 곱셈 구조화 방법은 대체로 모든 직사각형에서 비슷하게 사용되었다. 반면 넓이 보존은 (16, 4)와 (8, 8)에서, 이외의 방법은 (8, 8)에서 가장 많이 사용되었다.

다음으로 결과 공간과 표현 공간 사이에서 학생들의 응답 사례를 분석한 결과는 [표 21]과 같다.

[표 21] 결과 공간과 표현 공간 비교 (c=134)

결과 / 표현	(2, 32)	(4, 16)	(8, 8)	(16, 4)	(32, 2)
도형	1	3	17	7	2
수	7	1	2	5	2
도형·수	4	17	31	18	17
사례 수 (%)	12 (9)	21 (16)	50 (37)	30 (22)	21 (16)

* 표 안의 숫자는 사례 수(개)를 나타냄.

학생들이 가장 많이 사용한 표현은 결과 공간마다 다르다. 가로는 2이고 세로는 32인 (2, 32)를 구한 사례에서는 수적으로 가장 많이 표현했다. 반면 이외의 결과를 구한 사례에서는 모두 도형·수적으로 가장 많이 표현했다. 특히 가로는 32이고 세로는 2인 (32, 2)를 구한 사례는 (2, 32)를 옆으로 돌린 것으로 생각할 수 있지만, 학생들이 나타낸 표현에 차이를 보인다.

마지막으로 표현 공간과 방법 공간 사이에서 학생들의 응답 사례를 분석한 결과는 [표 22]와 같다. 방법 공간은 표현 공간마다 다르게 나타난다. 학생들이 구한 직사각형의 가로와 세로를 직접 그림을 그려 나타낸 사례에서는 변으로 넓이 측정 등 7가지의 다양한 방법이 모두 드러났지만, 수로 표현한 사례에서는 곱셈 구조화 방법을 이용했다.

학생들의 사례를 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간으로 나누어 분석한 결과 다음을 알 수 있었다. 첫째, 학생들은 정사각형 모양인 (8, 8)을 가장 많이 구하였고, 세로가 긴 직사각형보다 가로가 긴 직사각형의 가로와 세로를 많이 구하였음을 알 수 있었다. 둘째, 방법 공간 분석을 통해 학생들이 해결한 사례를 관찰함으로써 곱셈 구조화 방법을 가장 많이 이용한 것을 알 수 있었다. 셋째, 표현 공간 분석을 통해 학생들이 결과를 표현한 사례를 살펴봄으로써 대부분 직접 그림을 그리면서도 이를 수로 해석한 것을 알 수 있었다.

[표 22] 표현 공간과 방법 공간 비교 (c=134)

표현 / 방법	도형	수	도형·수
변으로 넓이 측정	3	–	–
초보적인 덮기	1	–	4
넓이 단위 연결 및 반복	2	–	–
행 구성	7	–	7
행렬 구성	7	–	22
넓이 보존	6	–	16
곱셈 구조화	4	17	38
사례 수 (%)	30 (22)	17 (13)	87 (65)

* 표 안의 숫자는 사례 수(개)를 나타냄.

그리고 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간을 연결하여 분석한 결과 다음과 같은 점이 드러났다. 첫째, 결과 공간과 방법 공간 분석을 통해 학생들은 (8, 8)을 가장 많이 구하였음에도 행렬 구성, 곱셈 구조화, 넓이 보존 순으로 방법을 사용했다. 둘째, 결과 공간과 표현 공간 분석을 통해 (8, 8)처럼 학생들이 구한 직사각형의 가로와 세로를 수로만 표현한 학생은 적었으나, (2, 32)는 수를 통해 표현한 학생이 가장 많았다. 셋째, 방법 공간과 표현 공간 분석을 통해 학생들은 곱셈 구조화 방법을 주로 이용했으나 수로 표현한 학생은 곱셈 구조화 방법만 이용했다. 따라서 학생들이 응답한 결과에 따라 무엇을, 어떤 방법으로, 또 어떻게 나타냈는지 차이가 있음을 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서 개발한 개방형 과제의 해법 공간 분석 틀의 적용 가능성과 유용성을 역 과제와 구성활동적 과제에 대한 학생들의 해법 공간 분석 사례를 바탕으로 논의하고 결론 및 제언을 하고자 한다. 본 연구에서 고안한 해법 공간 분석 틀(OMR-framework)은 해법 공간을 결과 공간(Outcome spaces), 방법 공간(Method spaces), 표현 공간(Representation spaces)으로 나누어 분석하고 각 공간의 관련성을 탐색하는 틀이다.

결과 공간 분석에서 결과의 수와 결과 사이 관계를 살펴봄으로써 결과의 수에 따른 학생 사고의 질적 차이를 확인할 수 있었다. 다시 말해 결과의 수가 무엇이며 어떤 결과들로 그러한 결과의 수를 이뤘는지를 파악하여 주로 약수와 배수에 관한 학생 이해와 사고의 유의미한 특징을 탐색할 수 있었다. 그런데 역 과제의 결과 공간과 구성활동적 과제의 결과 공간은 결과 공간을 이루는 결과의 수가 각 36개, 5개로 차이가 있었다. 본 연구에서 역 과제의 결과 공간을 결과의 수에 따라 다섯 가지의 유형으로 나누었지만, 구성활동적 과제의 경우 결과 공간을 유형화하지 않았다. 그 까닭은 과제의 종류에 따라 특징적인 해법 공간이 다르기 때문이다. 학생의 이해와 사고를 드러내는 해법 공간이 역 과제의 경우 결과 공간, 구성활동적 과제의 경우 방법 공간이었다. 결과의 수와 결과를 관련짓는 것은 과제가 달라져도 공통적이나 결과 공간의 특징에 따라 유형화 작업의 필요 여부는 달라질 수 있다.

방법 공간 분석에서 과제와 관련된 여러 가지 수학 내용과 사고를 관찰할 수 있었다. 역 과제의 방법 공간의 경우 인수의 위치를 교환하여 중복한 쌍을 만드는지에 따라 조합에 대한 사고를 관찰할 수 있었다. 그리고 역 과제의 방법 공간을 결과 공간과 관련지을 때 특히 약수와 배수에 관한 지식을 어느 정도로 이해하고 있는지를 볼 수 있었다. 그런데 구성활동적 과제의 방법 공간에서는 약수와 배수에 관한 내용적 지식보다는 넓이 측정에 관한 수학적 사고의 관찰이 더 두드러졌다. 개방형 과제의 해결은 여러 수학적 내용과 사고를 요구한다. 과제를 해결하는 데 주요한 수학 내용과 사고를 고려하여 방법 공간의 분석 기준을 세우는 것이 타당함을 알 수 있다.

표현 공간 분석에서는 해법 공간의 하위로 표현 공간을 설정하는 것이 표현의 다양성과 정교성 분석에 주요함을 확인하였다. 학생들은 그들이 선호하는 표현이 있었는데 역 과제의 경우 쉼표를 사용한 표현이, 구성활동적 과제의 경우 가로로 길쭉한 직사각형이나 정사각형 표현이 두드러졌다. 그런데 학생들은 교과서에서 접해본 적 없는 다양한 표현을 생산하기도 하였다. 이 때문에 표현 공간의 경우 연구자들의 예상과 학생들의 구성 사이의 차이가 결과 공간, 방법 공간에 비하여 큰 편이었다. 과제가 달라져도 결과에 대한 시각적, 상징적 표현을 분석할 수 있다는 점은 공통적이나 구체적 양상은 과제의 특성에 따라 달라질 수 있다.

학생들의 해법을 분석하여 학생들의 수학적 창의성을 평가하는 연구(e.g. 이대현, 2014; 하수현, 이광호, 2014; Leikin, 2007, 2009a, 2009b, 2013)를 살펴보면 창의성의 하위 요소 중 유창성, 융통성, 독창성에 대한 평가가 주를 이루며 해법의 정교성에 대한 평가는 많지 않았다. 표현 공간 분석에서 수학적으로 정교한 표현일수록 결과 공간과 방법 공간이 풍부함을 확인하였다. 따라서 표현 공간을 체계적으로 분석함으로써 해법의 정교성을 탐색하는 것은 학생들이 해법 공간을 구성하고 확장하는 데 도움이 될 수 있다.

결과 공간, 방법 공간, 표현 공간을 연관 지어 분석한 결과 각 공간을 연관 짓기 전에는 보이지 않았던 해법 공간의 유의미한 특징이 드러났다. 역 과제의 경우 방법 공간만 보면 두 수 중 앞 수와 뒷 수를 모두 바꾸며 두 수의 쌍을 구성하는 방법이 우세하나, 방법 공간과 결과 공간을 연관 지어 보면 앞 수를 고정하고 뒷 수를 바꾼 방법이 많은 결과를 생산하게 했다.

표현 공간과 결과 공간을 연결할 때는 역 과제의 경우 삼각형 표현이, 구성활동적 과제의 경우 대수적 표현이 많은 결과를 내는 것과 관련 있었다. 그런데 역 과제의 경우에 곱셈 표현의 경우 결과의 수를 제한하는 특징도 관찰되었다. 이처럼 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간을 연결하면 해법 공간의 특징과 학생의 이해를 면밀하게 파악할 수 있다. 해법 공간 개념은 예 공간 개념에 근거하는데 예 공간에 관한 연구(e.g. 오민영, 2020; 오민영, 김남균, 2021; Watson, Mason, 2015)에서도 공간을 이룬 요소들 사이 관련성을 파악함이 중요함을 시사하고 있다.

종합하면 해법 공간의 분석은 과제와 관련한 수학적 내용과 사고를 바탕으로 이루어지며 해법 공간을 이루는 결과 공간, 방법 공간, 표현 공간 사이의 연결성을 탐색함이 중요하다. 그리고 본 연구와 같이 실제 학생의 해법 공간을 분석함은 학생의 이해와 사고를 양적, 질적으로 평가하고 더불어 연구자들이 예상한 해법 공간을 수정 및 보완하는 데 주요했다.

해법 공간 분석은 해법 공간의 특징과 그에 따른 학생의 이해를 파악함을 목적으로 한다. 교사의 개방형 과제의 활용에 관한 연구(e.g. 김남균, 2019; Bingölbali, Bingölbali, 2020)는 교사들이 개방형 과제에 대한 학생들의 다양한 반응을 이해하고 활용하는데 어려움을 겪고 있음을 보고하고 있다. 본 연구에서 제안하는 해법 공간 분석방법은 해법 공간을 체계적이고 면밀하게 분석하는 데 타당하며 학생의 이해와 사고를 파악하는 데 유용할 것으로 보인다.

본 연구에서는 약수와 배수를 주제로 한 개방형 과제에 대해서 해법 공간의 분석 틀을 연구하고 그 적용 가능성을 알아보았다. 본 연구에서 적용 가능성과 유용성을 확인한 해법 공간 분석 틀을 다른 수학 영역과 내용에 적용하는 후속 연구가 필요하다. 그리고 해법 공간의 분석은 궁극적으로 개방형 과제 활용과 개방형 교수법 실행을 목적으로 하므로, 본 연구에서 수행한 해법 공간 분석을 토대로 한 수업 계획 및 실행 연구가 필요하다. 본 연구에서는 해법의 다양성을 체계적으로 분석하는 데 초점을 두고자 개방형 과제에 대한 학생의 오류를 제외한 정답만을 분석하였다. 개방형 과제에 대한 학생 오류의 해법 공간 분석과 오류 해법을 개방형 교수 실행에서 다룰 것인지에 관한 후속 연구를 제안하고자 한다.

참 고 문 헌

고은성, 이경화, 송상헌(2008). 수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석. 영재교육연구, 18(1), 53-77.

권오남, 박정숙, 박지현, 조영미(2005). 개방형 문제 중심의 프로그램이 수학적 창의력에 미치는 효과. 수학교육, 44(2), 307-323.

김남균(2019). 교사학습공동체 참여 교사의 개방형 수학 수업설계와 실행 사례 연구. 초등교육연구논총, 35(1), 85-103.

김연주, 나귀수(2009). 학생들의 학습 수준에 따른 수학적 의사소통의 특징: 개방형 문제를 활용한 소집단 협동학습을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 141-161.

김은혜, 박만구(2011). 수학 영재교육 대상 학생과 일반 학생의 개방형 문제해결 전략 및 행동 특성 분석. 한국초등수학교육학회지, 15(1), 19-38.

박화영, 김수환(2006). 개방형 과제를 활용한 수학 영재아 수업 사례 분석. 수학교육논문집, 20(1), 117-145.

백동현, 이경화(2017). 수학적 창의성 관점에서 다중해법 간의 질적 차이 분석. 학교수학, 19(3), 481-494.

신인선, 김시명(2006). 개방형 문제 해결과정에서 수학 영재아와 수학 우수아의 행동특성 분석. 수학교육논문집, 20(1), 33-59.

양은경, 신재홍(2014). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. 수학교육학연구, 24(1), 1-27.

오민영(2020). Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 교수학습에 관한 연구: 학생들의 예 공간 구성을 중심으로. 석사학위논문. 청주교육대학교.

오민영, 김남균(2021). Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간 분석. 초등수학교육, 24(4), 247-264.

이대현(2008). 초등 수학 평가를 위한 개방형 문제의 활용 결과 분석. 수학교육, 47(4), 421-436.

이대현(2014). 다양한 해결법이 있는 문제를 활용한 수학적 창의성 측정 방안 탐색. 학교수학, 16(1), 1-17.

임송현(2014). 조건부족 개방형 문제 해결과정에서 나타나는 수학 영재의 수학적 사고특성 분석. 석사학위논문, 경인교육대학교.

임재훈(2012). 초등수학 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 구성 활동 분석: 모델과 알고리즘의 연결성을 중심으로. 학교수학, 14(1), 135-150.

정동권(1996). 兒童의 發展的 思考力을 기르기 위한 Open-ended Problem의 活用. 인천교육대학교 논문집, 29(2), 225-239.

정두영, 김도상(2000). 구성주의 관점에서의 수학적 모델링을 통한 수학 교수·학습의 전개. 수학교육논문집, 10, 201-219.

하수현, 이광호(2014). Leikin의 수학적 창의성 측정 방법에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 18(1), 83-103.

Becker, J. P., & Shimada, S.(2004). 개방형 교수법: 수학 지도를 위한 새로운 제안(구광조, 전평국, 박성선, 문성길, 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1995).

Bingolbali, E.(2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: Do teachers really value them? *Australian Journal of Teacher Education, 36(1)*, 18-31.

Bingölbali, E., & Bingölbali, F.(2020). An examination of tasks in elementary school mathematics textbooks in terms of multiple outcomes and multiple solution, *International Journal of Educational Studies in Mathematics, 7(4),* 214-235.

Krutetskii, V. A. (2014). 수학적 능력의 심리학(송상헌, 임재훈, 권석일, 남진영, 정영옥, 서동엽, 김성준, 김지원, 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1976).

Lekin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou(Eds.), *Proceedings of the fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education-CERME-5* (pp.2330-2339).

Leikin, R.(2009a). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu(Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp.129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R.(2009b). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In *Proceedings of ICMI Study-19: Proofs and proving*.

Leikin, R., & Lev, M.(2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolecents: What makes the difference? ZDM: *The International Journal on Mathematics Education, 45(2),* 183-197.

National Council of Teachers of Mathematics.(2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. USA: The Council.

Palmér, H., & van Bommel, J.(2018). The role of and connection between systematization and representation when young children work on a combinatorial task. *European Early Childhood Education Research Journal, 26(4)*, 562-573.

Sarama, J., & Clements, D. H.(2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Newyork: Routledge.

Tsamir, P., Tirosh, D., Tabach, M., & Levenson, E.(2010). Multiple solution methods and multiple outcomes-is it a task for kindergarten children? *Edu. Stud Math, 73*, 217-231.

Watson, A., & Mason, J. (2015). 색다른 학교 수학 (이경화, 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 2005).

A Study on Analyzing Solution Spaces of Open-ended Tasks in Elementary Mathematics

Kim, NamGyun†
Cheongju National University of Education
E-mail : ngkim@cje.ac.kr

Kim, Su Ji
Gaesin Elementary School
E-mail : tnwl8416@korea.kr

Song, Dong Hyun
Jongchon Elementary School
E-mail : songdonghyun@korea.kr

Oh, Min Young
Yeonseo Elementary School
E-mail : omy8529@gmail.com

Lee, Hyun Jung
Saetbyul Elementary School
E-mail : jewelry37@korea.kr

The purpose of this study is to develop a framework for analyzing the solution spaces of open-ended task and to explore their usefulness and applicability based on the analysis of solution spaces constructed by students. Based on literature reviews and previous studies, researchers developed a framework for analyzing solution spaces (OMR-framework) organized into subspaces of outcome spaces, method spaces, representation spaces which could be used in structurally analyzing students' solutions of open-ended tasks. In our research, we developed open-ended tasks which had various outcomes and methods that could be solved by using the concepts of factors and multiples and assigned the tasks to 181 elementary school fifth and sixth graders. As a result of analyzing the student's solution spaces by applying the OMR-framework, it was possible to systematically analyze the characteristics of students' understanding of the concept of factors and multiples and their approach to reversible and constructive thinking. In addition to formal mathematical representations, various informal representations constructed by students were also analyzed. It was revealed that each space(outcome, method, and representation) had a unique set of characteristics, but were closely interconnected to each other in the process. In conclusion, it can be said that method of analyzing solution spaces of open-ended tasks of this study are useful for systemizing and analyzing the solution spaces and are applicable to the analysis of the solutions of open-ended tasks.

---

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : open-ended tasks, solution spaces, factors and multiples
† Corresponding Author