Journal for History of Mathematics
Vol. 34 No. 5 (Oct. 2021), 153–164
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2021.34.5.153

On Functional Equations

함수방정식의 유래

Ree Sangwook 이상욱 Koh Youngmee* 고영미

A functional equation is an equation which is satisfied by a function. Some elementary functional equations can be manipulated with elementary algebraic operations and functional composition only. However to solve such functional equations, somewhat critical and creative thinking ability is required, so that it is educationally worth while teaching functional equations. In this paper, we look at the origin of functional equations, and their characteristics and educational meaning and effects. We carefully suggest the use of the functional equations as a material for school mathematics education.

Keywords: Functional equations, functions, Augustin Louis Cauchy, Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, János Aczél; 함수방정식, 함수, 오귀스탱 루이 코시, 장바티스트 르 롱 달랑베르, 야노스 어첼.

MSC: 01A55, 39-03, 39B05 ZDM: I70

1 서론

함수방정식은 미지의 함수가 만족시키는 방정식을 의미한다. 또한 그러한 방정식을 만족시키는 미지의 함수를 구하는 방법(론)을 의미하기도 한다. 함수방정식은, 문제나 풀이에 미분과 적분을 포함한 고도의 수학 지식이나 기술을 배제하도록 한정할 경우, 함수에 대한 이해와 기초적인 연산만으로 다룰 수 있어 학교수학에서 활용할 수 있는 학습내용으로 여겨지기도 한다. 그래서 함수방정식 문제가 고등학생을 대상으로 하는 국제 수학 올림피아드[1)]에 간간히 출제되기도 한다.

국제 수학 올림피아드는 대수, 조합, 정수, 기하 등의 네 개 분야에서 출제되며 미분적분학은 제외된다. 올림피아드 문제들은 풀이가 다소 까다롭고 어렵기도 한데, 그 이유는 출제되는

*Corresponding Author.
본 논문은 2020학년도 수원대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.
Ree Sangwook: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Koh Youngmee: Dept. of Data Sci., Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
Received on Sep. 16, 2021, revised on Oct. 15, 2021, accepted on Oct. 19, 2021.

1) (IMO, International Math Olympiad). https://www.imo-official.org/

많은 문제가 정해진 풀이과정을 따라 푸는 문제라기보다는 학생의 창의적 사고를 요구하는 문제이기 때문이다. 함수방정식 문제 역시 문제에 따른 창의적 발상을 요구한다. 참고로, 우리나라는 1980년대 후반 처음으로 국제수학올림피아드에 참가하기 시작하였고, 2000년에는 41회 올림피아드를 우리나라 대전에서 개최하였다.2) 또한 우리나라의 국제 수학 올림피아드 출전 선수들이 매년 대체적으로 좋은 성적을 거두고 있다.

본 고는 함수방정식이 언제 어떻게 생겨났는지, 그의 성격과 특성은 어떠한지, 그리고 교육학이나 인식론의 관점에서 어떤 의미나 가치를 가지는지 등의 질문을 다루어보고자 한다.

2 함수방정식의 유래

함수방정식은 언제 어떻게 생겨났을까? 함수방정식은 18 세기 Cauchy 와 d'Alembert 로부터 시작되었다고 알려져 있다. 하지만 그 유래는 14세기까지도 거슬러 올라간다 [1, 15]. 이러한 함수방정식은 다항방정식에 대한 연구와 함수의 개념이 정착되는 과정 중에서 자연스럽게 생겨났다고 여겨진다. 그러나 현대적 의미의 함수방정식에 대한 학문적 연구는 20 세기 중·후반 함수방정식을 체계적으로 정리하고 연구하였던 János Aczél에 의해 부흥된다 [1, 2].3)

이 절에서는 다항방정식의 연구와 함수 개념의 정착과 관련된 이야기를 간략히 개괄하고 함수방정식의 유래를 살펴보기로 한다.

2.1 다항방정식

다항방정식에 관련된 수학사를 읽다 보면, 「근호에 의한 해(solutions by radical)」라는 말을 접하게 된다. 이때 「근호(radical)」에 의한 해 또는 풀이라는 말은 무슨 의미일까?

우리는 「방정식을 푼다」는 말을 「역연산」으로 이해한다 [9].4) 다항방정식은 x의 값이 주어졌다고 가정하고 그에 적당한 연산을 하여 만드는데, 이때 가정했던 x의 값을 알아내는 것이 방정식을 푸는 것이고, 방정식을 풀려면 방정식을 만들던 그 연산을 되돌려야 한다는 의미이다. 그런데 연산을 되돌리는 과정에서 근호의 계산이 필요하다. 예를 들어, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 해는 근의 공식 $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 로 주어지는데, 이의 유도과정을 보면 「근호」라는 용어의 사용에 대한 의미를 알 수 있다. 다시 말해, 이차방정식을 완전제곱꼴 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ 로 변형하여, 양변의 제곱근, 즉, 근호를 사용함으로써 이차방정식의

2) IMO 홈페이지의 timeline 웹페이지(`https://www.imo-official.org/general.aspx`)를 참조한다. 기출문제 또한 `https://www.imo-official.org/problems.aspx` 에서 얻을 수 있다.

3) On the initiative of Professor János Aczél, the theory has become an important matter of our culture. [4, p. 15] . . . the beginning of *a theory of functional equations* is connected with the work of an excellent specialist in this field, Hungarian mathematician J. Aczél. [10, p. 1]

4) . . . whereas the extraction of a root is its inverse operation. [15, p. 12]

해를 얻는다. 이때 완전제곱의 값으로 주어지는 $\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ 의 제곱근의 값은「계산할 수 있다」고 전제한다. 이것이「근호에 의한 해」의 의미이다.

사실, 제곱근, 세제곱근 등의 계산법은 Euclid 시대에도 할 수 있었다고 생각된다. 피타고라스 학파에서 밑변과 높이의 길이가 같은 이등변직각삼각형에서 빗변의 길이가 높이의 $\sqrt{2}$ 배로 주어져 수(무리수)의 존재성에 대한 논란이 일었었지만, 무리수의 존재에 대한 논쟁을 차치하면, 실수 $\sqrt{2}$의 값은 당시에도 어림할 수 있었다. 실제로 $\sqrt{2}$의 의미로부터 $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$, $1.4^2 = 1.96 < 2 < 1.5^2 = 2.25$, $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 1.42^2 = 2.0164$, ... 등의 계산을 통하여 $\sqrt{2}$의 값을 어림할 수 있다. 마찬가지로, 양의 실수 D의 n제곱근의 값도 구할 수 있다고 여겼다. 다항방정식을 풀 때, 그 방정식을 $X^n = D$ 의 형태로 변형할 수 있다면 $X = \sqrt[n]{D}$로「해를 구했다」고 생각했을 것으로 여겨진다. 그렇기에, 다항방정식의「근호에 의한 해」를 구함으로써「방정식을 풀었다」고 말하는 것이다.

이러한 생각에 대한 긍정적 근거는 방정식의 역사에서 읽을 수 있다. 실제로 근의 공식을 얻기 위해 시도된 다항방정식의 풀이 전략은「중간 차수의 항을 제거하는 것」이었다. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 경우, $x + \frac{b}{2a} = y$로 치환함으로써 1차 항이 제거된 $y^2 = D$ $(= \frac{b^2-4ac}{(2a)^2})$의 형태의 식으로 변환할 수 있어서, 제곱근 $y = \sqrt{D}$로부터 근호에 의한 해를 구하여 방정식을 푼다.

삼차방정식의 경우도 근을 구하기 위하여 중간 차수 항을 제거하고 세제곱근을 활용한다 [17]. 삼차방정식의 2차 항은 미지수의 적당한 치환으로 항상 제거 가능하다.[5] 삼차방정식 $x^3 + px = q$ (여기서 p와 q는 양의 실수)의 풀이 과정 [12, p. 8–10][6]은, 우선 세제곱의 값이 실수로 주어지는 식을 유도하기 위하여 $x = u + v$로 치환[7]하여 삼차방정식을

$$(u+v)^3 + p(u+v) = q, \quad \text{즉}, \quad (u^3+v^3) + (u+v)(p+3uv) = q$$

로 변형하는 것이다. 또한 1차 항의 제거를 위하여 $p+3uv = 0$, 즉, $v = -\frac{p}{3u}$를 추가 조건으로 설정하고,[8] 그렇게 해서 얻는 식 $u^3 + v^3 = q$ 와 연립하여 풂으로써 유도방정식

$$u^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u^3} = q, \quad \text{즉}, \quad u^6 - qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

을 얻는다. 그런데 이 식은 u^3에 대한 이차방정식이어서, 근의 공식을 적용하여

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

을 얻는다. 또 $v^3 = q - u^3$에서 v^3을 구할 수 있는데, u^3 값의 복호 중 하나를 선택하면 v^3는 다른 부호를 갖는 값이 된다. 이로써 삼차방정식 $x^3 + px = q$에 대한 근의 공식

$$x\ (= u+v) \ = \ \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ + \ \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

5) 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$에서 $x = y - \frac{1}{3}a$로 치환하여 2차 항이 제거된 삼차방정식을 얻는다.
6) [5, p. 68–69]에서도 거의 동일한 풀이와 추가적인 설명을 읽을 수 있다.
7) 이와 같은 치환을 하는 이유는 불확실하지만 결과적으로 풀이를 가능하게 한다. [6, p. 5–6]을 참조한다.
8) 이러한 추가 조건의 설정 이유는 아마도 중간 차수 항, 즉, 1차 항을 제거하려는 의도로 여겨진다.

을 얻는다. 이상에서 삼차방정식의 근의 공식을 구하는 과정도 결국은 중간 차수의 항을 제거하면서 제곱근과 세제곱근을 적용할 수 있는 식을 유도함이 풀이의 핵심 아이디어였음을 볼 수 있다.

일반 다항방정식의 근의 공식, 즉, 근호에 의한 해를 구하기 위한 초기의 연구 노력은 방정식의 중간 차수 항을 제거함으로써 근호로 풀이가 가능한 식을 유도하려는 유도방정식(derived equation)의 탐구였음을 방정식의 역사에서 볼 수 있다 [16, 17]. 이때 유도방정식에서 함수방정식의 원시적 개념의 싹을 엿볼 수 있다. 예를 들어, 삼차방정식의 근의 공식을 얻는 과정에서 $x = u + v$의 치환에서 u를 x의 함수라고 생각할 수 있고, 유도방정식에서 함수 $u = u(x)$를 구함은 마치 함수방정식을 푸는 것으로 생각할 수 있다. 그러므로 방정식의 연구에서, 겉으로 드러나지는 않았어도, 함수방정식에 대한 개념이 어느 정도 자연스럽게 싹트지 않았을까라는 생각이 드는 것이다.

2.2 함수

「함수」란 입력에 해당하는 어떤 대상에 대하여 그로부터 유일하게 결정되는 출력 대상과의 「관계」를 의미한다. 함수는 수학의 핵심 개념이기도 하지만, 관계가 하나의 상황에서 다른 상황으로 변화하는 원인과 결과의 연결을 의미하기에, 함수는 인과 관계를 다루는 모든 학문 분야에서 유용하게 사용되는 개념이다. 그러나 함수의 개념이 처음부터 그러했던 것은 아니다.

함수라는 용어와 개념은 18세기에 접어들며 서서히 나타나기 시작한다 [16, p. 229–258]. 「함수」라는 용어를 처음 사용한 사람은 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)로 알려져 있는데 [9], 사실 1694년부터 1698년 사이에 Johann Bernoulli (1667–1748)와 Leibniz가 서신을 주고받으며 함수라는 용어를 사용했었다 [16]. 하지만 그들이 함수의 의미를 별도로 정의하고 사용했던 것은 아니었다.

1697년 Jacob Bernoulli (1655–1705)는 학술지 《Acta eruditorum》을 통하여 동생 Johann 에게 일종의 「등주문제 (isoperimeter problem)」[9)]를 제기한다. 당시 문제는 그림과 글로 설명하는 방식으로 제기되었다. Johann은 1697년과 1698년에 문제의 풀이를 발표하였는데 함수를 사용한 풀이는 아니었다. Johann은 1718년 형 Jacob이 제시한 문제의 풀이를 다시 발표하였는데 이때 비로소 함수의 정의를 제시한다.[10)] 그러나 당시의 함수의 정의는 주어진 수에 적당한 대수적 연산을 통해 얻어지는 양(quantity)을 말하되, 관계(rule)를 의미하지는 않았다. 아직 독립변수와 종속변수 간의 관계를 말하는 현대적 의미의 함수로까지는 이르지

9) 주어진 두 점을 잇는 선분과 그 두 점을 끝점으로 갖는 주어진 길이의 곡선이 둘러싼 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 곡선을 구하는 문제였다. 이 문제는 변분법(calculus of variation)이라는 수학 분야를 야기시킨 문제 중 하나이다.

10) Definition. Here one calls a *function* of a veritable magnitude, a quantity composed in any manner possible from this variable magnitude and constants. [16, p. 232]

못한 정의였다.

1748년 Leonhard Euler (1707–1783)는 《Introductio in analysin infinitorum》에서 함수의 정의를 제시한다. Euler는 Johann Bernoulli에게 수학하였기 때문에 자연스럽게 그의 함수의 정의를 이어받았지만, 주어진 수의 연산과정에 대한 대수적 표현 자체를 함수로 이해함으로써 양뿐만 아니라 관계를 내포하는 의미로 함수를 정의하였다.[11] 그러나 Euler는 후일 함수가 곡선(즉, 곡선의 방정식)을 나타낸다고 생각하였다. 이는 함수를 기하학적 대상으로 생각하였음을 의미한다.

그러나 Euler는 다시 한번 혁신적 사고의 전환을 한다. 즉, 곡선을 함수로 생각한 것이다 [16, p. 238]. 이는, 양을 나타내던 대수적 표현으로 두 양 사이의 관계를 나타내던 함수를 곡선으로 이해했던 발상에 대한 역발상으로, 곡선을 함수로 생각하는 발상의 전환이었다. 이러한 사고의 전환은 함수를 물체의 운동(즉, 곡선)을 표현하는 수단 및 대상으로 연구하는 해석학을 도래케 하였다. 이때 문제해결을 위해 Leibniz의 미분적분학(calculus)이 적용되었다.

처음 대수적 표현으로 생각했던 Euler의 1748년의 함수의 정의는 1755년에 두 양(quantity) 간의 관계로 정의되었는데, 이러한 함수 개념의 변화는 19세기에 들어서도 수학계 내에서 보편화되지는 않았다. 예를 들어, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)의 1813년 저작 《Théorie des fontions analytiques》나 Augustin Louis Cauchy (1789–1857)의 저작 《Cours d'analyse》에서도 함수는 1748년의 대수적 표현의 의미로만 사용되었다 [16, p. 254]. 이후 Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) 등을 거쳐 1888년 Richard Dedekind (1831–1916)에 이르러서야 비로소 현대적 의미의 함수의 개념이 정착된다.[12]

2.3 함수방정식의 유래

함수방정식은 언제 어떻게 시작되었을까? 그것은 아마도 다항방정식의 근호에 의한 해, 즉, 근의 공식을 구함에 사용되었던 유도방정식(derived equation) 또는 보조방정식을 구하려는 과정에서 유래하지 않았을까 생각된다. 또한 18세기 Bernoulli 형제들과 Euler로 이어지는 역학 문제와 다양한 수학 문제들의 연구에서 함수의 개념이 정착되고 그에 따라 다양한 함수 관계에 의한 자연 법칙 등을 표현하는 함수에 의한 방정식을 다루게 되어 자연스레 함수방정식이 발생하게 되었지 않았을까 생각된다.

함수방정식의 역사는 사실 함수의 개념이 정립되는 시기와 궤를 같이 한다.[13] 그러한 의미에서 함수방정식의 역사는 300여 년 전으로까지도 거슬러 올라갈 수 있다. 하지만 함수방정식에

11) A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way from that variable quantity and from numbers or constant quantities. (영어 번역본) [16, p. 234, 237]

12) Dedekind의 유명한 논문 〈Was sind und was sollen die Zahlen?(What are numbers and what should they be?)〉에서 현대적 의미의 함수가 다루어진다. [16, p. 256]

13) The origin of functional equations came about the same time as the modern definition of function. [13, p. viii]

대한 실질적인 연구는 최근 60여 년 전부터 활성화되었다 [13, p. xiii]. 실제로, 1747년에서 1750년 사이에 출판된 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)의 세 편의 논문14)에서 함수방정식이 유래되었다는 평가가 있지만 [1, 2, 13], 함수방정식에 대한 실질적인 연구는 1960년대에 János Aczél (1924–2020)15)이 함수방정식을 체계적으로 정리하면서 현대적 연구가 활성화되었던 것이다 [7, 13].

조금 더 자세히는, 함수방정식의 역사는 Archimedes(c. 287—c. 212 BC)로까지도 거슬러 올라갈 수 있는데, 그래도 가시적인 역사로는, 1352년에 선형함수를 나타내기 위해 함수방정식16)을 사용했던 Nicole Oresme (1323–1382)를 함수방정식을 사용한 첫 수학자로 여긴다 [3, 15]. 또한 로그(logarithm)의 연구와 관련하여 표면적으로 드러나지는 않았어도 $f(xy) = f(x) + f(y)$라는 의미의 함수방정식을 다루었던 Gregory (1584–1667)17)도 들 수 있다.

그러나 역사적 유래뿐만 아니라 학문적 관점에서 보았을 때는, 함수방정식은 대표적으로 Cauchy 방정식과 d'Alembert방정식에서 유래되었다고 인정된다 [1, 15]. 특히 J. G. Dhombres는 함수방정식의 역사에서 Cauchy와 d'Alembert의 역할을 중요시하였다 [7].18) 실제로, D'Alembert는 1747년 파동방정식 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ 을 발표한다. 이는 당시의 미분적분학을 적용하여 함수 $y = y(x, t)$를 구하려는 미분방정식인데,19) 풀이 과정에서 d'Alembert 방정식으로 불리는 함수방정식

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

를 다루게 된다. 또 시기적으로는 조금 늦었지만 $f(x+y) = f(x)+f(y)$로 대표되는 Cauchy 함수방정식의 연구로부터 함수방정식의 연구가 시작되었다고 평가된다 [15, p. 7]. 그는 1676년 Isaac Newton (1643–1727)이 발표한 「일반화된 이항정리」를 증명하기 위하여 이 함수방

---

14) (1) J. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde ten due mise en vibration, I, *Mem. Acad. Sci. Berlin* 3(1747), 214–219. (2) J. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde ten due mise en vibration, II, *Mem. Acad. Sci. Berlin* 3(1747), 220–249. (3) J. d'Alembert, Addition au Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Hist. Acad. Berlin* 1750, 355–360.

15) János Dezsö Aczél(야노스 어첼)은 헝가리 부다페스트 출생의 캐나다 수학자이다. 1924년 12월 26일 생으로 2020년 1월1일, 즉 95세 생일 후 6일만에 타계하였다. 그는 University of Budapest에서 해석학으로 학사, 석사, 박사 학위를 취득하였고, University of Cologne, Lajos Kossuth University, University of Miskolc, University of Szeged 에서 교수로 재직하다가 1965년 University of Waterloo로 자리를 옮겼다. 그는 1968년 학술지 《Aequationes Mathematicae》를 창간하였다.

16) 1352년 Oresme는 논문 「Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum」에서 함수방정식 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)} = \frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}$ for all x_1, x_2, x_3 with $x_1 > x_2 > x_3$으로 선형함수를 정의했는데, 이 식은 달리 쓰면, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 이 되어 평균변화율, 즉, 기울기가 모든 점에서 동일함을 의미한다.

17) Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)는 예수회 소속 수학자로 기하급수에 관한 업적이 있다고 한다. `https://en.wikipedia.org/wiki/Grégoire_de_Saint-Vincent`

18) Adam C. McBride는 [2]의 북리뷰에서 Dhombres의 글을 「가장 흥미로운 에세이」라고 평하였다 [11].

19) 파동방정식은 대표적인 편미분방정식으로서 대부분의 편미분방정식 교재에 소개되어 있다. 여기서는 간단히 위키페디아 `https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation`를 참조한다.

정식을 다루었다 [15].

3 함수방정식의 성격과 특성

함수방정식의 성격과 특성은 어떠한가? 「함수방정식(functional equation)」은 어떤 함수가 만족시키는 방정식을 의미하며, 그러한 방정식을 만족시키는 함수를 구하는 방법론에 관한 수학 이론을 의미한다.[20] 함수방정식은 함수의 현대적 정의가 형성되는 과정에서 자연스럽게 나타났고 [13], 자연 현상이나 사회 현상 등의 변화를 표현하는 방법으로 함수가 사용되기에 물리학과 공학을 포함한 거의 모든 학문 분야에서 모습을 드러낸다 [1, 2, 10, 13, 14].

사실, 학교수학에서 다루는 「음함수」도 함수방정식으로 이해할 수 있고, 대학 때 공부하는 미분방정식도 함수방정식에 해당한다. 예를 들어, $y = f(x)$라고 했을 때, 원의 방정식 $x^2 + (f(x))^2 = 1$ 은 일종의 함수방정식이고, 미분방정식 $y'' + y = x$ 등도 함수방정식에 속한다. 지수함수 $f(x) = e^x$는 지수함수의 성질에 해당하는 함수방정식 $f(x + y) = f(x)f(y)$의 해이고, 또 로그함수는 함수방정식 $f(xy) = f(x) + f(y)$의 해이다.

또한 함수방정식은 수학의 전 분야에 걸쳐 나타난다.[21] 선형함수도 함수방정식의 형태로 정의되고, 멱등함수(idempotent functions)도 $f \circ f(x) = f^2(x) = x$ 와 같이 함수방정식으로 정의된다. 이외에도 Riemann 제타함수, Yang-Baxter 방정식 등 무수히 많은 방정식이 함수방정식의 형태로 표현되며, 조합수학(combinatorics 또는 enumerative combinatorics)에서 다루는 생성함수는 함수방정식을 기본 골조로 삼고 있다 [8, 18]. 예를 들어, 대표적으로 Fibonacci 수열[22] $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$의 생성함수 $F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$은 함수방정식 $F(z) - zF(z) - z^2F(z) = z$의 해로 주어진다 [8, p. 297].

Cl. Alsina [4]는 함수방정식이 수학의 아름다움을 지녔다고 말한다. 그는 보편적 진리와 중요한 개념이나 아이디어의 수용을 수학이 갖는 아름다움의 의미라고 설명한다. 그러면서 그는 우리가 함수방정식으로부터 더욱 많은 것을 얻을 수 있음을 강조한다.[23] 하지만 함수방정식은 일반적으로 잘 정리된 이론적 기반을 가지고 있지는 않다. 오히려 문제의 유형에 따른 개별 공략 방법을 찾아내야만 한다. 그럼에도 불구하고, 함수방정식은 자체적으로 해를 줄 수 있는 많은 정보를 숨기고 있어, 숨겨진 정보를 추출하기 위한 창의적 사고를 활용한 풀이 전략을 요구한다.

---

20) ... functional equations, that is the search for functions which satisfy certain functional relationships ... [3, p. viii]

21) Thus functional equations seem to occur in virtually all parts of mathematics. [3, p. viii]

22) Fibonacci 수 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$는 $F_0 = 0, F_1 = 1$, 그리고 $n \geq 2$에 대하여 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$으로 정의한다.

23) You get a lot from little. That is nice. ... And beauty in Mathematics means, among other things, a certain generalty, a certain depth — the possibility of significant ideas ... [4, p. 13]

4 기초적인 함수방정식의 소개

학교수학에서는 방정식을 가르치면서 1차방정식, 연립1차방정식, 2차방정식 등의 해법을 교육한다. 하지만 2차방정식의 경우, 해법이라기보다 기계적으로 해를 주는 근의 공식에 매몰되는 경우가 많다. 그러나 수학을 교육함은 수학 지식의 습득도 있겠으나 논리적인 사고력을 키우는 언어적 기능도 핵심 요소이다. 교육의 관점에서, 함수방정식은 함수에 대한 이해와 지식을 주기도 하지만, 주어진 상황에서 필요한 정보를 추출하고, 다시 그 정보를 창의적으로 활용하여 더 나은 정보를 얻어내는 창의적 사고능력도 요구한다. 이러한 훈련은 21세기가 요구하는 정보나 데이터의 활용 능력의 배양과 향상에 도움을 줄 수 있다고 여겨진다. 재미있는 풀이와 이야기를 담은 기초적이고 대표적인 몇 가지 함수방정식을 소개한다.

4.1 Cauchy 함수방정식

함수방정식 중에 가장 대표적인 함수방정식인 Cauchy 함수방정식은

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

인데, 이는 기본 연산의 사용만으로도 풀 수 있다. 이 방정식의 풀이는 많은 함수방정식의 풀이의 표본이 된다. 이 외에도 Cauchy 함수방정식으로 불리는 3개의 방정식이 더 있는데,

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(xy) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

등이다 [1, p. 6]. 이들에 대한 풀이는 [1, 13, 15] 등을 참조한다.

첫 식으로 주어진 Cauchy 함수방정식의 풀이는, 먼저 주어진 식에 $y = x$를 대입하여 $f(2x) = 2f(x)$임을 알 수 있는데, 같은 방법으로 $y = (n-1)x$를 대입하면 $f(nx) = nf(x)$ (단, n은 양의 정수)가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이는 x 대신 $\frac{1}{n}x$를 대입하면 $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$를 의미하기도 한다. 이는 또한 모든 유리수 $\frac{n}{m}$에 대하여 $f(\frac{n}{m}x) = \frac{n}{m}f(x)$가 성립함을 의미한다. 음수로의 확장은, $y = 0$을 대입하거나 $n = 0$을 대입하여 $f(0) = 0$임을 알 수 있어서, 함수방정식에 $y = -x$를 대입함으로써 쉽게 해결된다. 즉, $f(-x) = -f(x)$이다. 여기서 함수 $f(x)$를 연속함수로 제한하면 모든 실수 q에 대하여 $f(qx) = qf(x)$가 성립하게 된다. 이제 $x = 1$을 대입하여 $f(q) = qf(1)$을 얻고, $f(1) = a$라 하면 $f(x) = ax$가 됨을 알 수 있다.

미분적분학을 이용하면 문제를 더욱 간단히 풀 수 있다. 먼저 y를 상수 c로 치환하여 양변을 x로 미분하면 $f'(x+c) = f'(x)$가 되어 $f'(x)$가 상수임을 알 수 있고, 그래서 $f(x) = ax + b$로 주어진다. 이제 함수방정식에 $y = 0$을 대입하면 $f(0) = 0$가 되어 $b = 0$임을 알 수 있어 Cauchy 방정식의 해가 $f(x) = ax$ (단, a는 상수)로 주어짐을 알 수 있다.

Cauchy 방정식의 풀이를 보면 주어진 함수방정식에 x, y를 적절한 수로 대입하여 얻는 정보만으로 문제가 해결됨을 알 수 있다. 이는 주어진 상황으로부터 적절히 선택한 작업을

통하여 새로운 정보를 추출하는 창의력 활용의 예로 이해된다. 이러한 함수방정식이 제공하는 창의적 사고의 훈련은 함수방정식이 갖는 교육적 의미이자 가치라고 생각된다.

4.2 Jensen 함수방정식

Jensen 방정식은 Cauchy 방정식에 평균을 적용한 듯한 형태를 지니는데,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

로 주어진다. 여기서도 Cauchy 방정식과 마찬가지로 함수 $f(x)$를 연속함수로 가정한다.

풀이는 $g(x)=f(x)-f(0)$로 놓음으로 시작한다. 그러면 $g(0)=0$이고 또 $g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}$가 성립함을 알 수 있다. 이때 $y=0$를 대입하여 $g\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{g(x)}{2}$를 얻는다. 이제 x 대신 $x+y$를 이 식에 대입하여 $g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x+y)}{2}$를 얻고 이를 바로 위의 식과 비교하여 Cauchy 방정식 $g(x+y)=g(x)+g(y)$가 성립함을 확인한다. Cauchy 방정식의 해가 $g(x)=ax$였으므로 $f(x)=g(x)+f(0)=ax+f(0)$가 된다. 이제 $f(0)=b$로 놓음으로써 Jensen 방정식의 해는 $f(x)=ax+b$ (단, a와 b는 실수)가 된다.

4.3 D'Alembert 함수방정식

앞 절에서 보았듯이 d'Alembert 방정식은

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

를 말한다. 이 방정식도 적절한 값을 대입하여 얻는 정보를 활용함으로써 풀 수 있다. 우선 $y=0$를 대입하여 $2f(x)=2f(x)f(0)$를 얻는다. 모든 x에 대하여 $f(x)=0$인 항등함수는 뻔한 답이기에 제외하자. 그러면 $f(x)\not\equiv 0$이고, $f(x)\neq 0$이 되는 x를 갖는다. 그러면 바로 위 식에서 이때의 $f(x)$를 약분하여 $f(0)=1$임을 얻는다. 또한 d'Alembert 방정식에서 $x=0$을 대입하여 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$를 얻어 $f(x)$가 우함수임도 확인한다. 마지막으로 $y=x$를 대입하여 $f(2x)+f(0)=f(2x)+1=2\left(f(x)\right)^2$을 얻음으로써, 이상의 조건을 만족시키는 함수의 예로서 $f(x)=\cos x$가 될 수 있음을 알 수 있다. 조금 더 일반적인 해는 $f(x)=\cos ax$이지만 이를 얻기 위한 자세한 설명은 [15, p. 45–47]을 참조한다.

4.4 다양한 함수방정식

학교수학에서 다룰 수 있을 만한 함수방정식의 예로서, 양의 정수 n에 대하여 함수방정식 $f(f(n))=n+1$이 성립하는 정수값 함수 $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$의 존재 여부를 물을 수 있다. 이는 주어진 식에 함수 f를 반복 적용하여 그의 존재 여부를 확인할 수 있다 [15, p. 71].

조건 식에 함수 f를 적용하여 $f(n+1)=f(f(f(n)))=f(n)+1$을 얻어서 $\{\,f(n)\,\}_n$가 공차가 1인 등차수열임을 알 수 있다. 즉, $f(n)=n+k$ (단, k는 정수인 상수)로 쓸 수 있고,

다시 함수 f를 적용하면 $n+1=f(f(n))=f(n+k)=(n+k)+k=n+2k$가 된다. 그런데 $2k=1$인 정수 k는 존재하지 않아 원하는 함수 f는 존재할 수 없음을 알 수 있다.

또한 인도 수학자 Srinivasa Ramanujan (1887–1920)이 주장한 식

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}=3$$

이 옳음을 함수방정식을 이용하여 확인할 수 있음도 흥미롭다 [15, p. 72–74]. 함수방정식을 이용한 풀이를 위해 먼저 함수를

$$f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}}$$

와 같이 정의한다. 그러면 함수 $f(x)$가 함수방정식

$$(f(x))^2=1+xf(x+1)$$

을 만족시킴을 알 수 있다. 이때 함수 $f(x)$의 후보로 다항함수를 생각해보기로 하자. 그런 다항함수가 존재하면 Ramanujan의 주장이 옳음을 확인할 수 있으니까. 다항함수의 차수를 $\deg(f)=n$이라고 하면 함수방정식으로부터 $2n=n+1$이어야 함을 알 수 있어 $n=1$임을 알 수 있다. 즉, $f(x)=ax+b$의 꼴로 주어지는 것이다. 이를 다시 함수방정식에 대입하면 $(ax+b)^2=1+x\,(a(x+1)+b)$가 되어 계수를 비교하면 $a=1$, $b=1$이어야 함을 알 수 있다. 즉, $f(x)=x+1$이고, Ramanujan의 식은 $f(2)$가 되어 그 값이 3임을 확인할 수 있다.

5 결론

우리는 함수방정식의 유래와 특성 그리고 교육학적 의미와 가치를 살펴보았다. 함수방정식은 함수에 대한 이해를 강화시킬 수 있는 소재가 되기도 하고 IMO(또는 Putnam 수학경시대회)의 사례에서 보듯이 학교수학에서 다룰 수 있는 도전적 문제로 제시될 수도 있다. 또한 함수방정식과 관련된 수학자나 수학 이야기의 소개는 훌륭한 스토리텔링 교육의 가능성도 보여준다.

예를 들어, 함수 개념의 정립 과정에서 소개된 수학자Lagrange, Bernoulli, Euler 등을 소개할 수도 있고 함수방정식으로 넘어가며 Cauchy, d'Alembert 등과 관련된 이야기를 소개할 수도 있다. 그러면서 수학이 「계산」에 머물지 않고, 사고방법(논리)이나 수학과 과학 역사의 한 줄기의 이야기로 제공될 수도 있을 것이다.

만물의 근원을 수라고 주장한 Pythagoras (기원전 570–기원전 495)나 우주 만물의 운행 법칙이 수학의 언어로 기술되었다는 Galileo Galilei (1564–1642)의 말을 빌리지 않더라도, 자연 현상을 설명하려면 수와 함수를 사용해야 함은 누구나 다 인정하는 사실이다.

수, 특히 자연수는 자연 발생적이었고,[24)] 그로부터 수가 (유리수, 무리수, 실수, 복소수 등

24) God made the natural numbers; all else is the work of man. — Leopold Kronecker (1823–1891)

으로) 확장되고 다시 수와 연산이 적당히 버무려져서 함수가 되었고, 이들로부터 방정식이 만들어진다. 수 자체가 대상이 아니라 함수를 대상으로 삼아 방정식이 만들어진 것이 함수방정식이라면, 함수는 수의 개념의 확장으로 생각할 수 있으며, 함수방정식 또한 방정식 개념의 확장으로 볼 수 있다. 이와 같은 개념의 확장을 경험함은 우리의 인식 수준을 높이고 인식 대상과 그의 활용을 넓히는 일이 될 것이어서 상당한 교육적 의미와 가치를 지닌다.

《2022 EBS 수능특강 수학 II》의「미분계수와 도함수」절에 $f(x+y)=f(x)+f(y)+a(x)$ ($a(x)$는 적당히 주어진 함수) 형태의「함수방정식」을 조건으로 주고 미분계수를 구하는 문제가 나온다.[25] 이 문제는 상대적으로 어려운 문제에 속하는데, 풀이가 미분계수의 개념과 정의뿐만 아니라 함수방정식을 적절히 활용하는 능력을 요구하기 때문이다. 이와 같은 함수방정식 문제는 제시된 조건으로부터 정보를 얻고 다시 그 정보를 적용하여 또다른 정보를 얻으며 동시에 그 정보들을 활용하여 문제를 푸는 문제해결 방식을 보여준다. 마치 보물찾기라도 하는 듯한 함수방정식의 풀이과정은 탐구적 태도의 형성에 도움을 줄 수 있으며 수학의 심미적 아름다움을 느낄 수 있게 하여 수학에 흥미를 갖게 할 수도 있다.

함수방정식은 함수와 함께 다양한 현상의 기술에 사용될 수 있기에 학문적 흥미를 유도할 수도 있고 수학에 대한 인식도 높일 수 있다. 특히, 다양한 시도와 시행착오에 의한 탐구활동을 유도하는 문제풀이는 데이터로부터 지식과 통찰력을 구하여 산업 및 사회 발전을 도모하려는 21세기 사회의 인재 역량의 개발에도 적합할 듯하다. 그런 면에서 함수방정식의 수학 교육에서의 활용을 모색해봄도 바람직해 보인다.

References

1. J. ACZÉL, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Translated by Scripta Technica Inc., Edited by Hansjorg Oser, Academic Press, 1966.
2. J. ACZÉL, *Functional Equations: History, Applications and Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1984.
3. J. ACZÉL, On history, applications and theory of functional equations, *Functional Equations: History, Applications and Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1984, 3–12.
4. Cl. ALSINA, The esthetics and usefulness of functional equations, *Functional Equations: History, Applications and Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1984, 13–15.
5. I. G. BASHMAKOVA, G. S. SMIRNOVA, *The Beginning & Evolution of ALGEBRA*, MAA, 2000.
6. Jörg BEWERSDORFF, *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*, AMS, 2006.
7. J. G. DHOMBRES, On the historical role of functional equations, *Functional Equations: History, Applications and Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1984, 17–31.
8. Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH, Oren PATASHNIK, *Concerete Mathematics*, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.

25) 예를 들어,《2022 EBS 수능특강 수학영역 수학II》03. 미분계수와 도함수, 기본연습 (문제) 5, p. 41.

9. KOH Youngmee, REE Sangwook, On Symmetric Functions, *Journal for History of Mathematics* 34(2)(2021), 39–54. 고영미, 이상욱, 대칭함수의 유래, *Journal for History of Mathematics* 34(2)(2021), 39–54.
10. Marek KUCZMA, A Survey of the Theory of Functional Equations, *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija Matematika i fizika (Mathématiques et Physique)* 130(1964), 1–64, University of Belgrade, Serbia. `https://www.jstor.org/stable/43667209?seq=1` or `http://pefmath2.etf.rs/files/60/130.pdf`
11. Adam C. MCBRIDE, Book review of "Aczél, J. (ed.), *Functional equations: history, applications and theory* (D. Reidel, Dordrecht 1984), pp. ix+244, Dfl. 125." *Proceedings of the Edinburgh Society* 27(1984), 345–346.
12. Paul J. NAHIN, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998.
13. Prasanna K. SAHOO, Palaniappan KANNAPPAN, *Introduction to Functional Equations*, CRC Press, 2011.
14. P. K. SAHOO, T. RIEDEL, *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, 1998.
15. Christopher G. SMALL, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.
16. Jacqueline STEDALL, *Matheamtics Emerging: A Sourcebook 1540–1900*, Oxford University Press, 2008.
17. Jacqueline STEDALL, *From Cardano's Art to Lagrange's Resolution: filling a gap in the history of mathematics*, European Mathematical Society, 2011.
18. Herbert WILF, *generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.