韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2021.24.4.233
2021. 10. 제 24권, 제 4호, 233-246

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2021, Vol. 24, No. 4, 233-246

평면도형의 교수·학습 요소에 따른 삼각형에 관한 초등학교 교과서 분석

권미선(곡반초등학교, 교사)

도형 영역은 초등학생들의 학습에 많은 영향을 미치며, 다른 영역과도 밀접하게 관련되어 있다. 이에 본 연구는 평면도형에서 핵심적으로 지도해야 할 교수·학습 요소를 문헌에서 추출하였다. 또한 이를 활용하여 삼각형을 지도할 때 가르쳐야 하는 교수·학습 요소가 2015 개정 수학 교과서에 적절히 구현되었는지를 분석하였다. 분석 결과, 개념 알기의 경우 실제 물건의 모양에 초점을 두고 평면도형을 인식하는 활동이 부족하며, 기준에 따라 평면도형을 분류할 때 분류 기준이 이전 차시와 다르게 제시되는 것으로 나타났다. 개념 적용하기의 경우, 평면도형에 대해 토론하는 활동이 부족한 것으로 나타났다. 마지막으로 관계 알기의 경우, 2015 개정 수학과 교육과정에서 도형 사이의 관계는 다루지 않기 때문에 정의와 속성을 통해 도형 사이의 관계 파악하기, 분류 활동을 통해 도형 사이의 관계 파악하기, 도형 사이의 관계에 대해 토론하기의 전반적인 부분이 부족하게 제시되었다. 이와 같은 분석 결과를 바탕으로 삼각형의 지도 방향을 제시하고 삼각형에 관한 추후 교육과정 자료 개발에 시사점을 제공하고자 한다.

I. 서론

학생들은 생활 속에서 다양한 물건의 형태를 파악하고 추상화하여 평면도형을 인식한다. 아직 삼각형, 사각형의 용어나 정의를 학습하지 않은 어린 학생들조차도 태양을 원으로, 집을 삼각형과 사각형으로, 문을 사각형으로 그리는 등 다양한 물건을 통해 평면도형을 인식하고 그것을 표현할 수 있다. 이처럼 평면도형과 그 성질에 대한 이해는 실생활과 밀접한 관련이 있다(Chval, Lannin, & Jones, 2016).

실생활에서의 다양한 경험들은 학생들이 도형을 학습하는데 비형식적 지식을 제공하며, 학생들이 가진 비형식적 지식은 학교에서 도형을 학습하는 데 도움이 될 수 있다. 하지만 학생들이 지닌 도형에 대한 비형식적 지식에는 많은 오개념이 포함된 것으로 나타났다(Chval 외, 2016; Clements & Sarama, 2014). 이는 학생들이 실생활에서 전형적인 도형의 형태를 자주 보고 이를 추상화하였기 때문이다. 학생들이 가진 도형에 대한 '옳은 지식과 혼재된 오개념'이 수정되지 않는다면, 학생들이 가진 비형식적 지식은 오히려 도형 학습에 방해가 될 수 있다. 특히 비전형적인 도형의 형태를 제공하는 것과 같은 교수학적 처치 없이 실생활에서의 경험만으로 이러한 오개념이 수정되기 어렵다. 따라서 학교 교육에서 도형 영역을 주의 깊게 지도해야 한다.

한편, 도형 영역은 각을 측정하여 수직과 평행을 알아보는 것, 직사각형의 성질을 기반으로 그 넓이를 구하는 것, 시침과 분침의 공간적 위치를 파악하여 시각을 읽는 것과 같이 측정과 밀접하게 연결되어 있다(교육부, 2015). 이뿐만 아니라 도형 영역의 학습은 다른 영역을 학습할 때 도움을 주기도 한다(Sarama & Clements, 2009).

도형 영역의 학습은 수학 교과 역량 측면에서도 중요한 역할을 한다. 예를 들어, 여러 가지 도형을 기준에 따라 분류하고 도형 사이의 관계를 파악하는 등의 활동을 통해 추론 역량을 기를 수 있다. 또한 다양한 정례와 반례를 비교하며 친구들과 토론하는 과정을 통해서 의사소통 역량을 기를 수 있다. 이처럼 도형 영역은 간단한 도형의 성질을 이용하여 다양한 추론과 의사소통을 할 수 있도록 하여, 학생들이 논리적 사고와 적절한 의사소통을 할 수 있도록 돕는 중요한 역할을 할 수 있다(Chval 외, 2016; Clements & Sarama, 2014).

하지만 최근 실시된 연구 경향 분석을 살펴보면, 초

* 접수일(2021년 10월 14일), 심사(수정)일(2021년 10월 20일), 게재확정일(2021년 10월 29일)
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 삼각형, 평면도형, 교수·학습 요소, 초등 수학 교과서

등학교에서 도형 영역이 차지하는 비중에 비해 도형 영역에 대한 연구가 적은 것으로 나타났다(김유경, 방정숙, 2017). 더불어, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습량의 적정화를 위하여 내용을 감축하였는데, 이때 평면도형에서도 선대칭의 위치/점대칭의 위치에 있는 도형 등에 대한 내용이 삭제되었다(박경미 외, 2015). 이처럼 수학교육연구나 교육과정에서 도형 영역이 차지하는 비중이 점차 감소하고 있다. 이는 학생들이 도형을 학습할 수 있는 기회와 이를 통해 그들이 잠재력을 발휘할 기회를 주지 않는 것이 될 수 있다(Sarama & Clements, 2009).

선행연구에 따르면 대부분의 사람들이 생각하는 것보다 어린 학생들도 기하학에 대해 훨씬 더 많은 것을 배울 수 있다고 한다(Clements & Sarama, 2014). 시대적 요구에 따라 학습량을 경감하기 위해 학습 내용을 삭제하였으나 도형 영역의 중요성을 고려할 때 현재 지도하는 내용에 대해서는 충분히 지도되어야 할 것이다. 이에 도형 영역에서 어떠한 내용을 강조하여 어떻게 지도해야 할 것인가에 대한 연구가 필요하다. 또한 2015 개정 수학과 교육과정과 교과서에서 도형 영역의 교수·학습이 어떻게 구현되어 있는지에 대한 연구가 필요하다. 하지만 도형 영역에서 핵심적으로 강조하여 지도해야 할 내용이 무엇이며, 교과서에는 어떻게 구현되었는지에 대한 연구가 부족한 현실이다.

우리나라 교육과정의 도형 영역은 평면도형, 입체도형, 공간 감각으로 나눌 수 있는데, 평면도형에 대한 정의와 성질을 먼저 학습하므로 연구 대상을 평면도형으로 한정하였다. 이에 평면도형을 지도할 때 중요하게 가르쳐야 할 교수·학습 요소를 선행연구를 통해 도출하였다. 또한 평면도형에서는 선, 각, 원, 삼각형, 사각형 등 많은 내용을 학습한다. 이 중 다양한 분류 활동을 제시할 수 있으며, 개념 형성과 성질을 탐구하기 위한 여러 활동을 제공할 수 있는 삼각형을 분석 대상으로 선정하였다. 또한 삼각형의 경우 학생들이 처음 정의를 내리는 도형이므로 교수·학습 요소에 따라 우선적으로 분석이 필요하다고 판단하였다.

본 연구는 우선 삼각형에 대한 2015 개정 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서의 전체적인 구성을 살펴보았다. 또한 선행연구를 통해 평면도형을 지도할 때 중요하게 가르쳐야 할 교수·학습 요소를 도출한 후 이에 따라 2015 개정 수학 교과서의 삼각형에 관한 내용을 분석하였다. 이러한 연구를 통해 평면도형의 지도 방향과 삼각형에 관한 추후 교육과정 자료 개발에 시사점을 제공할 수 있길 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 평면도형의 전반적인 교수·학습의 흐름

도형에 대한 학습 경로(Learning trajectory)는 다소 복잡하며, 서로 관련은 되어 있으나 독립적으로 발전하는 하위 학습 경로 4가지(비교하기, 분류하기, 부분, 표현하기)로 구성되어 있다(Sarama & Clements, 2009). 상세히 살펴보면, (a) 비교하기 하위 학습 경로에서는 초기 수준에서 서로 다른 기준을 이용하여 연결시키고 일치함을 결정한다. (b) 분류하기 하위 학습 경로는 도형을 인식하기, 식별하기(이름 정하기), 분석하기 및 분류하기를 포함한다. (c) 부분 하위 학습 경로는 변과 각과 같은 도형의 구성 요소를 구별하기, 명명하기, 설명하기 및 정량화하기를 포함한다. (d) 표현하기 하위 학습 경로는 도형을 만들거나 그리는 것을 포함한다. 이에 이러한 학습 경로에 따라 학생들의 발달이 진행되므로 각 경로에 따른 학습 지원이 이루어져야 한다.

Van Hiele의 경우 기하 학습에 관하여 학생들의 사고 수준을 다섯 가지로 분류하고 이 순서에 따라 발달한다고 제시하였다(강홍재 외, 2018). 제 1수준인 시각적 인식 수준의 경우, 학생들은 주변 사물을 통해 전체적인 형태를 통해 도형을 인식한다. 이때 학생들은 도형의 구성 요소를 고려하지 않으며, 도형 자체를 탐구하지 않는다. 제 2수준인 분석적 수준의 경우, 학생들은 주변 사물에서 벗어나 도형 자체를 대상으로 도형의 속성과 성질을 분석하게 된다. 제 3수준인 관계적 수준의 경우, 도형의 속성과 성질을 탐구하여 도형과 관련된 명제를 파악하게 된다. 이 수준의 학생들은 도형 사이의 관계를 파악하고 도형의 정의를 이해할 수 있다. 제 4수준인 연역적 수준의 경우, 도형과 관련된 명제를 탐구하여 명제 사이의 연역적 체계를 파악하게 된다. 이 수준의 학생들은 연역적 추론이 가능하다. 제 5수준인 논리적 법칙을 통찰하는 수준의 경우, 기하학의 체계를 탐구하여 여러 공리 체계를 이해할 수 있다. Van Hiele가 제시한 학생들의 사고 수준을

살펴보면, 학생의 수준에 따라 교사가 학생들에게 제시해야 하는 학습 내용과 그 학습 내용을 통해 학생들이 탐구해야 하는 것을 명확히 알 수 있다. 예를 들어 2수준의 학생들에게는 다양한 도형을 제시하고 이를 비교 분석하여 도형의 성질이나 속성을 탐구하게 해야 한다. 만약 1수준의 학생들에게 도형의 성질이나 속성을 탐구하게 한다면 학생들의 학습을 지연시킬 뿐만 아니라 학생들은 수업에서 무엇을 하는지 전혀 이해하지 못할 수 있다.

Van Hiele는 기하 학습을 지도하기 위한 질문-정보, 의도된 탐구, 명료화, 자유로운 탐구 또는 적용, 통합의 5단계를 제시하였다(강홍재 외, 2018). 질문-정보 단계에서 교사와 학생과의 대화를 통해 교사는 학생들의 사전 지식을 파악하고, 학생들은 공부할 내용에 대한 방향성을 얻을 수 있다. 의도된 탐구 단계에서 교사는 학생들이 도달하기를 원하는 수준에 맞는 학습 과제를 제시하고 학생들은 이를 따라 학습하게 된다. 명료화 단계에서 학생들은 자신이 학습한 내용을 개념화하고 구성한 개념을 제시하면서 토론을 실시한다. 이를 통해 학생들은 그 구조 안에서 관계를 형성한다. 자유로운 탐구 또는 적용하기 단계에서 학생들은 여러 가지 방식으로 수행할 수 있는 과제를 탐구하며 관계를 지각하고 이러한 관계가 어떻게 적용되는지 인식하게 된다. 통합 단계에서는 지금까지의 탐구 활동을 반성하고 명료하게 정리하여 새로운 사고 영역으로 내면화한다. 이러한 학습 단계를 살펴보면, 의도된 탐구 단계에서 교사의 역할이 특히 강조되며, 학생들이 의도된 탐구를 할 수 있도록 교사가 학생들의 수준에 맞는 과제를 제시하는 것이 중요함을 알 수 있다. 적절한 과제를 제시하기 위해서는 교사가 학생들에게 핵심적으로 가르쳐야 하는 교수·학습 요소가 무엇인지를 파악하는 것이 우선되어야 한다.

강완과 김현미(2010)는 도형 영역의 교수단위*를 제시하였으며, 이를 개념 알기형, 개념 적용형, 관계 알기형의 세 가지 유형으로 분류하였다. 개념 알기형은 도형의 의미 알기, 성질 발견하기, 특징 찾기 등과 같이 도형의 개념을 이해하는 것과 관련된 교수단위이다. 개념 적용형은 도형 찾기, 만들기, 그리기 등과 같이 이해한 개념을 적용하는 것과 관련된 교수단위이다. 관계 알기형은 둘 이상의 도형의 개념 사이의 관계를 알아보는 것과 관련된 교수단위이다. 교과서에서는 대체적으로 개념 알기형, 개념 적용형, 관계 알기형의 순서로 학습 내용을 제시하고 있다.

* 교수단위는 가르쳐야 할 교수 목적, 교수 목적을 달성하는데 필요한 자료, 단위 내용에서 생기는 수학적 문제, 이러한 목표를 수행하기 위한 수학적 심리적 배경 등을 포함하는 형태이다(강완, 김남준, 2010). 반면 교수·학습 요소는 수학 수업에서 규칙적으로 일어나는 필수적인 활동을 의미한다(권미선, 방정숙, 2015). 따라서 교수단위는 제시되는 교수·학습 요소보다는 큰 단위로 볼 수 있다.

2. 평면도형의 교수·학습 요소

평면도형에서 주요하게 다루어야 할 교수·학습 요소는 여러 선행연구를 기반으로 제시하였으며, 이때 교수·학습 요소는 강완과 김현미(2010)가 제시한 개념 알기형, 개념 적용형, 관계 알기형의 세 가지 유형을 반영하여 '평면도형의 개념 알기', '평면도형의 개념 적용하기', '평면도형 사이의 관계 알기'로 그룹화하여 제시하였다.

가. 평면도형의 개념 알기

평면도형의 개념 알기에는 도형의 의미 알기, 성질 발견하기, 특징 찾기와 같이 도형의 개념을 이해하는 것과 관련된 내용이 포함되며(강완, 김현미, 2010), 이에 해당하는 교수·학습 요소는 다음과 같다([표 1] 참조).

[표 1] 평면도형의 개념 알기에서의 교수·학습 요소

교수·학습 요소	주요 이론적 근거
주변 사물의 모양에 초점을 두고 평면도형을 인식하기	강완 외(2013), 방정숙(2010) Katagiri(2004) Reys 외(2015)
다양한 종류와 형태의 도형을 제시하기	김수미, 정은숙(2005) 방정숙(2010), 최수임, 김성준(2012) Clements, Sarama(2014) Rey 외(2015)
기준에 따라 평면도형을 분류하기	강완 외(2013), 방정숙(2010) Goldenberg, Clements(2014) Lehrer, Slovin(2014), Reys 외(2015)
평면도형의 성질을 비교 분석하기	강완 외(2013), 방정숙(2010) Copley(2017), Rey 외(2015)

첫째, 평면도형의 개념을 알기 위해서는 주변 사물의 모양에 초점을 두고 관찰하여 도형의 개형을 인식하는 활동이 제공되어야 한다(강완 외, 2013; 방정숙, 2010; Katagiri, 2004; Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2015). 초등학생들은 이때 도형의 구성 요소의 특징을 학습하지 않으며 전체적인 관점에서 평면도형의 개념을 점차 추상화한다. 따라서 이는 평면도형의 개념 획득을 위한 기초적인 경험이며, 평면도형의 학습에서 중요한 요소이다(강완 외, 2013; Katagiri, 2004).

둘째, 평면도형을 제시할 때는 다양한 종류와 형태의 도형을 제시해야 한다(김수미, 정은숙, 2005; 방정숙, 2010; 최수임, 김성준, 2012; Clements & Sarama, 2014; Rey 외, 2015). 다양한 도형을 제시하지 않고 전형적인 도형만을 제시할 경우, 학생들의 도형에 대한 정신적 이미지나 아이디어 역시 전형적인 도형 수준으로 제한된다. 따라서 평면도형을 제시할 때는 가능한 다양한 종류와 형태의 도형을 제시하는 것이 필요하다. 예를 들면, 평행사변형을 제시할 때는 직사각형이나 정사각형을 포함하여 다양한 방향과 크기의 사각형을 제시하는 것이 필요하다. 전형적인 예를 사용하여 학습을 실시하면 초기 학습이 빨리 이루어지는 것 같이 보이지만 추후 학습을 방해할 수 있으므로 가능한 한 빨리 더 많은 예를 제시해야 한다. 반례를 보여주고 정례와 비교하면 학생들이 모양의 중요한 속성에 집중하는 데 도움이 될 수 있다. 다양한 종류와 형태의 도형을 제시하는 것은 삼각형과 같이 다양한 예가 있는 도형의 집합을 지도할 때 특히 중요하다.

셋째, 평면도형을 학습할 때 기준에 따라 분류하는 활동이 제공되어야 한다(강완 외, 2013; 방정숙, 2010; Goldenberg & Clements, 2014; Lehrer & Slovin, 2014; Reys 외, 2015). 평면도형을 분류하는 활동을 통해 학생들은 도형에 대한 대략적인 심상을 형성하게 된다(강완 외, 2013). 여러 도형은 서로 다른 기준에 따라 다양하게 분류할 수 있으며, 그에 따라 도형 사이의 관계가 형성된다. 도형에 관한 많은 연구에서 분류 활동은 기본으로 제시하였으며, 일부 연구에서는 평면도형을 학습할 때 분류 활동이 여러 요소 가운데 매우 중요하다고 강조하기도 하였다(Goldenberg & Clements, 2014). 분류 활동은 포함적 분류와 분할적 분류로 구분할 수 있으며, 변에 길이에 따른 분류의 경우 포함적 분류가 사용되고, 각에 따른 분류는 분할적 분류가 사용되고 있다(교육부, 2018a).

마지막으로 평면도형의 개념을 형성할 때 도형의 성질을 비교하고 분석하는 활동을 제공해야 한다(강완 외 2013; 방정숙, 2010; Copley, 2017; Rey 외, 2015). 학생들이 도형을 학습할 때 도형 사이의 공통점과 차이점을 인식할 수 있어야 하며, 이때 크기와 방향성과 같이 도형의 비결정적인 속성이 아닌 변의 길이나 각의 크기와 같이 도형을 구분할 수 있는 성질을 기준으로 비교하고 분석할 수 있도록 지도해야 한다. 이러한 활동은 학생들의 평면도형에 대한 풍부한 개념 형성을 도울 수 있다.

나. 평면도형의 개념 적용하기

평면도형의 개념 적용하기에서는 평면도형 찾기, 평면도형 만들기, 평면도형 그리기와 같이 개념을 적용하는 것과 관련된 교수·학습 요소가 포함되며(강완, 김현미, 2010), 이에 해당하는 교수・학습 요소는 다음과 같다([표 2] 참조).

[표 2] 평면도형의 개념 적용하기에서의 교수·학습 요소

교수·학습 요소	주요 이론적 근거
평면도형 찾기	최수임, 김성준(2012) Clements, Sarama(2014)
평면도형 그리기	Clements, Sarama(2014) Katagiri(2004)
평면도형 만들기	Clements, Sarama(2014) Rey 외(2015)
평면도형에 대해 토론하기	방정숙(2010) Clements, Sarama(2014) Lehrer, Slovin(2014)

첫째, 평면도형의 개념을 적용하기 위해서는 평면도형을 찾아보는 활동을 제공해야 한다(최수임, 김성준, 2012; Clements & Sarama, 2014). 학생들이 도형의 정의를 명확하게 알고 있다고 할지라도 학생들이 가지고 있는 도형에 대한 개념 이미지는 전형적인 형태를 띠는 경향이 있기 때문이다(Clements & Sarama, 2014). 이러한 평면도형 찾기 활동은 실생활, 예술 작품 등 다양한 상황에서 이루어질 수 있으며, 이를 통해 학생들은 평면도형의 개념을 풍성하게 만들 수 있다.

둘째, 평면도형의 개념을 적용하기 위해서는 도형을 그리는 활동을 제공해야 한다(Clements & Sarama,

2014; Katagiri, 2004). 도형을 그려보는 활동은 학생들이 해당 평면도형을 어떻게 인식하고 있는지 알 수 있으며 교사는 이를 통해 학생들의 학습 수준을 쉽게 파악하고 지도할 수 있다. 또한 도형을 그리기 활동은 학생들이 평면도형의 개념을 명확하게 하는 데 도움이 될 수 있으며(Katagiri, 2004), 학생들이 그린 평면도형은 학생들 사이의 토론의 문제 상황으로도 사용할 수 있다.

셋째, 평면도형의 개념을 적용하기 위해서는 도형을 조작하거나 컴퓨터 프로그램을 사용하여 만들어 보는 활동이 필요하다(Clements & Sarama, 2014; Rey 외, 2015). 도형을 학습할 때는 학생들에게 다양한 흥미로운 과제를 제공해야 하며, 이때 다양한 교구 및 컴퓨터 등 여러 방법이 활용될 수 있다. 교구 조작 및 컴퓨터 프로그램 사용에 대한 경험이 학생들이 평면도형을 학습하는 데 도움을 주며, 이러한 경험들은 학생들에게 평면도형의 학습에 동기를 부여한다(Clements & Sarama, 2014).

마지막으로 평면도형의 개념 적용하기 위해서는 토론 활동이 제시될 수 있다(방정숙, 2010; Clements & Sarama, 2014; Lehrer & Slovin, 2014). 토론 활동은 학생들의 평면도형에 대한 개념을 좀 더 명확하게 해줄 수 있다. 학생들은 정례와 반례, 또는 자신이 만들거나 그린 도형을 기반으로 친구들과 다양한 토론 활동을 실시할 수 있다. 이러한 토론은 도형에 대한 언어 발달을 도울 수 있으며, Van Hiele 역시 기하 학습 단계에서 학생들이 토론 중에 자신의 언어로 묘사하고 도형에 대한 자신의 생각을 제시하면서 도형의 개념을 명료화할 수 있다고 제시하였다(강홍재 외, 2018). 특히 도형에 대한 토론 시 학생들이 비형식적인 묘사에서 정확한 수학적 용어를 사용할 수 있도록 연결하는 것이 중요하며, 이때 교사들 역시 정확한 수학적 용어를 사용하는 것이 필요하다(최수임, 김성준, 2012: Copley 2017).

다. 평면도형 사이의 관계 알기

평면도형 사이의 관계 알기에서는 둘 이상의 평면도형 사이의 관계를 알아보는 것과 관련된 교수·학습 요소가 포함되며(강완, 김현미, 2010), 이에 해당하는 교수・학습 요소는 다음과 같다([표 3] 참조).

[표 3] 평면도형 사이의 관계 알기에서의 교수·학습 요소

교수·학습 요소	주요 이론적 근거
정의와 속성을 통해 평면도형 사이의 관계 파악하기	강완 외(2013), 방정숙(2010) Chval 외(2016)
분류 활동을 통해 평면도형 사이의 관계 파악하기	Chval 외(2016) Lehrer, Slovin(2014)
평면도형 사이의 관계에 대해 토론하기	방정숙(2010) Clements, Sarama(2014) Lehrer, Slovin(2014)

첫째, 정의와 속성을 사용하여 평면도형 사이의 관계를 파악할 수 있어야 한다(강완 외, 2013; 방정숙, 2010; Chval 외, 2016). 학생들은 도형을 학습할 때 연역적으로 사고할 수 있는 기회를 제공받아야 하며, 학생들에게 연역적으로 사고할 기회가 제공되지 않으면 학생들이 다음 수준으로 발전할 수 없을 수 있다(Chval 외, 2016). 또한 도형에 따라 학생들이 보이는 Van Hiele의 기하 학습 수준이 다르게 나타날 수 있다. 예를 들어, 삼각형에서는 2단계의 수준을 보일 수 있으며 사각형에서는 1단계의 수준을 보일 수도 있는 것이다. 따라서 학생들이 다음 수준으로 발전할 수 있도록 그 수준에 맞는 사고의 기초를 만드는 것이 초등학교에서 매우 중요하다. 따라서 학생들이 도형의 정의나 속성을 사용하여 관계에 대한 자신들의 이해를 정당화할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다.

둘째, 평면도형을 분류하는 활동과 평면도형 사이의 관계를 연결하여 지도하여야 한다(Chval 외, 2016; Lehrer & Slovin, 2014). 평면도형의 분류를 통해 도형 사이의 관계가 형성된다. 따라서 평면도형 사이의 관계를 이해하기 위해서는 분류하는 활동이 필수적으로 제시되어야 한다. 학생들은 도형을 분류하기 위한 기준으로 도형의 정의나 속성을 사용할 수 있으며, 다른 범주에 속하는 도형의 속성을 확인하고 이를 이용하여 새로운 범주를 정의할 수 있어야 한다. 학생들은 이러한 계층적이고 분류적인 이해를 증명할 기회를 가져야 하며 이는 매우 가치 있는 일이다(Chval 외, 2016).

마지막으로 평면도형 사이의 관계를 알아보기 위해서는 토론 활동이 효과적이다(방정숙, 2010; Clements & Sarama, 2014; Lehrer & Slovin, 2014). 토론 활동은 학생들이 도형 사이의 관계를 명확히 하는 데 도움을

줄 수 있으며, 학생들이 도형을 분류하고 그 사이의 관계를 추측하고 알아보는 과정에서 실시할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 분석 대상

본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서 중 삼각형에 대한 2~4학년 내용을 분석하였다(교육부, 2017a, 2018b, 2018c). 2015 개정 수학 교과서 중 삼각형에 대한 차시 내용은 [표 4]와 같다. 2학년 1학기의 '⬠과 ⬡을 알아볼까요' 차시는 오각형과 육각형에 관한 내용으로 생각할 수 있으나 삼각형과 사각형의 성질에 대해 다루고 있어 분석 대상에 포함하였다. 교과서 내용 중 생각 수학, 얼마나 알고 있나요, 탐구 수학을 제외한 본 차시 내용만을 분석하였으며, 말풍선, 삽화를 포함하여 교과서에 구현된 모든 내용을 분석 대상에 포함하였다. 1학년의 경우 삼각형을 정의하지 않고 학습하여 분석 기준을 적용하기에 적합하지 않아 분석 대상에서 제외하였다.

[표 4] 삼각형에 대한 차시 내용

학년/학기	차시 내용
2학년 1학기	△을 알아볼까요
	칠교판으로 모양을 만들어 볼까요
	⬠과 ⬡을 알아볼까요
3학년 1학기	직각삼각형을 알아볼까요
4학년 2학기	삼각형을 분류해 볼까요(1)
	이등변삼각형의 성질을 알아볼까요
	정삼각형의 성질을 알아볼까요
	삼각형을 분류해 볼까요(2)
	삼각형을 두 가지 기준으로 분류해 볼까요

2. 분석 기준

본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서의 전반적인 흐름을 분석하였으며, 평면도형을 지도할 때 중점을 두어야 할 교수·학습 요소에 따라 2015 개정 수학 교과서를 분석하였다.

우선, 2015 개정 수학과 교육과정과 그에 따른 교과서의 전반적인 흐름을 분석하기 위하여 교육과정 성취기준의 교과서 구현 여부, 학년별 교과서에 제시된 차시, 각 차시에서 제시된 활동을 살펴보았다. 이를 통해 교육과정의 성취기준이 교과서 상에 적절히 구현되었는지, 교과서에서 삼각형의 교수·학습 내용이 일관성 있게 구현되었는지를 살펴보았다([표 5] 참조). 각 차시의 세부 학습 내용은 교육부(2017b, 2018a, 2018d)에 차시별로 제시된 활동명을 기반으로 하였다.

[표 5] 교육과정과 교과서 분석 기준

분석 기준	세부 내용
교육과정 성취기준의 교과서 구현	교육과정 성취기준이 교과서에 어떻게 구현되었는가?
차시의 제시	차시가 어떻게 제시되었는가?
각 차시의 활동 제시	각 차시의 활동이 어떻게 제시되었는가?

평면도형의 교수·학습 요소에 따라 2015 개정 수학 교과서를 분석하기 위하여 평면도형의 개념 알기, 평면도형의 개념 적용하기, 평면도형 사이의 관계 알기로 구분하여 어떻게 구현되었는지를 살펴보았다([표 6] 참조).

[표 6] 교수 · 학습 요소에 따른 분석 기준

	분석 기준
개념 알기	주변 사물의 모양에 초점을 두고 평면도형을 인식하는 활동을 제시하였는가?
	다양한 종류와 형태의 도형을 제시하였는가?
	기준에 따라 평면도형을 분류하는 활동을 제시하였는가?
	평면도형의 성질을 비교 분석하는 활동을 제시하였는가?
개념 적용하기	평면도형 찾는 활동을 제시하였는가?
	평면도형을 그리는 활동을 제시하였는가?
	평면도형을 만드는 활동을 제시하였는가?
	평면도형에 대해 토론하는 활동을 제시하였는가?
관계 알기	정의와 속성을 통해 평면도형 사이의 관계를 파악하는 활동을 제시하였는가?
	분류 활동을 통해 평면도형 사이의 관계를 파악하는 활동을 제시하였는가?
	평면도형 사이의 관계에 대해 토론하는 활동을 제시하였는가?

우선, 평면도형의 개념 알기의 경우, 주변 사물의 모

양에 초점을 두고 평면도형을 인식하는 활동을 제시하였는가, 다양한 종류와 형태의 도형을 제시하였는가, 기준에 따라 평면도형을 분류하는 활동을 제시하였는가, 평면도형의 성질을 비교 분석하는 활동을 제시하였는가를 기준으로 분석을 실시하였다.

평면도형의 개념 적용하기의 경우, 평면도형을 찾는 활동을 제시하였는가, 평면도형을 그리는 활동을 제시하였는가, 평면도형을 만드는 활동을 제시하였는가, 평면도형에 대해 토론하는 활동을 제시하였는가를 기준으로 분석을 실시하였다.

평면도형 사이의 관계 알기의 경우, 정의와 속성을 통해 평면도형 사이의 관계를 파악하는 활동을 제시하였는가, 분류 활동을 통해 평면도형 사이의 관계를 파악하는 활동을 제시하였는가, 평면도형 사이의 관계에 대해 토론하는 활동을 제시하였는가를 기준으로 분석을 실시하였다.

IV. 연구 결과

1. 삼각형에 대한 교육과정 및 교과서 분석

2015 개정 수학과 교육과정의 2~4학년에서는 삼각형을 정의하고 여러 가지 삼각형을 학습한다([표 7] 참조). 이때 삼각형을 변의 길이에 따라 분류하는 활동을 통해 이등변삼각형과 정삼각형을 학습하며, 각의 크기에 따라 분류하는 활동을 통해 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 학습한다.

삼각형에 대한 교육과정 내용과 교과서에 제시된 차시 학습 내용을 살펴보면([표 7], [표 8] 참조), 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 '여러 가지 삼각형'에 대한 내용은 교과서에 모두 구현되어 있음을 알 수 있다. 하지만 교육과정에 제시되지 않은 삼각형의 성질이 교과서에서 제시되어 있어 삼각형에 관련된 교육과정을 살펴볼 필요가 있다. 또한 사각형의 성질은 교육과정에 제시되어 있어 함께 살펴볼 필요가 있다. 사각형의 성질에 대하여 2015 개정 수학과 교육과정에서는 다음과 같이 제시하고 있다.

- 성취기준: [4수02-10] 여러 가지 모양의 사각형에 대한 분류 활동을 통하여 직사각형, 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모를 알고, 그 성질을 이해한다(교육부, 2015, p.17).”
- 교수·학습 방법 및 유의 사항: 여러 가지 사각형의 성질은 구체적인 조작 활동을 통하여 간단한 것만 다루고, 여러 가지 사각형 사이의 관계는 다루지 않는다(교육부, 2015, p.18).”

[표 7] 삼각형에 대한 교육과정 내용

		내용
1~2학년군	성취기준	2 평면도형과 그 구성 요소 [2수02-03] 교실 및 생활 주변에서 여러 가지 물건을 관찰하여 삼각형, 사각형, 원의 모양을 찾고, 그것들을 이용하여 여러 가지 모양을 꾸밀 수 있다. [2수02-04] 삼각형, 사각형, 원을 직관적으로 이해하고, 그 모양을 그릴 수 있다. [2수02-05] 삼각형, 사각형에서 각각의 공통점을 찾아 말하고, 이를 일반화하여 오각형, 육각형을 알고 구별할 수 있다.
	교수·학습 방법 및 유의 사항	▪평면도형의 모양을 이용한 모양 꾸미기 활동에서는 스티커, 잡지에서 오려낸 모양 종이 등을 활용하게 할 수 있다. ▪삼각형, 사각형, 원은 예인 것과 예가 아닌 것을 인식하고 분류하는 활동을 통하여 직관적으로 이해하게 한다. ▪삼각형과 사각형에 대한 직관적 이해를 통하여 도형의 이름과 변 또는 꼭짓점의 개수와의 관계를 파악하고, 그 관계를 일반화하여 오각형과 육각형을 구별하여 이름 지을 수 있게 한다. 도형 영역의 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.
3~4학년군	성취기준	4 여러 가지 삼각형 [4수02-08] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 이등변삼각형, 정삼각형을 이해한다. [4수02-09] 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통하여 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이해한다.
	교수·학습 방법 및 유의 사항	▪여러 가지 삼각형과 사각형을 이름 짓는 활동을 통하여 각 도형의 정의에 대해서 학생들 스스로 사고하게 한다.

반면, 삼각형에 성질에 대해서 2015 개정 수학과 교육과정은 [표 7]과 같이 제시하고 있으며, 그 이전의 교육과정의 경우([그림 1] 참조), 6차 교육과정은 성취기준 상에 “구체물을 이용하여 각을 이해하고, 삼각형

시기	변화 내용
6차 교육과정	[성취기준] 구체물을 이용하여 각을 이해하고, 삼각형과 사각형의 간단한 성질을 알아보게 한다.
⬇	
7차 교육과정	[학습 지도상의 유의점] 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 성질을 파악할 수 있도록 한다.
⬇	
2007 개정 교육과정	[교수·학습 상의 유의점] 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 성질을 파악할 수 있게 한다.
⬇	
2009 개정, 2015 개정 교육과정	제시되지 않음

[그림 1] 삼각형의 성질에 대한 교육과정 내용

과 사각형의 간단한 성질을 알아보게 한다(교육부, 1992, p. 53).”로 제시하고 있으며, 이 내용이 변화되어 7차 교육과정은 성취기준이 아닌 여러 가지 삼각형에 대한 학습 지도상의 유의점에 “구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 성질을 파악할 수 있도록 한다(교육부, 1997, p. 27).”고 제시하고 있다. 이를 통해 7차 교육과정까지는 삼각형의 성질을 가르쳐야 하는 학습 내용으로 다루고 있음을 알 수 있다.

하지만 2007 개정 수학과 교육과정은 성취기준 중 사각형에만 성질을 이해한다는 내용을 제시하고 있으며, 삼각형과 사각형에 대한 성취기준 아래 제시된 교수·학습 상의 유의점에 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 성질을 파악할 수 있게 한다는 내용을 제시하고 있다. 이를 통해 교과서에서 확실히 사각형의 성질을 다루어야 하지만 삼각형의 성질을 다루어야 하는지에 대한 여부가 명확하지 않음을 알 수 있다.

이후 2009 개정 수학과 교육과정, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 성취기준에서도 사각형에서만 성질을 이해한다는 내용이 제시되어 있으며, 교수·학습 방법 및 유의사항에도 “여러 가지 사각형의 성질은 구체적인 조작 활동을 통하여 간단한 것만 다루고(교육부, 2015, p. 18)”라는 내용이 제시되어 있어 교과서에서 사각형의 성질을 다루도록 하고 있다.

이처럼 삼각형의 성질에 대한 내용이 삼각형과 사각형에 대한 성취기준이 분리되면서 2007 개정 수학과 교육과정에서 사라지게 된 것으로 보인다. 삼각형의 성질이 교과서에서 지속적으로 다루어진 점을 고려해

[표 8] 삼각형에 대한 차시 학습 내용

차시 학습 내용		
2-1	△을 알아볼까요	그림에서 △을 찾아보기→ 삼각형 약속하기 → 삼각형을 만들고 그리기 → 삼각형의 특징 알아보기 → 삼각형인 것과 아닌 것 구별하기 → 삼각형으로 그림 그리기
	칠교판으로 모양을 만들어 볼까요	칠교판 알아보기 → 칠교판 조각을 삼각형과 사각형으로 구별하기 → 두 조각으로 삼각형과 사각형 만들기 → 세 조각으로 삼각형과 사각형 만들기 → 칠교판으로 여러 가지 모양 만들기
	⬠과 ⬡을 알아볼까요	변의 수를 늘려가며 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 만들기 → 삼각형과 사각형의 특징을 일반화하여 ⬠과 ⬡의 이름 짓기 → 오각형과 육각형 약속하기, 그리기, 구별하기
3-1	직각삼각형을 알아볼까요	색종이를 다양한 삼각형 모양으로 잘라 보기 → 한 각이 직각인 삼각형을 찾고 이름 짓기 → 직각삼각형 약속하기 → 직각삼각형 만들고 그리기 → 생활 주변에서 직각삼각형 찾기
4-2	삼각형을 분류해 볼까요 (1)	생활에서 삼각형의 세 변 관찰하기→ 삼각형을 변의 길이에 따라 분류하기 → 이름 짓기 → 이등변삼각형과 정삼각형 약속하기 → 이등변삼각형과 정삼각형 찾기
	이등변삼각형의 성질을 알아볼까요	생활에서 삼각형의 모양 비교하기 → 이등변삼각형의 성질 알아보기 → 이등변삼각형을 그리고 세 각의 크기 재어 보기 → 각을 이용하여 이등변삼각형 그리기 → 이등변삼각형 그리기
	정삼각형의 성질을 알아볼까요	생활에서 정삼각형 찾아보기 → 정삼각형의 성질 알아보기 → 정삼각형을 그리고 각의 크기 재어 보기 → 각을 이용하여 정삼각형 그리기 → 정삼각형 그리기
	삼각형을 분류해 볼까요 (2)	생활에서 삼각형의 세 각의 크기 살펴보기 → 삼각형을 각의 크기에 따라 분류하기 → 예각삼각형과 둔각삼각형 알아보기 → 삼각형을 보고 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형 구별하기 → 점 종이에 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형 그리기
	삼각형을 두 가지 기준으로 분류해 볼까요	그림에서 삼각형 파악하기 → 삼각형을 다른 기준으로 파악하기 → 두 가지 기준으로 삼각형 분류하기 → 두 가지 기준으로 분류하여 알게 된 것 말하기

볼 때, 교육과정에서 삼각형의 성질이 의도적으로 삭제된 것이 아닐 수 있다. 혹시 의도적으로 삭제가 된 것이라면, 삼각형의 성질이 교과서에 제시될 수 있는지 여부에 대한 고민이 필요하다. 따라서 삼각형의 성질을 교육과정에 제시해야 하는지와 교육과정에 제시되어 있지 않은 내용을 교과서에서 다루고 있는 점에 대한 논의가 추가적으로 필요할 것이다.

삼각형에 대한 차시 구성을 살펴보면([표 8] 참조), 학생들은 2학년 1학기에 삼각형의 정의와 성질을 학습하며, 삼각형을 만드는 활동을 한다. 또한 3학년 1학기에 직각삼각형을 학습하며 4학년 2학기에 변의 길이에 따라 이등변삼각형과 정삼각형을 분류하고 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 이해한다. 또한 각의 크기에 따라 예각삼각형과 둔각삼각형을 분류하고 각의 크기와 변의 길이의 두 가지 기준에 의해 삼각형을 분류한다.

각 차시의 세부 활동을 살펴보면 [표 8]과 같이, 도형을 알아보는 차시는 생활에서 알아보기, 분류하기, 이름 짓기, 약속하기, 도형 만들거나 그리거나 찾기로 구성되어 있다. 반면 도형의 성질을 알아보는 차시는 생활에서 알아보기, 도형의 성질 알아보기, 도형 그리기로 구성되어 있다. 마지막으로 삼각형을 분류하는 차시는 그림에서 삼각형 파악하기, 삼각형을 다른 기준으로 파악하기, 두 가지 기준으로 삼각형 분류하기, 알게 된 것을 말하기로 구성되었으며 삼각형을 다른 기준으로 파악하는 단계에서는 친구들과 이야기해 보는 토론 활동을 제시하고 있다.

2. 삼각형에 대한 교수·학습 요소 분석

가. 삼각형의 개념 알기

첫째, 2015 개정 수학 교과서의 삼각형에 대한 모든 차시에서는 도입 시 그림을 통해 주변 사물의 모양에 초점을 두고 삼각형을 인식하는 활동을 제시하고 있으며, 일부 차시의 경우 마무리 활동으로 실제 사진에서 삼각형을 찾아보는 활동을 제시하고 있다. 예를 들어 2학년 1학기 '△을 알아볼까요' 차시의 경우 도입 활동으로 그림에서 삼각형 모양을 찾아보는 활동을 제시하고 있으며, 마무리 활동으로 주변에서 여러 가지 삼각형 모양을 찾아보는 활동을 제시하고 있다. 이러한 활동을 통해 학생들은 주변 사물에서 도형의 개형을 인식할 수 있을 것이다.

다만 대부분이 실제 상황이 아닌 그림으로 제시되어 있어, 학생들이 그림과 실제 사물을 다시 한번 연결 지어 생각해야 한다는 단점이 있을 수 있으며, 지면 관계상 교과서에서 제시할 수 있는 주변 사물의 수에 한계가 있어 학생들이 삼각형의 개형을 인식하는 폭을 넓히기에는 부족할 수 있다. 이에 평소에 학생들이 자신의 주변에서 삼각형 모양을 찾아보고 이를 수업 시간에 이야기해 보는 활동을 추가한다면 학생들이 삼각형의 개형을 인식하는데 도움이 될 것이다.

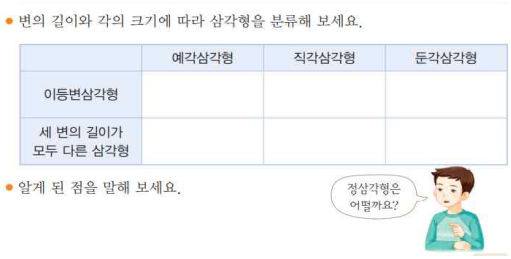
둘째, 2015 개정 수학 교과서에서는 어떠한 삼각형을 정의할 때 대부분 다양한 종류와 형태의 도형을 제시하였다. 예를 들어, 삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형을 정의할 때 직관적인 정례뿐만 아니라 비직관적인 정례(예, 옆으로 누운 삼각형, 위아래가 뒤집힌 삼각형 등)까지 적절히 제시하고 있다. 하지만 3학년 1학기의 '직각삼각형을 알아볼까요' 차시의 경우 교과서 상에 직각삼각형이 1개, 직각삼각형 모양이 1개가 제시되어 있어 학생들이 직각삼각형을 정확하게 추상화하기 위해서는 다양한 형태의 직각삼각형이 추가로 제시되어야 할 것이다.

반면, 2015 개정 수학 교과서에서는 어떠한 삼각형을 정의한 다음 다양한 예를 제시하지 않은 차시가 많다. 물론 지면의 한계상 많은 도형을 제시하지 못할 수 있으나 어떠한 삼각형의 정의를 학습하였다면 정례와 반례를 통해 학생들이 개념을 명확히 할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 박만구(2010) 역시 학생들이 삼각형 개념에 대한 예 공간을 확장하기 위해서는 예를 다양화할 필요가 있으며, 교과서의 가로 방향과 평행한 전형적인 예 뿐만 아니라 비직관적인 정례와 반례까지 적절히 제시해야 한다고 주장하고 있다.

일부 수업의 경우, 어떠한 삼각형을 정의할 때 사용하도록 교과서에 제시된 여러 삼각형을 정례와 반례로 이용할 수 있으나, 학습의 흐름상 다시 이전에 학습한 교과서 내용으로 돌아가는 것은 어려우며, 실제 교사용 지도서에서도 그렇게 지도할 수 있음을 제시하지 않고 있다. 따라서 학생들에게 어떠한 삼각형을 정의한 후에도 다양한 정례와 반례를 통해 개념을 명확히 할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

셋째, 2015 개정 수학 교과서의 삼각형에 대한 차시에서는 여러 기준에 따라 분류하는 활동을 제시하였다. 하지만 '삼각형을 두 가지 기준으로 분류해 볼까요' 차

시의 경우 각의 크기에 따라 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형으로, 변의 길이에 따라 이등변삼각형과 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형만으로 분류하도록 제시하였다. 이는 도형 사이의 포함 관계를 다루지 않기 위하여 정삼각형을 분류 기준에서 제외한 것으로 보인다. 물론 [그림 2]와 같이 활동의 마지막에 교과서 캐릭터인 슬기가 '정삼각형은 어떨까요?'하는 발문을 제공하지만 이 질문이 정삼각형은 예각삼각형 중에서 이등변삼각형에 해당하는 것을 찾기를 원하는 것인지, 전체 삼각형을 이등변삼각형, 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형, 정삼각형의 세 그룹으로 분류하기를 원하는 것인지 파악하기가 어렵다. 또한 정삼각형과 이등변삼각형을 함께 학습하였으나 마지막 차시에서는 정삼각형과 이등변삼각형을 분류하는 것이 아니라 이등변삼각형과 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형을 분류하는 것은 학생들의 이해를 방해할 수 있다. 학습한 내용과 연결되지 않는 부분에 대한 수정이 필요해 보인다.



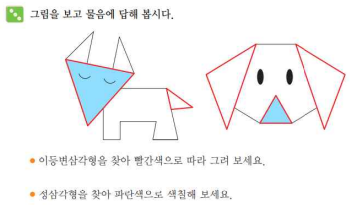
[그림 2] 삼각형의 분류에 관한 교과서 내용(교육부, 2018c, p. 41)

넷째, 2015 개정 수학 교과서에서는 정삼각형과 이등변삼각형의 성질을 각각 한 차시씩 학습하며, 이에 따라 각 도형의 성질을 분석하는 활동이 제시되어 있다. 예를 들어, 이등변삼각형의 성질을 학습할 때 2개의 이등변삼각형의 각의 크기를 재고 알게 된 점을 말해 보는 활동이 제시되어 있으며, 정삼각형의 성질을 학습할 때 3개의 정삼각형의 각의 크기를 재고 알게 된 점을 말해 보는 활동이 제시되어 있다. 다만 이등변삼각형의 경우 이등변삼각형의 성질을 귀납적으로 찾으려면 2개의 삼각형만을 비교하는 것으로는 부족해 보이며, 이등변삼각형을 추가로 제시하는 것이 필요하다. 만약 지면의 한계로 인하여 추가 제시가 불가능하다면, 이전 차시에 제시된 이등변삼각형의 각의 크기를 재어 볼 수 있도록 교사용 지도서에 추가로 제시할 수도 있을 것이다.

이렇듯 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 각각 비교해 보는 활동은 제시되어 있으나 이등변삼각형과 정삼각형의 성질을 함께 비교하는 활동은 찾아보기 어렵다. 교과서의 캐릭터를 이용하여 이등변삼각형과 정삼각형의 차이를 묻는 발문을 제공하거나 이등변삼각형과 정삼각형의 변의 길이와 각의 크기를 표 하나에 정리해 보는 활동 등을 추가적으로 제시한다면 학생들의 삼각형에 대한 개념 형성에 도움이 될 것이다.

나. 삼각형의 개념 적용하기

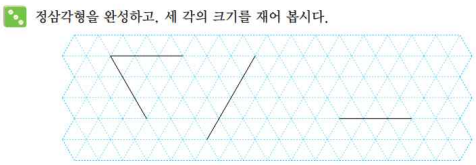
첫째, 2015 개정 수학 교과서에서는 삼각형을 찾는 활동이 대부분 삼각형을 분류하는 차시의 전개 단계에서 이루어지며, 적용하는 단계에서는 거의 찾아보기 어렵다. 학생들이 개념을 적용하기 위해서는 여러 삼각형을 그림 또는 실생활 등 여러 곳에서 찾아보는 활동이 제시되어야 한다. 특히 이등변삼각형과 정삼각형이라는 도형의 이름을 직접 사용하여 찾아보는 활동은 [그림 3]과 같이 1번 제시되어 있을 뿐이다. 따라서 학생들이 개념을 적용할 수 있도록 다양한 그림 또는 실생활에서 삼각형을 찾아보는 활동을 제시해야 할 것이다.



[그림 3] 정삼각형과 이등변삼각형 찾기(교육부, 2018a, p. 159)

둘째, 2015 개정 수학 교과서에서는 학생들이 다양한 삼각형을 그려보는 활동이 여러 번 제시되었다. 하지만 [그림 4]와 같이 많은 활동에서 이미 한 변이나 한 각의 크기가 제시되어 있어 학생들이 마음 속에 가지고 있는 심상을 확인하기에는 어려움이 있다. 이미

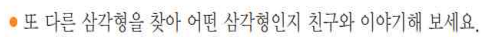
한 변이나 한 각의 크기가 제시되어 있다면, 이것이 하나의 힌트로 제공될 수 있다. 만약 삼각형의 변의 길이나 각의 크기를 결정적 성질로 인식하고 있는 학생의 경우 이렇게 삼각형의 일부인 변 또는 각을 제시하면 그 학생이 생각하고 있는 삼각형의 심상을 파악할 수 없을 것이다. 학생들에게 변의 길이와 각의 크기가 정해진 하나의 일정한 삼각형을 그리도록 하는 것이 아니라 다양하고 자유롭게 삼각형을 그려볼 수 있는 기회를 제공한다면, 학생들이 생각하는 삼각형의 심상을 파악하고, 학생들이 서로 토론할 수 있는 도구로 자신들이 그린 그림을 활용할 수 있을 것이다.



[그림 4] 정삼각형 그리기(교육부, 2018c, p. 35)

셋째, 2015 개정 수학 교과서는 학생들이 도형판에 삼각형을 만들어 보는 활동과 색종이로 삼각형을 만들어 보는 활동을 제시하고 있다. 이러한 흥미로운 활동들은 학생들이 사고를 촉진할 수 있으며, 만든 삼각형의 성질을 파악하는 활동을 통해 학생들의 도형의 개념에 대한 이해를 풍부하게 만들 수 있을 것이다. 더불어, 직각삼각형을 알아보는 차시에서는 도입에서부터 색종이로 삼각형을 만들어 한 각이 직각인 삼각형을 찾아보는 활동을 제시하고 있다. 이처럼 도형을 만들어 보는 활동은 차시의 도입부터 개념을 적용하는 것까지 연결하여 지도할 수 있다는 점에서 도형 학습에 효과적으로 사용될 수 있다.

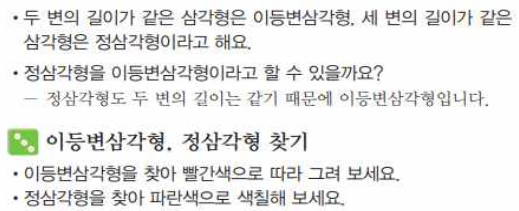
마지막으로 2015 개정 수학 교과서에서는 삼각형의 개념을 적용할 때 토론을 하도록 명확히 제시된 활동을 찾기 어려우며, 유일하게 4학년 2학기의 삼각형을 두 가지 기준으로 분류해 보는 차시에서 '또 다른 삼각형을 찾아 어떤 삼각형인지 친구와 이야기해 보세요'라고 제시하고 있다([그림 5] 참조).



[그림 5] 토론 관련 발문(교육부, 2018c, p. 40)

다. 삼각형 사이의 관계 알기

2015 개정 수학 교과서에서는 삼각형 사이의 관계 알기에 관련된 내용은 찾아보기 어렵다. 이는 현재 교육과정 상에 '여러 가지 사각형의 성질은 구체적인 조작 활동을 통하여 간단한 것만 다루고, 여러 가지 사각형 사이의 관계는 다루지 않는다.'라고 제시되어 있어, 삼각형에서도 관계는 다루지 않는 것으로 보인다. 하지만 이등변삼각형과 정삼각형의 개념을 명확히 하기 위해서는 정삼각형도 이등변삼각형이 됨을 다루어야 하며, 도형을 학습할 때 포함 관계로 분류되는 도형일 경우 이러한 부분을 전혀 노출 시키지 않을 수 없다. 예를 들어, [그림 3]에서 알 수 있듯이 학생들은 정삼각형과 이등변삼각형을 학습할 때 정삼각형이 이등변삼각형이 된다는 것을 알게 된다. 하지만 어느 수준까지 삼각형 사이의 관계를 다룰 수 있는지, 그리고 어떻게 지도해야 하는지는 교육과정, 교과서에서도 정확히 제시되어 있지 않다. 비록 교사용 지도서에 [그림 6]과 같이 '정삼각형을 이등변삼각형이라고 할 수 있을까요'라는 발문이 제시되어 있지만 교육과정 상에 언급된 사각형 사이의 관계에 대한 내용을 고려해볼 때 이렇게 지도할 수 있는지에 대한 의문이 들 수 있다.



[그림 6] 삼각형 사이의 관계에 대한 발문(교육부, 2018a, p. 159)

V. 결론 및 논의

본 연구는 평면도형의 교수·학습 요소를 추출하고, 이에 따라 삼각형에 관한 2015 개정 수학과 교육과정과 교과서를 분석하였다. 분석 결과를 토대로 삼각형에 대한 지도 방향에 대한 시사점을 제안하고자 한다.

첫째, 2015 개정 수학과 교육과정에는 삼각형의 성질에 대한 내용을 제시하고 있지 않으나 교과서에는 정삼각형의 성질과 이등변삼각형의 성질을 제시하고

있다. 이는 교육과정의 변천 과정에서 삭제되었으나 교과서에서는 삭제되지 않은 것으로 판단된다. 삼각형의 성질을 다룰지 여부를 판단하여 이를 초등학교에서 다루어야 한다면 교육과정에 제시하고, 그렇지 않다면 교과서에서 삭제하는 것이 바람직할 것이다.

둘째, 학생들이 삼각형의 개념을 정확히 알기 위해서는 다양한 정례와 반례를 제시해야 한다. 현재 교과서에서는 다양한 정례와 반례를 제시하고 있으나 일부 차시에서 다양한 정례와 반례가 제시되지 않고 있다. 예를 들어, 직각삼각형에서 제시된 도형은 모두 전형적인 직각삼각형 모양이며, 실생활 장면에서 정례와 반례를 일부 제시하고 있다. 하지만 실생활 장면을 통해 학생들이 도형의 개형을 인식하는 것과 도형을 직접 인식하는 것은 다를 수 있으며, 교과서의 실생활 장면에서도 역직각삼각형 모양은 제시되지 않고 있다. 이처럼 좀 더 세밀하게 다양한 정례와 반례를 제시하도록 노력해야 할 것이다. 또한 어떠한 삼각형의 정의를 학습한 후, 정의를 통하여 그 삼각형을 찾는 활동 또한 포함되어야 할 것이다.

셋째, 삼각형을 분류하는 기준을 명확히 제시해야 한다. 현재 이등변삼각형과 정삼각형을 학습할 때는 두 변의 길이가 같은 삼각형, 세 변의 길이가 같은 삼각형으로 나눈다. 하지만 삼각형을 분류하는 마지막 차시에서는 이등변삼각형과 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형으로 삼각형을 분류한다. 이처럼 이등변삼각형과 정삼각형의 정의와 성질을 학습할 때는 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형에 대해서는 다루지 않고, 삼각형을 분류할 때는 정삼각형을 대신하여 이등변삼각형과 세 변의 길이가 모두 다른 삼각형으로 분류하는 것은 학생들에게 혼동을 줄 수 있다. 따라서 분류하는 기준을 한 단원에서는 일관되게 학생들에게 제시해야 할 것이다.

넷째, 도형에 대한 토론 활동이 충분히 제시되어야 할 것이다. 특히 도형에 대한 토론 활동이 단순히 도형이나 도형의 이름에 대한 학생들의 선호가 아니라 도형의 정의와 성질에 초점을 두어 이루어져야 할 것이다. 현재 교과서에서 직접적으로 구현된 토론 상황은 제시된 삼각형이 어떤 삼각형인지에 대해 친구와 이야기해 보는 것으로 2~4학년 교과서 중 1개의 활동이 제시되어 있다. 도형에 대한 토론의 중요성을 강조한 여러 연구를 살펴볼 때, 교과서에 구현된 토론이 매우 적음을 알 수 있다. 반면, 도형의 이름 짓기는 매 차시 제시되어 있다. 이름 짓기에 대해서는 강완(2013)과 박경미 외(2015)에서도 문제점을 제시하였으며, 이에 2015 개정 수학과 교육과정에서도 그 비중을 수정하였는데, 여전히 그 비중이 다른 활동에 비해 높다고 보인다. 따라서 도형을 학습할 때 중요한 요소를 좀 더 강조하여 지도하고, 이름 짓기와 같은 활동은 도형의 정의를 학습하는 데 도움이 될 수 있는 방향으로 수정하는 것이 필요하다(조영미, 2019).

다섯째, 개념 적용하기에 해당하는 평면도형 찾기, 그리기, 만들기 중 찾는 활동이 삼각형과 관련된 차시에서 특히 부족한 것으로 나타났다. 특정한 삼각형을 지칭하고 이를 실생활이나 그림 등에서 찾는 활동은 거의 찾아보기 어렵다. 도형을 찾아보는 활동은 개념 적용하기에서 매우 기본이 되는 활동이므로 개념을 학습한 후 학생들이 해당 삼각형을 찾아보는 활동을 추가로 제시해야 할 것이다.

마지막으로 여러 가지 삼각형 사이의 관계를 어느 정도 다룰지에 대해 명확한 제시가 필요하다. 물론 현재 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에서 “여러 가지 사각형의 성질은 구체적인 조작 활동을 통하여 간단한 것만 다루고, 여러 가지 사각형 사이의 관계는 다루지 않는다.”라고 제시하고 있다(교육부, 2015, p. 18). 하지만 이는 사각형 사이의 관계에 대한 제시이며, 도형을 지도할 때 학생들은 여러 삼각형 중 정삼각형을 이등변삼각형이라고 할 수 있어야 하고 그런 상태가 되어야 이등변삼각형의 개념을 명확히 이해했다고 볼 수 있다. 하지만 정삼각형을 이등변삼각형이라고 말할 수 있다는 것 자체가 관계를 다룬 것이라고 생각할 수 있다. 이는 도형의 정의가 포함적 분류로 이루어졌기 때문에 도형의 관계를 전혀 다루지 않고 그 개념을 명확히 하는 것이 불가능하기 때문이다. 따라서 학생들에게 Van Hiele가 제시하는 제 3수준에서 도형의 성질을 통해 ‘정삼각형은 세 변의 길이가 같기 때문에 이등변삼각형입니다’라고 제시하는 것이 아닌 제 2수준에서 도형 자체를 탐구하여 정삼각형은 세 변의 길이가 같으므로 정삼각형도 되고, 두 변의 길이가 같으므로 이등변삼각형임을 알 수 있는 수준에서라도 지도해야 할 수 있을 것이다. 또한 학생들의 학습 경로를 살펴보면 실제 어린 학생들도 도형을 보면서 직사각형이 평행사변형임을 알 수 있었

으며(Sarama & Clements, 2009), 다른 나라에서도 도형의 분류를 통해 도형 사이의 관계를 살펴보는 것이 중요한 요소로 강조하고 있다. 이러한 점을 고려할 때 여러 가지 삼각형 사이의 관계에 대한 지도 범위에 대한 논의가 필요하다.

평면도형을 효과적으로 지도하기 위해서는 무엇을 강조하여 다루어야 하며, 그러한 활동이 어떠한 효과를 주는지를 알아야 한다. 이에 본 연구는 평면도형의 교수·학습 요소를 제시하고 그에 따라 교과서를 분석하여 삼각형의 지도 방향에 대한 시사점을 제시하였다.

참 고 문 헌

강완(2013). 2009 개정 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서 분석: 개선을 위한 네 가지 문제점. 학교수학, 15(3), 569-583.

강완, 김남준(2010). 초등학교 수학과 교육과정에 근거한 교수단위 추출 연구. 수학교육학연구, 20(1), 45-56.

강완, 김현미(2010). 초등학교 수학과 교육과정에 근거한 도형영역 교수단위 추출 연구. 수학교육학연구, 20(3), 323-338.

강완, 나귀수, 백석윤, 이경화(2013). 초등수학 교수 단위 사전. 서울: 경문사.

강홍재, 권성룡, 김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 최창우(2018). 2015 교육과정에 따른 초등수학 교수법. 동명사.

권미선, 방정숙(2015). 범자연수의 핵심 교수・학습 요소에 따른 수업 모형 개발 및 지도의 실제. 학습자중심교과교육연구, 15(11), 123-147.

교육부(1992). 국민학교 교육과정. 교육부 고시 제 1992-16호.

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15 [별책 8].

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

교육부(2017a). 수학 2-1. 서울: 천재교육.

교육부(2017b). 수학 2-1 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

교육부(2018a). 수학 4-2 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

교육부(2018b). 수학 3-1. 서울: 천재교육.

교육부(2018c). 수학 4-2. 서울: 천재교육.

교육부(2018d). 수학 3-1 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

김수미, 정은숙(2005). 범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안. 수학교육학연구, 15(4), 401-417.

김유경, 방정숙(2017). 초등수학교육 연구동향: 최근 7년간 게재된 국내 학술지 논문을 중심으로. 초등수학교육, 20(1), 19-36.

박경미 외(2015). 2015 수학과 교육과정 개정을 위한 시안 개발 정책 연구. 한국과학창의재단.

박만구(2010). 초등 수학교과서의 삼각형의 개념에 대한 예 공간의 분석. 한국학교수학회논문집, 13(1), 143-161.

방정숙(2010). 평면도형에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. 한국학교수학회논문집, 13(1), 1-21.

조영미(2019). 초등수학에서 도형의 '이름 짓기' 지도 사례 연구. 학습자중심교과교육연구, 19(23), 259-284.

최수임, 김성준(2012). 정의하기와 이름짓기를 통한 도형의 이해 고찰: 초등학교 4학년 도형 영역을 중심으로. 한국학교수학회논문집, 15(4), 719-745.

Chval, K., Lannin, J., & Jones, D. (2016). *Putting essential understanding of geometry and measurement into practice 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach (2nd Ed.).* New York: NY: Routledge.

Copley, J. (2017). *Putting essential understanding of geometry and measurement into practice K-2.* Reston, VA: NCTM.

Lehrer, R. & Slovn, H. (2014). *Developing essential understanding of geometry and measurement for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Goldenberg, E. P. & Clements, D. H. (2014). *Developing essential understanding of geometry and measurement for teaching mathematics in K-2.* Reston, VA: NCTM.

Katagiri, S. (2004). *Shidou naiyou no taikeika to hyouka.* Meijitosho Shuppan corporation. 이동률, 정동권 공역 (2015). 초등학교 수학의 지도내용 체계화와 평가: 수학적인 생각을 기르기 위하여. 서울: 경문사.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping children learn mathematics (11th Ed.).* New York: John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역 (2017). *초등교사를 위한 수학과 교수법.* 서울: 경문사.

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: NY: Routledge.

Analysis for Triangles in Elementary School Curriculum and Textbook: Focusing on the Instructional Teaching and Learning Elements of 2-D Shapes

Kwon, Misun
Gokban Elementary School
Suwon, Kyunggi 16555, Korea
E-mail : annietj@naver.com

Two-dimensional shapes have a great influence on elementary school students' learning and are closely related to other content areas. Therefore, in this study, The Teaching and Learning Elements that should be taught in two-dimensional shapes were extracted from the literature. It also was analyzed that revised mathematics textbooks in the year 2015 were properly implemented with the teaching and learning elements. As a result of the analysis, in the case of Understanding The Concept, the activities in the textbooks are not able to recognize 2-D shapes which are focusing on shapes of the actual object. In the case of Classifying two-dimensional shapes according to the Criteria, the classification criteria were presented differently from what was learned in the previous course. In the aspect of Applying the Concept, the activities in order to Discuss two-dimensional shapes were not sufficient. Lastly, in view of the fact the 2015 revised curriculum is not considered with the relationship between two-dimensional shapes. For that reason, the following Knowing Relationships parts are insufficiently presented; Understanding the Relationship Between shapes through Definitions and Properties, Identifying the relationship between shapes throughout classification activities, and Discussing the relationship between shapes. Based on the analysis result of two-dimensional shapes, it is suggested that the finding of this research helps to enlarge the teaching methodology of triangles and provide educational perspectives for development in other shape areas.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : two-dimensional shapes, triangle, teaching and learning elements, elementary mathematics textbook