

## 경과시간 수업에서 제공되는 학습기회 분석: 양적 대상화를 중심으로

한채린(서울등촌초등학교, 교사)

이 연구의 목적은 초등학교 수학교실에서 시행되는 경과시간 수업에서 학생들에게 제공되는 수학 학습기회를 탐색하는 것이다. 경과시간을 도입하는 데에 있어 후속 학년과의 수학적 연결성을 갖도록 경과시간을 양적으로 대상화하려는 교사들의 노력을 문서화하고자 하였다. 이를 위해 세 초등교사의 경과시간 도입 수업을 관찰하고 내러티브 분석을 시행하였다. 그 결과, 교사들은 도구를 사용하여 학생들이 경과시간을 양적으로 접근할 수 있도록 지원하고 있었으며, 같은 도구라도 서로 다른 양적 측면을 강조하였다. 아날로그 시계의 경우 한 교사는 시계바늘의 회전 바퀴 수로 양적 대상화를 시도한 반면, 다른 교사는 시계바늘이 이동한 거리로 경과시간의 양을 표상하였다. 시간띠의 길이 속성으로 경과시간의 양을 표상하는 경우도 있었다. 결과를 바탕으로 경과시간의 수업에서 다양하게 포착된 양적 대상화 사례들의 교수학적 의미를 논의하였다.

### I. 서론

많은 초등학생들은 학교 수학에서 시간이라는 주제를 학습하는 데에 어려움을 겪는다(Earnest 2017; Earnest, Gonzales, & Plant, 2018; Kamii & Russell, 2012; Williams, 2012). 학교 교육과정에서 시간 주제는 특정 시점을 지칭하는 시각과 두 시점 간의 거리를 의미하는 시간으로 나누어지는데(한채린, 2021a), 학생들은 어떤 사건이 지속되는 기간(duration)을 의미하는 후자의 시간 개념, 경과시간 문제 해결에 있어 특히 어려움을 호소하며 이 어려움은 몇몇 선행 문헌에서도 보고된다(한채린, 2021b, 2021c; Burny, Valcke, & DeSoete, 2009; Earnest, 2017, 2019, 2021; Earnest & Chandler, 2021; Earnest et al., 2018; Han, 2020; Kamii & Russell, 2012; Monroe, Orme, & Erickson, 2002). 학생만 경과시간의 개념을 어려워하는 것은 아

니다. Kamii & Russell(2012)은 많은 교사들이 초등 수학 교육과정에서 가르치기 어려운 내용 중 하나로 경과시간을 꼽는다고 하였다. 한마디로 경과시간은 배우기도 가르치기도 어렵다는 것이다.

배우기도 가르치기도 쉽지 않은 경과시간을 학교수학에서 다루는 이유로는 시간이 일상의 한 측면이라는 점 외에도 경과시간은 속도와 변화에 관한 수많은 과학적 탐구의 기초를 제공하고(Earnest, 2017) 현상의 변화와 관련된 수학 내용과의 밀접한 연결성을 갖는다는 점(Yerushalmy & Shternberg, 2005)을 들 수 있다. 이와 같은 이유로 대부분의 국가에서는 수학과 교육과정에 경과시간을 포함하지만(e.g., 교육부, 2015; Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2012; Finnish National Board of Education, 2016; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010; 文部科學省, 2017), 경과시간의 교수·학습에 대한 연구는 여전히 여타 측정 영역의 내용들에 비해 학계의 많은 관심을 받지 못하는 편이다(Burny et al., 2009; Friedman & Laycock, 1989; Kamii & Russell, 2012; Earnest, 2017).

수학을 가르치고 배우는 일은 교사, 학생, 그리고 수학이라는 세 가지 요소들 간의 상호작용으로 구성된다(Cohen & Ball, 1999). 그러므로 경과시간의 교수·학습 상황에 대한 이해는 교사의 가르침, 학생의 배움, 경과시간 내용 간의 상호작용에 대한 진단으로부터 시작될 수 있다. 학생의 배움은 곧 교사의 가르침에 의해 결정되므로(National Research Council, 2001), 이 연구에서는 수학 수업을 구성하는 세 요소 중 교사를 중심에 놓고 살피고자 한다. 실제 교사들이 경과시간을 어떻게 가르치고 있는지를 살펴보는 일은 경과시간의 교수·학습에 얽힌 난점의 타개를 위한 시발점이 될 수 있을 것이다.

학습기회(Opportunities to learn)는 실제로 교실에서 일어나는 교사의 수업을 포착하는 다양한 접근 중 하

\* 접수일(2021년 10월 13일), 심사(수정)일(2021년 10월 21일), 게재확정일(2021년 10월 25일)  
\* MSC2000분류 : 97D40  
\* 주제어 : 경과시간, 양, 학습기회, 수학 수업

나이다. 학습기회의 조작적 정의는 여전히 모호하지만, 다수의 연구물에서 학습기회는 학생의 학습을 예측하는 최적의 지표라고 보고한다(Cai et al, 2020). 그러므로 학습기회는 경과시간 수업이 학생들의 배움에 어떤 식으로 관여할지를 살피는 효과적인 프레임이 될 수 있다. Kurz(2011)는 학습기회의 구인으로 시간, 내용, 질을 꼽는다. 학생들로 하여금 주어진 주제에 시간을 쏟게 하는 것뿐 아니라 학생들이 어떤 내용을 어떻게 배우도록 하는지가 학습기회를 결정한다는 것이다. 같은 맥락에서 경과시간을 가르치는 교사들의 수업은 이들이 경과시간의 내용에서 학생들에게 어떠한 수학적 기회를 제공하고 있는지를 통해 포착이 가능해진다. 이 연구에서는 경과시간의 수업에서 제공되는 양적 대상화의 기회를 통하여 교사들의 교수를 분석한다. 이 분석은 거의 보고된 바가 없는 실제 경과시간의 교수를 학생에게 제공되는 학습기회로 포착하여 보고한다는 점에서 의의가 있다.

본 연구는 다음의 연구 질문을 갖는다. 초등학교 수학교실에서 시행되는 경과시간 수업에서는 어떠한 학습기회가 제공되고 있는가? 질문의 답을 찾기 위해 경과시간을 가르치는 초등학교 2학년 2학기 수학교실 세 곳을 관찰하였다. 세 명의 초등교사들이 학생들이 경과시간을 양적으로 대상화할 수 있도록 만들어내는 학습기회를 분석하고자 하였다. 이를 바탕으로 경과시간의 양적 대상화 시도의 교수학적 의미를 논의한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 경과시간의 교수·학습

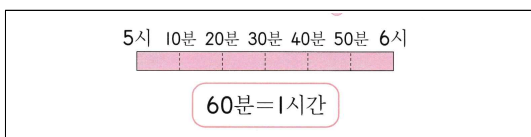
경과시간이란 어떤 사건이 지속되는 기간(duration)이자 두 시점 간의 시간적인 거리로, 시간적인 양을 측정할 결과이다. 양이란 어떤 상황의 측정가능한 속성(Thompson, 1994)으로, 양화(quantification)한다는 것은 곧 측정가능한 속성에 수치를 부여하는 작업을 뜻한다(Moore, 2013; Moore & Carlson, 2012; Thompson & Carlson, 2017). 경과시간을 이해하기 위해서는 시간을 어떤 상황의 측정가능한 속성으로 보고, 이를 양화할 수 있어야 하지만, 이 시간적인 양을 볼 수도 만질 수도 없기에 학생들은 경과시간을 양으로

받아들이는 데에 어려움을 겪는다(Earnest, 2017). 이 어려움은 시각과 시간의 학습 경로에 있어 경과시간을 학습하는 지점에서 급격한 관점의 변화가 요구된다는 점과도 연결된다. 대부분의 국가 교육과정에서는 경과시간 이전에 시계를 보고 시각 읽기를 먼저 다루는데(한채린, 2021a), 학생들은 이 과정에서 시각을 수로 나타내는 데에는 숙달될 수 있지만, 이 수가 시간적인 양을 의미한다고 보기는 어렵다. 예를 들어, 시계를 보고 2시 30분이라고 읽을 수는 있지만, 이 2시 30분이 정각으로부터 2시간 30분만큼 흘렀다는 시간적인 양도 함께 나타낸다는 사실까지 함께 받아들이기는 어려운 것이다. 그러므로 경과시간이 도입되는 시점의 학생들은 한 시점을 나타내는 수로서의 시각에 대한 관점을 넘어 양적인 대상으로서 시각을 바라보아야 하는 전환의 기로에 서게 된다.

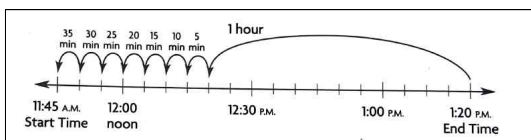
경과시간을 측정 가능한 대상으로 바라보는 양적 대상화를 할 수 없다고 해서 경과시간을 계산할 수 없는 것은 아니다. 학생들은 1시간은 60분과 같다는 두 시간 단위 간의 위계관계와 덧셈과 뺄셈 연산만으로도 경과시간의 계산을 해낼 수 있다. 그러나 세상의 한 측면인 경과시간 문제의 결과를 값(value)으로 받아들이지 못한다면 그들의 문제 해결은 양 간의 관계에 대한 추론보다는 그저 숫자 선택에 그치는(Sowder, 1988) “ungrounded debate”(Smith & Thompson, 2008, p. 110)가 될 수 있다. 연구자들은 양적인 추론이야말로 학생들이 그들 주변 세상의 특성들을 수학적으로 추론할 수 있도록 지원하며 그들의 수학적 이해를 의미 있게 연결하는 가장 중요한 능력이라고 이야기한다(Ellis, 2007; Hackenberg, 2010; Moore & Carlson, 2012; Thompson, 1994; Thompson & Carlson, 2017). 이와 같은 견지에서 경과시간을 가르치는 데에 있어 경과시간을 양적인 대상으로 바라보게 하는 일은 학생들의 향후 수학적 이해를 탄탄하게 해줄 중요한 학습 기회가 된다. Thompson(2011)은 양이 수학교육의 중심이 되어야 한다고 주장하며 “넓이나 부피는 너무나 명백하게 (학생들에게) 양으로 받아들여지는 것 같지만 사실 그 과정에서 학생들은 대상-속성-양화라는 변증법적인 과정을 통해 양을 구성해야 하며 이 과정은 당연하게 일어나지는 않는다”라고 지적하였다. 경과시간에 대한 양적 대상화는 학생들이 자연적으로 획득하는 것이 아니라 이를 가르치는 교사들의 교수학적인

지원이 있을 때에야 가능해진다는 것이다. Males & Earnest(2015) 역시 비슷한 문제의식을 가지고 미국의 초등 수학 교과서를 분석한 결과, 많은 교과서에서 시각과 시간 내용에서 그저 시계를 읽는 절차적인 면만 강조할 뿐, 세상의 한 측면을 측정할 양으로서 시간에 대한 개념적 이해 기회를 제공하는 사례는 드물다고 보고하였다.

아직까지 경과시간의 교수에 대해 보고된 바는 없지만 수학교사가 무엇을 어떤 순서로 가르칠지에 대해 가장 직접적으로 영향을 미치는 교과서를 통해 (Schmidt et al., 1997) 경과시간의 교수를 짐작해볼 수 있다. 우리나라 초등학교 수학 교과서에서는 시간띠를 통해 경과시간을 양적으로 대상화한다([그림 1] 참조). 시간띠는 단위 시간을 길이 속성으로 표상하여 띠의 길이를 통해 경과시간을 양적으로 표현하므로 학생들은 아날로그 시계 구조에 대한 이해 없이도 시간띠를 통해 경과시간을 직관적으로 이해할 수 있다. 그러나 시간띠는 큰 단위와 작은 단위의 수량적 관계에 대한 병기가 어렵고, 방향성을 갖지 않는다는 면에서 시간 단위 간의 위계관계를 반영하거나 사건의 선후를 표현하는 데에는 한계가 있다. 반면, 수직선은 눈금의 크기를 통해 서로 다른 시간 단위를 중첩하여 표현할 수 있고, 양의 덧셈과 뺄셈도 표현할 수 있다는 점에서 학생들에게 수학적으로 더 많은 기회를 제공할 수 있다(한채린, 2021a). 시와 분이라는 양을 나타내기 위한 시계판의 눈금이 수직선 아이디어에서 비롯되었으므로 시계에 내재된 수직선 메타포의 직시는 곧 양적 추론



[그림 1] 우리나라 교과서에서 경과시간 개념에 사용된 시간띠 사례(교육부, 2017, p. 88)



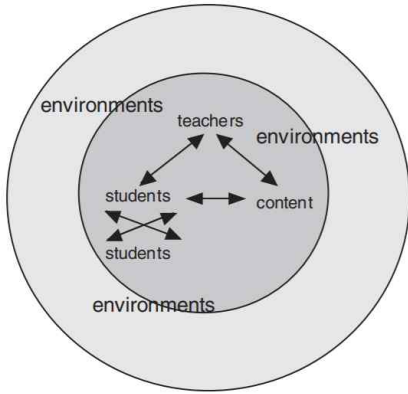
[그림 2] 미국 교과서에서 경과시간 개념에 사용된 수직선 사례(Dixon et al., 2015, p. 691)

의 기회가 된다(한채린, 2021a). 경과시간의 도입을 위해 수직선을 사용하는 사례는 미국 교과서에서 찾아볼 수 있다([그림 2] 참조). 수직선은 뛰어세기를 통해 시 단위와 분 단위의 경과시간을 함께 취급할 수 있고, 수직선 상의 방향성을 통하여 시작 시각으로부터 끝 시각까지의 경과시간 및 끝 시각으로부터 경과시간 만큼 이른 시각을 구해내는 상황까지 보다 다양한 시각적인 상황을 포괄할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 관찰한 수업에서는 모두 우리나라 수학과 교과서에서 제시되는 시간띠의 사용만 관찰되었지만 결론 및 논의에서는 수직선 도구가 제공할 수 있는 양적 대상화의 기회에 대해서도 함께 논의할 것이다.

## 2. 수업과 학습기회

수업이 가르침과 배움이 함께 일어나는 곳이라면, 학생에게 어떤 학습기회를 주었는지를 통해 교사의 가르침이 평가되는 것은 필연적이다. 이 학습기회는 학생들의 성취도를 예측하는 강력한 지표이지만 학습기회가 곧 학생들의 성취도를 의미하는 것은 아니다. 차라리 학습기회는 학생들로 하여금 문제를 해결하고, 상황을 탐색하며, 정보를 수집하고, 설명에 귀기울이며, 자료를 읽고, 추측 혹은 정당화를 하게 하는 과제에 참여하고 시간을 쏟게 만드는 제반 환경에 가깝다(National Research Council, 2001). 학습기회란 학생이 배울 기회라는 점에서는 비교적 자명한 듯 보이지만 연구자들은 학습기회의 구인에 대해 다양한 관점을 가지고 다양한 방식으로 학습기회를 측정해왔다. 한 주제에 소요된 시간을 측정하거나(Berliner, 1979), 특정 주제가 가르쳐졌는지 여부를 측정하기도 하고(Husén, 1967), 수업에서 사용된 과제의 성격에 따라 학습기회를 측정하기도 해왔다(Henningsen & Stein, 1997). Cai et al. (2020)은 학습기회를 그 구인을 통해 조작적으로 정의하기가 어려우므로, 학생들이 수업 활동에 참여하고 과제를 다루는 장면에서 부상하는 어떤 것이 학습기회라고 우회적으로 규정하기도 하였다.

교사, 학생, 내용이 수업을 이루는 세 축이라는 관점에서(Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003) 학습기회는 교사, 학생, 내용 간의 상호작용 그 자체가 될 수 있다(Cai et al., 2020). 이를 도식화하면 [그림 3]에서의 화살표들이 수업에서의 학습기회가 된다. 이 상호작용들



[그림 3] 상호작용으로서의 수업(Cohen et al., 2003, p.124)

은 서로 간에도 영향을 미치며 다층적인 상관관계를 가지므로 학습기회로서 상호작용의 양상은 복잡할 수밖에 없다. 예를 들어, 교사가 분수 내용과 상호작용하는 데에는 학생들과의 상호작용도 고려될 것이며, 또 학생들은 교사와의 상호작용 방식에 따라 분수 내용과 상호작용하게 되는 식이기 때문이다. 더불어 모든 교실에서 일어나는 상호작용을 학습기회로 정의하기 시작하면 수업의 질을 결정하는 가장 중요한 주체인 교사의 핵심적인 위치가 두드러지지 못하게 된다. 그러므로 본 연구에서는 이러한 상호작용 양상의 복잡함을 인정하고, 여러 상호작용 중에서도 교사를 중심에 놓고, 교사와 내용 간의 상호작용에 초점을 맞추어 학습 기회를 살필 것이다. 이는 교사와 내용 간 상호작용이 가진 여타 상호작용과의 연결성을 부인하는 것이 아니라, 방법론적으로 접근가능하도록 일시적으로 여타 상호작용과의 연결성을 배제한 후 부각된 상호작용에서부터 학습기회를 규명해나가기 위해서이다. 보다 구체적으로는 교사가 경과시간을 가르치기 위하여 만들어 내는 양적 대상화의 기회를 학습기회로 간주하고, 이 학습기회가 어떤 식으로 제공되는지를 살펴보고자 한다.

### III. 연구방법

이 연구는 초등학교 수학교실에서 이루어지는 경과시간 수업이라는 현상을 학생들에게 제공되는 양적 대

상화의 기회를 통해 심층적으로 분석하기 위하여 사례 연구의 방법으로 설계되었다. 사례 연구 방법은 연구 문제가 실제 현상을 설명하는 목적으로 설정된 경우에 적절하며, 현실 세계의 사건들을 '사례'를 통해 전체적이고 의미 있는 특징들로 담아내는 연구 방법이다(Yin, 2014). 이 연구가 설명하고자 하는 경과시간 교수라는 현상을 세 명의 초등교사들의 수업 사례를 통해 의미 있는 특징을 도출하여 설명한다는 점에서 사례 연구 방법이 적절할 것으로 판단하였다.

#### 1. 연구 배경 및 참여자

본 연구는 시각과 시간 단원 전반에 대한 교수·학습 프로젝트의 일부이다. 해당 프로젝트는 2018학년도 말 서울시 교육청 소속 단일 초등학교의 2학년 학급 전체를 대상으로 시각과 시간 단원의 6개 내용 차시에 대한 교사들의 수업과 소속 학생들의 수행 전반을 관찰하고 분석하였다. 본 연구는 당시에 수집된 6개 내용 차시 수업 중 경과시간의 개념을 도입하는 네 번째 차시, '1시간을 알아볼까요'에 초점을 맞춘다. 여섯 명의 담임 교사 중에서도 경과시간의 개념 도입에서 특징적인 양적 대상화 사례를 드러낸 세 교사의 수업 사례를 분석의 대상으로 삼았다.

이 연구의 참여자는 초등학교 2학년 담임 교사 세 명(A 교사, B 교사, C 교사)이다. A 교사는 12년, B 교사는 20년, C 교사는 4년의 경력을 가지고 있으며, 이들은 모두 같은 학교, 같은 학년 소속이다. 세 교사 모두 수학교육 관련 학위는 소지하지 않았지만 수학교육 및 수업 개선에 관심이 많고, 실제 비정기적인 학년 협의를 통해 수학 수업 방법 개선을 지속적으로 논의한다는 점에서 본 연구의 대상자로 적합할 것으로 보았다.

#### 2. 연구 설계

본 연구는 연구자가 세 교사의 수업 및 동학년 협의회를 직접 참관하고 사전·사후 인터뷰를 실시하는 방식으로 설계되었다. 교사들은 수업에 앞서 동학년 협의회에서 비형식적으로 경과시간 지도에 대한 의견을 나누었으며, 경과시간 지도에서 사용할 수 있는 도구 마련 방법에 관심을 가졌다. 교사들이 확보하고자

하였던 교수학적 도구는 칠판용 시간띠였는데, 이는 교과서에서 경과시간의 설명을 위해 제시되는 도구가 시간띠였기 때문이다. 칠판용 시간띠를 구하기가 어려워지자 A 교사는 시간띠를 사용하지 않겠다고 하였고, B 교사는 칠판에 그려서 사용하겠다고 하였으며, C 교사는 도화지로 시간띠를 제작하여 사용하겠다고 하였다. 수업에 앞서 사전 인터뷰를 개별적으로 실시하였다. 인터뷰는 주로 수업 계획, 도구 사용 여부, 해당 내용을 학습하는 학생들의 예상되는 어려움 등에 관한 것이었다. 경과시간에 관한 수업은 초등학교 정규 수업 시간인 40분간 실시되었다. 연구자는 교실 뒤편에서 수업을 관찰하며 필드 노트를 작성하였다. 수업 종료 후에는 경과시간 지도의 소회 및 개선점에 대한 비형식적인 개별 인터뷰를 시행하였다.

### 3. 자료 수집 및 분석

본 연구를 위해 수집된 자료는 수업 영상, 필드 노트, 동학년 협의회 및 사전·사후 교사 인터뷰 과정에서 기록한 메모이다. 이 중 필드 노트, 동학년 협의회 및 사전·사후 교사 인터뷰는 참고 자료로 활용되었다. 수업 영상은 모두 전사되었으며, 이 연구는 경과시간 수업에서 교사가 학생들에게 제공하는 학습기회에 주목하므로 수업에서 교사의 발언 뿐 아니라 교사의 제스처와 수업에서 사용된 도구도 모두 분석의 대상으로 삼는다.

양적 대상화의 기회는 다양한 방식으로 식별될 수 있지만, 이 연구에서는 내러티브 분석을 통하여 도출하였다. 내러티브 분석은 다양한 방법으로 수집된 자료를 반복해서 검토함으로써 나타나는 주제, 줄거리, 내러티브 패턴 등을 찾아내어 이를 연구 자료로 재구성하는 방법이다(Clandinin & Connelly, 2000). 수업 영상을 반복 검토하여 교사의 발언과 제스처가 경과시간을 양적으로 표현하는 구간들을 도출하였다. 이때의 '양'은 회전량, 눈금, 길이, 면적 등의 양적 속성을 갖는 모든 대상이며 경과시간을 해당 대상으로 표상하는 사례들이 도출되었다. 연구자가 식별한 양적 대상화 장면에 대한 신뢰도를 높이기 위하여 동료점검(Creswell, 2009)을 실시하였다. 동료 점검은 수학교육 전공의 대학원생에게 연구자가 식별한 상황이 경과시간을 양적으로 대상화하고 있는지에 대한 의견을 구하는 방식으

로 이루어졌다.

## IV. 결과

세 교사의 수업에 대해 내러티브 분석을 실시한 결과, 교사들은 경과시간 개념을 도입하는 데 있어 학생들이 경과시간을 양적으로 대상화할 수 있는 다양한 기회를 만들어내고 있었다. 그 기회들은 각각 시계바늘의 회전 수, 시계바늘이 이동한 거리, 시간띠의 길이로 특징된다. 아래에서는 세 교사의 수업에서 두드러진 양적 대상화 기회를 분석한다.

### 1. 시계바늘의 회전 바퀴 수로서 양적 대상화의 기회 제공

연구에 참여한 교사들은 대부분 경과시간의 개념을 도입하는 데에 시계 교구를 활용하였으며 아날로그 시계 상에서 한 시간은 긴 바늘로는 한 바퀴, 짧은 바늘로는 한 칸만큼 이동한 거리와 동치가 된다는 사실을 이용하여 경과시간을 학생들에게 가시적으로 도입하고 있었다. A 교사는 이 과정에서 시계바늘이 움직인 거리가 아니라 시계바늘이 회전한 바퀴 수를 경과시간으로 개념화하는 특징을 보였다. 시계바늘이 움직인 거리와 회전한 바퀴 수 모두 경과시간을 양으로 대상화시킨다는 점에서는 동일하지만 시계바늘이 움직인 거리의 경우 시침과 분침에 모두 적용가능한 반면, 시계바늘의 회전 바퀴 수는 분침에만 적용된다는 차이가 있다\*. 해당 차이의 목표가 1시간이 60분임을 알게 하는 데에 있고, 다루는 경과시간의 범주가 1시간 또는 2시간으로 제한되어 있었기에 A 교사는 시침의 움직임 보다는 분침의 움직임에 집중한 것으로 보인다. 실제로 A 교사는 사전 인터뷰에서 본 수업을 통해 학생들이 1시간이 60분으로 나누어짐을 이해하고, 이를 통해 시간의 흐름을 알 수 있게 되기를 기대한다고 응답한 바 있다. A 교사가 경과시간으로서 1시간을 소개하는 다음의 발췌에서 확인할 수 있다.

\* 12시간 이상일 경우에는 시침에 대해서도 회전한 바퀴 수로 경과시간을 표현할 수도 있으나, 초등학교 2학년 경과시간 내용에서는 12시간 이상의 경과시간을 다루지 않으므로 시계바늘의 회전 바퀴 수는 분침에만 해당된다고 본다.

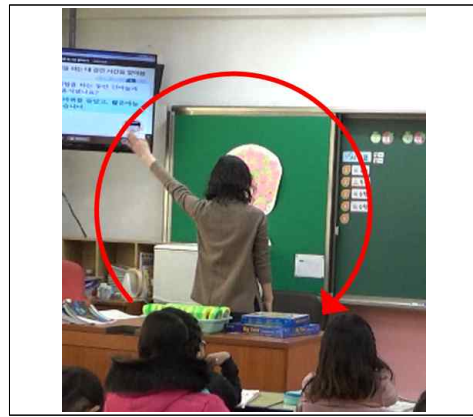


[그림 4] A 교사가 1시간을 나타내는 과정

- 1 A 교사: 자 1시에서 시작해서. ([그림 4]의 맨 왼쪽 장면)
- 2 A 교사: 긴 바늘이 12에서 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 해서 긴 바늘이 이렇게 시계 한 바퀴를 돌았어. ([그림 4]의 맨 오른쪽 장면)
- 3 A 교사: 그랬더니 작은 눈금들을 한 바퀴 돌았어.
- 4 A 교사: 근데 아까 짧은 바늘은 어디에 있었어?
- 5 학생들: 1이요.
- 6 A 교사: 어 근데 선생님이 긴 바늘을 이렇~게 작은 눈금을 따라서 돌리고 나니까 짧은 바늘은 긴 바늘 움직임에 따라서 저절로 움직여 가지고 1에서 2가 됐어요.
- 7 A 교사: 그래서 한 바퀴가 한 시간이다. 몇 바퀴 돌았어요?
- 8 학생들: 한 바퀴요.
- 9 A 교사: 좋아요.

A 교사는 아날로그 시계 상에서 1시가 2시로 바뀌는 과정에서 분침이 한 바퀴 회전함으로써 시침이 저절로 한 칸 이동했다고 설명한다. 발췌의 밑줄과 같이 A 교사의 설명에서 한 시간이라는 양의 초점은 시침의 이동이 아니라 분침의 회전 바퀴 수에 있다. A 교사가 만들어내는 양적 대상화의 기회는 분침의 이동 거리가 아니라 분침의 회전 바퀴 수에 있다고 보는 또 다른 근거는 다음 예피소드에서 찾을 수 있다. A 교사는 1시에 시작해서 2시에 끝난 사과따기 체험을 하는 데에 걸린 시간을 구하기 문제에서 다음과 같이 설명한다.

- 1 A 교사: 1시에서 2시까지 사과따기 체험을 했잖아요. 긴 바늘이 12에서 12까지 이렇~게 한 바퀴 돌았어요. ([그림 5] 장면)
- 2 A 교사: 연수가 사과따기 체험을 하는 데에 얼마나 걸린 건가요?
- 3 학생들: 한 시간.
- 4 A 교사: 한 바퀴가 한 시간이다. 몇 바퀴 돌았어요?
- 5 학생들: 한 바퀴요.
- 6 A 교사: 어 한 바퀴 돌았어. 한 바퀴.



[그림 5] A 교사가 시간을 나타내는 제스처

[그림 5]의 제스처는 A 교사가 학생들로 하여금 1 시간이라는 시간적인 양을 분침이 회전한 바퀴 수로 인지하도록 돕고 있음을 보여준다. A 교사는 이 수업에서 학생들이 1시간을 60분이라는 흐름을 통해 접근할 수 있게 되기를 원했고, 그에 따라 분침이 회전한

바퀴 수를 경과 시간으로 대응시켜 학습기회를 만들어 낸 것이다. 다만 이와 같은 학습기회는 한 바퀴에 미치지 않는 경과시간에 대한 처리는 고려하지 못하므로, 학생들의 학습은 시 단위의 경과시간에만 제한된다는 한계를 갖는다. 그러나 이전까지 시계 상의 한 지점으로 시각을 정적인 것으로 인지해온 학생들의 수준을 고려해보면, 동적인 움직임으로서 시간을 새롭게 접근하고 경과시간의 개념에 내포된 시간의 흐름을 가시화해준다는 점에서 A 교사가 만들어낸 경과시간의 양적 대상화 기회는 학생들에게 시간에 대한 보다 풍부하고 직관적인 개념화의 토대를 제공해주었다고 할 수 있다.

## 2. 시계바늘의 이동 거리로서 양적 대상화의 기회 제공

경과시간의 지도에 있어 B 교사는 아날로그 시계의 분침의 움직임에 주목하면서도 시계바늘의 회전 바퀴 수보다는 시계바늘이 이동한 거리에 보다 방점을 둔다. 한 시간을 분침 한 바퀴만큼의 움직임으로 보는 접근은 A 교사와 동일해 보이지만, B 교사는 분침이 회전한 바퀴 수가 아니라 분침이 시계판에서 지나친 눈금의 개수를 통해 한 시간을 설명한다는 점에서 A 교사와 다른 접근을 보인다. 수업 전 인터뷰에서도 B 교사는 경과시간 수업의 주안점에 대해 시각과 시각 사이를 계산하기 위해 1시간 사이에 60분이 있다는 것을 아는 것이 가장 중요하다고 밝혔는데, 이는 1시간에 대해 흐름을 강조하였던 A 교사의 진술과는 차이가

있다. 다음 발췌에서 그 차이를 확인할 수 있다.

- 1 B 교사: 자 9시에서 이번에는 자기 시계가 어떻게 움직이는지를 잘 봐야 돼. 9시에서 10시 가 보세요. 분침이 어떻게 움직이는지를 보면서 가야 되죠.
- 2 B 교사: 자 분침 보세요. ([그림 6] 장면) 한 바퀴를 돌았더니 10시가 됐어. 이게 바로 오늘 우리가 배울 1시간이야 1시간.
- 3 B 교사: 한 바퀴라 하면 1시간인데 몇 분이 지난거야?
- 4 B 교사: 한 바퀴는 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60이야. (시계판의 눈금을 손으로 가리키며) 그래서 한 시간은 몇 분으로?
- 5 학생들: 60분.
- 6 B 교사: 60분이라고 말할 수 있는거야.

B 교사는 아날로그 시계 상에서 9시에서 10시로 바뀌는 과정에서 분침이 한 바퀴 회전했기 때문에 시간이 한 시간 흘렀다고 설명한다. 하지만 B 교사의 설명에서 한 시간이라는 양의 초점은 분침이 회전한 바퀴 수가 아니라 분침이 이동한 거리에 있다. 발췌의 밑줄과 함께 A 교사가 그녀의 첫 번째 에피소드에서 분침의 궤적을 '1, 2, 3, ..., 12'라고 읽었던 점을 상기해보자. A 교사는 분침이 한 바퀴를 회전했다는 결과가 중요할 뿐 분침이 시계판의 어떤 눈금을 거쳐 한 바퀴를 회전했는지는 중요하지 않았기 때문에 분침의 궤적을



[그림 6] B 교사가 1시간을 나타내는 과정

시침의 눈금으로 읽었다. 그러나 B 교사에게는 분침이 한 바퀴를 돌면서 이동한 경로가 경과시간으로서 의미를 가지므로 분침의 궤적을 '5, 10, 15, ..., 60'으로 분침의 눈금에 따라 읽었다. B 교사는 1시간 안에 60분이 있다는 점을 강조하길 원했고, 이에 따라 분침이 이동한 거리를 경과 시간으로 대응시켜 학습기회를 만들어냈던 것이다. B 교사가 만들어내는 경과시간의 양적 대상화 초점이 분침의 회전 바퀴 수가 아니라 분침의 이동 거리에 있다고 보는 또 다른 근거는 다음에 피소드에서 찾을 수 있다. B 교사는 1시에 시작해서 2시 반까지 숙제를 하는 데에 걸린 시간을 구하는 문제에서 다음과 같이 설명한다.

- 1 B 교사: 자 시간띠는 동그라미 시계를 떠처럼 펼쳐 놓은거야. 따로. ([그림 7] 장면)
- 2 B 교사: 동그라미 시계 위에 있는 시간을 떠 위에 찍 나열한 거니까 1시, 1시 10분, 1시 20분, 1시 30분, 1시 40분, 1시 50분, 1시 60분. (시간띠를 한칸씩 색칠하며)
- 3 B 교사: 1시 60분이라고 하지 않고, 2시라고 하죠. 한 바퀴가 딱 채워졌으니까. (시간띠의 60 밑에 2시라고 쓰며)
- 4 B 교사: 한 시간은 몇 분?
- 5 학생들: 60분
- 6 B 교사: 2시 30분까지. 자 갑니다.
- 7 B 교사: 1시에서 2시까지 똑같아. 1시 10분, 1시 20분, 1시 30분, 1시 40분, 1시 50분, 1시 60분이 바로 2시지. 다시 이제 10분씩 같게요. 2시 10분, 2시 20분, 2시 30분 (시간띠를 이어서 색칠하며)



[그림 7] 시간띠를 이용한 B 교사의 설명 장면

B 교사는 분침이 이동한 경로를 옆으로 펼쳐 놓은

도구로서 시간띠를 소개하였다. 시간띠의 눈금을 순서대로 읽으면서 시간의 흐름에 따른 분침의 이동 궤적을 시간띠와 매칭시켜 보임으로써 학생들이 경과시간에 대한 양적인 추론을 할 수 있도록 지원하고 있었다. 이 때의 시간띠는 경과시간을 길이적인 속성으로 투영하기 보다는 시계판을 가로로 펼쳐, 원래의 눈금과 일대일 매칭 도구의 성격을 갖는다. B 교사는 시간띠의 눈금을 분침의 이동 경로로 대응하여 읽어냄으로써 경과시간을 분침의 이동 거리라는 양으로 일관되게 학습기회를 만들어내고 있는 것이다.

한편 시간띠는 눈에 보이지 않는 시간을 양으로 대상화하게 해주는 강력한 도구이기는 하지만, 시와 분의 진법 구조에 따라 60분에서 받아들임을 해야 하는 상황에 대한 직관적인 설명은 해주지 못한다는 한계를 지닌다. B 교사 또한 시간띠의 한계를 인지하고 있었는데, 사후 인터뷰에서 학생들이 시간띠를 통해 1시간이 60분인 걸 알더라도 1시간을 넘어가는 상황, 예를 들어 80분을 1시간 20분으로 다루는 데에는 여전히 미숙하며, 특히 1시간과 20분을 별개로 생각하는 것 같다고 회고하였다. 위의 발췌에서도 마지막 칸을 1시 60분으로 읽은 뒤, 시계 한 바퀴를 다 채웠기 때문에 2시로 바꾸어야 한다는 부연 설명을 필요로 함을 확인할 수 있다(좌측 line 3 참조).

### 3. 시간띠의 길이로서 양적 대상화의 기회 제공

시간띠는 간격이라는 길이적인 특성을 통해 시간을 양으로 받아들이도록 도울 수 있는 주요 도구(한채린, 2021a)이지만 교사에 따라 경과시간의 개념 형성에 있어 시간띠가 차지하는 비중은 달랐다. 앞서 B 교사는 분침이 이동한 경로를 옆으로 펼쳐놓은 도구로서 시간띠를 사용한 바 있다. B 교사의 설명에서 경과시간은 분침이 이동한 거리로 정의되며 시간띠는 그 이동 경로를 펼쳐서 보여주는 보조적인 역할을 수행하였다. 그러나 C 교사의 설명에서 시간띠는 경과시간의 개념에서 보다 핵심적인 위치를 차지한다. C 교사는 아날로그 시계 도구로 경과시간을 다루기보다도 전에 시간띠를 사용하여 경과시간의 개념을 도입하고 있었다. C 교사는 사전 인터뷰에서 유일하게 시간의 경과를 직선으로 나타내어 보기 쉽게 설명할 수 있다는 점에서 시간띠를 사용하겠다고 밝힌 교사이기도 하다. 다음 발



체는 C 교사가 시간띠로 경과시간을 도입하는 장면이다.



[그림 8] 시간띠를 이용한 C 교사의 경과시간 도입 장면

- 1 C 교사: 자 시계가 이렇게 종이로 원래 원이 되어있었다고 생각하면([그림 8]의 좌측 장면).
- 2 C 교사: 애를 12시를 기준으로 이렇게 잘라서 펼친 거예요. 이해되나요? ([그림 8]의 우측 장면).
- 3 C 교사: 자 봐봐. 그러면 우리가 시계가 원래 총 몇 칸이 있어? (아날로그 시계를 가리키며)
- 4 C 교사: 1부터 세보자. 한 칸, 두 칸, 세 칸, ..., 열두 칸. 열두 칸이 있어야겠지?
- 5 C 교사: 그럼 선생님이 진짜 (시간띠에) 열두 칸을 그렸는지 이제 한번 보자. (시간띠를 가리키며)
- 6 C 교사: 자 세어 볼게. 시작~ 한 칸, 두 칸, 세 칸, ..., 열두 칸.
- 7 C 교사: 똑같이 열두 칸이 있는 것 확인했어요? 자 그럼 퀴즈를 내봐야지.
- 8 C 교사: 딱 중간인 여기는(시간띠의 중간) 시계판의 어디를 가리키는 걸까요?
- 9 학생들: 6이요.
- 10 C 교사: (시간띠의 아래에 6이라고 쓴다. [그림 9] 참조)
- 11 C 교사: 여기는? (시간띠의 첫 번째 눈금을 가리키며)
- 11 학생들: 1이요.
- ...
- 33 C 교사: 그러면 여기 이만큼을 (첫번째 칸의 길이를 가리키며) 가리킬 때는 몇 분?
- 34 학생들: 5분
- 35 C 교사: 그럼 이만큼은 (두번째 칸의 길이를 가리

키며) 몇 분?

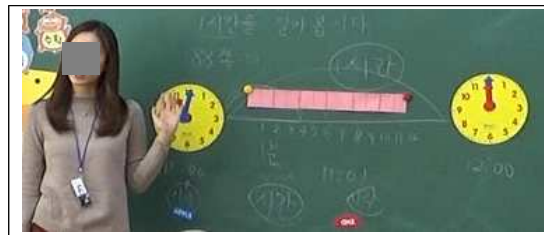
36 학생들: 10분

...

51 학생들: 60분

52 C 교사: 60분은 몇 시간?

53 학생들: 1시간

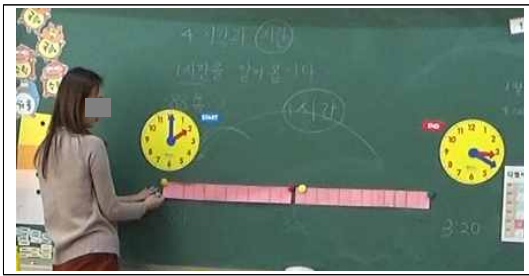


[그림 9] 시간띠를 이용한 C 교사의 설명 장면

C 교사의 설명에서 한 시간이라는 양의 초점은 시간띠의 시작부터 끝까지의 길이에 있음을 확인할 수 있다. 12 칸짜리 시간띠를 제시하고 이를 아날로그 시계판에 띄여진 숫자와 일대일로 대응하여 제시한 후, 학생들로 하여금 아날로그 시계판에서 분침을 읽었던 방식으로 시간띠의 단위 길이를 읽어내도록 지원하였다. C 교사는 1시간을 시침이나 분침의 움직임으로서가 아니라 시간띠의 길이로 경과시간을 정의하고 있는 것이다. 수학 교과서([그림 1] 참조) 및 B 교사의 시간띠([그림 7] 참조)는 10분 단위였음에 반해 C 교사의 시간띠는 5분 단위임에 주목해보자. C 교사는 아날로그 시계의 눈금을 읽는 방식 그대로 시간띠의 단위 길이를 읽어내야 한다는 규칙이 보다 직접적이고 가시적으로 드러날 수 있도록 아날로그 시계에 표시된 대로 10분이 아닌 5분 단위의 시간띠를 사용하였다. 이 시간띠 사용을 통해 C 교사는 1시간이라는 경과시간을 12개의 시간띠 단위 길이의 합이라는 양으로 대상화할 수 있는 기회를 창출하였다고 할 수 있다.

시간띠의 길이로 경과시간을 양적으로 대상화한 C 교사는 수업 전반에서 지속적으로 시간띠를 사용하여 경과시간을 접근하였다. 1시간이 초과하는 경과시간은 시간띠 두 개를 이어붙여서 나타내기도 하였다. [그림 10]은 C 교사가 2시부터 3시 20분까지의 경과시간을 구하는 문제를 설명하는 장면이다. C 교사는 2시부터 3시까지의 경과시간을 첫 번째 시간띠 전체의 길이로

표현한 뒤, 두 번째 시간띠에서 4칸의 길이를 가리키며, 시간띠 일부의 길이로 20분이라는 경과시간의 양을 표현하였다. 이와 같은 접근은 B 교사의 시간띠 사용에서 지적된 60분을 받아들임 하는 상황에 대한 직관적인 설명을 제공하지 못한다는 한계를 뛰어넘을 수 있는 하나의 해결책이 된다. 아울러 경과시간을 띠의 길이라는 양으로 시각화할 수 있는 학습기회를 제공하는 것은 학생들의 직관적인 인지를 돕는 데에 효과적일 수 있지만, 권미선(2019)의 지적과 같이 시간띠의 사용에 있어 학생들은 한 칸의 크기와 눈금 한 개를 혼동하는 경우가 많으므로, C 교사의 접근에서는 시간띠에서 경과시간은 눈금에 찍여진 숫자로 읽어낼지라도 경과시간의 크기는 눈금이 아니라 칸의 길이에 대응됨을 명확히 주시지킬 필요가 있다.



[그림 10] 1시간이 초과하는 경과시간에 대한 C 교사의 시간띠 사용 사례

## V. 결론 및 논의

이 연구에서는 ‘초등학교 수학교실에서 시행되는 경과시간 수업에서는 어떠한 학습기회가 제공되고 있는가?’ 라는 연구 질문에 응답하기 위하여 세 초등교사의 경과시간 수업을 관찰하고 학생들이 경과시간을 양적인 대상으로 바라볼 수 있도록 이들이 만들어내는 학습기회를 분석하였다. 그 결과, 교사들은 도구를 사용하여 다양한 방식으로 경과시간의 양적 대상화를 시도하고 있음이 확인되었다. 아날로그 시계 상에서 분침이 회전한 바퀴 수를 1시간으로 표상하여 경과시간의 양적 대상화를 지원하는 사례와 아날로그 시계 상에서 분침이 이동한 거리로서 시계판의 둘레를 1시간으로 표상하여 경과시간의 양적 대상화를 지원하는 사례가 식별되었다. 아날로그 시계 대신 수학 교과서에서 사용

되는 시간띠를 사용하여 시간띠의 길이 속성으로서 경과시간을 양적으로 대상화하도록 지원하는 사례도 식별되었다. 세 교사들이 경과시간을 가르치기 위해 만들어낸 학습기회들은 시간을 양으로 바라보게 한다는 강력한 이점과 함께 한계점 또한 지니고 있었다.

연구에 참여한 세 명의 교사들은 모두 경과시간의 개념을 가르치는 데에 있어 아날로그 시계이든 시간띠이든 구체적인 도구를 사용하였다. 이와 같은 현상은 경과시간의 양적 속성이 인간의 발명품이라는 점과 관련지어 생각해볼 수 있다. 시간은 인류의 삶에서 어디에나 존재해왔지만 16세기 들어 시간의 단위를 발명하고 이를 반영한 시계라는 도구가 널리 사용되기 전까지 인류는 오랜 기간 동안 시간을 양적으로 대상화할 수 있는 그 어떤 것이라고 생각하지 못하는 시기를 지나왔다(Barnett, 1998; Earnest, 2017; Cipolla, 1978). 이는 여타 측정량과는 달리 시간은 볼 수도 만질 수도 없다는 특성에서 비롯된 것이다. 같은 방식의 진화는 학생들에게도 적용된다. 시간을 처음 배우는 학생들 또한 시간을 양으로 받아들이는 일은 성장에 따라 자연스럽게 일어나기보다는 이를 표상하는 도구를 통해서야 가능해진다. 교사들은 이전까지 경험한 학생들과의 순한 상호작용을 통해 이 사실을 이미 파악하고 있었고, 그래서 공통적으로 경과시간의 개념을 가르치는 데에 있어 구체적인 도구를 사용하였던 것으로 보인다. 실제로 세 교사들은 모두 수업 후에 실시된 사후 인터뷰에서 학생들이 경과시간을 너무 어려워하기 때문에 경과시간 수업을 다시 하게 된다면 아날로그 시계나 시간띠와 같은 도구를 보다 적극적으로 사용하고 학생들에게 보다 상세히 안내하고 싶다고 밝힌 바 있다.

도출된 양적 대상화의 기회들은 교사들이 동일한 도구일지라도 도구의 서로 다른 특성에 주목하고 있음을 보여준다. 같은 아날로그 시계에 대해서도 A 교사는 분침이 회전한 바퀴 수에 주목하였던 반면, B 교사는 분침이 이동한 거리를 주목하였고, 같은 시간띠에 대해서도 B 교사는 시계판의 눈금과 대응한 시간띠의 눈금에 주목하였던 반면, C 교사는 시간띠의 길이에 주목하였다. 이와 같은 주목들은 경과시간을 양적으로 대상화하는 데에는 나름의 이점이 있으나 동시에 후속 학습이나 개념의 확장에 있어 학생들에게 혼란을 줄 수 있음이 지적되었다. A 교사의 접근에서는 분침이 회전한 바퀴 수로 1시간을 표상할 경우, 바퀴 수가 1

에 미치지 못하는 1시간 보다 적은 경과시간 표현의 어려움이 제기되었다. B 교사의 접근에서는 시계 눈금을 가로로 펼쳐낸 상태로 분침의 이동 거리를 시간으로 표상하는 경우 60분이 1시간이 되는 상황에 대한 직관적인 설명이 어려움이 제기되었다. 마지막으로 C 교사의 접근에서는 시간띠를 통해 경과시간을 읽어나갈 경우 학생들이 시간띠의 간격과 눈금을 혼동할 가능성이 제기되었다. 제기된 지적들은 교수학적 도구를 사용할 수학적 개념의 도입이 왜 신중해야 하는지를 보여준다. 선분은 도구의 사용은 학생들에게 직관적으로 오랜 기간 동안 오개념을 갖게 하거나 후속 학습을 하는 데에 있어 인식론적 장애로 작용할 수 있다. 실질적인 수학 수업 개선을 지원하기 위해서는 학생들만큼이나 교사들 역시 도구의 다양한 측면을 수학적으로 사용할 수 있음을 인정하고 교수학적 도구 사용 사례들을 다양하게 수집하여 각 접근이 갖는 제한점에 대한 면밀한 탐색을 시행할 필요가 있다.

경과시간의 교수학적 도구 가운데 수직선은 경과시간을 양적으로 대상화하고 후속학습을 지원하는 효과적인 도구가 될 수 있다. 시와 분이라는 양을 나타내는 시계판 눈금은 본래 수직선 아이디어에서 비롯된 것이다(Earnest et al., 2018). 기하적인 간격과 대수적인 수 체계의 구조를 갖는 수직선(Earnest, 2017)은 경과시간을 길이라는 양적 속성으로 표상하면서도 서로 다른 시간 단위를 눈금의 중첩을 통해 표현할 수 있다. 이를 통해 수직선은 B 교사의 시간띠 사용에서 지적된 60분이 1시간이 되는 상황 표현의 어려움을 해결할 수 있을 뿐 아니라, C 교사의 시간띠 사용에서 지적된 시간띠의 길이 속성과 눈금 혼동의 가능성도 제거해줄 수 있다. 한채린(2021a) 또한 시각과 시간에 관한 교과서 국제 비교 분석을 통해 우리나라 교과서에서는 경과시간의 양적 추론 기회가 미흡하게 제공되고 있으며, 미국이나 일본 교과서에서처럼 수직선 메타포를 명시적으로 제시하여 학생들이 직관적으로 시간을 양으로 인지하게 할 것을 주장한 바 있다. 향후 연구에서는 수직선을 활용한 경과시간의 교수·학습의 실제적 효과를 검증하는 실증적인 연구가 시행가능할 것이다.

이 연구의 의의는 다음과 같다. 첫째, 거의 보고된 바가 없는 실제 수학교실의 경과시간 수업 장면을 보고하였다. 이를 통해 경과시간의 교수·학습에 대한 학계의 이해에 일조하였다는 데에 의의가 있다. 둘째, 경

과시간의 교수에서 사용되는 도구가 학습기회의 창출에 기여하는 바를 구체적으로 보여주었다. 이를 통해 경과시간의 교수·학습에서 도구가 학생들이 이해에 핵심적인 역할을 하며, 효과적인 교수학적 도구 사용에 대한 탐색의 필요성을 제안하였다는 데에 의의가 있다. 마지막으로, 수학 수업에서 학생들의 배움을 극대화하기 위해 교사들이 시행하는 노력을 학습기회로 포착하여 문서화하였다. 이를 통해 수업의 세 축인 교사, 학생, 내용에 있어 수업의 질을 결정하는 데에는 교사가 주요 구인임을 재확인하였다는 데에 의의가 있다.

## 참 고 문 헌

- 교육부(2015). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2015-74호 별책8). 세종: 교육부.
- 교육부(2017). 수학 2-2. 서울: (주) 천재교육.
- 권미선(2019). 시각과 시간에 대한 초등학교 2 학년 학생들의 이해 실태 조사. 수학교육학연구, 29(4), 741-760.
- 한채린(2021a). 시각과 시간에 대한 수학과 교육과정 국제 비교 연구: 한국, 일본, 호주, 미국, 핀란드를 중심으로. 초등수학교육, 24(3), 115-134.
- 한채린(2021b). 기표의 구현과 수학적 이해: 경과시간을 중심으로. 수학교육, 60(3), 249-264.
- 한채린(2021c). '몇 시 몇 분 전'으로 시각 읽기에 얽힌 수학적 활동의 탐색. 학교수학, 23(3), 457-475.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA]. (2012). *Australian Curriculum: Mathematics*. Retrieved from <http://www.australiancurriculum.edu.au/>
- Barnett, J. E. (1998). *Time's pendulum: From sundials to atomic clocks, the fascinating history of timekeeping and how our discoveries changed the world*. New York, NY: Plenum Press.
- Berliner, D. C. (1979). Tempus educare. In P. L. Peterson & H. J. Walberg (Eds.), *Research on teaching: Concepts, findings, and implications* (pp. 120 - 135). Berkeley, CA: McCutchan.
- Burny, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2009). Towards an agenda for studying learning and instruction focusing on time-related competencies

- in children. *Educational Studies*, 37(5), 481-492.
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., ... & Bakker, A. (2020). Maximizing the quality of learning opportunities for every student. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(1), 12-25.
- Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (2000). *Narrative inquiry: Experience and story in qualitative research*. San Francisco: Jossey-Bass Publisher.
- Cipolla, C. M. (1978). *Clocks and culture, 1300-1700*. New York, NY: Norton.
- Cohen, D. K., & Ball, D. L. (1999). *Instruction, capacity, and improvement* (CPRE Research Report RR 043). Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education.
- Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 119-142.
- Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Dixon, J. K., Larson, M., Burger, E. B., Sandoval-Martinez, M. E., & Leinwand, S. J. (2015). *Go math! grade 4 volume 2: Student edition*. Orlando, FL: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
- Earnest, D. (2017). Clock work: How tools for time mediate problem solving and reveal understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(2), 191-223.
- Earnest, D. (2019). The invisible quantity: time intervals in early algebra/La cantidad invisible: los intervalos de tiempo en el álgebra temprana. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 664-720.
- Earnest, D. (2021). About time: Syntactically-guided reasoning with analog and digital clocks. *Mathematical Thinking and Learning*, <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1881703>
- Earnest, D., & Chandler, J. (2021). Making time: words, narratives, and clocks in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 52(4), 407-443.
- Earnest, D., Gonzales, A. C., & Plant, A. M. (2018). Time as a measure: Elementary students positioning the hands of an analog clock. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 188-214.
- Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- Finnish National Board of Education (2016). *National core curriculum for basic education 2014*. Helsinki, Finland: Author.
- Friedman, W. J., & Laycock, F. (1989). Children's analog and digital clock knowledge. *Child Development*, 60(2), 357-371.
- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383-432.
- Han, C. (2020). *Making sense of time-telling classroom: Interplay of cognition, instruction, and tools*. Unpublished doctoral dissertation, Seoul National University.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
- Husén, T. (Ed.). (1967). *International study of achievement in mathematics: A comparison of twelve countries (Vol. I)*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Kamii, C., & Russell, K. A. (2012). Elapsed time: Why is it so difficult to teach? *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 296-315.
- Kurz, A. (2011). Access to what should be taught and will be tested: Students' opportunity to learn the intended curriculum. In S. N. Elliott, R. J.

- Kettler, P. A. Beddow, & A. Kurz (Eds.), *The handbook of accessible achievement tests for all students: Bridging the gaps between research, practice, and policy* (pp. 99-129). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9356-4\\_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9356-4_6)
- Males, L. M., & Earnest, D. (2015, April). Opportunities to learn time measure in elementary curriculum materials. In D. Earnest, L. M. Males, C. Rumsey, & R. Lehrer (Discussants), *The measurement of time: Cognition, instruction, and curricula*. Symposium conducted at the 2015 Research Conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, MA.
- Monroe, E. E., Orme, M. P., & Erickson, L. B. (2002). Links to literature: working cotton: Toward an understanding of time. *Teaching Children Mathematics*, 8(8), 475-479.
- Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225-245. doi:10.1007/s10649-012-9450-6
- Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 48-59.
- National Governors Association [NGA] Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [CCSSO] (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Authors.
- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Smith, J. P., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In D. W. Carraher, J. J. Kaput, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 7, 227-238.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education: Issues in mathematics education* (pp. 21-44). Providence, RI, USA: American Mathematical Society.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *WISDOMe Monographs: Vol. 1. New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (pp. 33-57). Laramie, WY, USA: University of Wyoming.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Williams, R. F. (2012). Image schemas in clock-reading: Latent errors and emerging expertise. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 216-246.
- Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (2005). Chapter 3: Epistemological and cognitive aspects of time: A tool perspective. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph XIII. Medium and meaning: Video papers in mathematics education research*.
- Yin, R. K. (2014). *Case Study Research Design and Methods (5th ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- 文部科學省. (2017). *小學校學習指導要領*. 文部科學省.

## **Analysis of Learning Opportunities Provided in Elapsed Time Instruction: Focusing on Quantitative Objectification**

**Han, Chaereen**

Seoul Deungchon Elementary School  
Gangseo-gu Deungchon-ro 39-gil 71, Seoul, Korea, 07669  
E-mail : hanchaereen@gmail.com

Seeing the elapsed time as a quantity that can be measured is quite challenging for students while making students see it is also challenging for teachers. Tuning on these challenges, this article reports on what learning opportunities elementary teachers provide when they teach elapsed time focusing on quantitative objectification. I observed three mathematics classrooms where the elapsed time was taught by three elementary teachers and did a narrative analysis on the instructions. All three teachers utilized certain tools to support students access to the elapsed time as a quantity. They appropriated various quantitative attributes of the tool. In the case of the analog clock, one teacher tried to quantification the elapsed time with the number of minute hand's turning, while the other teacher indicated the distance of minute hand's moving. One teacher represented the elapsed time with the longitudinal attribute of the time band. Standing on the findings, the didactical implications of various attempts for quantitative objectification of the elapsed time implemented were discussed.

---

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

\* Key Words : elapsed time, quantity, learning opportunities,  
mathematics instruction